



Institut: Sciences et Technologie
Numéro de série:
Numéro d'inscription: M58/2017

Département:
Mathématiques et Informatique

www.centre-univ-mila.dz

Thèse
présentée pour l'obtention du Diplôme de
Doctorat
de troisième cycle (LMD)

**Stabilité et bifurcations de quelques modèles
biologiques**

Présentée par: Kerioui Nadjah

Encadrée par: Mohammed Salah Abdelouahab

Filière: *Mathématiques*

Spécialité: *Mathématiques et Applications*

N°	Nom & Prénom	Grade	Université	Désignation
1	Hamri Nasr-Eddine	Prof	Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila	Président
2	Abdelouahab Mohammed Salah	Prof	Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila	Rapporteur
3	Halim Yacine	M.C.A	Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila	Examineur
4	Menacer Tidjani	Prof	Université Mohamed Khider Biskra	Examineur
5	Berkane Abdelhak	Prof	Université Frères Mentouri Constantine 1	Examineur
6	Zehrou Okba	Prof	Université Larbi Ben Mhidi Oum Elbouaghi	Examineur

Année universitaire: 2020/2021

ملخص:

يتعلق العمل المنجز في هذه الأطروحة بالنمذجة الرياضية لبعض الظواهر البيولوجية و الدراسة النوعية للنماذج التي تم الحصول عليها من خلال تطبيق نظرية الأنظمة الديناميكية (نظرية الاستقرار، الشكل الطبيعي، التشعبات).

قادتنا هذه الدراسة إلى بناء نموذج تفاضلي جبري من نوع فريسة مفترس مع استجابة وظيفية من نوع هولنج ثلاثة. يتكون هذا النظام من معادلتين تفاضليتين و معادلة جبرية و تم فيه وصف الجوانب البيولوجية و الاقتصادية للنظام فريسة مفترس.

تم إجراء دراسة منهجية لديناميكيات هذا النموذج من خلال اعتبار الربح الاقتصادي كمعامل للتشعب. أولاً، قمنا بفحص وجود نقاط التوازن الموجبة وفقاً للربح الاقتصادي و وجدنا أن النظام لديه عدد زوجي من نقاط التوازن الموجبة يتراوح بين 0 و 8. بالإضافة إلى ذلك، بينا أن النموذج يمكن أن يولد تشعب هوف (التغير من الحالة الثابتة إلى الحالة الدورية) حيث أن التباين في الربح الاقتصادي تسبب في زعزعة استقرار توازن هذا النظام (أصبحت حالة كل من فصيلة الفرائس و فصيلة المفترسات و جهود الحصاد غير مستقرة عندما تجاوز الدخل الاقتصادي قيمة التشعب). تم إثبات وجود هذا النوع من التشعب باستخدام نظرية الشكل العادي. أكدت لنا الدراسة التي قمنا بها أن النظام المقترح له أهمية خاصة، لأن ديناميكياته غنية جداً (العديد من الحالات الثابتة و الحالات الدورية)، بالإضافة إلى أن تنوع نقاط التوازن الموجبة و الدورات المحددة يعطي المزيد من الفرص في نظرية التحكم لاختيار الحالات التي تمثل التحكم المثالي لأداء النظام البيئي.

سمحت لنا الدراسة التي أجريناها بتسليط الضوء على أنه من الواجب على الحكومات الحفاظ على عائدات الحصاد عند مستوى مثالي من أجل الحفاظ على التنمية المستدامة للنظام البيئي للفريسة مفترس.

أخيراً، أجرينا عمليات محاكاة عددية لتوضيح وتأكيد نتائجنا النظرية.

الكلمات المفتاحية: نموذج تفاضلي جبري، نظام بيئي، حصاد، استقرار، تشعب هوف.

Abstract:

The work carried out in this thesis concerns the mathematical modeling of some biological phenomena and the qualitative study of the models thus obtained by applying the theory of dynamical systems (theory of stability, normal form, bifurcations).

This study led us to formulate an algebraic-differential system with a functional response of Holling type III, composed of two differential equations and an algebraic equation. This system describes the biological and economic aspects of a predator-prey model.

A systematic study of the dynamics of this model was carried out by considering the economic profit as a parameter of bifurcation. First, we examined the existence of the positive equilibrium points according to the economic profit and we found that the system has an even number of positive equilibrium points between 0 and 8. In addition, we have shown that the system can generate a Hopf bifurcation (change from a stationary state to a periodic state) and that the variation in the economic profit causes the destabilization of the equilibrium (the state of the prey population, the predator population, and the harvesting effort becomes unstable when the economic revenue exceeds the bifurcation value). The presence of this type of bifurcation has been proven using the theory of normal form. This shows that the proposed system is of a particular importance, because its dynamics are very rich (several stationary states and periodic states), in addition the diversity of the positive equilibrium points and limit cycles gives more opportunities in the theory control to choose the states that represent the ideal performance of the ecosystem.

The study carried out allowed us to highlight that it is important for the governments to keep the harvest revenues at an ideal level in order to maintain the sustainable development of the predator-prey ecosystem.

Finally, we performed numerical simulations to illustrate and confirm our theoretical results.

Keywords: Algebraic-Differential System, Ecosystem, Harvesting, Stability, Hopf Bifurcation.

Résumé:

Le travail réalisé dans la présente thèse porte sur la modélisation mathématique de quelques phénomènes biologiques et l'étude qualitative des modèles ainsi obtenus en appliquant la théorie des systèmes dynamiques (théorie de stabilité, forme normale, bifurcations).

Cette étude nous a conduit à construire un système algébro-différentiel avec une réponse fonctionnelle de type Holling III, composé de deux équations différentielles et une équation algébrique. Ce système décrit les aspects biologiques et économiques d'un modèle proie-prédateur.

Une étude systématique de la dynamique de ce modèle a été réalisé en considérant le profit économique comme un paramètre de bifurcation. En premier temps, nous avons examiné l'existence des points d'équilibre positifs selon le profit économique et nous avons trouvé que le système possède un nombre pair d'équilibres positifs entre 0 et 8. De plus, nous avons montré que le système peut générer une bifurcation de Hopf (changement d'un état stationnaire vers un état périodique) et que la variation du profit économique provoque la déstabilisation de l'équilibre (l'état de la population de proies, de prédateurs, et l'effort de récolte devient instables lorsque le revenu économique dépasse la valeur de bifurcation). La présence de ce type de bifurcation a été prouvé en utilisant la théorie de la forme normale. Ce qui montre que le système proposé est d'une importance particulière, car sa dynamique est très riche (plusieurs d'états stationnaires, des états périodiques), en plus la diversité des équilibres positifs et des cycles limites donne plus d'occasions en théorie de contrôle pour choisir les états qui représentent la performance idéal de l'écosystème.

L'étude effectuée nous a permis de mettre en évidence qu'il est important pour les gouvernements de garder les revenus de la récolte à un niveau idéal afin de maintenir le développement durable de l'écosystème proie-prédateur.

Enfin, nous avons effectué des simulations numériques pour illustrer et confirmer nos résultats théoriques.

Mots-clés: Système Algébro-Différentiel, Ecosystème, Récolte, Stabilité, Bifurcation de Hopf.

Remerciements

Avant tout, je remercie infiniment Dieu, le tout puissant, le tout miséricordieux de m'avoir donné la santé et la volonté pour réaliser cette thèse.

Je voudrais exprimer ma profonde et sincère gratitude à mon directeur de recherche Monsieur **Mohammed Salah Abdelouahab** professeur au centre universitaire de Mila qui m'a donné l'opportunité de faire ce travail et m'a fourni de précieux conseils tout au long de la réalisation de cette recherche.

Je remercie profondément les membres du jury qui ont accepté d'examiner cette thèse, Monsieur **Naser-Eddine Hamri** professeur au centre universitaire de Mila, Monsieur **Abdelhak Berkane** professeur à l'université de Constantine 1, Monsieur **Menacer Tidjani** professeur à l'université de Mohamed Khider Biskra, Monsieur **Okba Zehrou** professeur à l'université de Larbi Ben Mhidi Oum Elbouaghi et Monsieur **Yacine Halim** maître de conférence au centre universitaire de Mila.

Je suis extrêmement reconnaissante à toute ma famille et mes proches pour leurs soutien et leurs encouragements qui m'ont aidé à mener bien ce travail.

Mes remerciements particuliers vont à mon mari qui ma supporté par son affection et pour ces encouragements. Enfin, j'adresse mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont soutenu pour mener à bien ce travail de recherche spécialement à mes amis et collègues chercheurs au laboratoire MELILAB.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à:

Mes parents,

Ma grand-mère,

Mes sœurs et mes frères,

Mon mari,

Toute ma famille,

Mes professeurs,

Mes amies,

Tous ceux qui m'ont encouragé.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Concepts de base sur les systèmes dynamiques	4
1.1 Systèmes dynamiques continus	5
1.2 Systèmes dynamiques discrets	7
1.3 Systèmes dynamiques linéaires	10
1.3.1 Systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2	12
1.3.2 Conditions de stabilité de Routh-Hurwitz	17
1.4 Systèmes dynamiques non linéaires	18
1.4.1 Analyse de stabilité d'un point fixe	19
1.4.2 Solutions périodiques des systèmes planaires	23
1.5 Théorie de bifurcation	24
2 Équations algébro-différentielles	31
2.1 Définitions et propriétés des EAD	31
2.2 Formes spéciales des équations algébro-différentielles	32
2.3 L'indice d'une équation algébro-différentielle	34
2.3.1 L'indice de Kronecker	34
2.3.2 L'indice 1 de Hessenberg	37
2.3.3 L'indice 2 de Hessenberg	38
2.3.4 L'indice 3 de Hessenberg	39
2.4 La linéarisation d'EAD le long des trajectoires	41
2.5 Analyse de stabilité des EAD semi-explicites	42
2.6 Bifurcations dans les EAD semi-explicites	44
2.6.1 Bifurcation induite par la singularité (BIS)	44
2.6.2 Bifurcation selle-nœud	45
2.6.3 Bifurcation de Hopf	45

3	Systèmes dynamiques en biologie et écologie	47
3.1	Modèles simples d'une seule espèce	47
3.1.1	Modèle de Malthus	47
3.1.2	Modèle de Verhulst-Pearl	48
3.1.3	Modèle de Gompertz	49
3.1.4	Modèle avec Effet-Allee	50
3.2	Modèles de populations en interaction	51
3.2.1	Systèmes proie-prédateur	52
3.2.2	Espèces en compétition	55
3.2.3	Modèles de mutualisme ou de symbiose	57
3.3	Modèles bio-économiques	59
3.4	Modèles de populations structurés par l'âge	65
3.5	Modèles de transmission des maladies	68
4	Stabilité et bifurcation d'un système algébro-différentiel bio-économique avec récolte de prédateurs	73
4.1	Introduction	73
4.2	Formulation du modèle	74
4.3	Analyse mathématique et résultats principaux	76
4.3.1	Existence et unicité	76
4.3.2	Positivité et délimitation	77
4.4	Existence et nombre d'équilibres positifs	78
4.5	Analyse dynamique proche de l'équilibre de coexistence	81
4.5.1	Analyse de stabilité locale	81
4.5.2	Analyse de bifurcation de Hopf	83
4.6	Simulations numériques	84
4.6.1	Nombre des équilibres intérieurs	85
4.6.2	Stabilité locale des équilibres intérieurs	85
4.6.3	Bifurcation de Hopf à travers les équilibres intérieurs	87
4.7	Conclusion	90
A	Annexe	91
A.1	Démonstration du théorème 4.5.1	91
A.2	Règle de signes de Descartes [51]	96
A.3	L'algorithme Euclidien [51]	96
	Conclusion générale	99

Table des figures

1.1	La section de Poincaré.	9
1.2	L'application de Poincaré.	10
1.3	Sous-espaces invariants.	11
1.4	Portraits de phase correspondant au cas (i) dans lequel α et β sont positifs. Coté gauche : $0 < \alpha < \beta$. Au milieu : $0 < \alpha = \beta$. Coté droite : $0 < \beta < \alpha$. . .	13
1.5	Portraits de phase correspondant au cas (i) dans lequel α et β sont négatifs. Coté gauche : $\beta < \alpha < 0$. Au milieu : $\alpha = \beta < 0$. Coté droite : $\alpha < \beta < 0$	13
1.6	Portraits de phase correspondant au cas (i) dans lequel α et β sont de signes différents. Coté gauche : $\beta < 0 < \alpha$. Coté droite : $\alpha < 0 < \beta$	14
1.7	Portraits de phase correspondant au cas (ii) auquel M a une valeur propre répétée. Coté gauche : $\alpha < 0$. Coté droite : $\alpha > 0$	14
1.8	Portraits de phase correspondant au cas (iii), auquel M a des valeurs propres complexes conjuguées	15
1.9	Diagramme de bifurcation pour le système linéaire (1.13).	17
1.10	Le flambage du tronc pour une charge lourde [23].	24
1.11	Diagramme de bifurcation selle-nœud pour le système unidimensionnel (1.27).	25
1.12	Diagramme de bifurcation transcritique pour le système unidimensionnel (1.28).	26
1.13	Diagramme de bifurcation de pitchfork supercritique pour le système unidimensionnel (1.29).	27
1.14	Diagramme de bifurcation de pitchfork souscritique pour le système unidimensionnel (1.30).	27
2.1	Pendule.	34
2.2	Lieu des valeurs propres proche des trois ensembles : (a) valeurs propres illimitées dans l'ensemble C_S , (b) valeurs propres nulles dans C_Z , et (c) valeurs propres purement imaginaires dans l'ensemble C_H	44

3.1	Le trajectoire de la population.	48
3.2	Courbes de solution de l'équation logistique avec $r = 0.1$ et $K = 10$	49
3.3	Comparaison des chroniques des solutions de l'équation logistique et celle de Gompertz avec les mêmes valeurs de $r = 0.1$ et $K = 20$	50
3.4	Chroniques de l'équation de croissance de type Effet-Allee d'une population obtenus pour $r = 0.1, K_0 = 10$ et $K = 20$	51
3.5	Solutions de modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra (3.8) avec $r = c = m = b = 1$, dans le plan de phase et en fonction du temps.	54
3.6	Cas de mutualisme faible, $c_1c_2 < 1$. Les deux populations coexistent. $c_1 = 0.1, c_2 = 0.2, \rho = 1$	58
3.7	Cas de mutualisme fort, $c_1c_2 > 1$. La croissance des populations tend vers l'infini. $c_1 = 1, c_2 = 1.5, \rho = 1$	58
3.8	Comportement des solutions soumises à une récolte à rendement constant.	61
3.9	Récolte à faible mortalité.	62
3.10	Chroniques d'une population récolté avec un effort constant H . $r = 1, K = 20$	62
3.11	Modèle de pêcherie de Gordan [46].	64
3.12	La simulation du modèle SIR (3.41).	71
4.1	Nombre des équilibres intérieurs du système (4.4) par rapport au profit économique v , pour $0 < v \leq 5$	86
4.2	Les coordonnées biologiques x_e, y_e des deux équilibres intérieurs X_{e1} et X_{e2} par rapport au profit économique v	86
4.3	Représentation de la trace Tr et le déterminant Det de la matrice Jacobienne A aux deux équilibres intérieurs X_{e1} et X_{e2} pour $v \in I_v$	87
4.4	Représentation des discriminants de X_{e1} et X_{e2} et la trace $Tr(A(X_{e1}))$ par rapport au profit économique v	87
4.5	Évolution temporelle des proies x , et le portrait de phase du système (4.4) pour $v = 0.955 < v_1^*$, montrant le comportement stable du premier point d'équilibre positif $X_{e1}(v)$ aux conditions initiales $x_0 = x_e + 0.22, y_0 = y_e, E_0 = E_e$, entouré par un cycle limite instable bifurquant γ et un comportement instable à l'extérieur de γ	88
4.6	Évolution temporelle des espèces x, y , l'effort de récolte E et le portrait de phase du système (4.4), pour $v \approx v_1^*$, indiquant que $X_{e1}(v_1^*)$ est un centre entouré d'une bande de cycles continus.	89

4.7 Évolution temporelle des espèces x , y , l'effort de récolte E et la trajectoire de phase du système (4.4) représentant un comportement instable du point d'équilibre positif $X_{e1}(v)$ pour $v = 0.961 > v_1^*$ aux conditions initiales $x_0 = x_e + 0.02$, $y_0 = y_e$, $E_0 = E_e$ 89

Introduction générale

La vie est la technologie la plus complexe dans la planète. C'est aussi la plus puissante [1]. L'homme a toujours cherché à découvrir son environnement et comprendre les phénomènes qui l'entourent afin d'améliorer les différents aspects de sa vie quotidienne en termes de nutrition, de santé, de transport, de sécurité et de protection. De plus, il fait face à des problèmes environnementaux et de santé publique les plus difficiles et il a essayé de les expliquer et bien les exploiter pour son meilleur intérêt. L'un parmi les domaines de recherches les plus fertiles est celui de la biologie mathématique qui semble avoir récemment intéressé de nombreux mathématiciens et écologistes qui essaient d'utiliser différents techniques et outils mathématiques, y compris théoriques et appliqués, pour modéliser et comprendre les phénomènes biologiques.

Malgré la perception des gens que les mathématiques et la biologie sont séparées, il y a toujours eu des modèles exceptionnels à travers lesquels les mathématiques pourraient expliquer des phénomènes biologiques complexes. L'histoire de l'utilisation des mathématiques pour expliquer les phénomènes biologiques remonte aux travaux de le mathématicien italien *Fibonacci* [2] en 1202, qui a utilisé sa suite pour expliquer la croissance d'un groupe de lapins dans des circonstances idéales. Mais depuis le travail de *Fibonacci* jusqu'aux études récentes, il y a une histoire de réalisations mathématiques dans tous les aspects de la biologie, surtout à ce moment où la théorie du chaos est entrée pour expliquer des problèmes biologiques, épidémiologiques et médicaux qui sont souvent des systèmes complexes. Généralement, les études mathématiques ont aidés non seulement à mieux comprendre les problèmes biologiques mais aussi à trouver des solutions dans certains cas comme la prédiction. Les modèles mathématiques en biologie allant des populations aux épidémies en passant par les phénomènes physiques, sont souvent exprimés en termes d'équations différentielles, d'équations aux dérivées partielles et d'équations aux différences. La raison d'utiliser ces types de modèles est que les processus biologiques sont dynamiques, changeants en fonction du temps, de l'espace ou du stade de développement. Les modèles d'équations différen-

tielles d'interactions entre les populations sont l'une parmi les applications classiques des mathématiques en biologie.

En revanche, dans la littérature, on retrouve souvent le concept d'équations algébro-différentielles (EAD). La première occurrence de ce terme se trouve dans le titre du papier de *Gear* [3] et à la même année son célèbre livre [4] où il considéra des exemples d'analyse de circuits électroniques. Les équations algébro-différentielles sont également connues sous le nom de systèmes singuliers, systèmes contraints, systèmes singulièrement perturbés, systèmes dégénérés ou systèmes d'espace d'états généralisés [5]. Ce type de systèmes est une généralisation des équations différentielles ordinaires (EDO) pour lesquelles il existe une littérature très riche à la fois pour la théorie mathématique et la solution numérique [6]. Les origines de la théorie des EAD remontent aux travaux de *Kirchhoff* en 1847 où il publie ses lois de circuits qui décrivent les propriétés de conservation des circuits électriques [7]. Après les travaux de *Kirchhoff*, les chercheurs *K. Weierstrass* et plus tard *L. Kronecker* étudièrent les systèmes singuliers et proposèrent une théorie élégante et fondamentale jusqu'à maintenant pour comprendre les propriétés spécifiques des EAD [8]. Récemment, il y a eu un grand intérêt pour les applications des équations algébro-différentielles à l'analyse d'une grande variété de systèmes pratiques qui contiennent des contraintes telles que les systèmes électriques, l'ingénierie aérospatiale, les processus chimiques, les systèmes socio-économiques et l'analyse de réseau, etc. Avec une attention particulière, la théorie des systèmes singuliers est également utilisée pour modéliser les systèmes biologiques dans le monde réel. Ils conviennent pour décrire des systèmes qui évoluent en fonction de temps. Par rapport aux systèmes différentiels ordinaires, l'avantage qu'ils offrent c'est qu'ils sont généralement plus faciles à formuler. Mais le prix payé c'est qu'ils sont plus difficiles à gérer car ils présentent une dynamique plus compliquée que les modèles différentiels ordinaires [9]. Le plus souvent, les EAD sont considérés comme des systèmes couplés d'équations différentielles ordinaires et de contraintes algébriques ou comme des champs de vecteurs sur des variétés.

L'objectif de cette thèse est de présenter et d'étudier quelques modèles biologiques classiques en utilisant la théorie des systèmes dynamiques (stabilité, bifurcations et chaos), puis de proposer des modifications sur les modèles étudiés afin de les améliorer. Dans ce contexte, nous avons organisé notre travail en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé brièvement quelques aspects fondamentaux et résultats généraux de la théorie des systèmes dynamiques. En particulier les techniques d'analyse des systèmes dynamiques, y compris l'analyse du plan de phase, la stabilité, les bifurcations et le chaos. L'objectif de ce chapitre est de donner les

éléments principaux de ces concepts de la façon la plus simple pour mieux comprendre l'application de ces notions dans le domaine qui nous concerne.

Dans le deuxième chapitre, nous avons donné une présentation élémentaire des équations algébro-différentielles et nous avons indiqué les caractéristiques importantes de ces équations. De plus, nous avons considéré les formes spéciales des EAD et nous avons introduit plusieurs concepts d'index bien connus. Enfin, nous avons présenté une analyse de stabilité des EAD semi-explicites et nous avons rappelé quelques structures de bifurcations locales de la frontière de faisabilité.

Le troisième chapitre, comprend quelques aspects mathématiques qui nous permettent de connaître les outils principaux pour modéliser la dynamique des populations en se concentrant sur certains modèles bien connus des population en évolution telle que la croissance d'une seule espèce et les interactions entre les populations (prédation, compétition et mutualisme). Une attention particulière est accordée à la modélisation des populations récoltés (pêcherie,...), des modèles économiques et des systèmes structuré par âge. Enfin, nous avons introduit quelques concepts de base de l'épidémiologie.

Dans le dernier chapitre, nous avons formulé un nouveau système algébro-différentiel bio-économique représentant les aspects biologiques et économiques. Ensuite, nous avons appliqué les techniques mathématiques et les idées de base des chapitres précédents pour comprendre le comportement du modèle, y compris l'existence des points d'équilibres et leurs nombres, la stabilité de ces points, la bifurcation de Hopf. Enfin, grâce à une simulation numérique, nous avons vérifié l'efficacité des résultats obtenus du côtés économique et biologique. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication : *"Stability and Hopf bifurcation of the coexistence equilibrium for a differential-algebraic biological economic system with predator harvesting"* [10].

Finalement, nous avons conclu cette thèse par une conclusion générale où nous avons expliqué l'efficacité des résultats obtenus. De plus, nous avons suggéré de nouvelles avenues, des améliorations pour la recherche et quelques perspectives.

Chapitre 1

Concepts de base sur les systèmes dynamiques

La dynamique est un processus évolutif temporel. Il peut être déterministe ou stochastique [11]. Le système d'équations correspondant est appelé système dynamique. La notion de système dynamique comprend un ensemble de ses états possibles (espace d'états) et une loi d'évolution de l'état en fonction du temps [12]. Généralement, un système de n équations différentielles du premier ordre dans l'espace \mathbb{R}^n est appelé un système dynamique de dimension n qui détermine le comportement temporel du processus évolutif. Deux types principaux de systèmes dynamiques sont rencontrés dans les applications : ceux pour lesquels la variable de temps est discrète ($t \in \mathbb{Z}$ or \mathbb{N}) et ceux pour lesquels elle est continue ($t \in \mathbb{R}$). Le processus en temps continu est représenté par des équations différentielles, tandis que le processus en temps discret est représenté par des équations aux différences (ou des applications).

Quelques exemples de systèmes dynamiques :

i) Le balancement d'un pendule est régi par l'équation

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0, \quad (1.1)$$

où x est l'angle du pendule, g est l'accélération en raison de la gravité et L est la longueur du pendule. Le système équivalent est non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin x. \end{cases} \quad (1.2)$$

ii) Systèmes newtoniens régis par la loi du mouvement de Newton

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}), \quad (m = \text{mass}, F = \text{Force}), \quad (1.3)$$

cette équation peut être exprimée comme un système dynamique de dimension deux dans le plan xy de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \frac{1}{m}F(x, y). \end{cases} \quad (1.4)$$

où la dynamique est un ensemble de trajectoires donnant l'évolution temporelle du mouvement.

iii) Le modèle de croissance exponentielle d'une seule population est exprimé mathématiquement par

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad \text{avec } x = x_0 \text{ à } t = t_0, \quad (1.5)$$

où $r > 0$ est le paramètre de croissance de population.

1.1 Systèmes dynamiques continus

Les systèmes dynamiques en temps-continu peuvent être décrits mathématiquement comme suit [11]

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t), \quad (1.6)$$

où $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ ($t \in I \subseteq \mathbb{R}$) est le vecteur qui représente la dynamique d'un système à temps continu et $f(x, t)$ est une fonction suffisamment régulière définie sur un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. La variable t est généralement interprété comme du temps. Le côté droit de l'équation (1.6) a une dépendance explicite du temps, dans ce cas, le système est appelé un système **non autonome**. Tandis qu'il est appelé un système **autonome** si le côté droit de (1.6) ne dépend pas du temps explicitement (i.e. les trajectoires d'un tel système ne changent pas en fonction du temps). Donc le système (1.6) devient

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.7)$$

Pour ce qui suit, nous nous intéresserons aux systèmes autonomes.

Définition 1.1.1. [11] (**Flot**) *Le processus d'évolution temporelle peut être décrit comme un flot du champ de vecteur. Mathématiquement, le flot est défini par*

$$\phi_t(x) : U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

où $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ est une fonction vectorielle régulière dépend de $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ et de $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ et satisfait l'équation :

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = f(\phi_t(x)). \quad (1.8)$$

Le flot $\phi_t(x)$ satisfait les propriétés suivantes :

$$(a) \phi_0 = Id,$$

$$(b) \phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s.$$

On donne souvent une condition initiale

$$x(0) = x_0 \in U, \quad (1.9)$$

auquel cas on cherche une solution $\phi(t, x_0)$ tel que

$$\phi(0, x_0) = x_0, \quad (1.10)$$

(parfois, nous écrivons la solution comme $x(t, x_0)$, ou simplement $x(t)$).

Théorème 1.1.1. [13] (Existence et unicité des solutions) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert de l'espace Euclidien réel, soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable et continue (C^1) et soit $x_0 \in U$. Donc, il existe un certain constant $c > 0$ et une solution unique $\phi(\cdot, x_0) : (-c, c) \rightarrow U$ satisfait l'équation différentielle (1.7) avec la condition initiale $x(0) = x_0$.

Définition 1.1.2. [13] (Orbite et portrait de phase) La fonction régulière $\phi(\cdot, x_0) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie une courbe de solutions, trajectoire, ou orbite du système continue (1.7) basé sur x_0 . L'ensemble de toutes les trajectoires qualitatives du système est appelé portrait de phase.

Définition 1.1.3. [12] (Cycle) Un cycle est une orbite périodique ou autrement dit c'est une orbite qui n'est pas un équilibre L_0 tel que chaque point $x_0 \in L_0$ satisfait $\phi(t + T_0, x_0) = \phi(t, x_0)$ avec certain $T_0 > 0$, pour toute $t \in I$.

Définition 1.1.4. [14] (Ensembles limites) Étant donné un champ de vecteur $f(x)$ par $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, le point a est dite un point ω -limite de $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ s'il existe une suite $(t_n) \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, x) = a$, et dite un point α -limite s'il existe une suite $(t_n) \rightarrow -\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, x) = a$.

L'ensemble de tous les points ω -limite de x s'appelle l'ensemble ω -limite, $L_\omega(x)$. De même $L_\alpha(x)$ s'appelle l'ensemble α -limite. En générale, l'ensemble limite $L(x)$ est l'ensemble de tous les points limites de $x \in U$.

Définition 1.1.5. [14] (Cycle limite) Un cycle limite est une orbite fermée γ tel que soit $\gamma \subseteq L_\omega(x)$ où $\gamma \subseteq L_\alpha(x)$ pour certains $x \notin \gamma$.

Définition 1.1.6. [16] (Attracteur) Un attracteur d'un système dynamique est un sous-ensemble de l'espace d'états vers lequel les orbites provenant de conditions initiales typiques tendent lorsque le temps augmente.

Définition 1.1.7. [16] (Basin d'attraction) Le bassin d'attraction $B(A)$ pour un attracteur A est l'ensemble des conditions initiales conduisant après une longue période de temps à un comportement qui s'approche de cet attracteur.

La notion de point fixe est importante pour analyser le comportement local d'un système. Il est également connu comme un point critique ou un point d'équilibre ou un point stationnaire ou un point zéro.

Définition 1.1.8. *Un point $x^* \in U$ est appelé un point fixe si $\phi(t, x^*) = x^*$ pour toute $t \in I$.*

Par conséquent pour les systèmes continus, un point fixe x^* est défini par l'annulation de champ de vecteur $f(x)$ à ce point, on écrit

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow f(x^*) = 0. \quad (1.11)$$

Un point d'équilibre correspond à une solution constante $x(t) \equiv x^*$ du système (1.7).

Stabilité des équilibres

La notion de stabilité est d'une importance théorique et pratique considérable ; elle présente le comportement du flot à la proximité d'un équilibre. Grosso modo, un point d'équilibre x^* est stable si toutes les solutions commençant proche de x^* restent au voisinage. Autrement, on dit qu'il est instable. Si en plus, les solutions à proximité tendent vers x^* lorsque $t \rightarrow +\infty$ alors, x^* est asymptotiquement stable. Des définitions précises sont données ci-dessous.

Définition 1.1.9. [17] *Un point d'équilibre x^* de l'équation (1.7) est dit stable si, pour toute donné $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, dépend de ϵ , pour chaque x_0 pour lequel $|x_0 - x^*| < \delta$, la solution $\varphi(t, x_0)$ de l'équation (1.7) quand $x_0 \rightarrow 0$ satisfait $|\varphi(t, x_0) - x^*| < \epsilon$ pour tout $t > 0$. Le point d'équilibre x^* est dit instable s'il n'est pas stable.*

Définition 1.1.10. [17] *Un point d'équilibre x^* de l'équation (1.7) est dit asymptotiquement stable s'il est stable, et en plus, il y a un $r > 0$ tel que $|\varphi(t, x_0) - x^*| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ pour toute x_0 satisfaisant $|x_0 - x^*| < r$.*

Les notions de stabilité définies ci-dessus sont de nature locale : ils ne concernent que le comportement des solutions au voisinage du point fixe x^* . Même si de telles solutions restent limitées pour tous les temps, d'autres solutions peuvent ne pas exister globalement.

1.2 Systèmes dynamiques discrets

Un système dynamique à temps discret est lié à une application discrète (donné seulement à des moments également espacés) tel que, d'un point x_0 , on peut obtenir un point x_1 qui à son tour se déplace vers x_2 et ainsi de suite. Autrement dit, $x_{n+1} = f(x_n) = f(f(x_{n-1})), \dots$ ceci est également écrit sous la forme $x_{n+1} = f(x_n) = f^2(x_{n-1}), \dots$

Applications et flots

Définition 1.2.1. [11] En générale, une application est une fonction $f : E \rightarrow E$ où E est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . L'état x_{n+1} à l'étape $(n + 1)$ s'exprime en fonction de l'étape précédente x_n par la relation

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1.12)$$

Un système discret génère un flot représenté par $\phi(\tau, x)$ dans E tel que $f(x) = \phi(\tau, x)$, $x \in E$ et τ est le temps discret de \mathbb{R} .

Portrait de phase

Les portraits de phase sont fréquemment utilisés dans un système dynamique à temps discret pour représenter graphiquement la dynamique d'une application.

Définition 1.2.2. Un portrait de phase consiste en un diagramme montrant les changements possibles de positions d'une application et les flèches indiquent le changement de positions sous les itérations de l'application.

Points fixes

Soit une équation en temps discret de la forme générale donnée par (1.12).

Définition 1.2.3. [18] Un point fixe, ou point de période un est un point auquel $x_{n+1} = f(x_n) = x_n$, pour tout n .

Points fixes stables et instables

Définition 1.2.4. Un point fixe p d'une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dit stable ou attractant s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in N_\varepsilon(p) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p$. D'autre part, un point fixe p de f est dit instable s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in N_\varepsilon(p) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$: $f^n(x) \notin N_\varepsilon(p)$ pour $n > M$, un entier positif.

