

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila

Institut des Sciences et de Technologie

Département de sciences et Techniques



N° Ref :

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Spécialité : Sciences Hydrauliques.

THÈME

Étude théorique d'un viscosimètre oscillatoire à torsion

Présenté par :
Remmache Meriem
Benchouli Meriem

Soutenu devant le jury :

M. Hamidane Abbas
M. Saouli Salah
M. Berrahil Farid

Président
Promoteur
Examineur

Année universitaire : 2016/2017

Remerciements

Grâce a dieu miséricordieux tout puissant qui nous a éclairé le chemin de réussite,
et de nous avoir guidé durant toutes nos études.

Nous remercions notre promoteur Monsieur le professeur Saouli Salah
pour son aide précieuse et pour sa grande disponibilité et ses encouragements tout
au long de la rédaction de ce mémoire

Notre gratitude et remerciements aux membres du jury qui nous font l'honneur
de juger ce travail

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents pour leurs sacrifices déployés pour m'élever dignement et assurer mon éducation. A mes frères, mes sœurs pour leurs encouragements et leurs soutient et à ceux qui ont veillés pour que ce travail soit à la hauteur, surtout monsieur Saouli Salah notre encadreur. A tous mes remerciements.

MERIEM.B

Dédicace

Au nom de ce qui a été le bon d'ouvrir les portes volontairement ; de la Miséricorde dieux, était capable de naître le jour et nuit, je dédie noblement de tous mes respects :

« A la personne que j'adore, pour être prête convaincre Our moi âme Donner l'espoir de réussir dans mon présent milieu, à oie ma chère Maman sans toi je n'existe pas » ;

« A qui m'a soutenu tout le long de ma vie, m'a montré que la vie est Un droit pour le rattraper il faut réussir bien, faut avoir comment Convaincre et en savoir continuer » ;

Je me présente ce jour pour remercier tout ce qui m'a guidé vers mon Bien et m'orienter dans le vrai sens de réussir en bonne condition durant mon suivis le professeur désigné : Saouli Salah ;

« A tous mes frères et sœur s avec leurs époux et épouses mes respects et mes biens aimé sa notre vie familiale chacun par son nom » ;

« A tout ce qui ont étaient ma compagnie de l'étude des collègues d'études, amies copains et copines chacun par son nom » ;

« Sans oublier tous les familles des parents maternelles et paternelles et Leurs enfants » ;

REMMACHE Meriem

Remerciements	i
Dédicace	ii
Liste des figures	vi
Nomenclature	vii
Résumé.....	ix

Table des matières

Introduction générale	01
------------------------------------	-----------

Chapitre I : Propriétés physiques des liquides

I.1. Définition de la mécanique des fluides	02
I.2. Définition d'un fluide	02
I.3. Propriétés des liquides	02
I.4. Fluides newtoniens	03
I.5. Fluides non-newtoniens	03

Chapitre II : Viscosimètres

II.1. Rhéologie	05
II.2. Viscosimètre à chute de bille	05
II.3. Viscosimètre à tube capillaire	06
II.3.1. Avantages	07
II.3.2. Inconvénients	07
II.4. Viscosimètre oscillatoire	07
II.4.1. Avantages	08
II.4.2. Inconvénients	08
II.5. Viscosimètre rotatif	09
II.5.1. Avantages	10
II.5.2. Inconvénients	10

Chapitre III : Analyse théorique du viscosimètre oscillatoire

III. 1. Le pendule de torsion	11
III.2. Equation du mouvement du cylindre intérieur	12
III.3. Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques pour un fluide newtonien	14
III.4. Equation du mouvement du fluide entre les deux cylindres	15
III.4.1. Condition initiale	15
III.4.2. Conditions aux limites	16
III.4.4. Adimensionnalisation de l'équation du mouvement du cylindre intérieur	16
III.4.3. Changement de variables	16
III.4.5. Adimensionnalisation de l'équation du mouvement du fluide	18
III.5. Résolutions des équations différentielles obtenues	19
III.6. Calcul du module $\frac{ \theta_R^0 }{\theta_{aR}^0}$ et du déphasage φ	25