Basin d'attraction

Définition 1.2.5. L'ensemble de tous les états initiaux dont les orbites convergent vers un attracteur donné d'une application s'appelle le bassin d'attraction. Le bassin d'attraction d'un point fixe p d'une application f est noté par $W^s(p)$ et est défini par

$$W^s(p) = \left\{ x : \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = p \right\}.$$

Cet ensemble est un ensemble stable du point p . L'ensemble de bassin instable est défini par

$$W^u(p) = \{x : f^n(x) \notin N_\varepsilon(p), \text{ pour tout } n > M, \text{ un entier positif}\}.$$

Section de Poincaré

La méthode des sections de Poincaré permet de construire des systèmes dynamiques discrets à partir des systèmes différentiels, ceci afin de faciliter son étude en ramenant l'analyse d'un système différentiel (temps continu) à celle d'une application (temps discret) [15].

Soit le système continu de dimension n donné par (1.7) où $\phi_t(x)$ dénote le flot correspondant à ce système. Il s'agit de déterminer les intersections successives des orbites avec un hyperplan H transverse au flot dans l'espace des phases. La séquence des points ordonnés suivant le temps constitue la section de Poincaré S :

$$S = \{H \cap \phi_t(x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Par conséquent, étant donné une orbite périodique γ passant par le point a et un

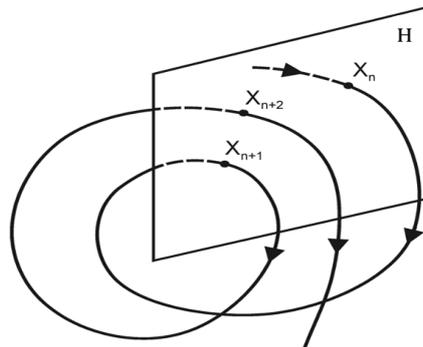


FIGURE 1.1 – La section de Poincaré.

voisinage Ω de a ouvert et connecté, l'application de Poincaré est définie par :

Définition 1.2.6. [16] La fonction $P : \Omega \rightarrow S$ s'appelle une application de Poincaré pour l'orbite γ sur la section de Poincaré S passant par le point a si :

- (1) $P(a) = a$,
- (2) $P(\Omega)$ est un voisinage de a et $P : \Omega \rightarrow P(\Omega)$ est un difféomorphisme.
- (3) Pour tout point x dans Ω , la semi-orbite positive de x intersecte S pour la première fois à $P(x)$.

Remarques 1.1. Voici quelques remarques sur la technique de l'application de Poincaré :

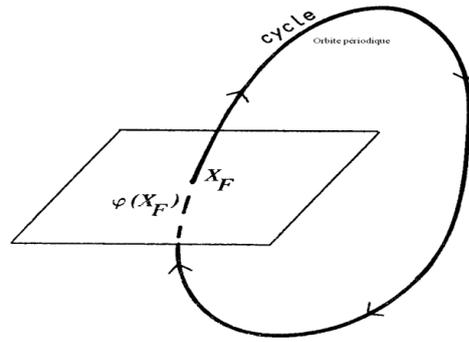


FIGURE 1.2 – L'application de Poincaré.

- 1- La dimension du système continu (1.7) est réduite d'une unité avec l'application en dimension $n - 1$.
- 2- L'application P s'appelle application de premier retour, car la méthode d'analyse consiste à considérer une orbite périodique avec des conditions initiales sur la section de Poincaré S et d'observer le point où ces orbites reviennent pour la première fois à la section S .
- 3- L'application P est utilisé pour analyser le système original (1.7) car il préserve de nombreuses propriétés de périodicité, quasi-périodicité et les orbites chaotiques du système continu original.

1.3 Systèmes dynamiques linéaires

Cette section présente une étude des systèmes des équations différentielles ordinaires linéaires de la forme :

$$\dot{x} = Ax. \quad (1.13)$$

La fonction

$$f(x) = Ax,$$

sur le côté droit de (1.13) définit une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (linéaire dans ce cas). Il est clair que la solution de ce système linéaire avec la condition initiale $x(0) = x_0$ prend la forme $x(t) = x(0)e^{At}$.

Définition 1.3.1. [13] (**Flots**) La matrice e^{tA} peut être considéré comme une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , donné n'importe quel point x_0 dans \mathbb{R}^n , $x(x_0, t) = x_0 e^{tA}$ est le point auquel la solution passant par x_0 se trouve après le temps t . On dit que e^{tA} définit un flot dans \mathbb{R}^n et que ce flot est généré par le champ de vecteur Ax définit dans \mathbb{R}^n .

Définition 1.3.2. [11] Le sous-espace $D \subset \mathbb{R}^n$ est dit invariant si tout flot commençant dans ce sous-espace restera dedans pour tous les temps futurs.

Soit $w_j = u_j + iv_j$, un vecteur propre généralisé de la matrice réelle A correspondant à la valeur propre $\lambda_j = a_j + ib_j$. On note que si $b_j = 0$ alors, $v_j = 0$. Et soit

$$B = \{u_1, \dots, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\}, \quad (1.14)$$

une base de \mathbb{R}^n (avec $n = 2m - k$).

Définition 1.3.3. [19] (*Sous-espaces invariants*) Soient $\lambda_j = a_j + ib_j$, $w_j = u_j + iv_j$ et B donné par (1.14). Alors

$$E^s = \text{Vec} \{u_j, v_j \mid a_j < 0\},$$

$$E^c = \text{Vec} \{u_j, v_j \mid a_j = 0\},$$

$$E^u = \text{Vec} \{u_j, v_j \mid a_j > 0\},$$

i.e., E^s, E^c et E^u sont des sous-espaces de \mathbb{R}^n engendrés par les parties réelles et imaginaires des vecteurs propres généralisés w_j correspondant aux valeurs propres λ_j avec des parties réelles négatives, nulles et positives respectivement. Une image schématique apparaît dans la figure 1.3, décrit les trois sous-espaces invariants.

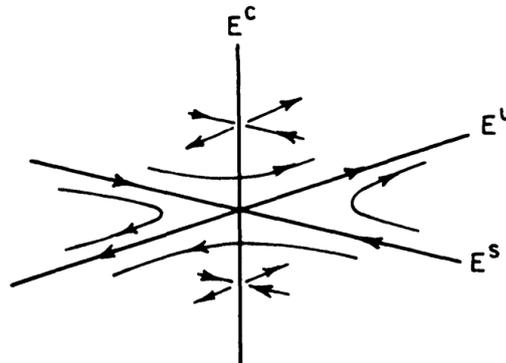


FIGURE 1.3 – Sous-espaces invariants.

Théorème 1.3.1. [11] On considère le système (1.13) où A est une matrice carrée de dimensions $n \times n$ à coefficients réelles. L'espace d'état \mathbb{R}^n peut être décomposé comme suite :

$$\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s \oplus E^c,$$

où E^u, E^s , et E^c sont les sous-espaces instable, stable, et centrale du système respectivement. De plus, ces sous-espaces sont invariants par rapport au flot.

1.3.1 Systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2

Maintenant, on restreint notre attention à une classe très importante des systèmes des équations différentielles ordinaires appelée systèmes linéaires planaires (deux variables dépendantes). Dans le cas autonome, ces systèmes prennent la forme simple :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2, \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2, \end{cases} \quad (1.15)$$

où a, b, c , et d sont des constants. On peut abrégé ce système en utilisant la matrice à coefficients A où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors le système linéaire (1.15) peut être écrit sous la forme de l'équation (1.13). Évidemment, l'origine est toujours un point fixe pour ce système linéaire. En termes de portrait de phase, cela signifie que l'origine correspond toujours à une solution d'équilibre. Pour trouver d'autres équilibres, il faut résoudre le système linéaire d'équations algébriques :

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= 0, \\ cx_1 + dx_2 &= 0. \end{aligned}$$

Proposition 1.3.1. [12] *Le système linéaire planaire $\dot{x} = Ax$ admet :*

- (i) *Un point d'équilibre unique $(0, 0)$ si $\det(A) \neq 0$.*
- (ii) *Une ligne droite de points d'équilibre si $\det(A) = 0$ (et A n'est pas la matrice nulle).*

Portrait de phase des systèmes planaires

Dans la suite, nous discuterons trois exemples canoniques de portraits de phase pour les systèmes planaires [20]. Nous savons que chaque matrice A de dimension 2×2 peut être écrit sous la forme $A = PMP^{-1}$, où M a l'une des trois formes suivantes :

- (i) Si A est diagonalisable, alors

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

- (ii) Si A n'est pas diagonalisable et a une valeur propre réelle répétée α , alors

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

- (iii) Si A admet deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, alors

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Cas (i) : On suppose que $\dot{x} = Mx$ où $M = \text{diag}\{\alpha, \beta\}$. La solution générale est $x(t) = e^{tM}x(0)$; i.e.,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\beta t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha t} \\ c_2 e^{\beta t} \end{pmatrix}.$$

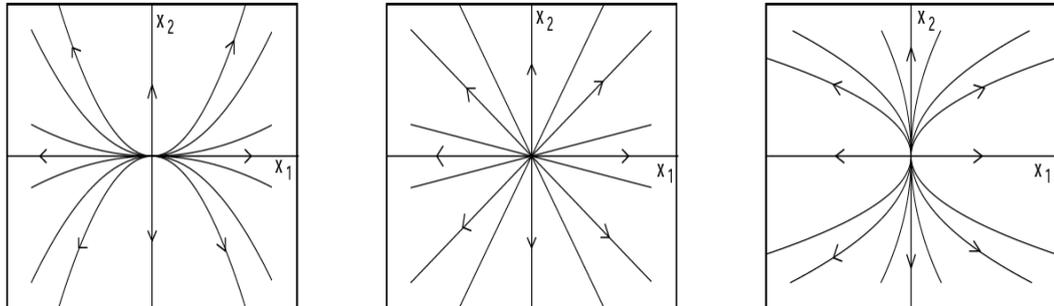


FIGURE 1.4 – Portraits de phase correspondant au cas (i) dans lequel α et β sont positifs. Coté gauche : $0 < \alpha < \beta$. Au milieu : $0 < \alpha = \beta$. Coté droite : $0 < \beta < \alpha$.

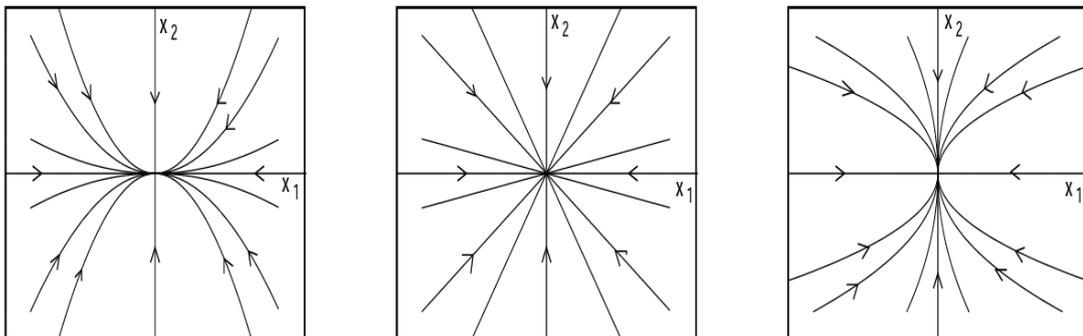


FIGURE 1.5 – Portraits de phase correspondant au cas (i) dans lequel α et β sont négatifs. Coté gauche : $\beta < \alpha < 0$. Au milieu : $\alpha = \beta < 0$. Coté droite : $\alpha < \beta < 0$.

Une telle façon pour classer les équilibres est fournie par les portraits de phase discutés ci-dessus.

Définition 1.3.4. Dans la figure 1.4, l'origine est appelée un nœud instable (toutes les trajectoires divergent de l'origine). Dans la figure 1.5, l'origine s'appelle un nœud stable (toutes les trajectoires pointent vers l'origine). Dans la figure 1.6, l'origine s'appelle un point selle.

Cas (ii) : On suppose que $\dot{x} = Mx$ où M est une matrice non-diagonalisable :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

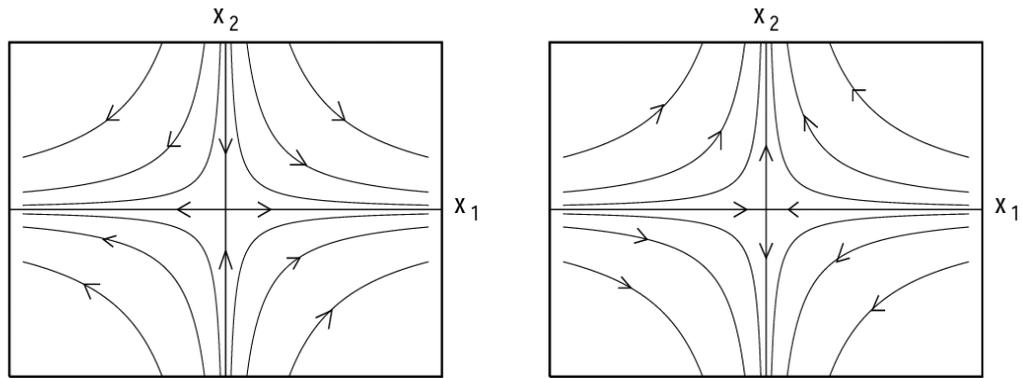


FIGURE 1.6 – Portraits de phase correspondant au cas (i) dans lequel α et β sont de signes différents. Coté gauche : $\beta < 0 < \alpha$. Coté droite : $\alpha < 0 < \beta$.

où α est une valeur propre réelle répétée. La solution générale du système est donc $x(t) = e^{tM}x(0)$, ou

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & te^{\alpha t} \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t} \\ c_2 e^{\alpha t} \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha < 0$, les trajectoires se rapprochent de l'origine lorsque $t \rightarrow +\infty$, dans ce cas, l'origine est appelée un nœud stable (voir la coté gauche de la figure 1.7). Si $\alpha > 0$, les trajectoires sont orientées vers l'extérieur de l'origine qui est un nœud instable (voir la coté droite de la figure 1.7).

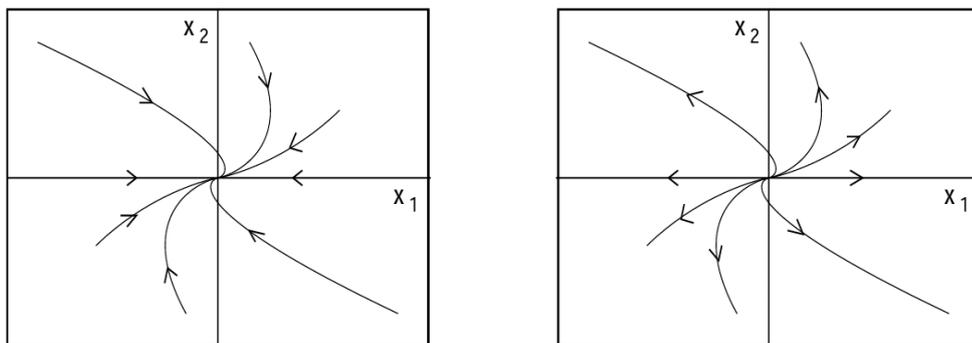


FIGURE 1.7 – Portraits de phase correspondant au cas (ii) auquel M a une valeur propre répétée. Coté gauche : $\alpha < 0$. Coté droite : $\alpha > 0$.

Cas (iii) : On suppose que $\dot{x} = Mx$ où M est sous la forme canonique réelle suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

On a

$$e^{tM} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que la solution générale du système est

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{tM} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t - c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \\ c_1 e^{\alpha t} \sin \beta t + c_2 e^{\alpha t} \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

L'équilibre à l'origine s'appelle un foyer stable si les trajectoires s'enroulent vers l'intérieur ($\alpha < 0$), un foyer instable si les trajectoires s'enroulent vers l'extérieur ($\alpha > 0$), et un centre si les trajectoires sont concentriques, courbes fermées ($\alpha = 0$). On remarque que, l'orientation des trajectoires peut être déterminée à partir du signe de β : au sens horaire si $\beta < 0$ et au sens antihoraire si $\beta > 0$ (voir la figure 1.8).

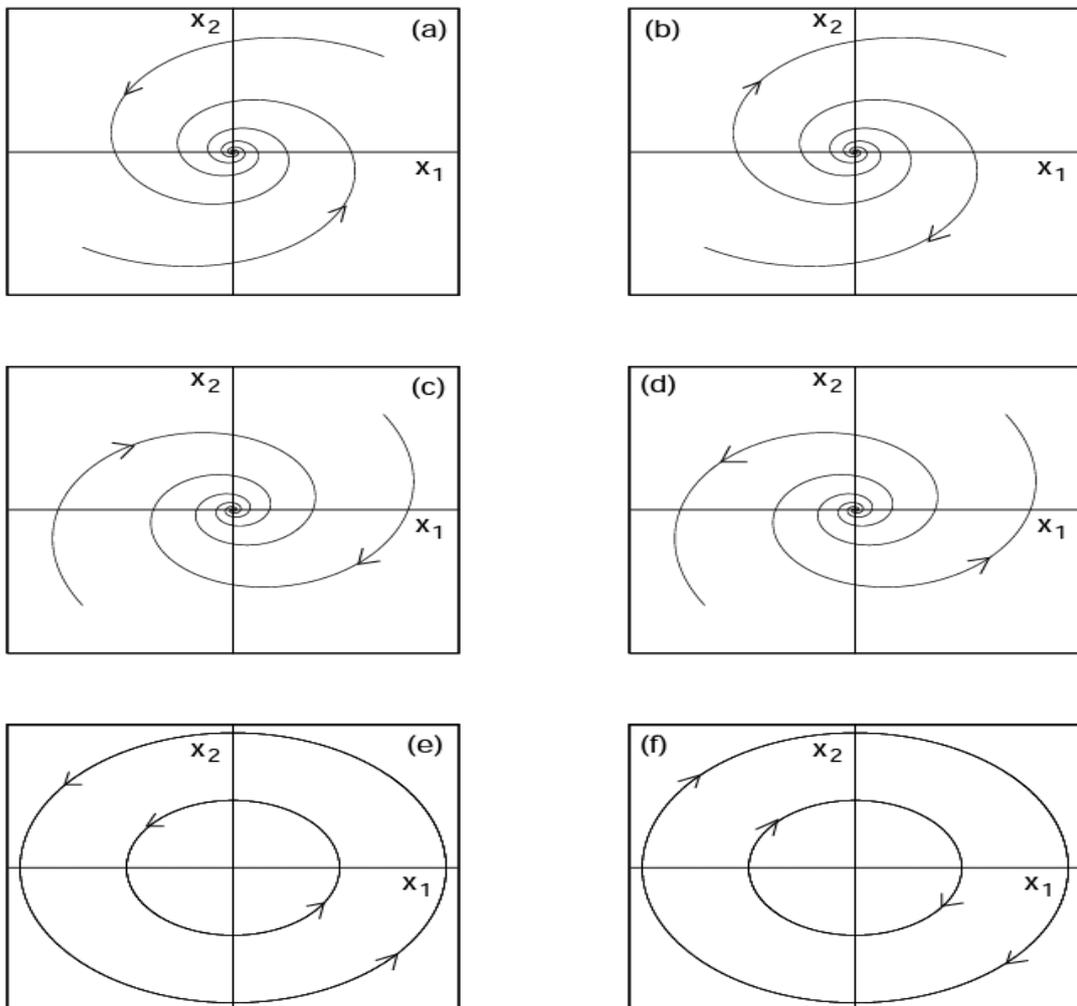


FIGURE 1.8 – Portraits de phase correspondant au cas (iii), auquel M a des valeurs propres complexes conjuguées .

De plus, il est possible de classifier la nature de l'origine qu'il s'agisse : d'un point selle, nœud instable, nœud stable, foyer instable, foyer stable ou centre dans le plan de phase de trace et de déterminant de la matrice A ($trace A, det A$).

Soit le système linéaire (1.13) tel que A est une matrice carrée réelle et inversible à coefficients constants. L'équation de polynôme caractéristique de la matrice A est de la forme :

$$\lambda^2 - trace A \lambda + det A = 0. \quad (1.16)$$

Soient λ_1, λ_2 les valeurs propres racines de (1.16), on a les relations suivantes :

$$trace A = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$det A = \lambda_1 \lambda_2.$$

Théorème 1.3.2. [19] Soient $\delta = det A, \tau = trace A, \Delta = \tau^2 - 4\delta$ et soit le système linéaire (1.13) :

- a) Si $\delta < 0$ alors, (1.13) a un point selle à l'origine.
- b) Si $\delta > 0$ et $\Delta \geq 0$ (i.e., $\tau^2 \geq 4|\delta| \Rightarrow \tau \neq 0$) alors, (1.13) a un nœud à l'origine ; il est stable si $\tau < 0$ et instable si $\tau > 0$.
- c) Si $\delta > 0, \Delta < 0$, et $\tau \neq 0$ alors, (1.13) a un foyer à l'origine ; il est stable si $\tau < 0$ et instable si $\tau > 0$.
- d) Si $\delta > 0$ et $\tau = 0$ alors, (1.13) a un centre à l'origine.

Démonstration 1.3.1. Les valeurs propres de la matrice A sont données par

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\tau \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

donc,

- a) Si $\delta < 0$ alors, il existe deux valeurs propres réelles de signe opposé.
- b) Si $\delta > 0$ et $\Delta \geq 0$ alors, il existe deux valeurs propres réelles du même signe, et il s'ensuit que l'origine est un nœud. Que l'origine soit stable ou instable ça dépend de signe de τ .
- c) Si $\delta > 0, \Delta < 0$, et $\tau \neq 0$ alors, il existe deux valeurs propres complexes conjugués $\lambda_{1,2} = u \pm iv$. Il s'ensuit que l'origine est un foyer. Que l'origine soit stable ou instable ça c'est selon la signe de la trace de A .
- d) Si $\delta > 0$ et $\tau = 0$ alors, il existe deux valeurs propres complexes conjuguées purement imaginaires et l'origine est un centre.

Définition 1.3.5. Un nœud stable ou foyer stable de (1.13) s'appelle un puits, et un nœud instable ou foyer instable de (1.13) s'appelle une source.

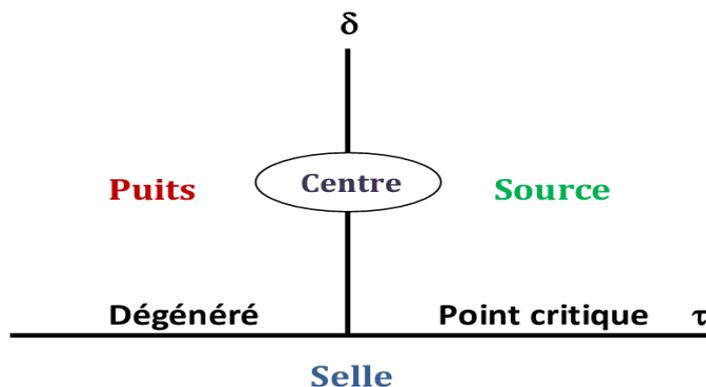


FIGURE 1.9 – Diagramme de bifurcation pour le système linéaire (1.13).

1.3.2 Conditions de stabilité de Routh-Hurwitz

L'analyse de stabilité que nous avons déjà fait traite les systèmes linéaires du champ de vecteur $\dot{x} = Ax$, où A est la matrice du système linéarisé. Les solutions sont obtenues en mettant $x(t) = x(0)e^{\lambda t}$, où $x(0)$ est un vecteur constant et les valeurs propres λ sont les racines du polynôme caractéristique $|A - \lambda I| = 0$, où I est la matrice d'identité. La solution $x = 0$ est stable si toutes les racines λ du polynôme caractéristique se trouvent dans la coté gauche du plan complexe ; c'est-à-dire, $Re\lambda < 0$ pour toutes les racines λ . Si le système est d'ordre n , le polynôme caractéristique peut être pris sous la forme générale

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (1.17)$$

où les coefficients a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ sont tous réels. On suppose tacitement que $a_n \neq 0$ parce que le contraire nous donne $\lambda = 0$ comme solution, et alors le polynôme est d'ordre $n - 1$ par l'équivalence $a_n \neq 0$. On exige des conditions sur a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ tel que les zéros de $P(\lambda)$ ont $Re\lambda < 0$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que cela se produise sont appelées les conditions de Routh-Hurwitz. Il existe plusieurs formes

équivalentes de celles-ci, dont l'une est, ensemble avec $a_n > 0$,

$$D_1 = a_1 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.18)$$

Par exemple, pour l'équation cubique suivante :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

les conditions pour que $Re\lambda < 0$ sont

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0.$$

1.4 Systèmes dynamiques non linéaires

Maintenant, on tourne notre attention vers les systèmes non linéaires qui peuvent présenter des comportements différents que les systèmes linéaires ne peuvent pas. De plus, la plupart des phénomènes dynamiques dans la nature sont intrinsèquement non linéaires. Un système non linéaire est de la forme

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.19)$$

où $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non linéaire et E est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1.4.1. [19] On suppose que $f \in C(E)$ où E est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . Alors, $x(t)$ est une solution de l'équation différentielle (1.19) sur un intervalle I si $x(t)$ est différentiable sur I et si pour tout $t \in I$, $x(t) \in E$ et

$$\dot{x}(t) = f(x(t)).$$

Et soit $x_0 \in E$, $x(t)$ est une solution du problème à valeur initiale

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

sur un intervalle I si $t_0 \in I$, $x(t_0) = x_0$ et $x(t)$ est une solution de l'équation différentielle (1.19) sur l'intervalle I .

1.4.1 Analyse de stabilité d'un point fixe

Méthode indirecte

Une bonne méthode utilisée pour étudier les systèmes non linéaires (1.19) c'est de trouver leurs points fixes. Une telle méthode pour caractériser le comportement des solutions au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique consiste à linéariser le système non linéaire (1.19) à ce point. Cette méthode est connue comme la deuxième méthode de Liapunov ou la méthode indirecte de stabilité. Cela se fait en étudiant le système linéaire (1.13), où la matrice $A = Df(x^*) = \partial f_i / \partial x_j$, c'est la matrice jacobienne où ces composantes sont les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction $f = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))^T$ (T dénote la transposé). La fonction linéaire $Ax = Df(x^*)x$ s'appelle la partie linéaire de f à x^* .

Théorème 1.4.1. [26] (*Théorème de Liapunov sur la stabilité par la linéarisation*) Si toutes les valeurs propres de la partie linéaire du champ de vecteur f en un point singulier ont une partie réelle négative, alors ce point est asymptotiquement stable. Si l'une de ces valeurs propres a une partie réelle positive, alors ce point n'est pas stable au sens de Liapunov.

Définition 1.4.2. [19] Un point d'équilibre x^* est appelé un point d'équilibre hyperbolique de (1.19) si aucune des valeurs propres de la matrice $Df(x^*)$ n'a de partie réelle nulle. Le système linéaire (1.13) avec la matrice $A = Df(x^*)$ s'appelle la linéarisation de (1.19) à x^* .

Définition 1.4.3. [19] Un point d'équilibre x^* de (1.19) est appelé un puits si toutes les valeurs propres de la matrice $Df(x^*)$ ont une partie réelle négative, il est appelé une source si toutes les valeurs propres de $Df(x^*)$ ont une partie réelle positive, et il est appelé un selle si elle est hyperbolique et $Df(x^*)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une avec une partie réelle négative.

Théorème 1.4.2. [13] (*Hartman-Grobman*) Si $Df(x^*)$ n'a pas de valeurs propres nulles ou purement imaginaires alors, il y a un homéomorphisme h défini localement sur certain voisinage U de $x \in \mathbb{R}^n$ et prend les orbites du flot non linéaire φ_t , de (1.19), à ceux du flot linéaire $e^{tDf(x^*)}$ de (1.13). L'homéomorphisme préserve la direction des orbites et peut également être choisi pour préserver la paramétrisation par le temps.

Le théorème de Hartman–Grobman donne un résultat très important dans la théorie qualitative et locale d'un système dynamique. Ce théorème montre qu'au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique, le système non linéaire a le même comportement qualitatif (localement) que le système linéarisé correspondant. Aussi, on peut trouver la solution locale du système non linéaire par homéomorphisme.

Définition 1.4.4. [11] (Variétés locales stables et instables) Soit U un voisinage d'un point fixe hyperbolique x^* . Les variétés locales stables et instables, noté par $W_{loc}^s(x^*)$, $W_{loc}^u(x^*)$ respectivement, sont définis par

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(x^*) &= \{x \in U \mid \varphi(t, x) \rightarrow x^* \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty, \varphi(t, x) \in U \forall t \geq 0\}, \\ W_{loc}^u(x^*) &= \{x \in U \mid \varphi(t, x) \rightarrow x^* \text{ lorsque } t \rightarrow -\infty, \varphi(t, x) \in U \forall t \leq 0\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, les variétés globales stables et instables sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} W^s(x^*) &= \bigcup_{t \leq 0} \varphi(t, W_{loc}^s(x^*)), \\ W^u(x^*) &= \bigcup_{t \geq 0} \varphi(t, W_{loc}^u(x^*)). \end{aligned}$$

Théorème 1.4.3. [13] (Théorème de la variété stable d'un point fixe) Soit x^* un point d'équilibre hyperbolique du système (1.19), et soient E^s et E^u les sous espaces stables et instables du système linéaire correspondant (1.13). Alors, il existe des variétés locales stables et instables $W_{loc}^s(x^*)$ et $W_{loc}^u(x^*)$ du système non linéaire de même dimension que celle de E^s et E^u , respectivement. Ces variétés sont tangentielles à E^s et E^u , respectivement, à x^* et ont la même régularité de f .

Méthode directe : fonction de Liapunov

La stabilité locale d'un point d'équilibre hyperbolique x^* est déterminé par l'étude de signe de la partie réelle des valeurs propres de $Df(x^*)$. La stabilité des points d'équilibre non hyperboliques est généralement plus difficile à déterminer. Une méthode très utile pour déterminer la stabilité des points d'équilibre non hyperboliques basé sur la recherche d'une fonction définie positive $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, appelée la fonction de Liapunov et elle est illustrée dans le théorème suivant :

Théorème 1.4.4. [13] Soit x^* un point fixe de (1.19) et soit $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable définie sur un voisinage $W \subseteq U$ de x^* tel que :

- (i) $V(x^*) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x^*$,
- (ii) $\dot{V}(x) \leq 0$ sur $W - \{x^*\}$.

Alors, x^* est stable. De plus, si

- (iii) $\dot{V}(x) < 0$ sur $W - \{x^*\}$;

alors, x^* est asymptotiquement stable.

Là,

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x).$$

est la dérivé de V tout au long les courbes de solution de (1.19).

Si $W(= U) = \mathbb{R}^n$ dans le cas (iii), x^* est dit globalement asymptotiquement stable, et

on peut conclure que toutes les solutions restent limitées et en effet s'approchent de x^* lorsque $t \rightarrow \infty$.

Théorème de la variété centrale

Le comportement qualitatif au voisinage d'un point critique non hyperbolique x^* du système non linéaire (1.19) est également déterminé par son comportement sur la variété centrale proche de x^* [19].

Théorème 1.4.5. (Théorème de la variété centrale locale) Soit $f \in C^r(E)$, où E est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n contenant l'origine et $r \geq 1$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $Df(0)$ admet c valeurs propres dont les parties réelles sont nulles et $s = n - c$ valeurs propres dont les parties réelles négatives. Alors, le système (1.19) peut être écrit sous la forme diagonale suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Cx + F(x, y), \\ \dot{y} &= Py + G(x, y),\end{aligned}\tag{1.20}$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$, C est une matrice carrée avec c valeurs propres dont les parties réelles sont nulles, P est une matrice carrée avec s valeurs propres dont les parties réelles négatives, and $F(0) = G(0) = 0$, $DF(0) = DG(0)$; de plus, il existe un $\delta > 0$ et une fonction $h \in C^r(N_\delta(0))$, $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$. La définition de la variété centrale locale est $W^c(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid y = h(x) \text{ for } |x| < \delta\}$ et satisfait

$$Dh(x)[Cx + F(x, h(x))] = Ph(x) + G(x, h(x)),\tag{1.21}$$

pour $|x| < \delta$; et le flot de la variété centrale $W^c(0)$ est défini par le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{x} = Cx + F(x, h(x)),\tag{1.22}$$

pour toute $x \in \mathbb{R}^c$ où $|x| < \delta$.

La stratégie de ce théorème est de :

1. Convertir (1.19) en la forme diagonale (1.20).
2. Utiliser un développement en série pour les composants de $h(x)$ (jusqu'au degré de précision dont nous avons besoin, à condition que r est suffisamment grand).
3. Déterminer les composants du développement de $h(x)$ en utilisant (1.21).
4. Remplacez cette expression approximative de $h(x)$ dans (1.22) pour déterminer le flot.

Exemple 1.4.1. Utilisez le théorème ci-dessus pour déterminer le comportement qualitatif de l'origine pour le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy, \\ \dot{y} &= -y - x^2.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Solution : le système est déjà sous la forme souhaitée, avec $C = 0$, $P = -1$, $F(x, y) = xy$ et $G(x, y) = -x^2$. Soit

$$\begin{aligned}
 h(x) &= ax^2 + bx^3 + \dots, \\
 Dh(x) &= 2ax + 3bx^2 + \dots, \\
 Dh(x) [Cx + F(x, h(x))] &= (2ax + 3bx^2 + \dots)x(ax^2 + bx^3 + \dots), \\
 Ph(x) + G(x, h(x)) &= -(ax^2 + bx^3 + \dots) - x^2, \\
 &\Downarrow \text{Collection des termes (en utilisant (1.21))}, \\
 O(x^2) &: -a - 1 = 0, \\
 O(x^3) &: b = 0, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Donc, $h(x) = -x^2 + O(x^4)$. Le flot dans la variété centrale est donné par (1.22)

$$\dot{x} = F(x, h(x)) = -x^3 + O(x^5),$$

On conclut que le système est stable.

Exemple 1.4.2. Utilisez le théorème ci-dessus pour déterminer le comportement qualitatif de l'origine pour le système

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1y, \\
 \dot{x}_2 &= x_1 + x_2y, \\
 \dot{y} &= -y - x_1^2 - x_2^2 + y^2.
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Solution : le système est déjà sous la forme souhaitée, avec $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P = -1$, $F(x, y) =$

$$\begin{bmatrix} x_1y \\ x_2y \end{bmatrix} \text{ et } G(x, y) = -x_1^2 - x_2^2 + y^2. \text{ Soit}$$

$$\begin{aligned}
 h(x_1, x_2) &= ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \dots, \\
 Dh(x) &= [2ax_1 + bx_2 + \dots, bx_1 + 2cx_2 + \dots], \\
 Dh(x) [Cx + F(x, h(x))] &= [2ax_1 + bx_2 + \dots, bx_1 + 2cx_2] \begin{bmatrix} -x_2 + x_1(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \dots) \\ x_1 + x_2(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \dots) \end{bmatrix}, \\
 Ph(x) + G(x, h(x)) &= -(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \dots) - x_1^2 - x_2^2 + (ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \dots)^2, \\
 &\Downarrow \text{Collection des termes (en utilisant (1.21))}, \\
 x_1^2 &: b = -a - 1, \\
 x_2^2 &: -b = -c - 1, \\
 x_1x_2 &: -2a + 2c = -b, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

on obtient $a = -1$, $b = 0$, $c = -1$, et donc $h(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + O(|x|^3)$. Le flot dans la variété centrale est donné par (1.22)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(-x_1^2 - x_2^2 + O(|x|^3)) = -x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2 + O(|x|^4), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(-x_1^2 - x_2^2 + O(|x|^3)) = x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2 + O(|x|^4).\end{aligned}$$

Pour déterminer la stabilité de l'origine, on procède au changement de variables en coordonnées polaires

$$\begin{aligned}r\dot{r} &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1(-x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2) + x_2(x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2) + O(|r|^5), \\ &= -x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4 + O(|r|^5), \\ &= -(x_1^2 + x_2^2)^2 + O(|r|^5), \\ &= -r^4 + O(|r|^5), \\ \dot{r} &= -r^3 + O(|r|^4).\end{aligned}$$

Donc, le système est stable.

1.4.2 Solutions périodiques des systèmes planaires

Dans cette sous-section, l'analyse est limitée aux systèmes autonomes bidimensionnels de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.25)$$

Il est supposé que f et g ont des dérivées partielles du premier ordre continues. Les solutions des problèmes à valeur initiale existent et sont uniques. Les résultats analytiques concernant les solutions périodiques pour les systèmes autonomes bidimensionnels (1.25) sont énoncés dans le théorème suivant.

Théorème 1.4.6. [14] (*Poincaré-Bendixson*)

Un ensemble limite non vide et compact d'un flot sur le plan, qui ne contient pas de point fixe, est une orbite fermée.

Le théorème se pose en conséquence de l'unicité des solutions, ce qui implique que dans le plan de phase, les solutions ne peuvent pas se croiser, soit ils sont périodiques ou bien liés à un équilibre.

Deux autres résultats mathématiques importants donnent des conditions suffisantes qui excluent la possibilité d'existence des solutions périodiques sont : le critère de Bendixson et le critère de Dulac présentés dans les théorèmes suivants.

Théorème 1.4.7. [22] (*Critère de Bendixson*) *Soit D un sous-ensemble ouvert simplement connecté de \mathbb{R}^2 . Si l'expression*

$$\operatorname{div}(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y},$$

n'est pas nul et ne change pas de signe sur D , alors il n'existe pas d'orbites périodiques du système autonome (1.25) dans D .

Théorème 1.4.8. [22] (*Critère de Dulac*) Soit D un sous-ensemble ouvert simplement connecté de \mathbb{R}^2 et $B(x, y)$ une fonction continue et différentiable et définie positive sur D . Si l'expression

$$\operatorname{div}(Bf, Bg) = \frac{\partial Bf}{\partial x} + \frac{\partial Bg}{\partial y},$$

n'est pas nul et ne change pas de signe sur D , alors il n'existent pas d'orbites périodiques du système autonome (1.25) dans D .

1.5 Théorie de bifurcation

Plusieurs équations différentielles dépendent des paramètres. À travers les valeurs de ces paramètres, le comportement qualitatif des solutions d'un système peut être très différent et peut changer lorsque les paramètres varient. En particulier, les équilibres et/ou les solutions périodiques qui peuvent être créés ou détruits, ou leur stabilité peut changer. Dans la dynamique, ces changements qualitatifs et quantitatifs sont appelés bifurcations, et les valeurs des paramètres auxquelles elles se produisent sont appelées points de bifurcation. Par exemple, on considère le flambage d'un tronc. Si un petit poids est placé sur le dessus du tronc (la figure 1.10) alors, ce tronc peut supporter la charge et reste verticale. Mais si la charge est trop lourde, la position verticale devient instable et le tronc peut se déformer. Là, le poids joue le rôle du paramètre de contrôle,

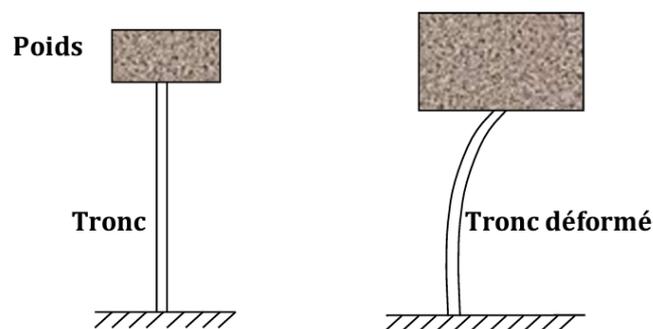


FIGURE 1.10 – Le flambage du tronc pour une charge lourde [23].

et la déviation du tronc de la verticale joue le rôle de la variable dynamique x [23].

Bifurcations dans les systèmes unidimensionnels

Dans la suite, on rappellera plusieurs types courants de bifurcations. Pour la simplicité, on traitera principalement du système continu unidimensionnel de la forme

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (1.26)$$

dépendant du paramètre μ , où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application régulière de x et μ .

Bifurcations selle-nœud

La bifurcation selle-nœud (parfois appelé une bifurcation pli) est le mécanisme de base par lequel, lorsqu'un paramètre est varié, deux points fixes se déplacent l'un vers l'autre, se heurtent et se détruisent mutuellement [23]. Soit le système

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu + x^2; \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.27)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Selon le signe de μ , il existe trois possibilités. Lorsque $\mu < 0$, le système a deux points fixes $x_{1,2}^* = \pm \sqrt{-\mu}$, l'un est stable et l'autre est instable. Lorsque $\mu = 0$, les deux points fixes fusionnent en un seul point fixe $x^* = 0$ qui est semi-stable. Lorsque $\mu > 0$, les deux équilibres disparaissent. Clairement, $\mu = 0$ est le point de bifurcation, et ce type de bifurcation s'appelle la bifurcation selle-nœud, puisque les champs de vecteur pour $\mu < 0$ et $\mu > 0$ sont différents qualitativement.

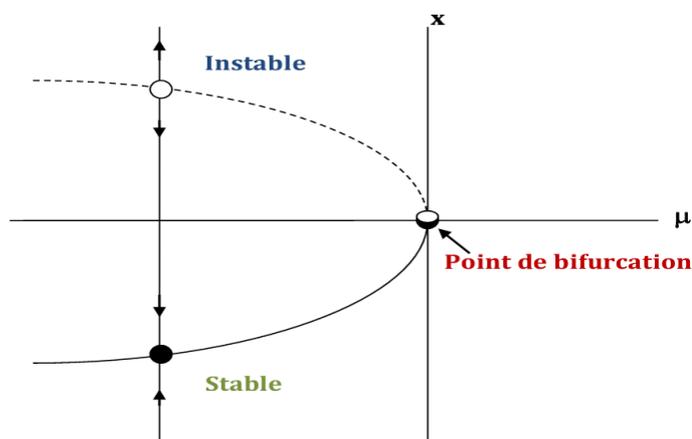


FIGURE 1.11 – Diagramme de bifurcation selle-nœud pour le système unidimensionnel (1.27).

Bifurcations transcritiques

On décrit maintenant un mécanisme par lequel deux équilibres peuvent échanger leur stabilité en faisant varier les valeurs des paramètres. Soit le système unidimen-

sionnel

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2; x \in \mathbb{R}, \quad (1.28)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Ce système a deux équilibres $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \mu$. La stabilité de ces équilibres dépend du signe de μ , donc on a deux cas :

- (i) Pour $\mu < 0$, x_1^* est stable alors que x_2^* est instable.
- (ii) Pour $\mu > 0$, l'origine est devenue instable et x_2^* devenue stable.

Dans ce case, $\mu = 0$ est le point de bifurcation, et les deux équilibres y échangent leur stabilité.

Remarque 1.1. La différence entre les bifurcations selle-nœud et transcritiques est : dans le cas transcritique, les deux points fixes ne disparaissent pas après la bifurcation au lieu de ça ils commutent leur stabilités.

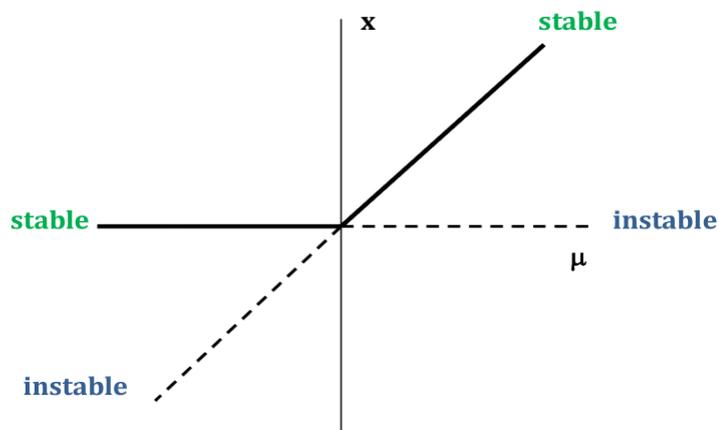


FIGURE 1.12 – Diagramme de bifurcation transcritique pour le système unidimensionnel (1.28).

Bifurcations de pitchfork

On passe maintenant au troisième type de bifurcation appelé bifurcation de pitchfork (ou fourche). Ce type de bifurcation apparaît lorsque le système présente une symétrie entre les directions gauche et droite. Il existe deux types de bifurcations classées selon l'équilibre qui peut être gagnant ou perdant de stabilité lorsqu'un paramètre augmente. Le type le plus simple est appelé supercritique et sera discuté en premier temps. Soit le système

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3; x \in \mathbb{R}, \quad (1.29)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Lorsque $\mu < 0$, l'origine est le seul point fixe, et il est stable. Lorsque $\mu = 0$, l'origine reste stable, mais beaucoup plus faible. Finalement, lorsque

$\mu > 0$, l'origine est devenue instable et deux nouveaux points fixes stables $x_{1,2}^* = \pm \sqrt{\mu}$ apparaissent sur les deux côtés de l'origine. Le deuxième type est appelé bifurcation

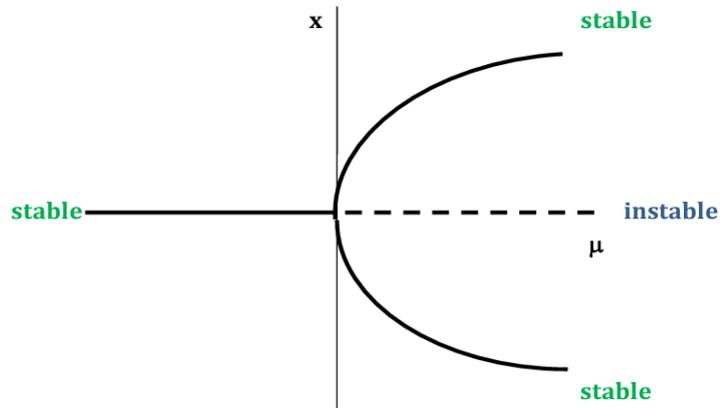


FIGURE 1.13 – Diagramme de bifurcation de pitchfork supercritique pour le système unidimensionnel (1.29).

souscritique et sera donné par l'équation :

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x + x^3; x \in \mathbb{R}, \quad (1.30)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Lorsque $\mu < 0$, il y a trois équilibres : l'origine qui est un point fixe stable et deux autres points d'équilibres : $x_{1,2}^* = \pm \sqrt{-\mu}$ qui sont instables. Lorsque $\mu = 0$, l'origine reste stable, mais beaucoup plus faible. Finalement, lorsque $\mu > 0$, l'origine est devenue le seul point fixe qui soit de nature instable.

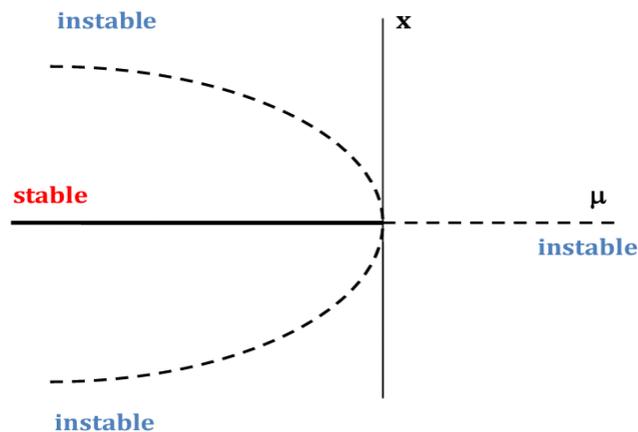


FIGURE 1.14 – Diagramme de bifurcation de pitchfork souscritique pour le système unidimensionnel (1.30).

Bifurcations dans les systèmes bidimensionnels

Dans cette sous-section, on discutera quelques bifurcations courantes qui se produisent fréquemment dans les systèmes bidimensionnels.

Les bifurcations Selle-Nœud, Transcritique et Pitchfork

Voici un exemple typique de bifurcations selle-nœud fournies par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \quad (1.31)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Pour la x -direction, le comportement de bifurcation est déjà discuté dans la sous-section précédente, tandis que dans la y -direction, le mouvement se produit de manière exponentielle.

Pour $\mu > 0$, il existe deux points fixes, un nœud stable à $(x_1^*, y_1^*) = (\sqrt{\mu}, 0)$ et un selle à $(x_2^*, y_2^*) = (-\sqrt{\mu}, 0)$. Comme μ décroît, le selle et le nœud se rapprochent, puis se heurtent lorsque $\mu = 0$, et enfin disparaissent quand $\mu < 0$. En utilisant la même idée précédente, on peut également construire des exemples prototypiques de bifurcations transcritiques et de pitchfork à un point fixe stable pour l'un des systèmes suivants :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^2, \quad \dot{y} = -y && \text{(Transcritique),} \\ \dot{x} &= \mu x - x^3, \quad \dot{y} = -y && \text{(Supercritique),} \\ \dot{x} &= \mu x + x^3, \quad \dot{y} = -y && \text{(Souscritique).} \end{aligned}$$

L'analyse de tous ces cas suit la même méthode.

Bifurcations de Hopf

Jusqu'à présent, on a discuté des bifurcations des systèmes ayant des valeurs propres réelles. Maintenant, on va discuter un phénomène de bifurcation périodique très intéressant pour un système bidimensionnel où les valeurs propres sont complexes. Ce type de bifurcations est appelé " bifurcation de Hopf ". Il se produit lorsqu'un point d'équilibre stable perd sa stabilité et donne naissance à un cycle limite et vice versa. Dans ce qui suit, on va présenter deux types de bifurcations de Hopf, à savoir les bifurcations de Hopf supercritiques et d'autre sous-critiques.

Bifurcation de Hopf supercritique : On considère le système bidimensionnel suivant avec le paramètre $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.32)$$

Le système a un point fixe unique à l'origine. En coordonnées polaires, le système s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (1.33)$$

L'origine ($r = 0$) est le seul point fixe et son stabilité dépend du signe de μ :

- Lorsque $\mu < 0$, l'origine est un spirale stable dont le sens de rotation est antihoraire.
- Lorsque $\mu = 0$, l'origine reste un spirale stable, bien qu'il soit très faible.
- Lorsque $\mu > 0$, il existe un spirale instable à l'origine et un cycle limite circulaire stable à $r = \sqrt{\mu}$.

Là, on dit que le système a subi une bifurcation de Hopf supercritique (c'est-à-dire qu'un cycle limite stable est créé à partir d'un point d'équilibre instable).

Bifurcation de Hopf souscritique : On considère le système bidimensionnel suivant avec le paramètre $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + x(x^2 + y^2) - x(x^2 + y^2)^2, \\ \dot{y} = x + \mu y + y(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2)^2. \end{cases} \quad (1.34)$$

Le système a un point fixe unique à l'origine. En coordonnées polaires, le système s'écrit comme suit

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 - r^5, \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (1.35)$$

L'origine ($r = 0$) est le seul point fixe et sa stabilité dépend toujours du signe de μ . Lorsque $\mu < 0$, il existe deux attracteurs, un cycle limite stable et un point fixe stable à l'origine. Entre eux se trouve un cycle instable. Quand μ croît, le cycle instable se resserre autour du point fixe. À $\mu = 0$, le cycle instable se réduit à une amplitude nulle et engloutit l'origine, le rendant instable. Pour $\mu > 0$, le cycle limite de grande amplitude est soudainement devenu le seul attracteur. Là, on dit que le système a subi une bifurcation de Hopf sous-critique (un cycle limite instable apparaît lorsque μ diminue). Un indice sur ce qui se passe dans le problème de bifurcation générique impliquant un équilibre avec des valeurs propres purement imaginaires peut être obtenu en examinant des systèmes linéaires dans lesquels il existe un changement de ce type. Par exemple, soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - \omega y, \\ \dot{y} = \omega x + \mu y, \end{cases} \quad (1.36)$$

dont les solutions ont la forme

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque $\mu < 0$, les solutions s'enroulent vers l'origine, et lorsque $\mu > 0$, les solutions s'éloignent de l'origine. Lorsque $\mu = 0$, toutes les solutions sont périodiques.

Le théorème de forme normale nous donne les informations requises sur la façon dont le problème générique diffère du système (1.36). Par le changement de coordonnées, le développement de Taylor de degré 3 pour le problème général peut être amenée à la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (d\mu + a(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y, \\ \dot{y} &= (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + a(x^2 + y^2))y,\end{aligned}\tag{1.37}$$

L'idée du théorème de bifurcation de Hopf est que les propriétés qualitatives de (1.37) près de l'origine restent inchangées même si des termes d'ordre supérieur sont ajoutés au système :

Théorème 1.5.1. [13] (*Bifurcation de Hopf*) *On suppose que le système*

$$\dot{x} = f_\mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R},\tag{1.38}$$

admet un équilibre (x^, μ^*) auquel les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(H1) $D_x f_{\mu^*}(x^*)$ admet une simple paire de valeurs propres purement imaginaires et aucune autre valeur propre avec une partie réelle nulle.

Alors, (H1) implique qu'il existe une courbe d'équilibres régulière $(x(\mu), \mu)$ avec $x(\mu^*) = x^*$. Les valeurs propres $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$ de $D_x f_{\mu^*}(x(\mu))$ qui sont imaginaires à $\mu = \mu^*$ varient régulièrement avec μ . Si, de plus,

(H2)

$$\frac{d}{d\mu} \{\operatorname{Re}(\lambda(\mu))\} \Big|_{\mu=\mu^*} = d \neq 0,\tag{1.39}$$

alors, il existe une variété centrale de dimension 3 unique passant par (x^*, μ^*) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et un système régulier de coordonnées (préservant les plans $\mu = \text{const}$) pour lequel le développement de Taylor du degré 3 sur la variété centrale est donné par (1.37). Si $a \neq 0$, il existe une surface de solutions périodiques dans la variété centrale qui a une tangence quadratique avec l'espace propre de $\lambda(\mu^*), \bar{\lambda}(\mu^*)$ et accepte le second ordre avec le paraboloïde $\mu = -(a/d)(x^2 + y^2)$. Si $a < 0$ alors, ces solutions périodiques sont des cycles limites stables, tandis que si $a > 0$, les solutions périodiques sont répulsifs.

Remarque 1.2. Dans un système bidimensionnel de la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix},\tag{1.40}$$

où $f(0) = g(0) = 0$ et $Df(0) = Dg(0) = 0$, le calcul de forme normale donne :

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{16} (f_{xxx} + g_{xxy} + f_{xyy} + g_{yyx}) \\ &+ \frac{1}{16\omega} \{f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}\}.\end{aligned}$$

Chapitre 2

Équations algébro-différentielles

Les équations algébro-différentielles (EAD) sont établis selon des relations entre les variables. Dans ce chapitre, on va présenter un aperçu de la théorie des équations algébro-différentielles, en particulier ces caractéristiques et ces formes spéciales, puis on va introduire quelques concepts d'indice bien connus et on va présenter également l'analyse de stabilité des EAD semi explicites et quelques structures de bifurcations locales de la frontière de faisabilité.

2.1 Définitions et propriétés des EAD

Les problèmes considérés se présentent sous la forme d'un système implicite non linéaire et autonome donné par :

$$F(x, \dot{x}) = 0. \quad (2.1)$$

Le cas non autonome est de la forme suivante :

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \quad (2.2)$$

où $F \in C(\mathbb{I} \times D_x \times D_{\dot{x}}, \mathbb{R}^m)$ est une fonction suffisamment régulière, $x : \mathbb{I} \rightarrow D_x$ est une fonction inconnue continuellement différentiable, $\mathbb{I} = [t_0, t_f] \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle compact, et $D_x, D_{\dot{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ sont des ouverts. Un cas particulier se présente lorsque $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ est non singulière (inversible). En principe, il est alors souvent possible de résoudre \dot{x} en fonction de t et x , en obtenant l'équation différentielle ordinaire explicite de la forme $\dot{x} = f(t, x)$.

Définition 2.1.1. [6] Une équation algébro-différentielle (EAD) est une équation comprend une fonction inconnue et ses dérivés. Une EAD de premier ordre dans sa forme générale est donnée par (2.2) où la matrice Jacobienne $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ est singulière (non inversible).

Exemple 2.1.1. Soit le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 - 2x_2 - 2 &= 0, \\ \frac{1}{2}\dot{x}_1x_3 + \dot{x}_2 &= 0, \\ x_1 - \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

La matrice jacobienne associée à ce système est

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{x}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x_3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Évidemment, $\det(\partial F/\partial \dot{x}) = 0$, donc le jacobien est une matrice singulière quelque soit la valeur de x_3 , dans ce cas là, le système donné est une équation algébro-différentielle.

On résoudre pour \dot{x}_1 à partir de la première équation $\dot{x}_1 - 2x_2 - 2 = 0$, on obtient $\dot{x}_1 = 2x_2 + 2$, et on résoudre \dot{x}_2 à partir de la deuxième équation $\frac{1}{2}\dot{x}_1x_3 + \dot{x}_2 = 0$, on obtient $\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_3\dot{x}_1 = -x_2x_3 - x_3$. On remplace dans la troisième équation $x_1 - \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + 1 = 0$, on trouve $x_1 - 2x_2 - x_3 - x_2x_3 - 1 = 0$. Donc, le système équivalent au système (2.3) peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_2 + 2, \\ \dot{x}_2 &= x_3(-x_2 - 1), \\ 0 &= x_1 - 2x_2 - x_3(1 + x_2) - 1, \end{aligned} \tag{2.4}$$

cette EAD contient deux équations différentielles et une équation algébrique.

2.2 Formes spéciales des équations algébro-différentielles

La méthode de résolution d'une EAD dépendra de sa structure. Fréquemment, les EAD possèdent une structure mathématique spécifique à un domaine d'application donné. En conséquence, les EAD les plus connus sont :

Équations algébro-différentielles implicites

Les équations algébro-différentielles implicites sous leur forme générale sont données par (2.2) où la Jacobienne $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ doit être singulière le long d'une solution particulière de ces EAD.

Exemple 2.2.1. Le système (2.3) est une équation algébro-différentielle implicite.

Équations algébro-différentielles non-linéaires

Les équations algébro-différentielles non linéaires sont décrits comme un système implicite des équations différentielles et d'autres algébriques sous la forme de l'équation (2.2) où F est supposée non linéaire.

Équations algébro-différentielles linéaires

Les problèmes les plus simples de la forme (2.2) sont des EAD linéaires et non autonomes données par :

$$F(t, x, \dot{x}) = A(t)\dot{x} + B(t)x + q(t) = 0, \quad (2.5)$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont des matrices linéaires de dimensions $n \times n$, de plus, la matrice $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = A(t)$ est singulière.

Remarque 2.1. Si la matrice $A(t)$ est non singulière alors, le système (2.5) peut être transformé en une équation différentielle ordinaire (EDO) de la forme :

$$\dot{x}(t) = -[A(t)]^{-1} B(t)x(t) - [A(t)]^{-1} q(t).$$

Remarque 2.2. Si $A(t) \equiv A$ et $B(t) \equiv B$ alors, on parle des EAD linéaires et autonomes.

Équations algébro-différentielles semi-explicites

Une classe spéciale et importante d'EAD de la forme (2.2) sont les EAD semi-explicites ou les équations différentielles ordinaires EDO avec contraintes [27] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, z), \\ 0 &= g(t, x, z), \end{aligned} \quad (2.6)$$

où g_z (la dérivée partielle de g par rapport à z : $\partial g / \partial z$) a un inverse borné au voisinage de la solution. Au niveau des EAD semi-explicites, on peut distinguer les variables différentielles $x(t)$ de les variables algébriques $z(t)$. Les variables algébriques peuvent être non différentiables [28].

Exemple 2.2.2. [6] Un exemple simple d'EAD provient de la modélisation du mouvement d'un pendule en coordonnées cartésiennes. On suppose que le pendule ait une longueur 1 et les coordonnées de la petite boule de masse 1 à la fin de la tige sont (x_1, x_2) . Les équations du mouvement de Newton sont de la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\lambda x_1, \\ \ddot{x}_2 &= -\lambda x_2 - g, \end{aligned} \quad (2.7)$$

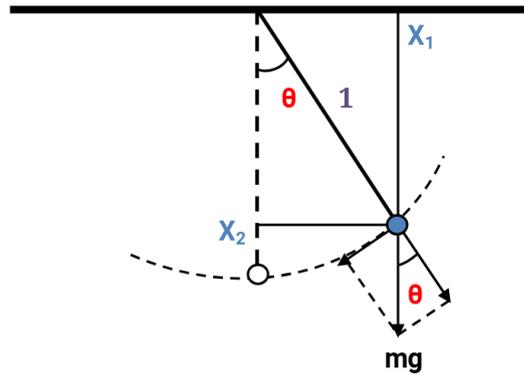


FIGURE 2.1 – Pendule.

tel que g est la constante de gravité mise à l'échelle, et $\lambda(t)$ est la fonction inconnue qui exprime le multiplicateur de Lagrange. La contrainte de position est

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

qui exprime la condition que la tige ait une longueur fixe égale à 1. Un système d'EAD de la forme (2.6) avec quatre équations différentielles et une équation algébrique est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= -\lambda x_1, \\ \dot{x}_4 &= -\lambda x_2 - g, \\ 1 &= x_1^2 + x_2^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3 L'indice d'une équation algébro-différentielle

Le concept d'indice est utilisé dans la théorie des EAD pour mesurer la distance entre une EAD et son EDO associée [6]. Cette notion a été introduite afin de quantifier le niveau de difficulté existant dans la résolution d'une EAD donnée. Il existe plusieurs définitions d'indice parmi lesquelles : l'indice de Kronecker (pour les EAD linéaires à coefficients constants), l'indice de différenciation (Brenan et al. 1996), etc...

2.3.1 L'indice de Kronecker

Prenons comme point de départ les équations algébro-différentielles linéaires à coefficients constants. Ces équations sont données par :

$$B\dot{x} + Ax = d(t), \quad t \in I. \tag{2.9}$$

On cherche de solutions de la forme $x(0)e^{\lambda t}$ (si $d(t) \equiv 0$), on est amené à considérer le faisceau matriciel $A + \lambda B$. Lorsque $A + \lambda B$ est singulière pour toutes les valeurs de λ alors, (2.9) ne peut pas avoir une solution ou il admet une infinité de solutions pour une valeur initiale donnée. On ne traitera donc que les faisceaux matriciels réguliers, i.e., avec les problèmes où le polynôme $\det(A + \lambda B)$ ne disparaît pas identiquement.

Théorème 2.3.1. [31] (Weierstrass 1868, Kronecker 1890) Soit $A + \lambda B$ un faisceau matriciel régulier. Alors, il existe deux matrices non-singulières P et Q telles que :

$$PAQ = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

où $N = \text{blockdiag}(N_1, \dots, N_k)$, chaque N_i est de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{de dimension } m_i, \quad (2.11)$$

et C peut être supposé sous la forme canonique de Jordan.

En raison de la structure spéciale de N , il existe $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $N^{\mu-1} \neq 0$ mais $N^\mu = 0$. μ est connu comme l'indice de nilpotence de N . En introduisant la transformation

$$x = Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad Pd(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

donc, l'EAD linéaire (2.9) peut être écrit de manière équivalente par

$$\begin{aligned} (PBQ)(Q^{-1}x)' + (PAQ)Q^{-1}x &= Pd(t), \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La première équation est une équation différentielle ordinaire du composant u

$$\dot{u}(t) + Cu(t) = a(t),$$

la deuxième équation donne

$$\begin{aligned} v(t) &= b(t) - N\dot{v}, \\ &= b(t) - N(\dot{b}(t) - N\ddot{v}), \\ &= b(t) - N\dot{b}(t) + N^2\ddot{v}, \\ &\vdots \\ &= \sum_{i=0}^{\mu-1} (-N)^i b^{(i)}(t), \end{aligned}$$

en déterminant la composante v complètement par une différenciation répétée du côté droit b .

Définition 2.3.1. [31] Soit (B, A) un faisceau matriciel régulier. L'indice de Kronecker de (2.9) est égale à 0 si B est non singulière, ou il égale à μ (i.e. indice de nilpotence de N) sinon.

Définition 2.3.2. [28] (*Indice différentiel*) Pour les systèmes d'EAD générales (2.2), l'indice de long d'une solution $x(t)$ est le nombre minimum de différenciations du système qu'il faudrait pour résoudre \dot{x} uniquement en fonction de x et t (i.e., pour définir une EDO de x). Donc, l'indice est défini en fonction du système surdéterminé suivant

$$\begin{aligned} F(t, x, \dot{x}) &= 0, \\ \frac{dF}{dt}(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{d^p F}{dt^p}(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(p+1)}) &= 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

par le plus petit entier p pour lequel \dot{x} dans (2.13) peut être résolu en fonction de x et t seulement.

Puisqu'un EAD comprend un combinaison de différenciations et d'intégrations, on peut espérer que la différenciation des contraintes (dans un système d'EAD semi-explicite) et les substitués comme requis à partir des équations différentielles, encore plus si il est nécessaire, ce produira un système d'EDO explicite pour toutes les inconnues. Les solutions d'EAD sont les solutions de cette EDO qui sont dans un sous-ensemble appelé la variété des solutions. Le nombre de répétitions nécessaires pour cette transformation est appelé l'indice différentiel d'EAD. Donc, les EDO ont un indice égale à 0. Prenons quelques exemples simples :

Exemple 2.3.1. On considère l'EAD suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 1, \\ 0 &= x_2(x_1 + 1) + 2, \end{aligned} \tag{2.14}$$

où x_2 est la variable algébrique (i.e. $z = x_2$). En différenciant $g(x_1, x_2) = 0$ pour trouver une description de la dérivée de la variable algébrique (i.e. pour trouver \dot{x}_2). Donc, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[0] &= \frac{d}{dt}[g(x_1, x_2)], \\ 0 &= \dot{x}_2 x_1 + \dot{x}_1 x_2 + \dot{x}_2, \\ 0 &= \dot{x}_2 (x_1 + 1) + \dot{x}_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2. \end{aligned}$$

Une seule étape de différenciation est nécessaire pour décrire \dot{x}_2 . Donc, l'EAD est d'indice 1.

Remarque 2.3. En général, l'indice dépend de la solution de l'EAD et pas seulement de sa forme [28].