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1. Variations du rapport des amplitudes et du déphasage en fonction de la fréquence ($\bar{\omega} > 1$)	33
IV.2. Variations du rapport des amplitudes et du déphasage en fonction de la fréquence ($\bar{\omega} < 1$)	37
Conclusion général	41
Références bibliographiques	42

Liste des figure

Chapitre II

Figure II.1. Schéma simplifié du tube central	09
Figure II.2. Schéma d'un viscosimètre capillaire	10
Figure II.3. Viscosimètre oscillatoire	12
Figure II.4. Schéma d'un viscosimètre rotatif	13

Chapitre III

Figure III.1. Le pendule de torsion	15
Figure III.2. Schéma d'un viscosimètre oscillatoire	17

Chapitre III

Figure IV.1. Variations du rapport des amplitudes en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de M	36
Figure IV.2. Variations du déphasage en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de M	37
Figure IV.3. Variations du rapport des amplitudes en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de A	38
Figure IV.4. Variations du déphasage en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de A	39
Figure IV.5. Variations du rapport des amplitudes en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de M	40
Figure IV.6. Variations du déphasage en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de M	41
Figure IV.7. Variations du rapport des amplitudes en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de A	42
Figure IV.8. Variations du déphasage en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de A	43

Nomenclature

A	Paramètre adimensionnelle	
a	Coefficient	
B_1, B_2	Fonctions	
C_1, C_2	Fonctions	
c_1, c_2	Constantes	
D_1, D_2	Fonctions	
d	Distance entre le repère a et le repère b	m
F	Fonction	
I	Moment d'inertie	$m^2 \text{ kg}$
K	Consistance du fluide	Pa s^n
k	Raideur du ressort	Nm^{-1}
k	Constante de torsion du fil	$\text{kgm}^2 \text{s}^{-2}$
L	Longueur du cylindre	m
M	Moment de la force extérieure	N m
M	Paramètre adimensionnelle	
n	Indice de puissance	
R	Rayon du cylindre	m
r	Distance radiale	m
S	Surface	m^2
T	Température	K
T	Période	s
t	Temps	s
x	Distance radial adimensionnelle	

Lettres grecs

α	Constante	
β	Constante	
ϕ	Vitesse adimensionnelle	
ϕ^0	Amplitude	
φ	Déphasage	deg
$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement	s^{-1}
μ	Viscosité dynamique	$kg\ m^{-1}s^{-1}$
ν	Viscosité cinématique	m^2s^{-1}
$\bar{\omega}$	Vitesse angulaire adimensionnelle	$\bar{\omega}$
θ	Angle	rad
θ_R	Angle	rad
θ_{aR}	Angle	rad
θ_R^0	Amplitude	rad
θ_{AR}^0	Amplitude	rad
ρ_L	Masse volumique du liquide	$kg.m^{-3}$
ρ_B	Masse volumique de la bille	$kg.m^{-3}$
τ	Contrainte de cisaillement	Pa
τ	Temps adimensionnel	
τ_s	Contrainte du cisaillement du seuil	Pa
$\tau_{r\theta}$	Contrainte de cisaillement tangentielle	Pa
ω	Vitesse angulaire	$rad\ s^{-1}$
Δ	Déterminant	
Γ	Fonction	
Ω	Fonction	
ψ	Fonction	

Résumé

Dans le viscosimètre oscillatoire à torsion, le fluide est placé dans l'espace annulaire entre deux cylindres. Le cylindre extérieur effectue des oscillations sinusoïdales autour de l'axe centrale dans la direction tangentielle. Le mouvement entraîne le cylindre intérieur qui est suspendu par un fil de torsion à osciller avec la même fréquence mais avec une amplitude et un déphasage différents. Le rapport des amplitudes et le déphasage dépendent de la viscosité du fluide et cela constitue une méthode de mesure de la viscosité.