Exemple 2.3.2. [28] Soit le système d'EAD pour $x = (x_1, x_2, x_3)^T$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ 0 &= x_2(1 - x_2), \\ 0 &= x_1x_2 + x_3(1 - x_2) - t. \end{aligned} \tag{2.15}$$

La deuxième équation a deux solutions $x_2 = 0$ et $x_2 = 1$. Si la continuité de x_2 est vérifiée, alors x_2 ne change pas entre ces deux valeurs, et donc

(i) Si $x_2 = 0$ alors, d'après la troisième équation, on obtient $x_3 = t$. Le système est d'indice 1 et la solution est $x(t) = (x_1(0) + t^2/2, 0, t)^T$.

(ii) Si $x_2 = 1$ alors, après la différenciation de la première équation, on trouve $x_3 = 1$. Le système est d'indice 2 et la solution est $x(t) = (t, 1, 1)^T$. Notez qu'aucune valeur initiale n'est requise.

D'autre part, si on remplace l'équation algébrique qui inclut x_2 par son dérivé et on simplifie, on obtient l'EAD suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= 0, \\ 0 &= x_1x_2 + x_3(1 - x_2) - t. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Maintenant, l'indice dépend des conditions initiales car si $x_2(0) = 0$ l'indice est 1, et si $x_2(0) = 1$ l'indice égale à 2.

2.3.2 L'indice 1 de Hessenberg

On considère le système d'EAD semi-explicite (2.6) où $x(t)$ représente les variables différentielles et $z(t)$ représente les variables algébriques. Par la différenciation de l'équation des contraintes, on trouve

$$g_t + g_x \dot{x} + g_z \dot{z} = 0,$$

donc, ce système est d'indice 1 si et seulement si $(g_z)^{-1}$ existe [28]. Autrement dit, une seule étape de différenciation nous donne l'équation différentielle suivante :

$$\dot{z} = -(g_z)^{-1} g_x f - (g_z)^{-1} g_t.$$

Les EAD semi-explicite d'indice 1 sont très étroitement liés aux EDO implicites [28].

Remarque 2.4. Dans l'EAD semi-explicite (2.6), si la matrice jacobienne g_z est singulière, alors cette EAD est d'indice plus élevé.

Exemple 2.3.3. Soit le système (2.15), on a

- (i) Si $x_2 = 0$, alors, $\det(g_z) = 1 \neq 0$ donc, cette EAD est d'indice 1.
- (ii) Si $x_2 = 1$, alors, $\det(g_z) = 0$ implique que $(g_z)^{-1}$ n'existe pas, donc, cette EAD est d'indice plus élevé.

2.3.3 L'indice 2 de Hessenberg

On considère le système d'EAD suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, z), \\ 0 &= g(t, x), \end{aligned} \quad (2.17)$$

là, le produit des Jacobiennes $g_x f_z$ est non singulier pour toute t avec les valeurs initiales cohérentes x_0, z_0 (i.e. ces valeurs initiales satisfont les contraintes algébriques). On note que les variables algébriques z dans les contraintes (la deuxième équation) sont absents. Ceci est une EAD d'indice 2, et tous les variables algébriques jouent le rôle des variables d'indice 2 [28]. En différenciant la première équation, on obtient

$$\ddot{x} = f_x \dot{x} + f_z \dot{z} + f_t.$$

Afin de calculer \dot{z} , on différencie la deuxième équation deux fois, on obtient

$$0 = g_x \dot{x} + g_t, \quad (2.18)$$

$$0 = (g_{xx} \dot{x} + g_{xt}) \dot{x} + g_x \ddot{x} + (g_{tx} \dot{x} + g_{tt}), \quad (2.19)$$

cela donne

$$0 = g_{xx} f^2 + g_{xt} f + g_x (f_x f + f_z \dot{z} + f_t) + g_{tx} f + g_{tt},$$

par équivalence, on a

$$-(g_x f_z) \dot{z} = g_{xx} f^2 + g_{xt} f + g_x f_x f + g_x f_t + g_{tx} f + g_{tt}.$$

Enfin, la dérivée de z est

$$\dot{z} = -(g_x f_z)^{-1} (g_{xx} f^2 + g_{xt} f + g_x f_x f + g_x f_t + g_{tx} f + g_{tt}).$$

Exemple 2.3.4. Soit le système

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(t), \\ \dot{x} + z(t) &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

là, $f(t, x, z) = -z(t)$ et $g(t, x) = \sin(t) - x(t)$. La variable algébrique $z(t)$ n'apparaît pas dans l'équation des contraintes. D'après la deuxième équation on a $z(t) = -\dot{x} = -\cos(t)$, donc

$\dot{z} = -\dot{x} = \sin(t)$. L'indice est égale à 2 car deux différenciations sont effectuées. On obtient l'EDO suivante

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos(t), \\ \dot{z} &= \sin(t),\end{aligned}\tag{2.21}$$

avec les valeurs initiales cohérentes :

$$\begin{aligned}x(0) &= \sin(0), \\ z(0) &= -\cos(0).\end{aligned}$$

2.3.4 L'indice 3 de Hessenberg

Soit le système d'EAD suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, y, z), \\ \dot{y} &= g(t, x, y), \\ 0 &= h(t, y).\end{aligned}\tag{2.22}$$

Ici, le produit des trois fonctions matricielles $h_y g_x f_z$ est non singulier [28].

L'indice d'une EAD de Hessenberg se trouve comme dans le cas général par la différenciation. Cependant, ici, seules les contraintes algébriques doivent être différenciées :

$$0 = h_t + h_y \dot{y} = h_t + h_y g(t, x, y) = \hat{h}(t, x, y),\tag{2.23}$$

et on note par

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t, x, y, z) \\ g(t, x, y) \end{pmatrix} = F(t, X, z), \\ 0 &= \hat{h}(t, x, y) = G(t, X),\end{aligned}\tag{2.24}$$

ces équations sont de la forme (2.17) avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On défini

$$H(t, X, z) = G_X(t, X)F(t, X, z),$$

et on compare avec (2.18). Pour montrer que (2.24) est d'indice 2, il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned}H_z(t, X, z) &= G_X(t, X)F_z(t, X, z) = \begin{pmatrix} \hat{h}_x & \hat{h}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_z \\ g_z \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} h_{yx}g(t, x, y) + h_y g_x & h_{yy}g(t, x, y) + h_y g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_z \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= h_y g_x f_z,\end{aligned}$$

reste non singulier. Cela montre que (2.22) est un système d'indice 3 si la matrice $h_y(t, y)g_x(t, x, y)f_z(t, x, y, z)$ est inversible au voisinage de la solution (x, y, z) .

Les contraintes cachées sont données par (2.23) et aussi par

$$H(t, X, z) = G_X(t, X)F(t, X, z) = h_y g_x f + h_{yy} g g + h_y g_y g,$$

qui est la condition (2.18) en terme du système (2.24) d'indice 2.

Remarque 2.5. Dans le cas général, chaque composant de x peut contenir un mélange des variables différentiels et algébriques, ce qui rend la solution numérique de ces problèmes à indice élevé beaucoup plus difficile.

Exemple 2.3.5. [30] On considère le système d'EAD suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 + x_1 - 1 &= 0, \\ t\dot{x}_2 + \dot{x}_3 + 2x_2 - 2t &= 0, \\ tx_2 + x_3 - e^t &= 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

aux conditions initiales

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

où x_2, x_3 représentent les variables différentielles et x_1 représente les variables algébriques. Les solutions exactes sont

$$x_1(t) = e^t - 1, \quad x_2(t) = 2t - e^t, \quad x_3(t) = (1 + t)e^t - 2t^2.$$

Après trois fois de différenciation de (2.25), on obtient le système d'EDO suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= e^t, \\ \dot{x}_2 &= 2 - e^t, \\ \dot{x}_3 &= tx_1 - 2x_2 + t, \end{aligned} \tag{2.27}$$

Cette équation algébro-différentielle est d'indice 3 de Hessenberg.

Exemple 2.3.6. [28] On considère le modèle d'EAD pour le pendule simple (2.8). En différenciant la contrainte pour la première fois, on obtient

$$\begin{aligned} 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 &= 0, \\ 2x_1x_3 + 2x_2x_4 &= 0, \end{aligned}$$

et pour la deuxième fois, on trouve

$$\begin{aligned} 2(x_3\dot{x}_1 + x_1\dot{x}_3) + 2(x_4\dot{x}_2 + x_2\dot{x}_4) &= 0, \\ 2(x_3^2 - \lambda x_1^2) + 2(x_4^2 - (\lambda x_2 + g)x_2) &= 0, \\ 2(x_3^2 + x_4^2) - 2\lambda(x_1^2 + x_2^2) - 2gx_2 &= 0, \end{aligned}$$

et pour la troisième fois, on obtient

$$\begin{aligned} 4(x_3\dot{x}_3 + x_4\dot{x}_4) - 4\lambda(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2) - 2gx_4 &= 2\dot{\lambda}(x_1^2 + x_2^2), \\ 4(-\lambda x_1x_3 - \lambda x_2x_4 - gx_4) - 4\lambda(x_1x_3 + x_2x_4) - 2gx_4 &= 2\dot{\lambda}. \end{aligned}$$

Ainsi, les EDO purs sont

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= -\lambda x_1, \\ \dot{x}_4 &= -\lambda x_2 - g, \\ \dot{\lambda} &= -4\lambda(x_1x_3 + x_2x_4) - 3gx_4. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Évidemment, le système d'EDA (2.8) est d'indice 3.

2.4 La linéarisation d'EAD le long des trajectoires

On suppose que l'EAD (2.2) est un système de n équations dont la variable (t, x, \dot{x}) est de dimension $(2n + 1)$, et on suppose que $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ est toujours singulière. On suppose aussi que F est suffisamment différentiable, afin que toutes les différenciations nécessaires puissent être effectuées. De plus, en supposant qu'il existe une solution constante \bar{x} pour (2.2) et soit $\hat{x} = x - \bar{x}$ [29]. Alors,

a) La linéarisation non autonome de (2.2) le long de la solution constante \bar{x} est :

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, \bar{x}, 0)\dot{\hat{x}} + \frac{\partial F}{\partial x}(t, \bar{x}, 0)\hat{x} = 0, \tag{2.29}$$

notez que $F(t, \bar{x}, 0) \equiv 0$ par définition.

b) La linéarisation autonome de (2.2) le long de la solution constante \bar{x} proche de t_0 est :

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_0, \bar{x}, 0)\dot{\hat{x}} + \frac{\partial F}{\partial x}(t_0, \bar{x}, 0)\hat{x} = 0, \tag{2.30}$$

où encore $F(t, \bar{x}, 0) \equiv 0$ par l'hypothèse \bar{x} est une solution constante.

Supposons maintenant que \bar{x} est une solution non constante de (2.2). Encore une fois, $\hat{x} = x - \bar{x}$. Alors,

$$F(t, x, \dot{x}) = F(t, \hat{x} + \bar{x}, \dot{\hat{x}} + \dot{\bar{x}}) = \hat{F}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}).$$

Les définitions de la linéarisation non autonome et la linéarisation autonome de (2.2) le long de \bar{x} sont les linéarisations correspondantes de \hat{F} le long de 0. Donc

c) La linéarisation non autonome :

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \dot{\hat{x}}}(t, 0, 0)\dot{\hat{x}} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{x}}(t, 0, 0)\hat{x} = 0, \tag{2.31}$$

qui est,

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))\dot{\bar{x}} + \frac{\partial F}{\partial x}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))\bar{x} = 0, \quad (2.32)$$

par équivalence,

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))\dot{\bar{x}} + \frac{\partial F}{\partial x}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))\bar{x} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))\dot{\bar{x}} + \frac{\partial F}{\partial x}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))\bar{x}. \quad (2.33)$$

d) La linéarisation autonome devient

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0))\dot{\bar{x}} + \frac{\partial F}{\partial x}(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0))\bar{x} = 0. \quad (2.34)$$

2.5 Analyse de stabilité des EAD semi-explicites

On considère les équations algébro-différentielles semi-explicites paramétrées d'indice 1 données par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, p), \\ 0 &= g(x, y, p), \end{aligned} \quad (2.35)$$

où $f : \mathbb{R}^{n+m+q} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^{n+m+q} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ et $p \in P \subset \mathbb{R}^q$. Dans l'espace d'état $X \times Y$, les variables d'état dynamiques x et les variables d'état instantanées y sont distinguées. Les dynamiques des variables x sont définies par $\dot{x} = f(x, y, p)$, tandis que les dynamiques des variables y ce font lorsque le système satisfait les contraintes $g(x, y, p) = 0$. Les paramètres p définissent une configuration d'un système spécifique et les conditions de fonctionnement [32].

La stabilité des équilibres

Soient EQ l'ensemble des équilibres et OP l'ensemble des équilibres stables. Les définitions de ces ensembles sont donnés respectivement par :

$$EQ = \{(x, y, p) \in X \times Y \times P : f(x, y, p) = 0, g(x, y, p) = 0\}, \quad (2.36)$$

$$OP = \{(x, y, p) \in EQ : \det(D_y g) \neq 0, \tilde{J} = D_x f - D_y f (D_y g)^{-1} D_x g, \text{Re} \lambda(\tilde{J}) < 0\}. \quad (2.37)$$

Ici, $D_x f$ dénote la matrice des dérivées partielles des composantes de f par rapport à x [32].

L'ensemble singulier de (2.35) pour une valeur arbitraire de p est défini par [33] :

$$S = \{(x, y, p) \in X \times Y \times P : \det(D_y g) = 0\}, \quad (2.38)$$

Définition 2.5.1. [32] (*Points singuliers*) On suppose que $(x^*, y^*, p^*) \in S$, alors (x^*, y^*, p^*) s'appelle un point singulier du système (2.35).

Notez que le jacobien suivant

$$J = \begin{pmatrix} D_x f & D_y f \\ D_x g & D_y g \end{pmatrix},$$

est inversible pour tous $(x, y, p) \in OP$ et donc, par le théorème des fonctions implicites, les équations $f(x, y, p) = 0$ et $g(x, y, p) = 0$ peuvent être résolus uniquement pour x et y en fonction du paramètre p , localement proche de tous les points d'équilibres OP .

Définition 2.5.2. [33] (**Région de faisabilité**) Étant donné un équilibre stable (x^*, y^*) pour la valeur du paramètre p^* , le composant connecté F de OP qui contient (x^*, y^*, p^*) s'appelle la région de faisabilité de (x^*, y^*, p^*) . Sa frontière (relatif à EQ) s'appelle la frontière de faisabilité.

Théorème 2.5.1. [33] (**Théorème de la frontière de faisabilité**) Pour un système défini par (2.35), la frontière de faisabilité d'une région de faisabilité F se compose de trois ensembles suivants

$$\partial F = (\partial F \cap C_S) \cup (\partial F \cap C_Z) \cup (\partial F \cap C_H), \quad (2.39)$$

tel que

$$C_S = \{(x, y, p) \in EQ : \det(D_y g) = 0\}, \quad (2.40)$$

$$C_Z = \{(x, y, p) \in EQ : \det(D_y g) \neq 0, \det(J) = 0\}, \quad (2.41)$$

et

$$C_H = \{(x, y, p) \in EQ : \det(D_y g) \neq 0, \det(J) \neq 0, \det[H_{n-1}(\tilde{J})] = 0\}, \quad (2.42)$$

où

$$\tilde{J} = D_x f - D_y f (D_y g)^{-1} D_x g, \quad (2.43)$$

et H_{n-1} est la matrice de Hurwitz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & * & * & a_{2n-3} \\ a_0 & a_2 & a_4 & * & * & a_{2n-4} \\ 0 & a_1 & a_3 & * & * & a_{2n-5} \\ 0 & a_2 & a_4 & * & * & a_{2n-6} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

correspondant aux coefficients a_i du polynôme caractéristique de \tilde{J}

$$\det(sI - \tilde{J}) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n, \quad (2.45)$$

et $a_k = 0$ pour $k > n$.

Ces trois ensembles C_S , C_Z et C_H sont référés à des propriétés non linéaires spéciales qui sont respectivement :

- Équilibres à la singularité,
- Proximité d'équilibres multiples,
- Naissance d'un cycle limite.

De plus, les trois ensembles d'annulation correspondent à la perte de stabilité locale.

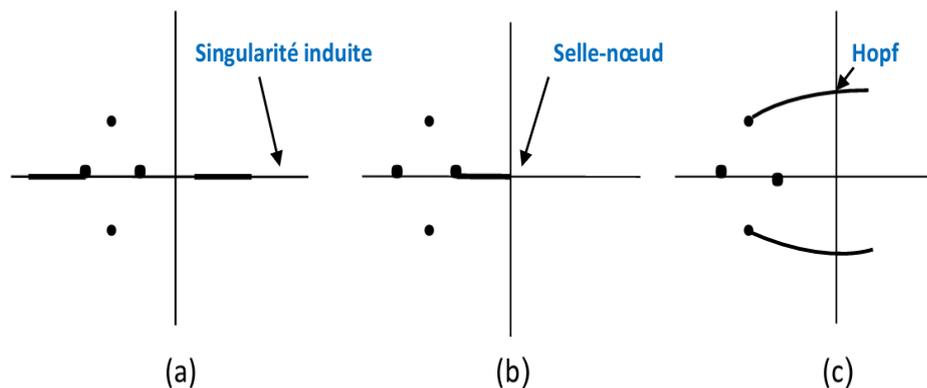


FIGURE 2.2 – Lieu des valeurs propres proche des trois ensembles : (a) valeurs propres illimitées dans l'ensemble C_S , (b) valeurs propres nulles dans C_Z , et (c) valeurs propres purement imaginaires dans l'ensemble C_H .

2.6 Bifurcations dans les EAD semi-explicites

Sous des conditions génériques, quelques bifurcations locales se produisent en tous les points situés dans les ensembles définis ci-dessus. Ces bifurcations sont appelées :

- Bifurcation induite par la singularité dans C_S ,
- Bifurcation selle-nœud dans C_Z ,
- Bifurcation de Hopf dans C_S .

2.6.1 Bifurcation induite par la singularité (BIS)

Des conditions conduisant au phénomène de bifurcation induite par la singularité ont été à l'origine énoncées par Venkatasubramanian et al [33]. Ils assurent que ce type de bifurcation se produise lorsqu'un équilibre traverse la surface singulière suivante

$$\Lambda := \left\{ (x, y, p) \in \mathbb{R}^{n+m+q} : g(x, y, p) = 0, \Delta(x, y, p) := \det [D_y g(x, y, p)] = 0 \right\}, \quad (2.46)$$

c'est un point dans l'ensemble C_S , et certaines conditions supplémentaires de transversalité sont satisfaites à (x, y, p) et sont données par :

- (i) $D_y g$ admet une valeur propre nulle simple et la $trace [D_y f adj(D_y g) D_x g]$ n'est pas nulle,
- (ii) J est non singulier,
- (iii) $\begin{pmatrix} D_x f & D_y f & D_p f \\ D_x g & D_y g & D_p g \\ D_x \Delta & D_y \Delta & D_p \Delta \end{pmatrix}$ est non singulier.

2.6.2 Bifurcation selle-nœud

Par définition, les points de l'ensemble C_Z ne sont pas singuliers, i.e., $det(D_y g) \neq 0$. Par conséquent, le théorème des fonctions implicites permet de réduire le système (2.35) au système différentiel

$$\dot{x} = f_R(x, p), \quad (2.47)$$

qui est localement proche au point (x^*, y^*, p^*) pour une fonction (unique) appropriée f_R . De plus, les points dans C_Z représentent des bifurcations selle-nœud si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) La matrice $D_x f_R = D_x f - D_y f (D_y g)^{-1} D_x g$ a une valeur propre nulle et simple avec un vecteur propre droit v et un vecteur propre gauche w , et il n'y a pas d'autre valeur propre sur l'axe imaginaire,
- (ii) $w^T (D_p f_R) = w^T [D_p f - D_y f (D_y g)^{-1} D_p g] \neq 0$,
- (iii) $w^T [D_x^2 f_R(v, v)] \neq 0$.

Au niveau des bifurcations selle-nœud dans la frontière de faisabilité, les équilibres stables et instables se rencontrent puis disparaissent, entraînant une perte d'équilibres localement proche au point de bifurcation du mauvais côté de la frontière de faisabilité [32].

2.6.3 Bifurcation de Hopf

Pour le système (2.35), la fonction Hurwitz H_{n-1} détecte la présence des valeurs propres purement imaginaires, quand le jacobien \tilde{J} n'a pas de valeur propre avec une partie réelle positive comme sur la frontière de faisabilité. L'hypothèse $det(\tilde{J}) \neq 0$ implique qu'il existe localement un lieu d'équilibres régulier, $[x(p), y(p), p]$, avec les valeurs propres $\lambda(p), \bar{\lambda}(p)$ de $D_x f_R$ qui sont imaginaires et varient régulièrement avec p . Une bifurcation de Hopf se produit à tout point dans G_H telle que les conditions de transversalité suivantes sont satisfaites [32] :

- (H1) $\tilde{J} = D_x f_R$ admet une paire simple des valeurs propres purement imaginaires, et il n'y a pas d'autre valeur propre sur l'axe imaginaire,

H2) $D_p R(\lambda(p)) \neq 0$.

Remarque 2.6. *Une autre méthode pour analyser la bifurcation de Hopf à travers un point d'équilibre d'un système d'équations algébro-différentielles semi explicites en utilisant la théorie de bifurcation et la théorie de forme normale sera présentée dans le dernier chapitre.*

Chapitre 3

Systemes dynamiques en biologie et écologie

Les systemes dynamiques sont également utilisés dans un domaine de recherche extensive appelé la biologie, en particulier l'écologie. Ce chapitre est une revue de la biologie mathématique ou autrement dit la biomathématique. Dans ce chapitre, on va utiliser brièvement les techniques développées dans les chapitres précédents pour examiner certains systemes non linéaires majeurs qui ont été présentés sous la forme des modèles mathématiques pour exprimer une variété des systemes biologiques. Une attention particulière sera accordée à la modélisation de la croissance des populations récoltés, les modèles bio-économiques et les systemes dépendants de l'âge. Finalement, on va conclure ce chapitre par la présentation de quelques concepts de base sur l'épidémiologie.

3.1 Modèles simples d'une seule espèce

Dans cette section, nous introduisons quelques principes de base sur le sujet et nous concentrons sur l'étude de la dynamique de certains modèles bien connus d'une seule population.

3.1.1 Modèle de Malthus

Ce modèle est une description mathématique de la croissance d'une population. Il est décrit par l'équation différentielle suivante (T. Malthus, 1802) :

$$\frac{dx}{dt} = bx - dx,$$

où, $x(t)$ est la taille de la population (le nombre d'individus), $\frac{dx}{dt}$ ou $\dot{x}(t)$ est le taux de changement de la taille de la population, b est le coefficient de natalité, et d est le coefficient de mortalité. Ce modèle peut s'exprimer aussi par l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad (3.1)$$

où, $r = b - d$ est le coefficient de croissance intrinsèque de la population. L'équation (3.1) est le différentiel linéaire le plus simple, son solution est l'exposant $x(t) = x_0 e^{rt}$, où $x_0 = x(0)$. Cette solution croît de façon exponentielle pour les taux de croissance intrinsèques positifs et décroît de façon exponentielle pour les taux de croissance intrinsèques négatifs. Il reste constant lorsque les naissances équilibrent les décès.

L'analyse de modèle

La taille de la population $x^* = 0$ est un point d'équilibre. Puisqu'il n'y a pas d'immigration ou d'émigration dans ce modèle, les populations qui commencent à zéro restent à zéro. Si $r > 0$ alors, cet équilibre est instable, sinon, il est asymptotiquement stable (voir la figure 3.1). L'hypothèse selon laquelle le taux de croissance d'une popu-

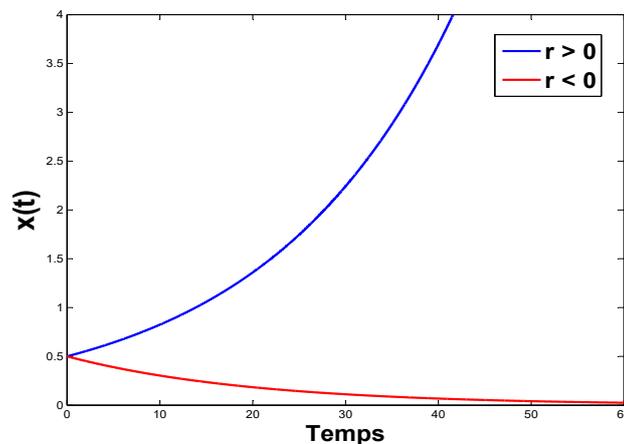


FIGURE 3.1 – Le trajectoire de la population.

lation est proportionnel à sa taille (hypothèse linéaire) est généralement irréaliste sur des échelles de temps plus longues [38]. La première modification consisterait alors à insérer un terme de correction pour tenir compte du fait que les ressources sont effectivement limitées. Un tel modèle est décrit dans la sous-section suivante.

3.1.2 Modèle de Verhulst-Pearl

Ce modèle décrit une loi de croissance suffisamment réelle pour de nombreuses populations de micro-organismes, végétaux, animaux ainsi qu'humains [36]. Ce modèle

est représenté par l'équation différentielle non linéaire suivante (P.E. Verhulst, 1838 ; R. Pearl, 1928) :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (3.2)$$

où les paramètres r et K sont positifs. Le constant K est la capacité de charge de l'environnement, qui est généralement déterminée par les ressources de soutien disponibles. Cette équation est également connue sous le nom d'équation logistique. Sa solution est $x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}$ où $x_0 = x(0)$. Cette solution est valable pour $0 < x_0 < K$.

L'analyse de modèle

Le modèle a deux états d'équilibre : $x_1^* = 0$ qui est instable et $x_2^* = K$ qui est stable, à chacune de ces deux valeurs, le taux de croissance de la population est égal à zéro. On voit facilement que $x(t) \rightarrow K$ lorsque $t \rightarrow \infty$, et pour $x/K \ll 1$ le modèle (3.2) conduit au modèle de Malthus (3.1).

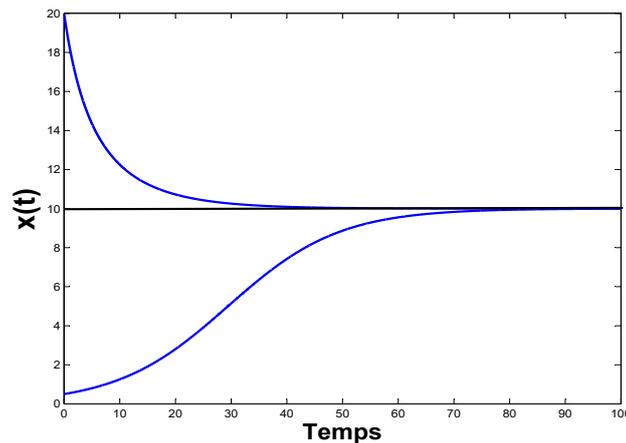


FIGURE 3.2 – Courbes de solution de l'équation logistique avec $r = 0.1$ et $K = 10$.

3.1.3 Modèle de Gompertz

En général, l'équation de Gompertz a été formulée comme une loi de survie décroissante (Gompertz 1825), et il est utilisé pour décrire plusieurs modèles mathématiques [39]. L'équation croissante de Gompertz est de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = rx \ln\left(\frac{K}{x}\right) = f(x), \quad (3.3)$$

où, r et K sont des constantes positives appelées : le taux de croissance et la capacité de charge, respectivement. La solution de cette équation est donnée par : $x(t) = Ke^{ce^{-rt}}$ où, $c = \ln\left(\frac{x_0}{K}\right)$ et $x_0 = x(0)$.

L'analyse de modèle

L'équation de Gompertz a deux points d'équilibre : $x_1^* = 0$ et $x_2^* = K$. La dérivée de (3.3) est

$$f'(x) = r \left(\ln \left(\frac{K}{x} \right) - 1 \right), \quad (3.4)$$

par substitution on a : $\frac{df}{dt}(K) = -r$ ce qui signifie que $x_2^* = K$ est stable. Mais la dérivée n'est pas définie à $x_1^* = 0$. Dans ce cas, on a besoin d'étudier la fonction $f(x)$. Cette fonction est positive pour $0 < x < K$ et tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Évidemment, l'origine est instable.

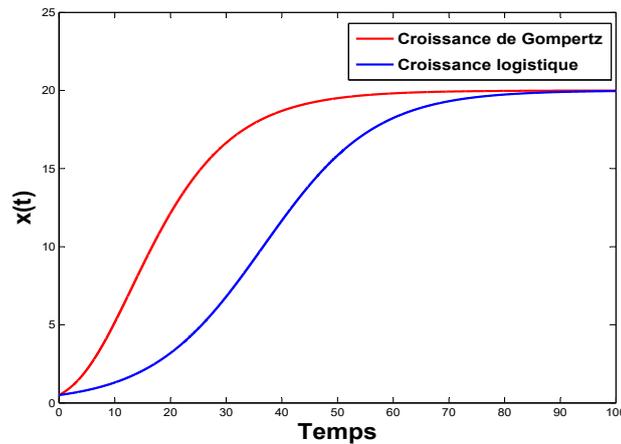


FIGURE 3.3 – Comparaison des chroniques des solutions de l'équation logistique et celle de Gompertz avec les mêmes valeurs de $r = 0.1$ et $K = 20$.

3.1.4 Modèle avec Effet-Allee

Considérons l'équation différentielle simple :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(\frac{x}{K_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{x}{K} \right) = f(x), \quad (3.5)$$

où les paramètres r , K_0 , et K sont supposés positifs pour avoir une signification biologique et de plus $0 < K_0 < K$.

L'analyse de modèle

Le modèle a trois états d'équilibre : $x_1^* = 0$, $x_2^* = K_0$, et $x_3^* = K$. À chacune de ces trois valeurs, le taux de croissance de la population est égal à zéro. La dérivée de $f(x)$ est :

$$f'(x) = r \left(-\frac{3x^2}{K_0K} + 2 \left(\frac{K_0 + K}{K_0K} \right) x - 1 \right).$$

La stabilité des équilibres est discuté comme suit :

- 1) $f'(0) = -r < 0$, l'origine est de nature stable.
- 2) $f'(K_0) = r(-(K_0/K) + 1) > 0$, le point d'équilibre K_0 est instable.
- 3) $f'(K) = r(-(K/K_0) + 1) < 0$, le point d'équilibre K est stable.

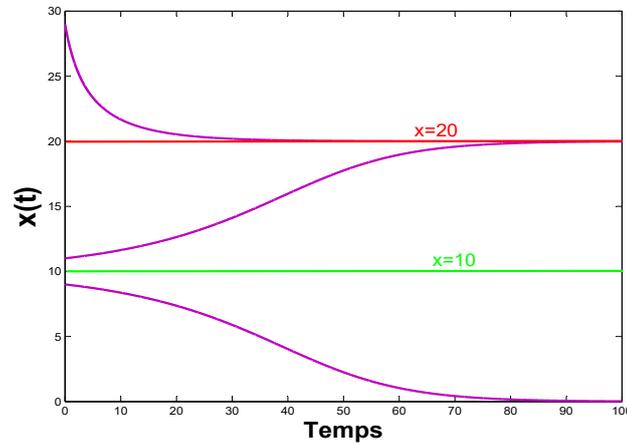


FIGURE 3.4 – Chroniques de l'équation de croissance de type Effet-Allee d'une population obtenus pour $r = 0.1$, $K_0 = 10$ et $K = 20$.

3.2 Modèles de populations en interaction

Les modèles de croissance considérés dans la section précédente consistaient en une seule population. Lorsque les espèces interagissent, la dynamique des populations de chaque espèce est affectée [21]. Dans la section présente, on s'intéresse à l'étude des phénomènes biologiques et écologiques très intéressants en étudiant les interactions entre les espèces ou les populations. Pour commencer à comprendre la dynamique des populations en interaction dans tels systèmes, on commence par étudier l'interaction entre deux populations. Pour cela, on va utiliser une simple paire d'équations différentielles pour décrire un système composé de deux populations ayant des densités $x(t)$ et $y(t)$ de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + h(x, y), \\ \dot{y} &= g(y) + k(x, y). \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $f(x)$ et $g(y)$ sont des fonctions continuellement différentiables qui représentent la croissance de la population isolée. Les termes $h(x, y)$ et $k(x, y)$ sont également des fonctions continuellement différentiables de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , ils décrivent l'interaction entre les deux populations. Conformément aux signes des fonctions $h(x, y)$ et $k(x, y)$, plusieurs

cas sont possibles :

- $(-, +)$ ou $(+, -)$: \Rightarrow relation proie-prédateur ou parasite-hôte (négatif pour l'espèce 1, positif pour l'espèce 2 ou l'inverse).
- $(-, -)$: \Rightarrow compétition (l'interaction est négative pour les deux espèces).
- $(+, +)$: \Rightarrow symbiose (positive pour les deux espèces).
- $(-, 0)$: \Rightarrow amensalisme (négatif pour l'espèce 1, neutre pour l'espèce 2).
- $(+, 0)$: \Rightarrow commensalisme (positif pour l'espèce 1, neutre pour l'espèce 2).