Abstract

In the oscillatory viscometer the fluid is placed between two cylinders. The outer cylinder undergoes sinusoidal oscillations around the central axis in the tangential direction. The movement drives the inner cylinder which is suspended by a torsional wire to undergoes oscillatory movement with the same frequency but with different amplitude and a phase. The amplitude and the phase depend on the viscosity of the fluid et this constitutes a method to measure the viscosity.

المخلص

في مقياس اللزوجة الاهتزازي يتم وضع السائل بين أسطوانتين، الأسطوانة الخارجية تقوم باهتزازات جيبيية حول المحور المركزي في اتجاه مماسي. هذه الحركة تدفع الاسطوانة الداخلية المعلقة عن طريق سلك التواء الى التأرجح بنفس التردد لكن بسعة ومرحلة تحول مختلفة. نسبة السعة ومرحلة التحول متعلقتان بلزوجة السائل وهذا ما يمثل طريقة لقياس اللزوجة

Introduction générale

La mécanique des fluides est une science aussi ancienne que la civilisation humaine puisqu'elle commande toutes les utilisations de l'eau. On possède d'ailleurs de nombreux témoignages de l'existence d'ouvrages hydrauliques datant de la préhistoire, notamment en Egypte et en Mésopotamie où ont été découverte des vestiges d'ouvrages d'irrigation, d'assainissement et d'alimentation en eau potable.

L'hydraulique et la mécanique des fluides de l'antiquité furent surtout un art sans aucune base scientifique, en dehors du principe d'approximations successives vers le but cherché. On doit tout de même admirer l'œuvre de ces anciens constructeurs qui ont permis à leurs successeurs d'entreprendre la science de la mécanique des fluides ou de l'hydraulique [1].

Les fluides sont partout présents, ils ont été étudiés et continuent de l'être au sein d'une importante communauté scientifique internationale. Il reste encore beaucoup de problèmes à comprendre, tant au niveau des fondements que des applications [2].

Au cours de ce dernier siècle plusieurs ingénieurs ont étudié la mécanique des fluides en détails et ont élaborés les bases de l'hydrodynamique, cette partie qui est très théorique de la mécanique des fluides et qui repose sur les mathématiques

On peut attribuer la naissance de l'hydrodynamique à cinq mathématiciens du 18^{ème} siècle : Newton, Euler, Bernoulli, Clairaut et d'Alembert.

Newton, au 17^{ème} siècle, appliqua les lois fondamentales de la dynamique sur les particules de fluide. Dans sa théorie, Newton a imaginé une structure granulée pour représenter le fluide. Newton établit ainsi la loi qui concerne le frottement dans un liquide en mouvement et proposa la notion de viscosité dans les liquides.

Nous présentons dans ce mémoire les méthodes de mesure de la viscosité et nous porterons notre étude sur le viscosimètre oscillatoire à torsion où le fluide est placé dans l'espace annulaire entre deux cylindres .

Chapitre I

Propriétés physiques des liquides

I.1. Définition de la mécanique des fluides

Dans ce chapitre, les définitions de la mécanique des fluides et des fluides sont exposées. La mécanique des fluides est une branche de la mécanique appliquée traitant le comportement des fluides au repos et en mouvement, c'est une science qui étudie les lois de l'équilibre et du mouvement des fluides et établit des formules dont l'application est nécessaire à la résolution des problèmes pratiques de l'ingénieur.

Le mot hydraulique vient de la combinaison de deux mots grecs; *Hudor* (eau) et *aqulos* (conduite, tube), ce qui auparavant signifiait une science sur le mouvement de l'eau dans les conduites. On peut penser que dans l'antiquité, seuls les problèmes posés par l'utilisation de l'eau ont été étudiés par l'hydraulique.

A l'heure actuelle, on entend par le terme hydraulique ou mécanique des fluides l'étude de tout fluide et non seulement de l'eau. L'hydraulique utilise largement, outre les méthodes de recherche théorique, les formules empiriques et les méthodes expérimentales qui permettent d'obtenir une information pratique importante concernant le mouvement des fluides dans les ouvrages étudiés [1].

I.2. Définition d'un fluide

La matière existe sous deux formes fluide et solide. Un fluide est un corps physique sans forme propre, qui peut subir de grandes déformations sous l'action des forces extérieures même très faibles. Cette propriété que l'on appelle fluidité est due à une grande mobilité des particules fluides. Le mot fluide désigne l'ensemble des liquides et des gaz. Les liquides sont généralement incompressibles et occupent un volume déterminé et adopte la forme du récipient. Ils présentent toujours une surface horizontale à l'état d'équilibre. Les gaz sont toujours considérés comme des fluides compressibles, ils se répandent et occupent le volume qui leur est offert et par conséquent, ils ne présentent pas de surface libre [1].

I.3. Propriétés des liquides

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques, qu'on appelle propriétés des fluides, on cite la masse volumique, le poids spécifique, la tension superficielle et la viscosité dynamique [1].

I.4. Fluides newtoniens

En hydrodynamique, les fluides sont classifiés en deux catégories vis-à-vis de leurs comportements quand ils sont mis en mouvement. Cette classification est basée sur leurs rhéologies, c'est-à-dire sur la relation qui lie la contrainte de cisaillement au taux de cisaillement. Il est convenu en hydrodynamique de classer les fluides en fluides newtoniens et en fluides non-newtoniens. Un fluide est dit newtonien si sa contrainte de cisaillement τ est directement proportionnelle au taux de cisaillement $\frac{\partial V}{\partial y}$, c'est-à-dire qu'il vérifie la loi de Newton

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial y} \quad (\text{I. 1})$$

où μ est la viscosité dynamique.

I.5. Fluides non-newtoniens

Les fluides non-newtoniens sont des fluides pour lesquels la relation de Newton n'est plus valable. Pour ce fluide, la contrainte de cisaillement τ n'est plus directement proportionnelle au gradient des vitesses $\frac{\partial V}{\partial y}$. Ils sont rhéologiquement définis par une relation empirique de la forme

$$\tau = F\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \quad (\text{I. 2})$$

les fluides non-newtoniens dits d'Ostwald sont définis par la loi dite de puissance

$$\tau = K\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^n \quad (\text{I. 3})$$

où les constantes K et n sont respectivement la consistance et l'indice de puissance du fluide. Pour $n=1$, cette équation devient celle de Newton et dans ce cas nous avons $K = \mu$. Ils existent d'autres lois caractérisant les fluides non-newtoniens comme la loi de Bingham

$$\tau = \tau_s + K\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \quad (\text{I. 4})$$

où τ_s est la contrainte de cisaillement de seuil. Certains fluides non-newtoniens sont décrits par une autre loi dite de Herschell-Bulkley et qui est donnée par la relation suivante

$$\tau = \tau_s + K \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^n \quad (\text{I. 5})$$

où K , n et τ_s sont respectivement la consistance, l'indice de puissance et la contrainte de cisaillement de seuil.

Chapitre II

Viscosimètres

II.1. Rhéologie

La rhéologie est la branche de la mécanique des fluides qui mesure la viscosité d'un fluide. Elle utilise des appareils appelés viscosimètres. Ces mesures peuvent avoir un caractère relatif (c'est à dire qu'elles nécessitent la connaissance de la valeur de la viscosité d'au moins un fluide dit de référence) ou absolu (mesure autonome vis-à-vis des autres viscosités).

Un viscosimètre est un appareil qui mesure la contrainte de cisaillement τ au sein d'un fluide pour différentes vitesses de cisaillement $\dot{\gamma}$. Lorsque l'appareil permet de faire varier les paramètres τ et $\dot{\gamma}$, on parle de rhéomètre. Dans tous les cas, la température doit être maintenue constante durant la mesure [3].