Ces types d'interaction possèdent des comportements qualitatifs différents (les dynamiques des trajectoires du modèle (3.6) sont différentes et peuvent être simples ou très complexes). Plus de détails sur ces types de modèles seront examinés dans la prochaine sous-section.

3.2.1 Systèmes proie-prédateur

La dynamique la plus intéressante et la plus complexe est inhérente à la communauté proie-prédateur. La terminologie prédation est une interaction biologique où un prédateur se nourrit d'une proie. La prédation se produit dans une grande variété de scénarios, par exemple dans les interactions dans la vie sauvage (lions chassant les zèbres, les renards chassant les lapins, etc), dans les interactions herbivore-plante, et dans les interactions parasite-hôte [44]. La forme générale d'un système proie-prédateur est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) - h(x, y), \\ \dot{y} &= g(y) + eh(x, y).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Où le signe négatif avant $h(x, y)$ signifie que l'interaction avec les prédateurs a un effet négatif sur la croissance des proies. Le paramètre e est le taux de conversion de la biomasse des proies en biomasse des prédateurs.

Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

Ce modèle est probablement le modèle mathématique le plus connu dans l'écologie mathématique. Il est décrit par un système de deux équations différentielles non linéaires suivant (A.J. Lotka 1924, V. Volterra, 1926) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx - cxy, \\ \dot{y} &= -my + bxy.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Là, $x(t)$ dénote le nombre (ou la densité) des proies et $y(t)$ représente le nombre (ou la densité) des prédateurs, r est le coefficient de natalité des proies, m est le coefficient de mortalité des prédateurs, le terme cxy décrit les dommages causés aux populations

des proies par les prédateurs, le terme bxy décrit l'augmentation de la densité des prédateurs grâce à la consommation des proies.

L'analyse de modèle

Le modèle possède les régimes singuliers suivants :

- 1) L'état d'équilibre trivial $x = y = 0$ (pas des proies et pas des prédateurs).
- 2) $y(t) = y(0)e^{-mt}$ à $x = 0$ (en l'absence des proies, les prédateurs disparaissent).
- 3) $x(t) = x(0)e^{rt}$ à $y = 0$ (en l'absence des prédateurs, les proies se reproduisent indéfiniment, car le modèle ne prend pas en compte l'épuisement des ressources alimentaires des proies).
- 4) L'état d'équilibre non trivial $x^* = r/c, y^* = m/b$ (les densités des proies et des prédateurs s'équilibrent).

On peut éliminer t de l'équation de Lotka–Volterra, par division on obtient

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{(-m + bx)y}{(r - cy)x},$$

on peut résoudre cette équation différentielle par la méthode de séparation des variables :

$$\int \frac{-m + bx}{x} dx = \int \frac{r - cy}{y} dy,$$

$$bx - m \ln x = -cy + r \ln y + h,$$

où h est la constante d'intégration, ou

$$h = bx - m \ln x + cy - r \ln y,$$

pour différentes valeurs du paramètre $h > 0$. Ces courbes tendent vers une forme d'ellipse pour $h \ll 1$ et à un triangle pour $h \gg 1$.

Systèmes proie-prédateur réalistes

Le modèle de Lotka–Volterra (3.8) est irréaliste car il prédit des centres structurellement instables ce qui signifie que les solutions périodiques ne sont pas généralement conservées pour les petites perturbations de ce modèle [45]. En outre, parmi les hypothèses irréalistes de ce modèle est que la croissance des proies est illimitée en l'absence de prédation. Pour être plus réalistes, ces taux de croissance devraient dépendre à la fois aux densités de proies et de prédateurs comme dans le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xf(x, y), \\ \dot{y} &= yg(x, y). \end{aligned} \tag{3.9}$$

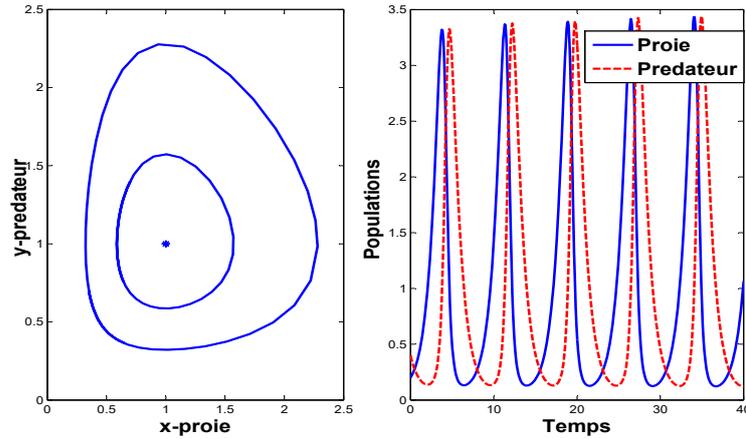


FIGURE 3.5 – Solutions de modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra (3.8) avec $r = c = m = b = 1$, dans le plan de phase et en fonction du temps.

où les formes de f et g dépendent de l'interaction, de l'espèce, etc. Ainsi, par exemple, une équation de population des proies plus réaliste pourrait prendre la forme suivante :

$$\dot{x} = xf(x, y), \quad f(x, y) = r\left(1 - \frac{x}{K}\right) - yR(x), \quad (3.10)$$

où K est un constant représente la capacité de charge des proies lorsque $y \equiv 0$. $R(x)$ sont les termes de prédation qui représentent le nombre des proies consommées par un seul prédateur par unité de temps ou autrement dit $R(x)$ est la réponse fonctionnelle. Au lieu de la réponse de prédateur de la forme cxy (Holling I) comme dans le modèle de Lotka–Volterra (3.8), on prend $xyR(x)$ où $xR(x)$ sature pour x grand. Voici quelques formes de $R(x)$:

$$R(x) = \frac{a}{x + b'}, \quad (\text{Holling type II}),$$

$$R(x) = \frac{ax}{x^2 + b^2}, \quad (\text{Holling type III}),$$

$$R(x) = \frac{ax}{1 + bx + cy'}, \quad (\text{Beddington}),$$

$$R(x) = \frac{a(1 - e^{-bx})}{x}.$$

L'équation de la population de prédateurs, la deuxième de (3.8), devrait également être rendu plus réaliste que celui de $g(x, y) = -m + bx$ dans le modèle de Lotka–Volterra (3.8). Les formes possibles sont :

$$g(x, y) = h\left(1 - \frac{py}{x}\right) \quad \text{ou} \quad g(x, y) = -m + eR(x), \quad (3.11)$$

où h, p, m et e sont des constantes positives et $R(x)$ prend une forme parmi les formes précédentes. La première forme en (3.11) signifie que la capacité de charge du prédateur est proportionnelle directement à la densité des proies.

Modèle de Kolmogrov

Le modèle de Kolmogrov (1936) est l'un des nombreux modèles généralisés de la communauté des proies-prédateurs. Ce modèle est donné par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xf(x) - yR(x), \\ \dot{y} &= yg(x, y).\end{aligned}\tag{3.12}$$

où $R(x)$ est la réponse fonctionnelle mentionné précédemment, f et g sont les coefficients de croissance intrinsèques des proies et des prédateurs. De nombreuses modifications du modèle général (3.12) ont été proposées pour expliquer les différents modèles dans la dynamique des communautés proies-prédateurs observées. Quelques exemples sont :

- $f(x) = a - \mu x$: comptabilité de la compétition intra-espèce des proies.
- $g(x, y) = b - \alpha x/y$ ou $g(x, y) = b - \alpha xy$ ou $g(x, y) = b(1 - e^{-\alpha x})$: délimitation de la population des prédateurs.
- $R(x)$ prend une forme parmi les formes précédentes et elle se réfère à la délimitation de la population des prédateurs.

Un tel modèle qui considère la compétition intra-espèce entre les proies est de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a - \mu x - \delta y), \\ \dot{y} &= y(\beta x - b).\end{aligned}\tag{3.13}$$

L'état d'équilibre non trivial de ce modèle est $(x^*, y^*) = (b/\beta, (a\beta - \mu b)/\delta\beta)$. La matrice de communauté à laquelle est donnée par

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -\mu x^* & -\delta y^* \\ \beta y^* & 0 \end{pmatrix},$$

dans ce cas, $tr(J) = -\mu x^*$ et $det(J) = \delta\beta x^* y^*$. Par conséquent, lorsque le point (x^*, y^*) est dans le quadrant positif, alors la trace sera négative et le déterminant sera positif. Cela assure la stabilité de ce point d'équilibre.

3.2.2 Espèces en compétition

La compétition est une interaction entre les organismes, ou les espèces, partageant des ressources dont l'offre est limitée. De nombreux écologistes accordent plus d'importance à la compétition qui joue un rôle prépondérant dans la structuration des

communautés écologiques. Un modèle qui décrit deux espèces en compétition est de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xf(x, y), \\ \dot{y} &= yg(x, y).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Il est raisonnable de supposer que $f_x(x, y) < 0$ et $g_y(x, y) < 0$ pour $x > 0, y > 0$ et aussi que $f_y(x, y) < 0$ et $g_x(x, y) < 0$ pour $x > 0, y > 0$ ce qui signifie qu'une augmentation de la taille de l'une de deux populations mène à diminuer le taux de croissance de l'autre population. Prenons par exemple un système de populations en compétition donné par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r_1x\left(1 - \frac{x}{k_1}\right) - b_1xy, \\ \dot{y} &= r_2y\left(1 - \frac{y}{k_2}\right) - b_2xy.\end{aligned}\tag{3.15}$$

où r_1 et r_2 sont les taux de croissance des deux populations x et y respectivement. k_1 et k_2 sont les capacités de charge qui limitent la croissance de chaque population. b_1 et b_2 sont les taux par lesquels le concurrent y tue x et vice versa. Le système (3.15) possède quatre points fixes : $(0, 0)$, $(k_1, 0)$, $(0, k_2)$ et

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\beta_1 k_2 - k_1}{\beta_1 \beta_2 - 1}, \frac{\beta_2 k_1 - k_2}{\beta_1 \beta_2 - 1} \right), \quad \text{où } \beta_i = \frac{k_i b_i}{r_i} \quad (i = 1, 2).$$

Les deux points d'équilibre $(k_1, 0)$ et $(0, k_2)$ décrivent une situation dans laquelle une espèce survit mais l'autre espèce perd la lutte pour l'existence et s'éteint. Le dernier équilibre (x^*, y^*) décrit la coexistence des deux espèces et ne se produit que lorsque $(k_1 > r_2/b_2$ et $k_2 > r_1/b_1)$ ou $(k_1 < r_2/b_2$ et $k_2 < r_1/b_1)$.

Analyse de stabilité

La matrice de communauté est

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r_1 - \frac{2r_1}{k_1}x - b_1y & -b_1x \\ -b_2y & r_2 - \frac{2r_2}{k_2}y - b_2x \end{pmatrix}.$$

1) Pour l'équilibre $(0, 0)$ on a

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix},$$

de toute évidence, c'est un nœud instable.

2) Pour l'équilibre $(k_1, 0)$ on a

$$J(k_1, 0) = \begin{pmatrix} -r_1 & -b_1k_1 \\ 0 & r_2 - b_2k_1 \end{pmatrix},$$

il y a deux cas : si $k_1 > r_2/b_2$, alors l'équilibre $(k_1, 0)$ est un nœud stable, sinon, c'est un nœud instable.

3) Pour l'équilibre $(0, k_2)$ on a

$$J(0, k_2) = \begin{pmatrix} r_1 - b_1 k_2 & 0 \\ -b_2 k_2 & -r_2 \end{pmatrix},$$

il y a deux cas : si $k_2 > r_1/b_1$, alors l'équilibre $(0, k_2)$ est un nœud stable, sinon, c'est un nœud instable.

Remarque 3.1. Nous ignorons les possibilités $r_1 - b_1 k_2 = 0$ (qui donnerait $x^* = 0$) et $r_2 - b_2 k_1$ (qui donnerait $y^* = 0$).

4) Pour le point d'équilibre intérieur (x^*, y^*) on a

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -\frac{r_1}{k_1} x^* & -b_1 x^* \\ -b_2 y^* & -\frac{r_2}{k_2} y^* \end{pmatrix},$$

la trace correspondante est $tr(J) = -\left(\frac{r_1}{k_1} x^* + \frac{r_2}{k_2} y^*\right)$, il est toujours négatif tandis que le discriminant $\Delta = \left(\frac{r_1}{k_1} x^* - \frac{r_2}{k_2} y^*\right)^2 + 4b_1 b_2 x^* y^*$ est positif. Le déterminant $Det(J) = \left(\frac{r_1 r_2}{k_1 k_2} - b_1 b_2\right) x^* y^*$ est positif si $k_1 < \frac{r_2}{b_2}$ et $k_2 < \frac{r_1}{b_1}$, dans ce cas là, l'équilibre intérieur (x^*, y^*) est un nœud asymptotiquement stable.

3.2.3 Modèles de mutualisme ou de symbiose

Il existe des situations dans lesquelles l'interaction entre les espèces est mutuellement bénéfique, par exemple, les systèmes plante-pollinisateur. L'interaction peut être facultative, ce qui signifie que les deux espèces pourraient survivre séparément, ou obligatoire, ce qui signifie que chaque espèce s'éteindra sans l'aide de l'autre [36]. Un tel modèle mutualiste raisonnable à deux espèces avec des capacités de charge limitées pour les deux espèces est de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r_1 x \left(1 - \frac{x}{k_1} + b_1 \frac{y}{k_1}\right), \\ \dot{y} &= r_2 y \left(1 - \frac{y}{k_2} + b_2 \frac{x}{k_2}\right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

où r_1, r_2, k_1, k_2, b et c sont toutes des constantes positives. En utilisant la nondimensionalisation suivante :

$$u_1 = \frac{x}{k_1}, v = \frac{y}{k_2}, \tau = r_1 t, \rho = \frac{r_2}{r_1}, c_1 = b_1 \frac{k_2}{k_1}, c_2 = b_2 \frac{k_1}{k_2},$$

le modèle (3.16) devient

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u(1 - u + c_1 v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= \rho v(1 - v + c_2 u). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les états stationnaires et les singularités du plan de phase sont :

$$(u_0, v_0) = (0, 0), (u_1, v_1) = (1, 0), (u_2, v_2) = (0, 1), (u^*, v^*) = \left(\frac{1 + c_1}{1 - c_1 c_2}, \frac{1 + c_2}{1 - c_1 c_2} \right).$$

Le dernier équilibre admet une signification biologique si $u^* \geq 0, v^* \geq 0$ sont finis dans le cas où $1 - c_1 c_2 \neq 0$. La stabilité des états stationnaires de (3.17) est encore déterminée par la matrice de communauté suivante :

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - 2u + c_1 v & c_1 u \\ \rho c_2 v & \rho(1 - 2v + c_2 u) \end{pmatrix}$$

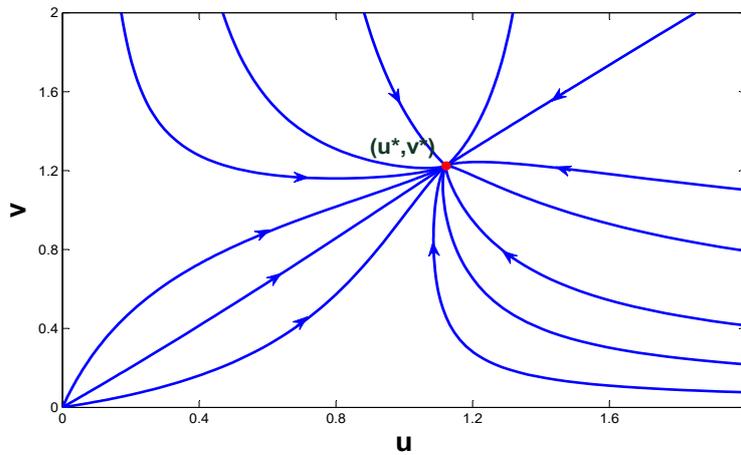


FIGURE 3.6 – Cas de mutualisme faible, $c_1 c_2 < 1$. Les deux populations coexistent. $c_1 = 0.1, c_2 = 0.2, \rho = 1$.

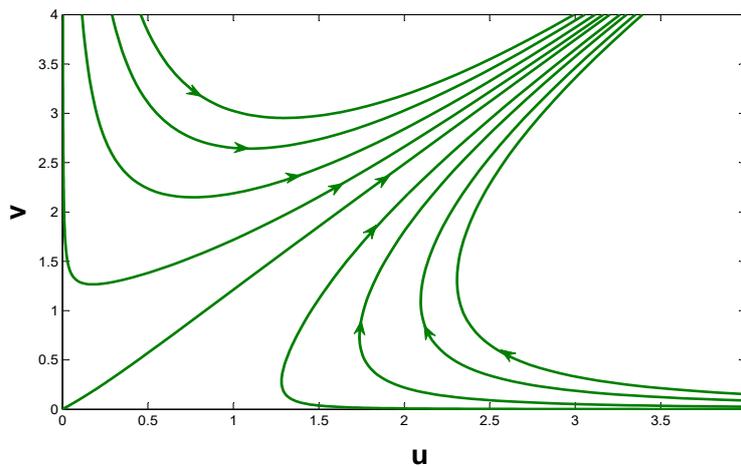


FIGURE 3.7 – Cas de mutualisme fort, $c_1 c_2 > 1$. La croissance des populations tend vers l'infini. $c_1 = 1, c_2 = 1.5, \rho = 1$.

- Le premier état stationnaire $(0, 0)$ est un nœud instable puisque les valeurs propres de la matrice de communauté $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \rho$ sont positifs.
- Le deuxième état stationnaire $(1, 0)$ est un point selle puisque la matrice de communauté a une valeur propre négative $\lambda_1 = -1$ et une positive $\lambda_2 = \rho(1 + c_2)$.
- De même, pour le troisième équilibre $(0, 1)$ elle est toujours un point selle puisque la matrice de communauté a une valeur propre négative $\lambda_1 = -\rho$ et une positive $\lambda_2 = 1 + c_1$.
- Enfin, pour le dernier état stationnaire (u^*, v^*) , lorsqu'elle existe dans le quadrant positif, la matrice J à laquelle est

$$J(u^*, v^*) = \begin{pmatrix} -u^* & c_1 u^* \\ c_2 v^* & -\rho v^* \end{pmatrix}.$$

Clairement, la trace est négative. Le signe du déterminant dépend des valeurs des paramètres :

- (i) Si $c_1 c_2 < 1$, alors $\det(J) > 0$, le point d'équilibre (u^*, v^*) est globalement asymptotiquement stable ce qui signifie que les deux populations coexistent au cours du temps (cas de mutualisme faible).
- (i) Si $c_1 c_2 > 1$, alors $\det(J) < 0$, l'équilibre (u^*, v^*) est instable ainsi que les deux équilibres (u_1, v_1) et (u_2, v_2) . Les trajectoires vont à l'infini. Ce résultat vient du fait que chaque population exerce un effet positif sur la croissance de l'autre. Cette croissance est sans limite (cas de mutualisme fort).

3.3 Modèles bio-économiques

Nous vivons dans une économie mondiale. Les populations du monde augmentent à un rythme toujours croissant, ce qui entraîne une augmentation de la demande de produits et de biens. Certains de ces biens proviennent de ressources renouvelables. Un sujet important qui se développe rapidement est de la bio-économie mathématique. C'est l'étude de la gestion des ressources renouvelables. Il prend en compte non seulement les questions économiques (revenus, coût, etc) mais aussi l'impact de la demande sur la ressource. De plus, la bio-économie mathématique est un domaine de recherche fertile basé sur l'étude des modèles à deux composantes, l'une économique et l'autre biologique [37], de sorte que

- **Économiquement**, les modèles sont basés sur la notion de maximisation du profit, c'est-à-dire de maximisation de la valeur actuelle des revenus nets.
- **Biologiquement**, les modèles sont caractérisés par la dynamique des populations qu'ils incorporent.

Dynamique des modèles de populations récoltés

Il est nécessaire de développer une stratégie écologiquement acceptable pour la récolte de toute ressource renouvelable que ce soit les animaux, les poissons, les plantes ou autre. Pour étudier l'effet du retrait des membres d'une population (par la pêche ou par la chasse) sur un modèle de population à un taux spécifié, il faut ajouter un terme négatif dans l'équation $\dot{x} = f(x)$, donc la population récoltée est modélisée par l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x) - H(t), \quad (3.18)$$

où $x(t)$ représente la taille d'une population choisi au temps t et $H(t)$ est le taux de récolte [34].

Récolte à rendement constant

Si la fonction $H(t)$ est une constante H , de sorte que les membres sont enlevés au taux constant H par unité de temps, le modèle est

$$\dot{x} = f(x) - H. \quad (3.19)$$

Ce type de récolte survient lorsqu'un quota est spécifié [36]. Maintenant, on pose la question, quelle est la récolte durable maximale?. Pour $H < \max f(x)$, l'équation a deux équilibres, x_1^* (instable) $<$ x_2^* (stable). D'autre part, pour $H > \max f(x)$ il n'y a pas d'équilibre, et $dx/dt < 0$ pour toute x . Le cas particulier est

$$H = \max f(x) = f(x_{MSY})$$

donne lieu à un seul équilibre semi-stable $x = x_{MSY}$. Ce cas, qui est d'une importance fondamentale dans la gestion des ressources, est appelé rendement maximal durable (en anglais : maximum sustainable yield (MSY)). Par exemple, lorsque la population est régie par une équation logistique, le modèle avec récolte est de la forme

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - H, \quad (3.20)$$

les équilibres sont des solutions du polynôme quadratique : $-rx^2 + rKx - KH = 0$. Leur existence et leur nombre dépendent du signe du discriminant $\Delta = r^2K^2 - 4rKH$, donc on a deux cas

- (i) Si $H > rK/4$, alors $\Delta < 0$, il n'y a pas d'équilibre, $\dot{x}(t) < 0$ pour tout x ce qui montre que la population est surexploitée et va à l'extinction au cours du temps.
- (ii) Si $H < rK/4$, alors $\Delta > 0$, deux points d'équilibre positifs se produisent :

$$x_1^* = \frac{rK - \sqrt{r^2K^2 - 4rKH}}{2r}, \quad x_2^* = \frac{rK + \sqrt{r^2K^2 - 4rKH}}{2r}.$$

La stabilité d'un équilibre x^* de $\dot{x} = f(x) - H$ nécessite $f'(x) < 0$. Donc, x_1^* est toujours instable et x_2^* est asymptotiquement stable. Pour toutes les conditions initiales $0 < x(0) < x_1^*$, la population tendra vers 0 (i.e. disparaîtra). Pour $x(0) > x_1^*$, la population tendra à sa capacité limite K . En général, on souhaite d'avoir le rendement maximale durable qui se produit à $H_{MSY} = \frac{rK}{4}$.

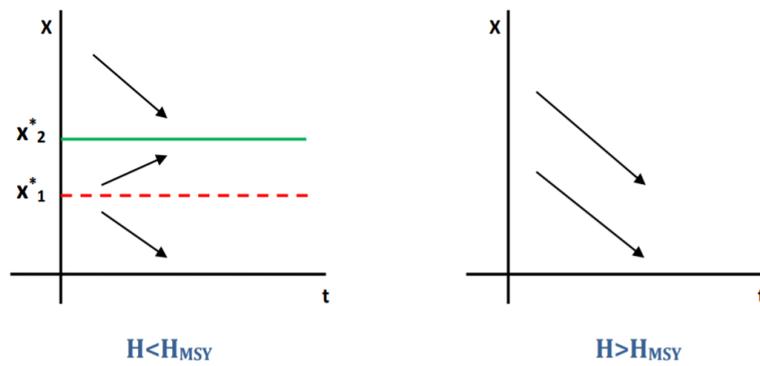


FIGURE 3.8 – Comportement des solutions soumises à une récolte à rendement constant.

Récolte à effort constant

Si la fonction $H(t)$ est une fonction linéaire de la taille de la population $H(t) = Hx(t)$, le modèle (3.19) sera :

$$\dot{x} = f(x) - Hx. \quad (3.21)$$

Ce type de récolte est également appelé récolte proportionnelle. Il survient dans la modélisation des pêcheries, où l'on suppose souvent que x , le nombre de poissons capturés par unité de temps, est proportionnel à H , qui est l'effort dépensé en pêche [36]. Si la population est régie par un modèle logistique, le modèle récolté est de la forme

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - Hx. \quad (3.22)$$

L'équilibre x^* existe si le taux de croissance de la population de poissons est égal au taux de récolte :

$$rx^* \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) = Hx^*,$$

On obtient deux équilibres : l'origine $x_1^* = 0$ qui est de nature instable, et $x_2^* = K(r - H)/r$ qui est asymptotiquement stable pour $0 \leq H \leq r$ (voir la figure 3.9). La figure 3.10 représente les solutions sans récolte et avec un effort de récolte inférieur et supérieur au taux de croissance de la population.

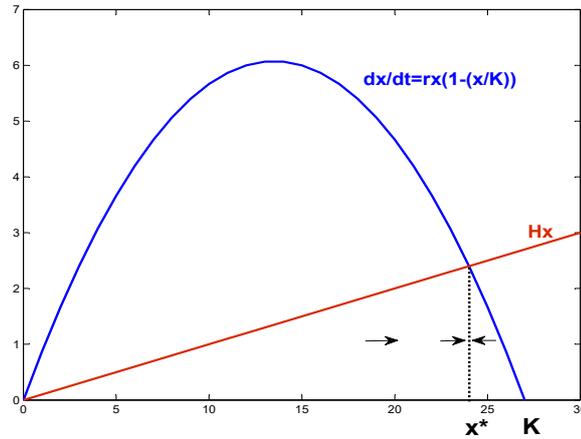


FIGURE 3.9 – Récolte à faible mortalité.

En revanche, dans la littérature, on retrouve la notion d'effort de récolte. Il joue un rôle important dans la modélisation des systèmes bio-économiques. Il est défini par :

Définition 3.3.1. [34] *Le concept d'effort de récolte apparue dans les pêcheries. L'effort de pêche est une mesure de l'intensité de la pêche. Habituellement, l'effort de pêche est représenté par le nombre total de jours que les navires passent à pêcher au cours de l'année. Comme le temps est continu, l'effort E peut être considéré comme le nombre de navires (standard) pêchant activement à un moment donné.*

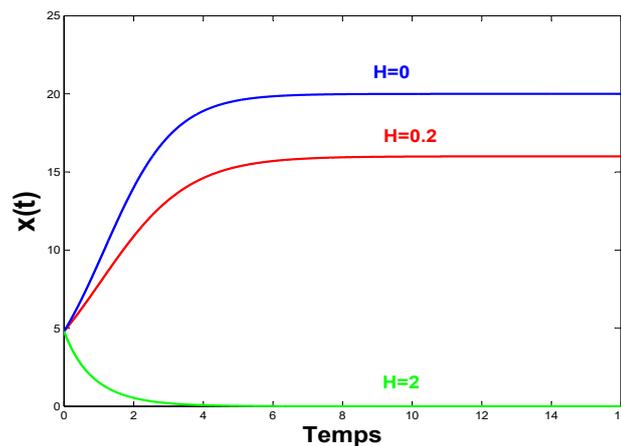


FIGURE 3.10 – Chroniques d'une population récolté avec un effort constant H . $r = 1$, $K = 20$.

Le principe économique de Gordon

Actuellement, les ressources biologiques de l'écosystème proie-prédateur sont exploitées commercialement et vendues dans le but d'atteindre un intérêt économique. Un tel modèle bio-économique est de Gordon [46]. Ce modèle est basé sur le principe économique formulé selon les étapes suivantes :

- (i) Le revenu total est déterminé par deux choses : le prix de marché de la ressource et le nombre total de ressource produite (ou le rendement) :

$$\text{Revenu Total} = \text{Prix} \times \text{Rendement}, \quad (3.23)$$

- (ii) Le rendement de la ressource impliquera deux choses : l'effort consacré à la récolte de la ressource et l'abondance de la ressource. En conséquence, on peut dire que :

$$\text{Rendement} = qEx, \quad (3.24)$$

où q est appelé le coefficient de capturabilité et E est appelé l'effort exercé dans la récolte de la ressource (par exemple dans la pêche, E peut être mesuré par le nombre de bateaux utilisés pour la pêche, le nombre d'heures de pêche, etc). Le terme x représente l'abondance de la ressource. La relation entre le taux de capture et l'effort E est souvent modélisée par (3.24) où pour un stock de poisson donné x , le taux de capture est proportionnel à l'effort. De même, pour l'effort fixe E , le taux de capture est proportionnel à l'abondance du stock.

- (iii) Si le prix du marché de la ressource est p , alors (3.23) devient :

$$\text{Revenu Total} = pqEx, \quad (3.25)$$

- (iv) Le coût total de récolte de la ressource est proportionnel à l'effort exercé :

$$\text{Coût Total} = cE, \quad (3.26)$$

où c est une constante qui représente les contrôles externes sur les coûts.

En conséquence, le profit de la récolte de la ressource (ou la rente économique totale R) est donné par :

$$\text{Rente Economique} = pqEx - cE = R. \quad (3.27)$$

Si on combine le modèle (3.19) avec l'égalité (3.24), on obtient

$$\dot{x} = f(x) - qEx. \quad (3.28)$$

Pour $f(x) = rx(1 - (x/K))$, la relation d'équilibre entre l'effort E et le rendement durable H est :

$$H = \bar{H}(E) = qKE(1 - qE/r). \quad (3.29)$$

Les valeurs de x , E , et H au rendement maximal durable sont :

$$x_{MSY} = K/2,$$

$$E_{MSY} = r/2q,$$

$$H_{MSY} = rK/4.$$

Dans le cas du rendement durable, le revenu net devient par (3.29) :

$$\bar{R} = p\bar{H}(E) - cE. \quad (3.30)$$

Selon Gordon, le niveau d'effort optimal est $E = E_0$, auquel le revenu durable net R est maximisé. Ceci est généralement appelé rendement économique maximal (MEY). Gordon a prédit que le propriétaire unique des pêcheries générerait les efforts pour atteindre le rendement économique maximal. Une deuxième prédiction du modèle de Gordon est que, dans une pêcherie de "propriété commune" non réglementée, l'effort atteindra un niveau d'équilibre E_∞ auquel $\bar{R} = 0$. Le simple argument derrière cette prédiction est le suivant : pour $E > E_\infty$, les coûts de pêche dépassent les revenus de la pêche (la figure 3.11). Par conséquent, l'effort sera réduit en raison du départ des navires perdus. De même si $E < E_\infty$, alors les bénéfices positifs peuvent être réalisés et E aura donc tendance à augmenter [34].

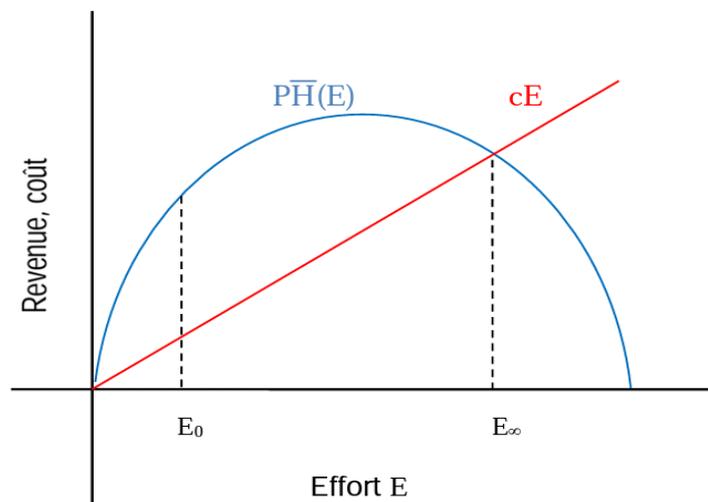


FIGURE 3.11 – Modèle de pêche de Gordon [46].

Récolte dans les modèles proies-prédateurs

Dans le précédent, nous avons examiné les effets de la récolte à rendement constant et autre à effort constant dans une seule population modélisées par une équation

différentielle ordinaire. Maintenant, nous donnons un modèle simple de Schaefer [35] qui décrit la récolte de l'une d'une paire d'espèces en interaction dans une pêcherie en libre accès (i.e. pêcheries non réglementées où les pêcheurs sont libres d'aller et venir à leur guise [39]). Le modèle est de la forme suivante

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - qEx, \\ \dot{E} &= k(pqEx - cE),\end{aligned}\tag{3.31}$$

où,

- x est le niveau de stock,
- E est le niveau d'effort de pêche,
- r est le taux de croissance intrinsèque du stock,
- K est la capacité de charge du stock,
- q est la capturabilité,
- p est le prix du poisson,
- c est le coût par unité d'effort,
- k est une constante de proportionnalité.