II.2. Viscosimètre à chute de bille

Le viscosimètre à chute de bille consiste d'un tube contenant un fluide à étudier de masse volumique ρ_L ainsi qu'une bille calibrée de masse volumique ρ_B et de rayon R .

Le tube est placé dans une cuve cylindrique qui sert à réguler la température grâce à une circulation d'eau de température T constante (thermostat). La mesure consiste à chronométrer le temps Δt mis par la bille pour passer du repère a au repère b . Dans ce cas, la viscosité dynamique est donnée par la relation

$$\mu = K (\rho_B - \rho_L) \Delta t \quad (\text{II. 1})$$

où K est une constante caractéristique du couple viscosimètre-bille [3].

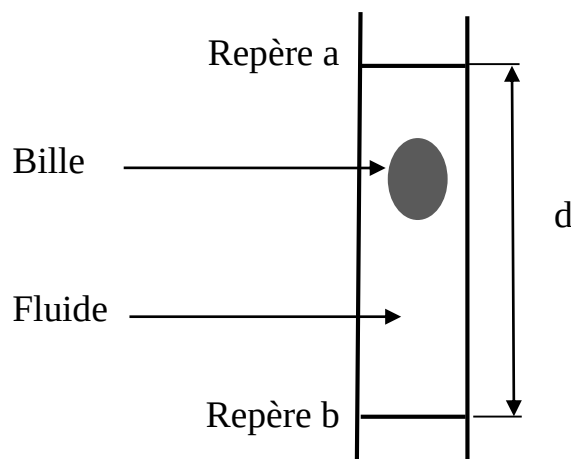


Figure II.1 : Schéma simplifié du tube.

II.3. Viscosimètre à tube capillaire

Il est constitué d'un tube capillaire parfaitement calibré portant deux repères. Ce tube est relié à un réservoir, lui-même étant relié à un autre tube de remplissage. Un volume bien précis de liquide à étudier (masse volumique ρ_L) est placé dans le réservoir par le tube de remplissage. L'ensemble est placé dans un bain thermostatique à la température T . Le liquide est ensuite aspiré jusqu'à le faire passer légèrement au dessus du repère supérieur. On enlève le dispositif d'aspiration afin d'abandonner le liquide à la gravitation et on chronomètre le temps Δt nécessaire pour que son niveau passe du repère supérieur au repère inférieur, pour ce type de viscosimètre, la viscosité est donnée par la formule

$$\mu = K \rho_L \Delta t \quad (\text{II. 2})$$

où K est une constante caractéristique du viscosimètre [3].

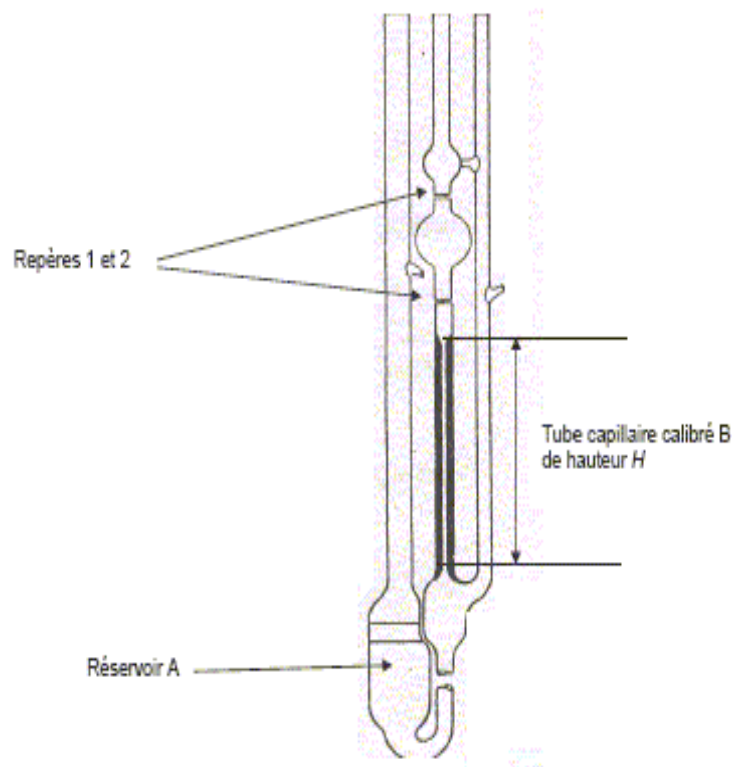


Figure II.2 : Schéma d'un viscosimètre à tube capillaire [4].