Dans ce système, les pêcheurs jouent le rôle de prédateurs. Pour r positif, il y a deux résultats possibles. La pêche peut ne pas être économiquement viable. Après cela, l'effort de pêche sera réduit à zéro et le stock de poissons reviendra à sa capacité de charge. Alternativement, le poisson et l'effort de pêche peuvent coexister à un équilibre à l'intérieur du plan de phase (x, E) . Le niveau de stock à cet équilibre est $x^* = c/pq$.

Remarque 3.2. *Dans certains travaux de recherche, nous avons constaté que la récolte peut être soumise à la fois aux proies et aux prédateurs, par exemple dans les équations de Rosenzweig-MacArthur [41].*

3.4 Modèles de populations structurés par l'âge

La répartition par l'âge de la population est l'un des principaux facteurs internes qui influencent la dynamique de la population. La fécondité et la mortalité des individus dépendent de leur âge, donc l'exploitation rationnelle de la population nécessite une prise en compte de leur structure par l'âge [38]. Dans les sections précédentes, nous présentons et étudions certains modèles dans lesquels tous les membres de la population se ressemblaient. Dans cette section, nous présenterons quelques modèles de populations structurées par l'âge.

modèles d'une seule espèce

Des équations aux dérivées partielles linéaires seront utilisées pour décrire une seule population d'espèces. Par conséquent, on introduit les fonctions suivantes :

- $x(\tau, t)$: la densité de la répartition par l'âge de la population (le nombre d'individus d'âge τ au temps t),
- $m(\tau, t)$: le taux de fécondité par l'âge (le nombre moyen d'individus issus par unité de temps à partir d'une seule personne d'âge τ au temps t),
- $d(\tau, t)$: le taux de mortalité par l'âge (part spécifique des individus d'âge τ décédés par unité du temps au temps t).

Ensuite, la taille de la population (le nombre d'individus de tous les âges) est

$$N(t) = \int_0^T x(\tau, t) dt,$$

et le taux total de fécondité est,

$$B(t) = \int_0^T m(\tau, t)x(\tau, t) dt,$$

où T est l'âge maximal. La dynamique de la population est décrite par une équation dite évolutive [38].

Construction du modèle

1. Pendant l'intervalle du temps de t jusqu'à $t + \Delta$, l'âge des individus est également augmenté de la valeur Δ , donc le taux de changement du nombre $x(\tau, t)$ d'individus âgés τ au temps t est égal à :

$$\frac{x(\tau + \Delta, t + \Delta) - x(\tau, t)}{\Delta},$$

ou en prenant la limite à $\Delta \rightarrow \infty$, on obtient

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Si la migration des individus n'est pas prise en compte, le seul facteur de changement de la taille de la population est la sortie d'individus causée par la mortalité.

Par conséquent, l'équation de la dynamique des populations est de la forme :

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial t} = -d(\tau, t)x(\tau, t), \quad (3.32)$$

cette équation est appelée équation évolutive [38].

2. Le processus d'apparition de nouveaux individus est décrit par l'égalité $x(0, t) = B(t)$ ou

$$x(\tau, t) = \int_0^T m(\tau, t)x(\tau, t), \quad (3.33)$$

appelé l'équation de fertilité [38].

3. La distribution initiale (à $t = 0$) des individus par rapport à leur âge τ est de la forme :

$$x(\tau, 0) = \phi(\tau), \quad \tau \in [0, T]. \quad (3.34)$$

Le modèle (3.32) – (3.34) est généralement appelé le modèle de Lotka-von Foerster [38].

Un autre modèle dépendant de l'âge a été développé par Gurtin et MacCamy [42] de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(a, t)}{\partial t} + \frac{\partial p(a, t)}{\partial a} + \mu(a, P)p(a, t) &= 0, \quad a > 0, t > 0, \\ p(0, t) &= \int_0^{+\infty} \beta(a, P(t))p(a, t)da, \quad t \geq 0, \\ P(t) &= \int_0^{+\infty} p(a, t)da, \quad t \geq 0, \\ p(a, 0) &= p_0(a), \quad a \geq 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

où

- $p(a, t)$ est la distribution par l'âge de certaines populations, i.e., la distribution des individus d'âge a au moment t ,
- $P(t)$ est la taille totale de la population au moment t ,
- $B(t)$ est le taux de natalité,
- $\tilde{\beta}(a, P)$ est la fonction de fertilité, i.e., le nombre moyen de progéniture par unité de temps produit par un individu d'âge a ,
- $\mu(a, P)$ est la fonction de mortalité,
- $p_0(a)$ est la distribution d'âge initial.

Dans le travail de recherche [43], l'auteur a étudié le problème (3.35) sous certaines hypothèses générales et il a déterminé ses états stables par :

$$p_\infty(a) = p_\infty(0)\pi(a, P_\infty), \quad (3.36)$$

où $\pi(a, P_\infty)$ est défini par

$$\pi(a, P_\infty) = e^{-\int_0^a \mu(\tau, P_\infty)d\tau}, \quad (3.37)$$

cet intégral représente la probabilité de survie à l'âge a lorsque la taille de la population est P . Aussi, $p_\infty(0)$ satisfait

$$p_\infty(0) = p_\infty(0) \int_0^\infty \beta(a, P_\infty) \pi(a, P_\infty) da. \quad (3.38)$$

En conséquence, d'après (3.38), on a $p_\infty(0) = 0$ ou P_∞ qui satisfait l'égalité suivante

$$1 = \int_0^\infty \beta(a, P_\infty) \pi(a, P_\infty) da. \quad (3.39)$$

Afin de faciliter l'écriture, un paramètre de seuil $R(P)$ est défini par

$$R(P) = \int_0^\infty \beta(a, P) \pi(a, P) da. \quad (3.40)$$

qui est interprété comme le nombre d'enfants censés naître d'un individu, au cours d'une vie, lorsque la taille de la population est P .

Les états d'équilibres du problème (3.35) sont : $P_\infty = 0$ et toutes les solutions non triviales de $R(P_\infty) = 1$. La stabilité de ces équilibres est examinée comme suit :

- Si $R(0) < 1$, alors l'état stationnaire trivial est localement asymptotiquement stable.
- Si $R(0) > 1$, alors l'état stationnaire trivial est instable.

Certaines conditions suffisantes sont déterminées pour la stabilité asymptotique locale de l'état stationnaire non trivial P_∞ , et il est montré que si $R'(P_\infty) > 0$, alors cet équilibre non trivial est instable.

3.5 Modèles de transmission des maladies

L'épidémiologie est l'étude de la fréquence des maladies, de la dynamique des états de santé et des déterminants de ces variations dans une population spécifique, et l'utilisation de cette connaissance pour le contrôle de la santé. Une épidémie est la propagation inhabituelle et subite d'une maladie dans une région ou une population donnée. Il est généralement de courte durée. Une maladie est dite endémique si elle persiste dans une population [34]. Lors de la modélisation de la dynamique d'une maladie infectieuse, nous devons nous intéresser à la population dans laquelle elle se produit. Dans cette section, nous nous concentrons sur l'épidémiologie des maladies infectieuses et nous présentons quelques modèles mathématiques pour ce type d'épidémie.

Modèles épidémiques

Afin de modéliser une telle épidémie à l'instant t , il faut classer les individus de la population en fonction de leur statut vis-à-vis de la maladie, sains, infectés et immunisés. Les états de la maladie, S , I , et R sont définis par [40] :

S : la classe sensible, ceux qui peuvent attraper la maladie mais qui ne sont pas actuellement infectés.

I : la classe infectieuse, ceux qui sont infectés par la maladie et qui sont actuellement contagieux.

R : la classe retirée, ceux qui ne peuvent pas contracter la maladie, soit parce qu'ils se sont rétablis définitivement, sont naturellement immunisés ou sont décédés.

Les modèles avec ces trois états sont appelés modèles épidémiques SIR. Il existe plusieurs modèles épidémiques SIR, selon que les individus récupèrent et développent une immunité. Ils sont désignés par diverses terminologies :

SI : décrit le cas où les personnes infectées ne peuvent pas récupérer, $S \rightarrow I$.

SIS : décrit une maladie sans immunité contre la réinfection (comme les maladies causées par des bactéries), $S \rightarrow I \rightarrow S$.

SIR : décrit une maladie qui confère une immunité contre la réinfection (comme les maladies causées par des virus), $S \rightarrow I \rightarrow R$.

$SIRS$: décrit les maladies pour lesquelles la reprise confère une immunité contre la réinfection, et les maladies pour lesquelles les membres récupérés sont susceptibles de se réinfecter, et la possibilité intermédiaire d'une immunité temporaire, $S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S$.

Modèles de type SIR

Le premier modèle de type SIR a été proposé par William Kermack et Anderson McKendrick en 1927 pour décrire une maladie dans une population de taille N [21]. Ce modèle est de la forme

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta SI, \\ \dot{I} &= \beta SI - \alpha I, \\ \dot{R} &= \alpha I.\end{aligned}\tag{3.41}$$

où β et α sont des paramètres constants positifs qui représentent le taux d'infection et le taux d'enlèvement des infectieux, respectivement. Ce modèle peut être décrit schématiquement par

$$\text{Susceptibles (S)} \xrightarrow{\beta SI} \text{Infectieux (I)} \xrightarrow{\alpha I} \text{Retirs (R)}.$$

Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

- (i) Le gain dans la classe infectieuse est à un taux proportionnel au nombre de contagieux et susceptibles, c'est-à-dire βSI .
- (ii) Les infectieux quittent la classe infectieuse au taux αI par unité de temps.
- (iii) Il n'y a pas d'entrée ou de sortie de la population, sauf peut-être par décès dû à la maladie.
- (iv) Il n'y a pas de décès par la maladie et la taille totale de la population est une constante N .

La formulation mathématique du problème épidémique est achevée dans les conditions initiales $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$, $R(0) = R_0 \geq 0$. D'après (3.41), il est facile de vérifier que

$$\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0 \implies S(t) + I(t) + R(t) = N.$$

Puisque $R(t)$ peut être trouvé à partir de $S(t)$ et $I(t)$, il suffit de ne considérer que les deux premières équations de (3.41), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\beta SI, \\ \dot{I} &= \beta SI - \alpha I, \end{aligned} \tag{3.42}$$

avec $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$ et $S_0 + I_0 = N$. Selon la première équation, on a $\dot{S} \leq 0$ toujours, donc $S(t)$ ne peut pas accroître. À partir de la deuxième équation de (3.42), on a

$$\dot{I}_{t=0} = I(\beta S_0 - \alpha) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \text{ si } \begin{cases} S_0 > \alpha/\beta \\ S_0 < \alpha/\beta \end{cases} \implies \begin{cases} \text{l'épidémie apparaît.} \\ \text{l'épidémie disparaît.} \end{cases} \tag{3.43}$$

Pour cette raison, le ratio α/β est un exemple de valeur seuil parfois appelée taux d'enlèvement relatif. On écrit

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\beta S_0}{\alpha}, \\ &= (\beta S_0) \left(\frac{1}{\alpha} \right), \\ &= \left(\begin{array}{l} \text{il n'y a pas de nouveaux cas découlant} \\ \text{d'un infecté par unité de temps} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \text{durée moyenne} \\ \text{d'infection} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, R_0 est interprété comme le taux de reproduction de base de l'infection, c'est-à-dire le nombre moyen d'infections secondaires produites par une infection primaire dans une population entièrement sensible. On a trois cas possibles : si $R_0 > 1$, alors le nombre de contagieux augmentera et une épidémie se produira. Si $R_0 = 1$, alors un individu atteint de la maladie ne produit qu'une seule infection et aucune épidémie ne peut survenir. Si $R_0 < 1$, alors la maladie diminue dans la population et l'épidémie s'atténuera [40].

La sévérité des épidémies

On peut dériver d'autres résultats analytiques utiles de ce modèle :

$$\frac{dI}{dS} = \frac{I(\beta S - \alpha)}{-\beta SI} = -1 + \frac{\alpha}{\beta S}, \quad I \neq 0.$$

Le système (3.42) a une ligne d'équilibres (tout point avec $I = 0$ est un équilibre, i.e. l'axe S). En intégrant la dernière équation, les solutions de I en fonction de S peuvent être écrites comme

$$I(S) = -S + \frac{\alpha}{\beta} \ln S + \text{Constant}, \quad (3.44)$$

où $\text{Constant} = I_0 + S_0 - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0$. Si une épidémie existe, on aimerait savoir quelle sera sa sévérité. D'après (3.43), le maximum de I , I_{max} , se produit à $S = \alpha/\beta$ où $\dot{I} = 0$. On substitue $S = \alpha/\beta$ dans (3.44), on trouve

$$\begin{aligned} I_{max} &= -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \ln \frac{\alpha}{\beta} + I_0 + S_0 - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0, \\ &= I_0 + S_0 - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \ln \left(\frac{\alpha}{\beta S_0} \right), \\ &= N - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \ln \left(\frac{\alpha}{\beta S_0} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

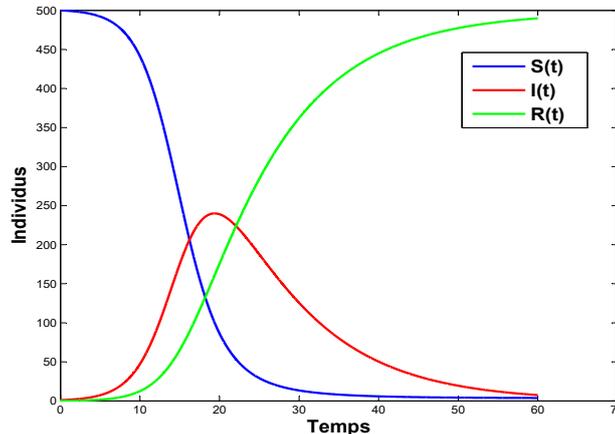


FIGURE 3.12 – La simulation du modèle SIR (3.41).

Exemple 3.5.1. Si on considère le modèle épidémique SIR (3.41) avec l'hypothèse que pour une certaine maladie, une personne contagieuse est introduit dans une population de 500 individus sensibles. De plus, on suppose qu'un individu en bonne santé est infectée par un contact avec une personne infectieuse est 0.1% et une fois qu'un patient tombe malade, il est contagieux pour

10 jours. De plus, le taux d'enlèvement est pris $\alpha = 0.1$. Pour ces valeurs de paramètres, on trouve que $\alpha/\beta = 100$, cela signifie qu'on attend $R_0 = (1/100)S_0 = 5$ personnes à être infectées par la maladie après avoir été en contact avec le patient d'origine. En outre, car $R_0 = 5 > 1$, on prévoit qu'une grave épidémie se produira. Selon (3.45), on peut trouver le pic d'épidémie qui correspond au maximum I , $I_{\max} \approx 240$ à $t \approx 20$ jours (voir la figure 3.12). Comme près de la moitié de la population est malade en ce moment, il s'agit d'une épidémie grave, comme prévu.

Chapitre 4

Stabilité et bifurcation d'un système algébro-différentiel bio-économique avec récolte de prédateurs

4.1 Introduction

Les êtres humains sont confrontés au double problème de la pénurie alimentaire et de la destruction de l'environnement. L'étude et la conception de modèles bio-économiques suscitent un grand intérêt en ce qui concerne la biodiversité pour les gains à long terme. Les chercheurs s'efforcent de produire des résultats potentiellement bénéfiques pour assurer la croissance durable de l'écosystème et aussi pour maintenir une prospérité durable. Plus récemment, l'étude de la dynamique des populations avec récolte est devenue un sujet intéressant en bio-économie mathématique en raison de son importance liée à la gestion optimale des ressources renouvelables [37]. En 1954, Gordon a introduit une théorie économique des ressources de propriété commune, en étudiant l'impact de l'effort de récolte sur l'écosystème d'un point de vue écologique et il a suggéré le principe économique suivant (voir la section 3.3) :

$$\text{Revenu Économique Net (REN)} = \text{Revenue Total (RT)} - \text{Coût Total (CT)}. \quad (4.1)$$

De nombreux efforts de recherche sont consacrés à l'investigation de ce type de dynamique. Dans [55, 56, 57, 58], les auteurs ont étudié le comportement dynamique d'une classe de systèmes écologiques proies-prédateurs formulés à partir de plusieurs équations différentielles et une équation algébrique. Ils ont obtenu des résultats intéressants, tels que la stabilité de l'équilibre intérieur, la bifurcation de Hopf, le cycle limite, la bifurcation induite par la singularité, et son contrôle, etc. Mais dans tous ces modèles

étudiés, seulement la population des proies est soumise à la récolte. L'interaction entre les prédateurs et leurs proies a été étudiée en utilisant des réponses fonctionnelles différentes telles que Holling I et II avec l'hypothèse qu'il y a une mortalité naturelle des espèces de prédateurs isolées. Dans [59], les auteurs ont étudié la dynamique du système proie-prédateur de Beddington-DeAngelis avec la récolte des prédateurs.

Autant que nous sachions, l'analyse dynamique d'un modèle proie-prédateur où les proies et les prédateurs accroissent de manière logistique avec la réponse fonctionnelle de Holling III, soumis à la récolte de prédateurs, n'a pas été étudiée auparavant. Ainsi, dans le présent chapitre, nous étudions ce type de modèles et nous discutons ses comportements dynamiques, tels que la stabilité et la bifurcation de Hopf [47, 48]. De plus, nous cherchons à trouver quelques principes qui sont théoriquement bénéfiques pour la gestion et le contrôle des ressources renouvelables.

Pour atteindre les objectifs précédentes, nous avons organisé le présent chapitre de cette façon : nous commençons notre étude en décrivant le concept derrière la construction du modèle et en déterminant sa signification biologique. Séquentiellement, nous établissons la positivité et la délimitation de solutions pour ce modèle. Ensuite, nous examinons l'existence des équilibres positifs, puis nous fournissons une description détaillée de la stabilité et de la bifurcation de Hopf du système proposé. Enfin, nous donnons des expériences de simulation numérique pour confirmer les résultats théoriques dérivés.

4.2 Formulation du modèle

Dans cette section, nous visons à développer un modèle qui combine à la fois les aspects économiques et d'autres biologiques dans la gestion des ressources. Le modèle est structuré comme suit : en commençant par le taux de prédation, on sait que les capacités physiologiques d'absorption des proies par un prédateur sont limitées même si un grand nombre des proies est disponible. Une telle fonction de réponse présentant un plateau pour des grandes densités de proies est appelée réponse fonctionnelle de Holling type II [52, 53, 54], dans lequel le taux de capture augmente avec l'augmentation de la densité des proies et se rapproche de la saturation de manière progressive. La fonction de réponse de Holling type III est similaire au celle de type II sauf à faible densité de proies, où le taux de capture des proies s'accélère. Dans notre modèle proposé, nous supposons qu'il existe une limite supérieure pour le taux de prédation maximal. Pour atteindre cet objectif, nous avons considéré le terme de prédation comme $\frac{ax^2y}{d+x^2}$. On remarque que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{d + x^2} = a.$$

De plus, une façon d'ajouter la réalisme au modèle est de considérer les effets du surpeuplement. L'espace et les ressources sont limités même si la densité des populations est grande. Par conséquent, les taux de croissance des proies et des prédateurs sont censés être logistiques. Compte tenu des hypothèses ci-dessus, nous proposons un modèle qui consiste en deux populations, les proies ayant la densité x et les prédateurs ayant la densité y de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{ax^2y}{d + x^2}, \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{y}{N}\right) + \frac{bx^2y}{d + x^2}, \end{cases} \quad (4.2)$$

où $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{y} = dy/dt$. Là, r et s sont des constantes positives représentant les taux de croissance intrinsèque des populations de proies et de prédateurs, respectivement. K et N sont des constantes positives représentant la capacité de charge des deux espèces, d et a sont des constantes positives représentant la demi-capture de saturation et l'efficacité maximale de la prédation, respectivement, b est une constante positive qui représente le coefficient de conversion.

On sait que l'effort de récolte est un facteur important pour construire un modèle mathématique bio-économique utile, pour cette raison, et en tenant compte (4.1), on étend le système (4.2) par considérer l'équation algébrique suivante qui décrit le profit économique v de l'effort de récolte sur les prédateurs :

$$E(t)(py(t) - c) = v, \quad (4.3)$$

où $0 \leq E(t) \leq E_{max}$ et $y(t) \geq 0$ représentent l'effort de récolte et la densité du prédateur, respectivement, p représente le prix d'unité de la population récoltée et c est le coût de l'effort de récolte, le revenu total est $TR = pE(t)y(t)$ et le coût total est $TC = cE(t)$.

À travers (4.2) et (4.3), nous avons établi un modèle algébro-différentiel composé de deux équations différentielles et une équation algébrique de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{ax^2y}{d + x^2}, \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{y}{N}\right) + \frac{bx^2y}{d + x^2} - Ey, \\ 0 &= E(py - c) - v, \end{cases} \quad (4.4)$$

qui est une EAD semi-explicite de la forme

$$\begin{cases} \dot{Z} &= f(Z, E), \\ 0 &= g(Z, E), \end{cases} \quad (4.5)$$

Là, $Z = (x, y)^T$ représente la variable différentielle et E dénote la variable algébrique. Les fonctions f et g sont régulières et sont données par :

$$f(Z, E) = \begin{pmatrix} f_1(Z, E) \\ f_2(Z, E) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{axy}{d + x^2} \right) \\ y \left(s \left(1 - \frac{y}{N} \right) + \frac{bx^2}{d + x^2} - E \right) \end{pmatrix},$$

$$g(Z, E) = E(py - c) - v.$$

4.3 Analyse mathématique et résultats principaux

Pour des considérations biologiques, nous intéressons uniquement à la dynamique de ce modèle dans l'octant positif \mathbb{R}_+^3 . Ainsi, nous considérons les conditions initiales suivantes qui sont biologiquement significatives :

$$x(0) = x_0 \geq 0, \quad y(0) = y_0 \geq 0, \quad E(0) = E_0 = \frac{v}{py_0 - c}, \quad py_0 - c > 0. \quad (4.6)$$

4.3.1 Existence et unicité

Proposition 4.3.1. *Le système (4.4) équipé par les conditions initiales (4.6) admet une solution maximale unique $X = (Z, E)^T = (x(t), y(t), E(t))^T$ dans un sous-ensemble ouvert U de $\Omega = \{(x, y, E)^T \in \mathbb{R}_+^3 / py - c > 0\}$ défini sur un intervalle maximal $[0, T[$.*

Démonstration 4.3.1. *Soit $X = (x, y, E)^T \in U$ alors, d'après l'équation algébrique $g(x, y, E) = 0$ on obtient $E = \frac{v}{py - c}$, on remplace dans la deuxième équation différentielle de (4.4), l'EAD est transformé en l'EDO suivant qui admet la même solution par rapport aux variables différentielles $Z = (x, y)^T$:*

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{ax^2y}{d + x^2}, \\ \dot{y} = sy \left(1 - \frac{y}{N} \right) + \frac{bx^2y}{d + x^2} - \frac{vy}{py - c}, \end{cases} \quad (4.7)$$

sa forme vectorielle est $\dot{Z} = F(Z)$, où

$$F(Z) = \begin{pmatrix} x \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{axy}{d + x^2} \right) \\ y \left(s \left(1 - \frac{y}{N} \right) + \frac{bx^2}{d + x^2} - \frac{v}{py - c} \right) \end{pmatrix}.$$

Clairement $F \in C^1(U')$, où U' est un sous-ensemble ouvert de $\Omega' = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}_+^2 / py - c > 0\}$. Ainsi, en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'EDO [50], on en déduit l'existence locale et l'unicité d'une solution maximale $(x, y)^T$ de (4.7) pour toute $(x_0, y_0) \in U'$, alors, l'existence locale et l'unicité de la solution de (4.4) est explicite.

4.3.2 Positivité et délimitation

Concernant la positivité de la solution du système (4.4), nous introduisons la proposition suivante :

Proposition 4.3.2. *Toute solution régulière de (4.4) définie sur l'intervalle maximal $[0, T[$ avec les conditions initiales positives (4.6), reste positive pour toute $t \in [0, T[$.*

Démonstration 4.3.2. *Pour le système (4.7), il s'ensuit que $x = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0$ et $y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$ donc, $x = 0$ et $y = 0$ sont des ensembles invariants vérifiant $x(t) \geq 0$ et $y(t) \geq 0$ quelque soit $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$. À partir de la deuxième équation de (4.7), on déduit que pour toute $t \in [0, T[$:*

$$py(t) - c \neq 0. \quad (4.8)$$

On suppose qu'il existe $t^* \in [0, T[$ tel que $E(t^*) < 0$, il s'ensuit que $py(t^*) - c < 0$ alors, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue $py(t) - c$ sur l'intervalle $[0, t^*]$, on déduit l'existence de $\tilde{t} \in]0, t^*[$ tel que $py(\tilde{t}) - c = 0$ qui contredit avec (4.8), donc, $E(t) \geq 0$ pour toute $t \in [0, T[$.

Dans l'écosystème proie-prédateur, le processus d'impulsion de l'écosystème est généralement lié au développement accéléré de la population d'espèces. Si cette situation persiste pendant un certain temps, la biomasse de la population sera en dehors de la capacité de charge de l'environnement et l'écosystème proie-prédateur sera hors de contrôle, ce qui est catastrophique pour l'écosystème. Clairement, lorsque la biomasse des prédateurs y s'approche de la valeur critique $y_c = \frac{c}{p}$, l'effort de pêche E sera illimité, ce qui n'est pas réaliste.

Pour répondre à la question de l'existence de solutions bornés du système (4.4), on impose une contrainte écologique réaliste dans le contexte où la politique économique exige un niveau minimum $y_{min} > 0$ pour la ressource donnée par :

$$y(t) \geq y_{min} > \frac{c}{p}, \forall t \geq 0, \quad (4.9)$$

cette contrainte affectera l'effort de pêche E qui sera contraint par une capacité de production constante (le capital et l'emploi participant dans le processus de la production restent constants). On dénote cette capacité limite par E_{max} , donc

$$0 < E(t) \leq E_{max} = \frac{v}{py_{min} - c}, \forall t \geq 0. \quad (4.10)$$

Proposition 4.3.3. *Toutes solutions du système (4.4) soumises aux conditions initiales (4.6) et à la contrainte (4.10) sont bornées dans \mathbb{R}_+^3 , avec une borne ultime.*

Démonstration 4.3.3. On suppose que $E(t)$ est soumis à la contrainte (4.10). On défini une fonction $\psi(t) = bx(t) + ay(t)$, alors sa dérivée par rapport le temps le long des solutions du système (4.4) est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= b\frac{dx}{dt} + a\frac{dy}{dt}, \\ &= rbx\left(1 - \frac{x}{K}\right) + asy\left(1 - \frac{y}{N}\right) - aEy.\end{aligned}$$

Donc pour toute $\mu > 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} + \mu\psi &= rbx\left(1 - \frac{x}{K}\right) + asy\left(1 - \frac{y}{N}\right) - aEy + \mu bx + \mu ay, \\ &= \left(rbx - \frac{rb}{K}x^2 + \mu bx\right) + \left(asy - \frac{as}{N}y^2 - aEy + \mu ay\right), \\ &= bx\left[(r + \mu) - \frac{r}{K}x\right] + ay\left[(s + \mu - E) - \frac{s}{N}y\right], \\ &\leq bx\left[(r + \mu) - \frac{r}{K}x\right] + ay\left[(s + \mu) - \frac{s}{N}y\right], \\ &\leq \frac{bK(r + \mu)^2}{4r} + \frac{aN(s + \mu)^2}{4s} := \eta.\end{aligned}$$

En utilisant la théorie de l'inégalité différentielle [24], on obtient

$$0 \leq \psi(t) \leq \frac{\eta}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) + \psi(0)e^{-\mu t} \leq \max\left(\psi(0), \frac{\eta}{\mu}\right).$$

Prenant la limite $t \rightarrow \infty$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) \leq \frac{\eta}{\mu}.$$

D'où toutes les solutions du système (4.4) soumises aux conditions initiales (4.6) et la contrainte (4.10) sont confinés dans la région :

$$H = \left\{ (x, y, E)^T \in \mathbb{R}_+^3 : 0 < E \leq E_{max}, 0 \leq \psi = bx + ay \leq \frac{\eta}{\mu} + \epsilon, \text{ pour } \epsilon > 0 \right\}.$$

4.4 Existence et nombre d'équilibres positifs

Notre objectif dans cette section est d'inspecter l'existence des points d'équilibre positifs et d'étudier leurs stabilités. Un point d'équilibre du système (4.4) est une solution des équations suivantes :

$$\begin{cases} f_1(Z, E) = 0, \\ f_2(Z, E) = 0, \\ g(Z, E) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Par l'analyse des racines de (4.11), il s'ensuit que

(i) Si $v = 0$, alors il existe au moins trois points d'équilibre sur les bornes du cadran positif : $X_{e1} = (0, 0, 0)$, $X_{e2} = (K, 0, 0)$, $X_{e3} = (0, N, 0)$, et au plus cinq autres équilibres sur les bornes du cadran positif $X_{ei} = (x_i^*, y_i^*, 0)$, $i = 1, 2, \dots, 5$, où x_i^* sont les racines de l'équation :

$$r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \frac{d+x^2}{ax} - N \left(1 + \frac{bx^2}{s(d+x^2)}\right) = 0,$$

ou d'une manière équivalente, l'équation du cinquième degré suivante :

$$x^5 - Kx^4 + (2d + NabK/(rs) + NaK/r)x^3 - 2dKx^2 + (d^2 + NadK/r)x - d^2K = 0,$$

qui satisfait $0 < x_i^* < K$, et

$$y_i^* = \frac{r}{Kax_i^*} (K - x_i^*) (d + (x_i^*)^2), \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

(ii) Si $v > 0$, alors il existe au plus deux points d'équilibre sur les bornes du cadran positif : $X_{ei} = \left(0, y_i^*, \frac{v}{py_i^* - c}\right)$, $i = 1, 2$, où y_i^* sont les racines de l'équation quadratique suivante :

$$psy^2 - s(Np + c)y + N(cs + v) = 0,$$

qui satisfait $y_i^* > \frac{c}{p}$, et au plus huit points d'équilibre intérieurs :

$$X_{ei} = \left(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \frac{v}{p\bar{y}_i - c}\right), \quad i = 1, 2, \dots, 8,$$

où

$$\bar{y}_i = \frac{r}{Ka\bar{x}_i} (K - \bar{x}_i) (d + \bar{x}_i^2) > \frac{c}{p}$$

et \bar{x}_i est une solution de l'équation :

$$s \left(1 - r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \frac{d+x^2}{Nax}\right) + \frac{bx^2}{d+x^2} - \frac{v}{p \left(r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \frac{d+x^2}{ax}\right) - c} = 0,$$

ou d'une manière équivalente :

$$\begin{cases} P(x) = \sum_{i=0}^8 p_i x^i = 0, \\ Q(x) = \sum_{i=0}^3 q_i x^i > 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

où p_i , $i = 0, 1, 2, \dots, 8$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
p_0 &= d^3 K^2 p r^2 s, \\
p_1 &= -(acd^2 K^2 r s + ad^2 K^2 N p r s + 2d^3 K p r^2 s), \\
p_2 &= a^2 cd K^2 N s + acd^2 K r s + ad^2 K N p r s + d^3 p r^2 s + 3d^2 K^2 p r^2 s + a^2 d K^2 N v, \\
p_3 &= -(abd K^2 N p r + 2acd K^2 r s + 2ad K^2 N p r s + 6d^2 K p r^2 s), \\
p_4 &= a^2 bc K^2 N + abd K N p r + a^2 c K^2 N s + 2acd K r s + 2ad K N p r s + 3d^2 p r^2 s \\
&\quad + 3d K^2 p r^2 s + a^2 K^2 N v, \\
p_5 &= -(ab K^2 N p r + ac K^2 r s + a K^2 N p r s + 6d K p r^2 s), \\
p_6 &= ab K N p r + ac K r s + a K N p r s + 3d p r^2 s + K^2 p r^2 s, \\
p_7 &= -2K p r^2 s, \\
p_8 &= p r^2 s,
\end{aligned}$$

et q_i , $i = 0, 1, 2, 3$ sont donnés par

$$\begin{aligned}
q_0 &= d K p r, \\
q_1 &= -(ac K + d p r), \\
q_2 &= K p r, \\
q_3 &= -p r.
\end{aligned}$$

Puisqu'il y a trois changements de signe dans la suite des coefficients q_i , $i = 0, 1, 2, 3$, alors, par la règle des signes de Descartes (voir l'annexe A.2), il y a soit une racine positive \bar{x}_1 , soit trois racines positives $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \bar{x}_3$ de $Q(x)$.

Soit P_0, P_1, \dots, P_l la suite des polynômes générés par l'algorithme Euclidien (voir l'annexe A.3) commencé par $P_0 = P, P_1 = P'$. Le nombre exact d'équilibres intérieurs de (4.4) est donné par la proposition suivante :

Proposition 4.4.1. *Le nombre des équilibres intérieurs de (4.4) est exactement m , tel que*

$$m = \mu(0) - \mu(\bar{x}_1), \text{ si } Q(x) \text{ a une racine,} \quad (4.13)$$

ou

$$m = \mu(0) - \mu(\bar{x}_1) + \mu(\bar{x}_2) - \mu(\bar{x}_3), \text{ si } Q(x) \text{ a trois racines,} \quad (4.14)$$

où $\mu(x)$ désigne le nombre de changements de signe dans la suite $\{P_i(x)\}$.

Démonstration 4.4.1. *Le nombre des l'équilibres intérieurs de (4.4) est égal au nombre de solutions positives de (4.12). Donc, on a*

- Si $Q(x)$ admet une racine, alors pour toute $x > 0$, on a $Q(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, \bar{x}_1[$, par le théorème A.3.1 dans l'annexe A.3, $P(x) = 0$ admet exactement $\mu(0) - \mu(\bar{x}_1)$ solutions dans l'intervalle $]0, \bar{x}_1[$. Donc, $P(x) = 0$ admet exactement $m = \mu(0) - \mu(\bar{x}_1)$ solutions positives satisfaisant $Q(x) > 0$.
- Si $Q(x)$ admet trois racines, alors pour toute $x > 0$, on a $Q(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, \bar{x}_1[\cup]\bar{x}_2, \bar{x}_3[$, il en résulte que $P(x) = 0$ admet exactement $\mu(0) - \mu(\bar{x}_1)$ solutions dans l'intervalle $]0, \bar{x}_1[$, et exactement $\mu(\bar{x}_2) - \mu(\bar{x}_3)$ solutions dans l'intervalle $]\bar{x}_2, \bar{x}_3[$. Donc, $P(x) = 0$ admet exactement

$$m = \mu(0) - \mu(\bar{x}_1) + \mu(\bar{x}_2) - \mu(\bar{x}_3),$$

solutions positives satisfaisant $Q(x) > 0$.

4.5 Analyse dynamique proche de l'équilibre de coexistence

Dans cette section, nous étudions la stabilité d'un point d'équilibre intérieur X_e du système (4.4) et nous analysons la bifurcation selon la valeur du profit économique v . Cette étude a été réalisée en utilisant à la fois la théorie de bifurcation et la théorie de la forme normale.

4.5.1 Analyse de stabilité locale

Pour l'analyse de la stabilité locale d'un point d'équilibre X_e , on pose $X = Q\bar{X}$, tel que

$$\bar{X} = (x, y, \bar{E})^T, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{E_e p y}{p y_e - c} & 1 \end{pmatrix},$$

alors on obtient $D_X g(X_e)Q = (0, 0, p y_e - c)$, et

$$x = x, \quad y = y, \quad \bar{E} = E + \frac{E_e p y}{p y_e - c}.$$

Par conséquent, le système (4.4) peut être exprimé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = x \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{a x y}{d + x^2} \right), \\ \dot{y} = y \left(s \left(1 - \frac{y}{N} \right) + \frac{b x^2}{d + x^2} - \bar{E} + \frac{E_e p y}{p y_e - c} \right), \\ 0 = \left(\bar{E} - \frac{E_e p y}{p y_e - c} \right) (p y - c) - v. \end{cases} \quad (4.15)$$

On dénote aussi par :

$$f(v, \bar{X}) = \begin{pmatrix} f_1(v, \bar{X}) \\ f_2(v, \bar{X}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{axy}{d + x^2} \right) \\ y \left(s \left(1 - \frac{y}{N} \right) + \frac{bx^2}{d + x^2} - \bar{E} + \frac{E_e py}{py_e - c} \right) \end{pmatrix},$$

$$g(v, \bar{X}) = \left(\bar{E} - \frac{E_e py}{py_e - c} \right) (py - c) - v, \quad \bar{X} = (x, y, \bar{E})^T,$$

et on peut conclure que le système (4.15) admet le point d'équilibre positif suivant :

$$\bar{X}_e = (x_e, y_e, \bar{E}_e)^T = \left(x_e, y_e, E_e + \frac{E_e py}{py_e - c} \right)^T,$$

et que $D_X g(\bar{X}_e)Q = (0, 0, py_e - c)$.

Pour le système (4.15), on considère la paramétrisation locale suivante :

$$\bar{X} = \varphi(v, Y) = \bar{X}_e + U_0 Y + V_0 h(v, Y), \quad g(v, \varphi(v, Y)) = 0.$$

Ici, $Y = (y_1, y_2)$, $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une application régulière.

Plus d'informations sur le paramétrisation locale se trouve dans [13, 49]. Ensuite, on peut déduire que le système paramétrique de (4.15) est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(v, \varphi(v, Y)), \\ \dot{y}_2 = f_2(v, \varphi(v, Y)). \end{cases} \quad (4.16)$$

Par conséquent, la matrice jacobienne $A(v)$ du système paramétrique (4.16) à $Y = 0$ est de la forme :

$$\begin{aligned} A(v) &= \begin{pmatrix} D_{y_1} f_1(v, \varphi(v, Y)) & D_{y_2} f_1(v, \varphi(v, Y)) \\ D_{y_1} f_2(v, \varphi(v, Y)) & D_{y_2} f_2(v, \varphi(v, Y)) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} D_{\bar{X}} f_1(v, \bar{X}_e) \\ D_{\bar{X}} f_2(v, \bar{X}_e) \end{pmatrix} \left(D_{\bar{X}} g(v, \bar{X}_e) \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} D_x f_1(v, \bar{X}_e(v)) & D_y f_1(v, \bar{X}_e(v)) \\ D_x f_2(v, \bar{X}_e(v)) & D_y f_2(v, \bar{X}_e(v)) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} x_e \left(-\frac{r}{K} + \frac{ay_e(x_e^2 - d)}{(x_e^2 + d)^2} \right) & -\frac{ax_e^2}{x_e^2 + d} \\ \frac{2bdx_e y_e}{(x_e^2 + d)^2} & y_e \left(-\frac{s}{N} + \frac{pE_e}{py_e - c} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus, l'équation caractéristique de la matrice $A(v)$ peut être exprimée par :

$$\lambda^2 + a_1(v)\lambda + a_2(v) = 0, \quad (4.17)$$

où

$$a_1(v) = x_e \left(\frac{r}{K} - \frac{ay_e(x_e^2 - d)}{(x_e^2 + d)^2} \right) + y_e \left(\frac{s}{N} - \frac{pE_e}{py_e - c} \right),$$

$$a_2(v) = x_e y_e \left(-\frac{r}{K} + \frac{ay_e(x_e^2 - d)}{(x_e^2 + d)^2} \right) \left(-\frac{s}{N} + \frac{pE_e}{py_e - c} \right) + \frac{2abdx_e^3 y_e}{(x_e^2 + d)^3}.$$

Résultat 4.1. Pour le point d'équilibre positif \bar{X}_e du système (4.15), on a :

- (i) Si $a_1^2(v) \geq 4a_2(v)$ et $a_2(v) > 0$, alors, lorsque $a_1(v) > 0$, \bar{X}_e est un nœud localement asymptotiquement stable. Lorsque $a_1(v) < 0$, \bar{X}_e est un nœud instable.
- (ii) Si $a_2(v) < 0$, alors, \bar{X}_e est un point selle instable.
- (iii) Si $a_1^2(v) < 4a_2(v)$, alors, lorsque $a_1(v) > 0$, \bar{X}_e est un foyer localement asymptotiquement stable. Lorsque $a_1(v) < 0$, \bar{X}_e est un foyer instable.

Remarque 4.1. Le point d'équilibre positif \bar{X}_e du système (4.15) correspond au point d'équilibre $Y = 0$ du système (4.16).

4.5.2 Analyse de bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf est un type de bifurcations de systèmes très intéressant. Il se réfère à la naissance ou à la disparition locale d'une solution périodique à partir d'un point d'équilibre lorsqu'un paramètre traverse une valeur critique nommée valeur de bifurcation. Dans ce fragment, nous discutons la bifurcation de Hopf dans le système (4.15) à partir du point d'équilibre X_e en considérant le profit économique v comme une valeur de bifurcation. Si on pose $a_1^2(v) \leq 4a_2(v)$, alors l'équation (4.17) admet une paire de racines complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}a_1(v) \pm i \sqrt{a_2(v) - \frac{a_1^2(v)}{4}},$$

$$:= \alpha(v) \pm i\omega(v).$$

Soit $a_1(v) = 0$, on obtient la valeur de bifurcation v^* qui satisfait

$$v^* = \frac{(py_e(v^*) - c)^2}{py_e(v^*)} \left(\frac{s}{N} y_e(v^*) + x_e(v^*) \left(\frac{r}{K} - \frac{ay_e(v^*)((x_e(v^*))^2 - d)}{((x_e(v^*))^2 + d)^2} \right) \right).$$

Si

$$\frac{r}{K} = \frac{ay_e(v^*)((x_e(v^*))^2 - d)}{((x_e(v^*))^2 + d)^2}, \quad (4.18)$$

alors

$$v^* = \frac{s(py_e(v^*) - c)^2}{pN}. \quad (4.19)$$

De plus

$$\alpha(v^*) = 0, \quad \omega(v^*) = \sqrt{\frac{2abdy_e(v^*)(x_e(v^*))^3}{((x_e(v^*))^2 + d)^3}} > 0,$$

ce qui implique que si $\alpha'(v^*) = \frac{d}{dv} \left(\frac{Npv y_e(v) - sy_e(v)(py_e(v) - c)^2}{N(py_e(v) - c)^2} \right)_{v=v^*} \neq 0$, alors, la bifurcation de Hopf se produit à la valeur v^* . Le signe du nombre σ est donné par

$$\sigma = \frac{1}{8} \left[\frac{3a^3 x_e^5 (d - x_e^2)}{(d + x_e^2)^6} (-y_e(3d - x_e^2) + 4d) + \frac{sp\omega^{*2}}{N(py_e - c)} + \frac{3p^2 c E_e \omega^{*2}}{(py_e - c)^3} \right], \quad (4.20)$$

ce signe détermine la direction de la bifurcation de Hopf à travers l'équilibre intérieur $X_e(v)$ du système (4.4) comme il sera mentionné dans le théorème suivant.

Théorème 4.5.1. *Pour le système (4.4), il existe une constante positive ε et deux petits voisinages du point d'équilibre positif $X_e(v)$: Z_1 et Z_2 , où $0 < \varepsilon \ll 1$ et $Z_1 \subset Z_2$.*

Cas 1. *Si $\sigma > 0$, alors*

- (i) *Lorsque $v^* < v < v^* + \varepsilon$, $X_e(v)$ rejette tous les points dans Z_2 , donc il est instable.*
- (ii) *Lorsque $v^* - \varepsilon < v < v^*$, le système (4.4) admet au moins une solution périodique située dans \bar{Z}_1 (le fermé de Z_1), l'un d'eux rejette tous les points de $\bar{Z}_1 \setminus X_e(v)$, en même temps une autre solution périodique (peut être la même) rejette tous les points dans $Z_2 \setminus \bar{Z}_1$, et $X_e(v)$ est localement asymptotiquement stable.*

Cas 2. *Si $\sigma < 0$, alors*

- (i) *Lorsque $v^* - \varepsilon < v < v^*$, $X_e(v)$ attire tous les points dans Z_2 , donc $X_e(v)$ est localement asymptotiquement stable.*
- (ii) *lorsque $v^* < v < v^* + \varepsilon$, le système (4.4) admet au moins une solution périodique située dans \bar{Z}_1 , l'un d'eux attire tous les points dans $\bar{Z}_1 \setminus X_e(v)$, en même temps une autre solution périodique (peut être la même) attire tous les points dans $Z_2 \setminus \bar{Z}_1$, alors $X_e(v)$ est instable.*

Démonstration 4.5.1. *La démonstration du théorème 4.5.1 est détaillé dans l'annexe A.1.*

4.6 Simulations numériques

Maintenant on effectue la simulation numérique sur l'ordinateur en utilisant la logiciel MATLAB. Cette simulation sera réalisée pour illustrer les résultats analytiques que nous avons établis dans les sections précédentes. L'exemple numérique suivant montre les différents comportements dynamiques lorsque le profit économique augmente d'une certaine valeur v^* . Considérons les valeurs des paramètres suivantes :

$$r = 0.728025, a = 1, b = 0.72, c = 0.28, d = 0.3, p = 3, s = 0.75, K = 4, N = 0.8. \quad (4.21)$$

TABLE 4.1 – Évaluation des coefficients p_i et q_i de $P(x)$ et $Q(x)$ respectivement.

Coefficients p_i		Coefficients q_i	
p_0	0.51518	q_0	2.62089
p_1	-2.36479	q_1	-1.77522
p_2	$6.5172 + 3.84v$	q_2	8.7363
p_3	-22.6624	q_3	-2.18408
p_4	$27.7848 + 12.8v$		
p_5	-52.1281		
p_6	31.0395		
p_7	-9.54038		
p_8	1.19255		

4.6.1 Nombre des équilibres intérieurs

Pour l'ensemble des valeurs des paramètres (4.21), on calcule les coefficients p_i , $i = 0, \dots, 8$ et q_i , $i = 0, 1, 2, 3$ de $P(x)$ et $Q(x)$ respectivement, définis dans (4.12) comme il est indiqué dans le tableau 4.1. Le polynôme $Q(x)$ admet une racine positive unique $\bar{x}_1 \approx 3.8701$. Donc, par la proposition 4.4.1, le nombre exact des équilibres intérieurs de (4.4) est $m = \mu(0) - \mu(\bar{x}_1)$. Un code Matlab basé sur l'algorithme Euclidien est développé pour calculer ce nombre, pour $0 < v \leq 5$, et les résultats sont représentés sur la figure 4.1. On observe que pour $0 < v < v_c \approx 1.436$, il y a deux équilibres intérieurs, et pour $v_c < v \leq 5$, il n'y a pas d'équilibres intérieurs. La figure 4.2 illustre les coordonnées biologiques des deux équilibres intérieurs X_{e1} et X_{e2} par rapport au profit économique v , montrant que les deux équilibres coïncident lorsque $v = v_c \approx 1.436$, mais ils disparaissent pour $v > v_c$.

4.6.2 Stabilité locale des équilibres intérieurs

Nous analysons la stabilité locale des deux équilibres X_{e1} et X_{e2} dans l'intervalle d'existence $I_v =]0, v_c[$. On calcule la trace Tr et le déterminant Det de la matrice Jacobienne A aux deux équilibres intérieurs, comme le montre la figure 4.3.

- Pour le deuxième équilibre X_{e2} , on observe que $Tr(A(X_{e2})) \geq 0$ et $Det(A(X_{e2})) \leq 0$ pour toute $v \in I_v$, indiquant que X_{e2} est toujours un point selle instable.
- Pour le premier équilibre X_{e1} , on observe que $Tr(A(X_{e1}))$ change sa signe et

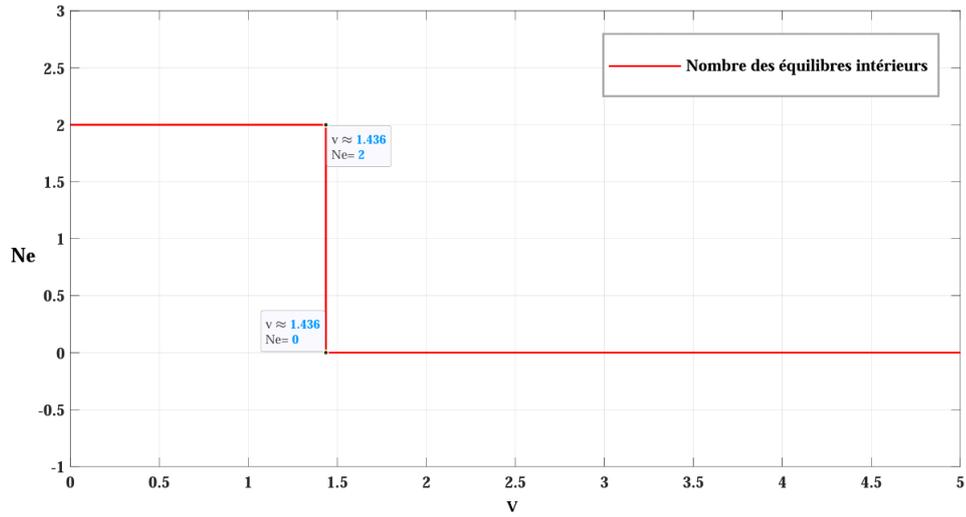


FIGURE 4.1 – Nombre des équilibres intérieurs du système (4.4) par rapport au profit économique v , pour $0 < v \leq 5$.

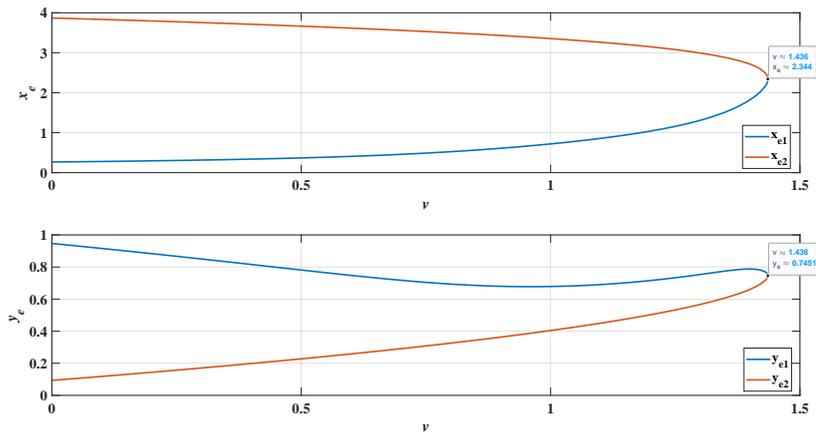


FIGURE 4.2 – Les coordonnées biologiques x_e, y_e des deux équilibres intérieurs X_{e1} et X_{e2} par rapport au profit économique v .

$Det(A(X_{e1})) > 0$ et $\Delta_{X_{e1}} < 0$ pour toute $v \in I_v$, indiquant que X_{e1} est toujours un foyer qui modifie sa propriété de stabilité. La figure 4.4 illustre $Tr(A(X_{e1}))$ par rapport au profit économique v montrant que X_{e1} est un foyer localement stable pour $0 < v < v_1^* \approx 0.9596$ ou $1.4147 \approx v_2^* < v < v_c$, et un foyer instable pour $v_1^* < v < v_2^*$.

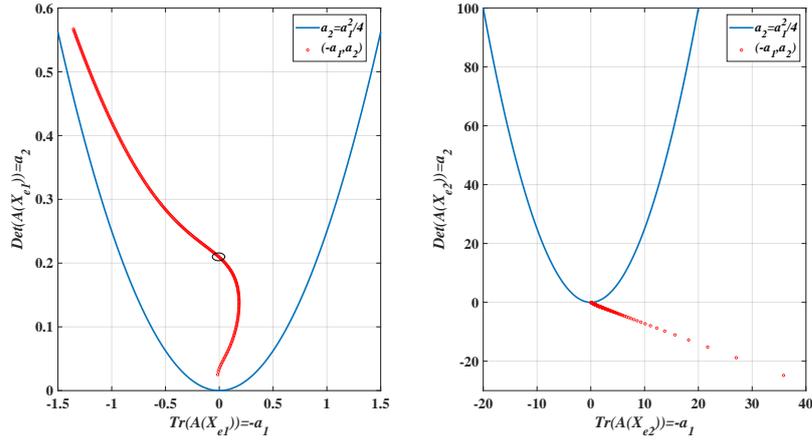


FIGURE 4.3 – Représentation de la trace Tr et le déterminant Det de la matrice Jacobienne A aux deux équilibres intérieurs X_{e1} et X_{e2} pour $v \in I_v$.

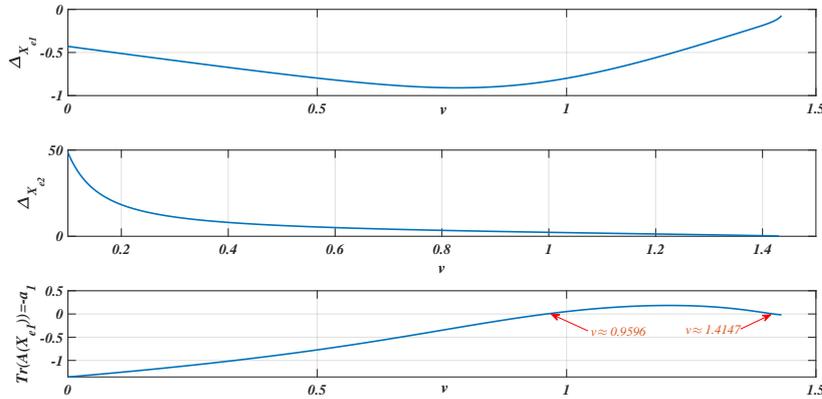


FIGURE 4.4 – Représentation des discriminants de X_{e1} et X_{e2} et la trace $Tr(A(X_{e1}))$ par rapport au profit économique v .

4.6.3 Bifurcation de Hopf à travers les équilibres intérieurs

Tant que $Det(A(X_{e2})) \leq 0$ pour toute $v \in I_v$, la bifurcation de Hopf n'est pas effectuée à travers le deuxième équilibre intérieur, donc nous étudions la bifurcation de Hopf uniquement à travers le premier équilibre intérieur X_{e1} . D'après l'étude de stabilité locale, il y a deux bifurcations possibles de Hopf à $v = v_1^*$ et à $v = v_2^*$. Nous sommes concentrés sur la bifurcation de Hopf à $v = v_1^*$.

Afin de déterminer les valeurs de bifurcation de Hopf de haute précision v_1^* à travers X_{e1} , nous résolvons numériquement l'équation (4.19). Tout d'abord, nous définissons

la fonction

$$h(v) = \frac{s(py_e(v) - c)^2}{pN} - v,$$

donc (4.19) peut être écrit comme

$$h(v) = 0, \quad (4.22)$$

pour approcher sa solution nous développons un code Matlab basé sur la méthode de bisection appliquée à l'intervalle $I_0 = [0.9, 1]$.

On a $h(0.9).h(1) \approx -6.6 \times 10^{-4} < 0$, il en résulte que (4.22) admet au moins une solution dans I_0 . Nous choisissons une erreur maximale $\epsilon = 10^{-13}$, alors, on obtient $v_1^* \approx 0.959607613852853$. On substitue dans (4.20) on trouve $\sigma \approx 0.0232833778979292 > 0$ qui satisfait le cas 1 du Théorème 4.5.1. Alors, le système (4.4) subit une bifurcation de Hopf souscritique à travers X_{e1} à $v = v_1^*$, où X_{e1} est localement asymptotique stable pour v proche de v_1^* avec $v < v_1^*$ et il est entouré par un cycle limite instable bifurquant comme il est illustré sur la figure 4.5. X_{e1} devient un centre pour $v = v_1^*$ comme le montre la figure 4.6. Finalement, X_{e1} est un foyer instable pour v proche de v_1^* avec $v > v_1^*$ comme le montre la figure 4.7.

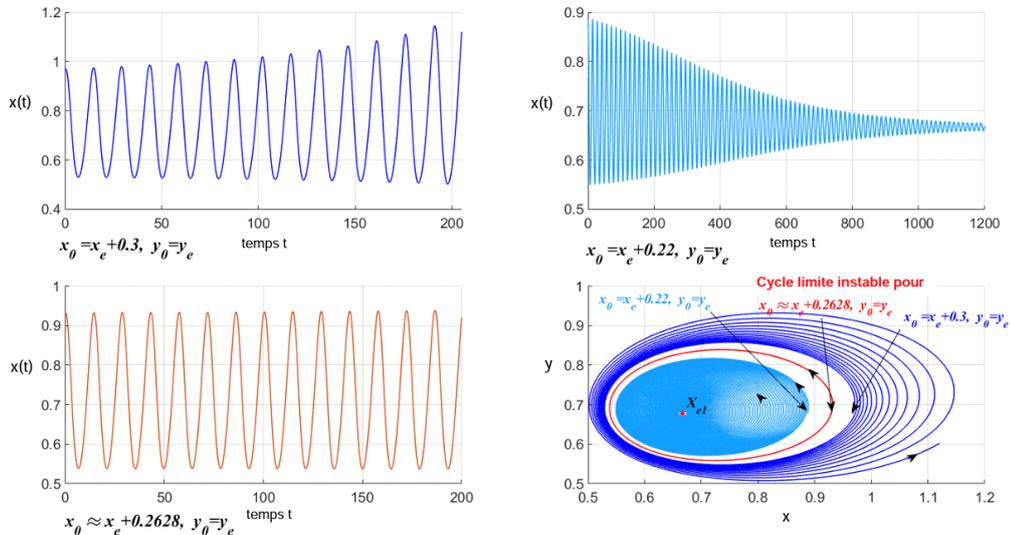


FIGURE 4.5 – Évolution temporelle des proies x , et le portrait de phase du système (4.4) pour $v = 0.955 < v_1^*$, montrant le comportement stable du premier point d'équilibre positif $X_{e1}(v)$ aux conditions initiales $x_0 = x_e + 0.22$, $y_0 = y_e$, $E_0 = E_e$, entouré par un cycle limite instable bifurquant γ et un comportement instable à l'extérieur de γ .

Remarque 4.2. Par rapport aux systèmes proposés dans [57, 56, 59] dans lesquels la croissance des proies ou des prédateurs est de type logistique. De plus, la réponse fonctionnelle est supposé de type Holling II ou de Beddington-DeAngelis. Notre modèle considère la croissance logistique

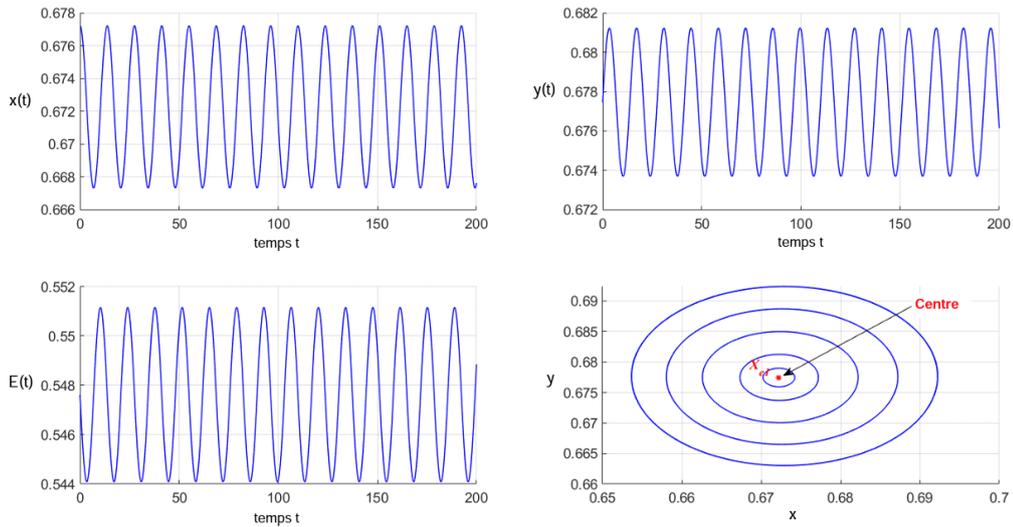


FIGURE 4.6 – Évolution temporelle des espèces x , y , l’effort de récolte E et le portrait de phase du système (4.4), pour $v \approx v_1^*$, indiquant que $X_{e1}(v_1^*)$ est un centre entouré d’une bande de cycles continus.

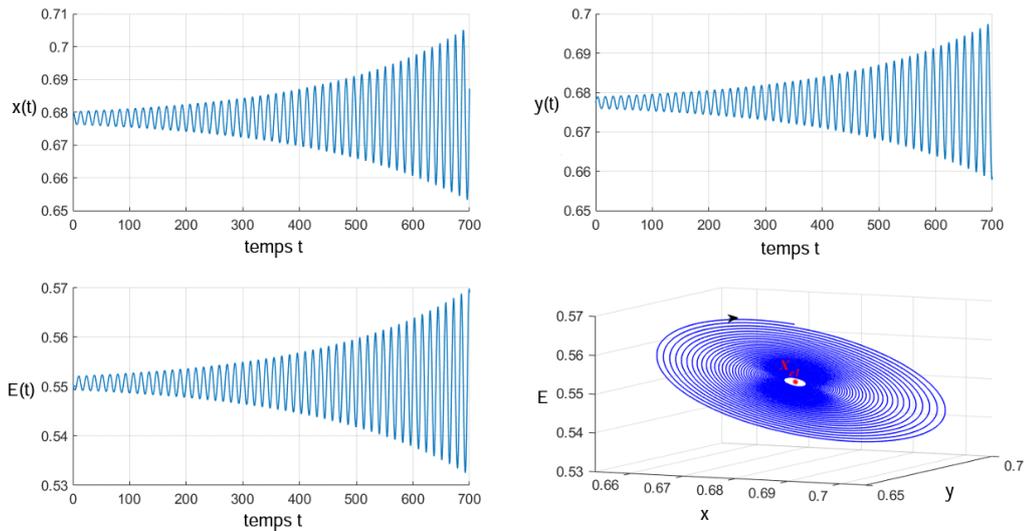


FIGURE 4.7 – Évolution temporelle des espèces x , y , l’effort de récolte E et la trajectoire de phase du système (4.4) représentant un comportement instable du point d’équilibre positif $X_{e1}(v)$ pour $v = 0.961 > v_1^*$ aux conditions initiales $x_0 = x_e + 0.02$, $y_0 = y_e$, $E_0 = E_e$.

pour les deux espèces de proies et de prédateurs. De plus, la réponse fonctionnelle utilisé est de type Holing III, ce qui rend notre modèle plus réaliste, en outre, il se concentre sur l’intérêt économique de l’effort de récolte commerciale sur les prédateurs. Un autre avantage est que le modèle proposé possède des équilibres intérieurs multiples, ça veut dire que dans la théorie du contrôle, les pêcheurs ont plusieurs possibilités et chances pour stabiliser l’écosystème au point d’équilibre intérieur qui représente sa performance idéale.

4.7 Conclusion

Ce chapitre traite un nouveau modèle bio-économique de type proie-prédateur avec la récolte des prédateurs. Ce modèle, comme tous les modèles, est une abstraction de la réalité. On a supposé que les revenus économiques positifs étaient responsables de la stabilité de ce modèle proposé. L'analyse de stabilité a révélé que lorsque le profit économique v est inférieure à la valeur de bifurcation v_1^* , les deux espèces convergent vers leur état stationnaire et elles coexistent au cours du temps. De plus, il est démontré que lorsque le profit économique est égal ou supérieur à la valeur de bifurcation, l'état de la population des proies, la population des prédateurs et l'effort de récolte sera instable, ce qui peut entraîner un déséquilibre de l'écosystème. L'étude nous permet de prendre en compte qu'il est nécessaire de garder le profit économique de la récolte à un niveau idéal afin de maintenir le développement durable de l'écosystème proie-prédateur.

Annexe A

Annexe

A.1 Démonstration du théorème 4.5.1

Afin d'explorer la direction de la bifurcation de Hopf dans le système (4.15) selon [13, 49] lorsque $v = v^*$, $\bar{X} = \bar{X}_e$, on doit diriger la forme normale de ce système comme suit :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \omega^* y_2 + \frac{1}{2} a_{11}^1 y_1^2 + a_{12}^1 y_1 y_2 + \frac{1}{2} a_{22}^1 y_2^2 + \frac{1}{6} a_{111}^1 y_1^3 \\ \quad + \frac{1}{2} a_{112}^1 y_1^2 y_2 + \frac{1}{2} a_{122}^1 y_1 y_2^2 + \frac{1}{6} a_{222}^1 y_2^3 + O(|Y|^4), \\ \dot{y}_2 = -\omega^* y_1 + \frac{1}{2} a_{11}^2 y_1^2 + a_{12}^2 y_1 y_2 + \frac{1}{2} a_{22}^2 y_2^2 + \frac{1}{6} a_{111}^2 y_1^3 \\ \quad + \frac{1}{2} a_{112}^2 y_1^2 y_2 + \frac{1}{2} a_{122}^2 y_1 y_2^2 + \frac{1}{6} a_{222}^2 y_2^3 + O(|Y|^4). \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{où } \omega^* := \omega(v^*) = \sqrt{\frac{2abd y_e x_e^3}{(x_e^2 + d)^3}}.$$

On peut prouver que le système (4.16) avec $v = v^*$, $\bar{X} = \bar{X}_e$ est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_{1y_1}(v^*, \bar{X}_e) y_1 + f_{1y_2}(v^*, \bar{X}_e) y_2 + \frac{1}{2} f_{1y_1 y_1}(v^*, \bar{X}_e) y_1^2 \\ \quad + f_{1y_1 y_2}(v^*, \bar{X}_e) y_1 y_2 + \frac{1}{2} f_{1y_2 y_2}(v^*, \bar{X}_e) y_2^2 + \frac{1}{6} f_{1y_1 y_1 y_1}(v^*, \bar{X}_e) y_1^3 \\ \quad + \frac{1}{2} f_{1y_1 y_1 y_2}(v^*, \bar{X}_e) y_1^2 y_2 + \frac{1}{2} f_{1y_1 y_2 y_2}(v^*, \bar{X}_e) y_1 y_2^2 \\ \quad + \frac{1}{6} f_{1y_2 y_2 y_2}(v^*, \bar{X}_e) y_2^3 + O(|Y|^4), \\ \dot{y}_2 = f_{2y_1}(v^*, \bar{X}_e) y_1 + f_{2y_2}(v^*, \bar{X}_e) y_2 + \frac{1}{2} f_{2y_1 y_1}(v^*, \bar{X}_e) y_1^2 \\ \quad + f_{2y_1 y_2}(v^*, \bar{X}_e) y_1 y_2 + \frac{1}{2} f_{2y_2 y_2}(v^*, \bar{X}_e) y_2^2 + \frac{1}{6} f_{2y_1 y_1 y_1}(v^*, \bar{X}_e) y_1^3 \\ \quad + \frac{1}{2} f_{2y_1 y_1 y_2}(v^*, \bar{X}_e) y_1^2 y_2 + \frac{1}{2} f_{2y_1 y_2 y_2}(v^*, \bar{X}_e) y_1 y_2^2 \\ \quad + \frac{1}{6} f_{2y_2 y_2 y_2}(v^*, \bar{X}_e) y_2^3 + O(|Y|^4). \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Dans la suite, on va calculer les coefficients du système paramétrique (A.2). On dérive

$$\begin{aligned}
D_{\bar{X}}f_1(v, \bar{X}) &= \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{axy}{x^2 + d} + x \left(-\frac{r}{K} + \frac{ay(x^2 - d)}{(x^2 + d)^2} \right), -\frac{ax^2}{x^2 + d}, 0 \right), \\
D_{\bar{X}}f_2(v, \bar{X}) &= \left(\frac{2bdxy}{(x^2 + d)^2}, s \left(1 - \frac{y}{N} \right) + \frac{bx^2}{x^2 + d} + \frac{pE_e y}{py_e - c} - \bar{E} \right. \\
&\quad \left. + y \left(-\frac{s}{N} + \frac{pE_e}{py_e - c} \right), -y \right), \\
D_{\bar{X}}g(v, \bar{X}) &= \left(0, \bar{E}p - \frac{2p^2E_e y}{py_e - c} + \frac{pE_e c}{py_e - c}, py - c \right), \\
D\varphi(v, Y) &= (D_{y_1}\varphi(v, Y), D_{y_2}\varphi(v, Y)), \\
&= \begin{pmatrix} D_{\bar{X}}g(v, \bar{X}) \\ U_0^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{py - c} \left(-\bar{E}p + \frac{2p^2E_e y}{py_e - c} - \frac{pE_e c}{py_e - c} \right) \end{pmatrix}. \tag{A.3}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
f_{1y_1}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_1(v, \bar{X})D_{y_1}\varphi(v, Y) = r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{axy}{x^2 + d} \\
&\quad + x \left(-\frac{r}{K} + \frac{ay(x^2 - d)}{(x^2 + d)^2} \right), \\
f_{1y_2}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_1(v, \bar{X})D_{y_2}\varphi(v, Y) = -\frac{ax^2}{x^2 + d}, \\
f_{2y_1}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_2(v, \bar{X})D_{y_1}\varphi(v, Y) = \frac{2bdxy}{(x^2 + d)^2}, \\
f_{2y_2}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_2(v, \bar{X})D_{y_2}\varphi(v, Y) = s \left(1 - \frac{y}{N} \right) + \frac{bx^2}{x^2 + d} + \frac{pE_e y}{py_e - c} - \bar{E} \\
&\quad + y \left(-\frac{s}{N} + \frac{pE_e}{py_e - c} \right) - \frac{y}{py - c} \left(-\bar{E}p + \frac{2p^2E_e y}{py_e - c} - \frac{pE_e c}{py_e - c} \right). \tag{A.4}
\end{aligned}$$

On substitue v^* et \bar{X}_e dans les équations (A.4), on obtient

$$\begin{aligned}
f_{1y_1}(v^*, \bar{X}_e) &= 0, \quad f_{2y_2}(v^*, \bar{X}_e) = 0, \quad f_{1y_2}(v^*, \bar{X}_e) = -\frac{ax_e^2}{x_e^2 + d}, \\
f_{2y_1}(v^*, \bar{X}_e) &= \frac{2bdx_e y_e}{(x_e^2 + d)^2}. \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Au niveau des équations (A.4), on peut déduire que :

$$\begin{aligned}
D_{\bar{X}}f_{1y_1}(v, \bar{X}) &= \left(2 \left(-\frac{r}{K} + \frac{ay(x^2 - d)}{(x^2 + d)^2} \right) + \frac{2ayx^2(3d - x^2)}{(x^2 + d)^3}, -\frac{2axd}{(x^2 + d)^2}, 0 \right), \\
D_{\bar{X}}f_{1y_2}(v, \bar{X}) &= \left(-\frac{2axd}{(x^2 + d)^2}, 0, 0 \right), \\
D_{\bar{X}}f_{2y_1}(v, \bar{X}) &= \left(\frac{2bdy(d - 3x^2)}{(x^2 + d)^3}, \frac{2bdx}{(x^2 + d)^2}, 0 \right), \\
D_{\bar{X}}f_{2y_2}(v, \bar{X}) &= \left(\frac{2bdx}{(x^2 + d)^2}, -\frac{2s}{N} - \frac{\bar{E}pc}{(py - c)^2} + \frac{pE_e c^2}{(py - c)^2(py_e - c)}, \frac{py}{py - c} - 1 \right). \tag{A.6}
\end{aligned}$$

D'après les équations (A.3) et (A.6), on trouve :

$$\begin{aligned}
f_{1y_1y_1}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_{1y_1}(v, \bar{X})D_{y_1}\varphi(v, Y) = 2 \left(-\frac{r}{K} + \frac{ay(x^2 - d)}{(x^2 + d)^2} \right) + \frac{2ayx^2(3d - x^2)}{(x^2 + d)^3}, \\
f_{1y_1y_2}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_{1y_1}(v, \bar{X})D_{y_2}\varphi(v, Y) = -\frac{2axd}{(x^2 + d)^2}, \\
f_{1y_2y_1}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_{1y_2}(v, \bar{X})D_{y_1}\varphi(v, Y) = -\frac{2axd}{(x^2 + d)^2}, \\
f_{1y_2y_2}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_{1y_2}(v, \bar{X})D_{y_2}\varphi(v, Y) = 0, \\
f_{2y_1y_1}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_{2y_1}(v, \bar{X})D_{y_1}\varphi(v, Y) = \frac{2bdy(d - 3x^2)}{(x^2 + d)^3}, \\
f_{2y_1y_2}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_{2y_1}(v, \bar{X})D_{y_2}\varphi(v, Y) = \frac{2bdx}{(x^2 + d)^2}, \\
f_{2y_2y_1}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_{2y_2}(v, \bar{X})D_{y_1}\varphi(v, Y) = \frac{2bdx}{(x^2 + d)^2}, \\
f_{2y_2y_2}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_{2y_2}(v, \bar{X})D_{y_2}\varphi(v, Y) = -\frac{2s}{N} - \frac{2pc\bar{E}}{(py - c)^2} + \frac{2p^2E_e cy}{(py - c)^2(py_e - c)}. \tag{A.7}
\end{aligned}$$

On substitue v^* et \bar{X}_e dans les équations (A.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
f_{1y_1y_1}(v^*, \bar{X}_e) &= \frac{2ay_e x_e^2(3d - x_e^2)}{(x_e^2 + d)^3}, \\
f_{1y_1y_2}(v^*, \bar{X}_e) &= f_{1y_2y_1}(v^*, \bar{X}_e) = -\frac{2adx_e}{(x_e^2 + d)^2}, \\
f_{2y_1y_2}(v^*, \bar{X}_e) &= f_{2y_2y_1}(v^*, \bar{X}_e) = \frac{2bdx_e}{(x_e^2 + d)^2}, \\
f_{2y_1y_1}(v^*, \bar{X}_e) &= \frac{2bdy_e(d - 3x_e^2)}{(x_e^2 + d)^3}, \\
f_{2y_2y_2}(v^*, \bar{X}_e) &= -\frac{2spy_e}{N(py_e - c)}, \\
f_{1y_2y_2}(v^*, \bar{X}_e) &= 0. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

D'après les équations (A.7), on a :

$$\begin{aligned}
D_{\bar{X}}f_{1y_1y_1}(v, \bar{X}) &= \left(\frac{24adyx(d-x^2)}{(x^2+d)^4}, \frac{2ad(3x^2-d)}{(x^2+d)^3}, 0 \right), \\
D_{\bar{X}}f_{1y_1y_2}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_{1y_2y_1}(v, \bar{X}) = \left(\frac{2ad(3x^2-d)}{(x^2+d)^3}, 0, 0 \right), \\
D_{\bar{X}}f_{1y_2y_2}(v, \bar{X}) &= (0, 0, 0), \\
D_{\bar{X}}f_{2y_1y_1}(v, \bar{X}) &= \left(\frac{24bdyx(x^2-d)}{(x^2+d)^4}, \frac{2bd(d-3x^2)}{(x^2+d)^3}, 0 \right), \\
D_{\bar{X}}f_{2y_1y_2}(v, \bar{X}) &= D_{\bar{X}}f_{2y_2y_1}(v, \bar{X}) = \left(\frac{2bd(d-3x^2)}{(x^2+d)^3}, 0, 0 \right), \\
D_{\bar{X}}f_{2y_2y_2}(v, \bar{X}) &= \left(0, \frac{4p^2cE}{(py-c)^3} + \frac{2p^2cE_e}{(py-c)^2(py_e-c)}, -\frac{2pc}{(py-c)^2} \right). \tag{A.9}
\end{aligned}$$

On substitue v^*, \bar{X}_e dans les équations (A.3) et (A.9), on trouve :

$$\begin{aligned}
D_{\bar{X}}f_{1y_1y_1}(v^*, \bar{X}_e) &= \left(\frac{24ady_e x_e (d-x_e^2)}{(x_e^2+d)^4}, \frac{2ad(3x_e^2-d)}{(x_e^2+d)^3}, 0 \right), \\
D_{\bar{X}}f_{1y_1y_2}(v^*, \bar{X}_e) &= D_{\bar{X}}f_{1y_2y_1}(v^*, \bar{X}_e) = \left(\frac{2ad(3x_e^2-d)}{(x_e^2+d)^3}, 0, 0 \right), \\
D_{\bar{X}}f_{1y_2y_2}(v^*, \bar{X}_e) &= (0, 0, 0), \\
D_{\bar{X}}f_{2y_1y_1}(v^*, \bar{X}_e) &= \left(\frac{24bdy_e x_e (x_e^2-d)}{(x_e^2+d)^4}, \frac{2bd(d-3x_e^2)}{(x_e^2+d)^3}, 0 \right), \\
D_{\bar{X}}f_{2y_1y_2}(v^*, \bar{X}_e) &= D_{\bar{X}}f_{2y_2y_1}(v^*, \bar{X}_e) = \left(\frac{2bd(d-3x_e^2)}{(x_e^2+d)^3}, 0, 0 \right), \\
D_{\bar{X}}f_{2y_2y_2}(v^*, \bar{X}_e) &= \left(0, \frac{6p^2cE_e}{(py_e-c)^3}, -\frac{2pc}{(py_e-c)^2} \right), \\
D\varphi(v^*, 0) &= (D_{y_1}\varphi(v^*, 0), D_{y_2}\varphi(v^*, 0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.10}
\end{aligned}$$

D'après les équations (A.10), on a :

$$\begin{aligned}
f_{1y_1y_1}(v^*, \bar{X}_e) &= \frac{24ady_e x_e (d-x_e^2)}{(x_e^2+d)^4}, \\
f_{2y_1y_1}(v^*, \bar{X}_e) &= \frac{24bdy_e x_e (x_e^2-d)}{(x_e^2+d)^4}, \\
f_{2y_2y_2}(v^*, \bar{X}_e) &= \frac{6p^2cE_e}{(py_e-c)^3}, \\
f_{1y_1y_2}(v^*, \bar{X}_e) &= f_{1y_2y_1}(v^*, \bar{X}_e) = f_{1y_1y_1y_2}(v^*, \bar{X}_e) = \frac{2ad(3x_e^2-d)}{(x_e^2+d)^3}, \\
f_{2y_1y_1y_2}(v^*, \bar{X}_e) &= f_{2y_1y_2y_1}(v^*, \bar{X}_e) = f_{2y_2y_1y_1}(v^*, \bar{X}_e) = \frac{2ad(d-3x_e^2)}{(x_e^2+d)^3}, \\
f_{1y_2y_2y_1}(v^*, \bar{X}_e) &= f_{1y_2y_2y_2}(v^*, \bar{X}_e) = f_{1y_1y_2y_2}(v^*, \bar{X}_e) = f_{1y_2y_1y_2}(v^*, \bar{X}_e) = 0, \\
f_{2y_1y_2y_2}(v^*, \bar{X}_e) &= f_{2y_2y_1y_2}(v^*, \bar{X}_e) = f_{2y_2y_2y_1}(v^*, \bar{X}_e) = 0. \tag{A.11}
\end{aligned}$$

Selon les équations (A.2), (A.5), (A.8) et (A.11), le système paramétrique du système (4.16) avec $v = v^*$, $X = \bar{X}_e$ peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\frac{ax_e^2}{d+x_e^2}y_2 + \frac{ay_ex_e^2(3d-x_e^2)}{(d+x_e^2)^3}y_1^2 - \frac{2ax_ed}{(d+x_e^2)^2}y_1y_2 + \frac{4adx_ey_e(d-x_e^2)}{(d+x_e^2)^4}y_1^3 \\ \quad + \frac{ad(3x_e^2-d)}{(d+x_e^2)^3}y_1^2y_2 + O(|Y|^4), \\ \dot{y}_2 = \frac{2bdx_ey_e}{(d+x_e^2)^2}y_1 + \frac{bdy_e(d-3x_e^2)}{(d+x_e^2)^3}y_1^2 + \frac{2bdx_e}{(d+x_e^2)^2}y_1y_2 - \frac{spy_e}{N(py_e-c)}y_2^2 \\ \quad + \frac{4bdx_ey_e(x_e^2-d)}{(d+x_e^2)^4}y_1^3 + \frac{bd(d-3x_e^2)}{(d+x_e^2)^3}y_1^2y_2 + \frac{p^2cE_e}{(py_e-c)^3}y_2^3 + O(|Y|^4). \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

D'après la comparaison avec la forme normale (A.2), il faut normaliser le système paramétrique (A.12) avec la transformation linéaire non singulière suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

où $P = \begin{pmatrix} \frac{ax_e^2}{x_e^2+d} & 0 \\ 0 & -\omega^* \end{pmatrix}$, $U = (u_1, u_2)^T$. Pour simplifier, on utilise Y au lieu de U . Donc,

la forme normale du système (4.15) avec $v = v^*$ et $X = \bar{X}_e$ est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \omega^*y_2 + \frac{a^2x_e^4y_e(3d-x_e^2)}{(d+x_e^2)^4}y_1^2 + \frac{2adx_e\omega^*}{(d+x_e^2)^2}y_1y_2 \\ \quad + \frac{4da^3x_e^5(d-x_e^2)}{(d+x_e^2)^6}y_1^3 - \frac{a^2d\omega^*x_e^2(3x_e^2-d)}{(d+x_e^2)^4}y_1^2y_2 + O(|Y|^4), \\ \dot{y}_2 = -\omega^*y_1 - \frac{ax_e\omega^*(d-3x_e^2)}{2(d+x_e^2)^2}y_1^2 + \frac{\omega^{*2}}{y_e}y_1y_2 + \frac{spy_e\omega^*}{N(py_e-c)}y_2^2 \\ \quad - \frac{2a^2x_e^4\omega^*(x_e^2-d)}{(d+x_e^2)^4}y_1^3 + \frac{ax_e\omega^{*2}(d-3x_e^2)}{2(d+x_e^2)^2}y_1^2y_2 + \frac{p^2cE_e\omega^{*2}}{(py_e-c)^3}y_2^3 \\ \quad + O(|Y|^4). \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Selon la théorie de la bifurcation de Hopf [13], la direction de la bifurcation de Hopf est déterminée par le signe de σ donné par :

$$\begin{aligned} 16\sigma &= \frac{1}{\omega^*} \left\{ a_{11}^1 (a_{11}^2 - a_{12}^1) + a_{22}^2 (a_{12}^2 - a_{22}^1) + (a_{11}^2 a_{12}^2 - a_{12}^1 a_{22}^1) \right\} \\ &\quad + (a_{111}^1 + a_{122}^1 + a_{112}^2 + a_{222}^2), \\ &= \frac{6a^3x_e^5(d-x_e^2)}{(d+x_e^2)^6} (-y_e(3d-x_e^2) + 4d) + \frac{2sp\omega^{*2}}{N(py_e-c)} + \frac{6p^2cE_e\omega^{*2}}{(py_e-c)^3}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

A.2 Règle de signes de Descartes [51]

La règle de Descartes fournit une limite supérieure pour les racines positives d'un polynôme réel donné. Soit $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ une suite finie de nombres réels. On dit qu'un changement de signe se produit entre les éléments a_k et a_m , lorsque $0 \leq k < m \leq n$, si :

$$a_k a_m < 0,$$

et de plus, si $m = k + 1$ ou $m > k + 1$ et

$$a_l = 0, \quad k < l < m.$$

Le nombre total de changements de signe qui se produisent entre les éléments d'une suite est appelé le nombre de changements de signe de la suite.

Exemple A.2.1. La suite $\{1, 0, 2, -3, 0, 0, 2, 1, 2, 2, 0, 0\}$ a deux changements de signe.

Lemme A.2.1. Soit $0 \leq k < m \leq n$ avec $a_k a_m \neq 0$. Le nombre de changement de signe de la suite $\{a_k, a_{k+1}, \dots, a_m\}$ est pair (peut être 0) si $a_k a_m > 0$, est impair (ainsi, au moins un) si $a_k a_m < 0$.

A.3 L'algorithme Euclidien [51]

Si P_0 et P_1 sont deux polynômes quelconques avec des coefficients complexes différents du polynôme nul, nous pouvons par l'algorithme de division longue usuelle de déterminer les polynômes Q_1 et P_2 tel que identiquement dans z :

$$P_0(z) = P_1(z)Q_1(z) - P_2(z), \quad (\text{identiquement par rapport à } z) \quad (\text{A.15})$$

où P_2 est un polynôme nul ou bien son degré est inférieur au degré de P_1 . Les polynômes Q_1 et P_2 sont déterminés uniquement par P_0 et P_1 . Le polynôme $-P_2$ s'appelle le reste de la division de P_0 par P_1 .

Si le degré de P_2 reste positif, on peut également définir $-P_3$ comme le reste lorsque P_1 est divisé par P_2 , etc. Puisque les degrés des restes successifs décroissent toujours, il faut arriver en un nombre fini de pas à un point où le reste est nul. Ce processus algébrique est connu sous le nom d'algorithme Euclidien. Il fournit une suite finie de

polynômes liés par les relations :

$$\begin{aligned}
 P_0(z) &= Q_1(z)P_1(z) - P_2(z), \\
 P_1(z) &= Q_2(z)P_2(z) - P_3(z), \\
 &\dots \\
 P_{k-1}(z) &= Q_k(z)P_k(z) - P_{k+1}(z), \\
 &\dots \\
 P_{m-1}(z) &= Q_m(z)P_m(z).
 \end{aligned}
 \tag{A.16}$$

Par définition, le polynôme P_m n'est pas le polynôme nul. Si P_m n'est pas constante, une induction montre que P_m est un facteur de tous les polynômes précédents P_{m-1}, \dots, P_0 . (D'autre part, les équations (A.16) montrent que tout facteur commun de P_0 et P_1 est également un facteur de tous les polynômes ultérieurs et donc de P_m . Il en résulte que P_m contient tous les facteurs communs de P_0 et P_1 .) Par conséquent, les fonctions $f_k := P_k/P_m$ sont à nouveau des polynômes.

Théorème A.3.1. *Soit P un polynôme réel tel que $P \neq 0$, et soit P_0, P_1, \dots, P_m la suite de polynômes générée par l'algorithme Euclidien (A.16) en partant de $P_0 := P, P_1 := P'$. Donc, pour tout intervalle réel $[\alpha, \beta]$ tel que $P(\alpha)P(\beta) \neq 0$, P admet exactement $v(\alpha) - v(\beta)$ racines distincts dans $[\alpha, \beta]$, où $v(x)$ représente le nombre de changements de signe dans la suite $\{P_i(x)\}$. Le nombre complexe z_0 est une racine de multiplicité k de P si et seulement s'il est une racine de multiplicité $k - 1$ de P_m . Ainsi, toutes les racines de P dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ sont simples si et seulement si P_m n'admet pas une racine dans $[\alpha, \beta]$.*

Exemple A.3.1. Déterminer le nombre de racines du polynôme suivant dans l'intervalle $[0, 2]$:

$$x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1.$$

Solution : la règle des signes de Descartes nous indique qu'il existe un nombre pair de racines positives (chaque racine étant comptée avec sa multiplicité). L'algorithme Euclidien fournit (jusqu'à les facteurs constants positifs) la suite de polynômes suivante :

$$\begin{aligned}
 &x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1, \\
 &3x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 3x - 1, \\
 &-x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 2, \\
 &-x^3 + x^2 - x + 1, \\
 &0.
 \end{aligned}
 \tag{A.17}$$

La suite de signes à $x = 0$ est $+ - - +$ et $v(0) = 2$, à $x = 2$ elle est $+ + - -$ et $v(2) = 1$. Donc, le nombre de racines distincts dans $[0, 2]$ égale à $v(0) - v(2) = 1$. Puisque $P_3(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$

n'est pas constant, donc une racine peut avoir une multiplicité $k > 1$. Pour déterminer k , on applique l'algorithme Euclidien à P_3 et P'_3 (jusqu'à un facteur constant positif) :

$$\begin{aligned}
 & -x^3 + x^2 - x + 1, \\
 & \quad -3x^2 + 2x - 1, \\
 & \quad \quad x - 2, \\
 & \quad \quad \quad -1.
 \end{aligned}
 \tag{A.18}$$

On trouve $v(0) - v(2) = 1$, donc P_3 admet une racine dans $[0, 2]$ ce qui est simple car le dernier polynôme non nul de la suite $\{P_i\}$ est constant, et alors $k = 2$. En fait, le polynôme original est de la forme $P(x) = (x^2 + 1)^2(x - 1)^2$.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons proposé et analysé un nouveau système bio-économique algèbro-différentiel. Nous avons pris la réponse fonctionnelle des prédateurs aux proies sous une forme qui s'approche à une constante même lorsque la population de proies augmente. Nous considérons le comportement dynamique du système lorsque seul le prédateur est soumis à la récolte. Du point de vue biologique, nous ne nous intéressons qu'aux points d'équilibre positifs. Le nombre d'équilibres positifs est étudié par la règle des signes de Descartes et il est calculé numériquement à l'aide d'un code Matlab qui a été développé par l'algorithme Euclidien. Les résultats obtenus ont montré que le système proposé a un nombre pair d'équilibres positifs entre 0 et 8. Cela donne une importance particulière au système proposé car la diversité des équilibres positifs donne plus d'occasions en théorie du contrôle pour choisir le point qui représente la performance idéale de l'écosystème. La stabilité locale des équilibres intérieurs est déterminé en analysant leur équation caractéristique correspondante et l'exemple numérique proposé a montré que le système a deux équilibres intérieurs, l'un d'eux est un point selle instable et l'autre est un foyer qui change sa propriété de stabilité lors de la variation du revenu économique v . De plus, l'analyse de bifurcation d'un seul paramètre est effectuée par rapport au revenu économique. On a supposé que les revenus économiques positifs étaient responsables de la stabilité du modèle proposé. L'analyse de stabilité a révélé que lorsque le profit économique v est inférieur à la valeur de bifurcation v_1^* , les deux espèces convergent vers leur état stationnaire et elles coexistent au cours du temps. De plus, on a démontré que lorsque le profit économique est supérieur à la valeur de bifurcation, l'état de la population des proies, la population des prédateurs et l'effort de récolte sera instable, cela pourrait conduire à grave déséquilibre dans l'écosystème. L'étude proposée nous permet de mettre en évidence qu'il est important pour le gouvernement d'ajuster les revenus et d'élaborer des stratégies bénéfiques pour soutenir, encourager et améliorer la pêche ou atténuer les émissions afin que la communauté puisse être conduite à des états stables qui mèneront à la survie et à la croissance durable de l'écosystème proie-prédateur. Dans les prochains travaux,

on va améliorer notre modèle en introduisant plusieurs aspects tels que les délais qui rendraient le modèle plus réaliste. Nous devrions incorporer la structure par l'âge aux modèles où la population de prédateurs peut être séparée en adolescents et adultes et seuls les adultes peuvent être capturés par les pêcheurs, ce qui est économiquement faisable. En outre, d'autres types de bifurcations telles que la bifurcation transcritique et la bifurcation induite par la singularité seront étudiées dans les futurs travaux.

Bibliographie

- [1] Brian, P. I. *Mathematical Modeling in Systems Biology : An Introduction*. Cambridge, England, 2013.
- [2] Sigler, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci : A Translation Into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [3] Gear, C. Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations. *IEEE Trans. Circuit Theory CT*. 18(1)(1971), 89-95.
- [4] Gear, C. *Numerical Initial Value problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice-Hall, 1971.
- [5] Zhang, Q., Liu, C., and Zhang, X. *Complexity, Analysis and Control of Singular Biological Systems*. Springer-Verlag, London, 2012.
- [6] Campbell, S. L., Petzold, L., and Linh, V. H. Differential-algebraic equations. *Scholarpedia*. 3(8)(2008).
- [7] Kirchhoff, G. Ueber die auflösung der gleichungen, aufwelche man bei der untersuchung der lineren vertheilung galvanischer ströme geführt wird. *Annalen der Physik*. 148(12)(1847),497-508 .
- [8] Simeon, B. *On the History of Differential-Algebraic Equations*. Felix-Klein-Zentrum, TU Kaiserslautern, 2015.
- [9] Dai, L. *Singular Control System*. Springer, New York, 1989.
- [10] Kerioui, N., Abdelouahab, M. S. Stability and Hopf bifurcation of the coexistence equilibrium for a differential-algebraic biological economic system with predator harvesting. *Electronic Research Archive*. 29(1)(2021), 1641-1660.
- [11] Layek, G. C. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. Springer, India, 2015.
- [12] Kuznetsov, Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [13] Guckenheimer, J., and Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.

- [14] Arrowsmith, D. K., and Place, C. M. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge university press, 1990.
- [15] Poincaré, H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Volume 3 vols. Gauthier-villars, Paris édition.
- [16] Zeraoulia, E. *Dynamical Systems : Theories and Applications*. University of tebessa, Algeria, 2019.
- [17] Hale, J., and Koçak, H. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [18] Stephen, L. *Dynamical Systems with Applications Using MATLAB, 2^{ed}*. Springer, New York, 2014.
- [19] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [20] John, W. C., and Angela, M. R. *Ordinary and Partial Differential Equations : An Introduction to Dynamical Systems*. Virginia, 2010.
- [21] Murray, J. D. *Mathematical Biology. I. An introduction, 3^{ed}*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.
- [22] Linda J. S. Allen. *An Introduction to Mathematical Biology*. Pearson Education, Inc. USA, 2007.
- [23] Strogatz, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. USA, 1994.
- [24] Birkhoff, G., and Rota, G. C. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley and sons, Canada, 1989.
- [25] W. Hirsch, M., Smale, S., and L. Devaney, R. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier, USA, 2004.
- [26] Anosov, D. V., and Arnold, V. I. *Dynamical Systems I : ordinary differential equations and smooth dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [27] Bendtsen, C., and Thomsen, P. G. *Numerical Solution of Differential Algebraic Equations*. Technical report, IMM-REP, 1999.
- [28] Ascher, U. M., and Petzold, L. R. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [29] Campbell, S. L. Linearization of DAEs along trajectories. *Z angew Math Phys (ZAMP)*. 46(1995), 70-84.
- [30] Melike, K., and Ercan, C. On the numerical solution of differential-algebraic equations with Hessenberg Index-3. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. (2012), 12 pages.

- [31] Hairer, E., and Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations II : stiff and differential-algebraic problems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [32] Venkatasubramanian, V., Schättler, H., and Zaborszky, J. Local bifurcation and feasibility regions in differential-algebraic systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*. 40(1995), 1992-2013.
- [33] Beardmore, R. E. The singularity-induced bifurcation and it's Kronecker normal form. *SIAM Journal of Matrix Analysis*. 23(2001), 126-137.
- [34] Simon, A. L., Thomas, G. H., and Louis, J. G. *Applied Mathematical Ecology*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, London Paris Tokyo, 1980.
- [35] Schaefer, M. B. Some aspects of the dynamics of populations important to the management of marine fisheries. *IATTC Bull.* (1954), 25-56.
- [36] Brauer, F., and Chavez, C. C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg London, 2010.
- [37] Clark, C. W. *Mathematical Bioeconomics : The Optimal Management of Renewable Resources*. 2nd edition. John Wiley and Sons, New York, 1990.
- [38] Hritonenko, N., and Yatsenko, Y. *Mathematical Modelling in Economics, Ecology and the Environment*. Springer Science+ Business Media Dordrecht, 1999.
- [39] Kot, M. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge university press, New York, 2001.
- [40] Elizabeth, S. A., John, A. R. *Mathematical Models in Biology : an Introduction*. The United States of America, Cambridge University Press, New York, 2004.
- [41] Myerscough, M. R., Gray, B. F., Hogarth, W. L., and Norbury, J. An analysis of an ordinary differential equation model for a two-species predator-prey system with harvesting and stocking. *J. Math. Biol.* 30(1992), 389-411.
- [42] Gurtin, M. E., and R. C. MacCamy. Non-linear age-dependent Population Dynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.* 54(1974), 281-300.
- [43] Mohammed, E. D. Stability analysis for the Gurtin-MacCamy's age-structured population dynamics Model. *Applications and Applied Mathematics (AAM) : An International Journal*. 2(2)(2007), 144-151.
- [44] Chou, C. S., and Friedman, A. *Introduction to Mathematical Biology : Modeling, Analysis, and Simulations*. Springer International Publishing Switzerland, 2016.
- [45] Pierre A., Christophe L., Jean-Christophe P. *Modélisation Mathématique en Écologie : Cours et exercices corrigés*. Dunod, Paris, 2010.

- [46] Gordon, H. S. The economic theory of a common property resource : The fishery. *J. Poli. Eco.* 62(2)(1954), 124–142.
- [47] Abdelouahab, M. S., Hamri, N. E., and Wang, J. Hopf bifurcation and chaos in fractional-order modified hybrid optical system. *Nonlinear Dynamics.* 69(2012), 275-284.
- [48] Abdelouahab, M. S., and Lozi, R. Hopf-like bifurcation and mixed mode oscillation in a fractional-order FitzHugh-Nagumo model. *AIP Conference Proceedings.* 2183, 100003, (2019).
- [49] Chen, B. S., Liao, X. X., and Liu, Y. Q. Normal forms and bifurcations for the differential-algebraic systems. *Acta Math. Appl. Sinica.* 23 (2000), 429-443.
- [50] Hale, J. *Theory of Functional Differential Equations.* 2nd edition. *Applied Mathematical Sciences, Vol. 3.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [51] Henrici, P. *Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 1 : Power Series-Integration-Conformal Mapping-Location of Zeros, Pure and Applied Mathematics.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1974.
- [52] Holling, C. S. The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the European pine sawfly. *Canadian Entomology.* 91 (1959a), 293-320.
- [53] Holling, C. S. Some characteristics of simple types of predation and parasitism. *Canadian Entomology.* 91(1959), 385-398.
- [54] Holling, C. S. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation. *Memoirs of the Entomological Society of Canada.* 97 (1965), 5-60.
- [55] Kar, T. K., and Chakraborty, K. Effort dynamics in a prey-predator model with harvesting. *Int. J. Inf. Syst. Sci.* 6(2010), 318-332.
- [56] Liu, W., Biwen, L., Fu, C., and Chen, B. Dynamics of a predator-prey ecological system with nonlinear harvesting rate. *Wuhan Univ. J. Nat. Sci.* 20(2015), 25-33.
- [57] Liu, W., Fu, C. J., and Chen, B. Hopf bifurcation for a predator-prey biological economic system with Holling type II functional response. *J. Franklin Inst.* 348 (2011), 1114-1127.
- [58] Liu, C., Zhang, Q., Zhang, Y., and Duan, X. D. Bifurcation and control in a differential-algebraic harvested prey-predator model with stage structure for predator. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 18 (2008), 3159-3168.
- [59] Zhu, W., Huang, J., and Liu, W. The stability and Hopf bifurcation of the differential-algebraic biological economic system with single harvesting. 2015 Sixth Interna-

tional Conference on Intelligent Control and information Processing (ICICIP), Wuhan. (2015), 92-97.