II.3.1. Avantages

1. Applicable à une large gamme de matériaux à basse température.
2. Théorie et technique bien développées [4].

II.3.2. Inconvénients

1. Les capillaires doivent être fins et longs avec des dimensions précises.
2. Des capillaires très longs sont nécessaires pour effectuer des mesures sur les métaux fondus à faible viscosité c'est-à-dire à faible nombre de Reynolds (régime laminaire). Ceci rend les mesures très difficiles du fait de la taille des tubes capillaires.
3. Comme les métaux fondus s'oxydent, même dans une atmosphère très propre et inerte, l'agglomération des oxydes peut conduire à un blocage des capillaires.
4. En raison du point de fusion élevé des métaux et de leurs alliages, seul un nombre limité de matériaux peut être utilisé comme corps des capillaires [4].

II.4. Viscosimètre oscillatoire

La méthode utilisant un viscosimètre oscillant est la méthode la plus couramment utilisée pour mesurer la viscosité des métaux fondus et de ses alliages. La plupart des données sur les métaux fondus et leurs alliages dans les bases de données proviennent de mesures impliquant une certaine version des viscosimètres oscillants. Un corps mis en oscillation autour d'un axe vertical dans un milieu fluide sera amorti en raison de l'absorption d'énergie de frottement et de la dissipation d'énergie due aux forces visqueuses à l'intérieur du fluide [4].

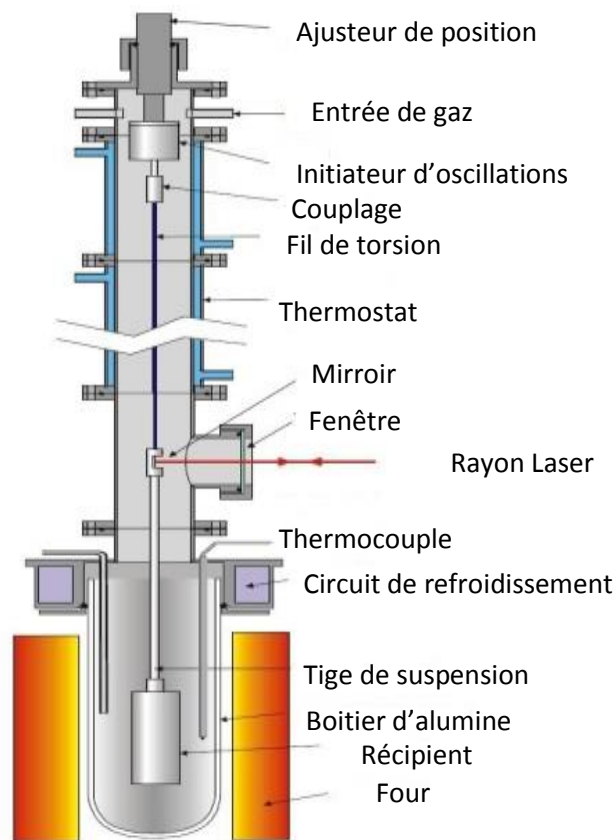


Figure II.3 : Viscosimètre oscillatoire [4].

II.4.1. Avantages

1. L'appareil est de conception simple sans segments compliqués.
2. La taille de l'échantillon est assez petite.
3. Les mesures sont rapides et le nettoyage et entretien de l'appareil sont faciles.
4. Cette technique de mesure a été appliquée à de nombreux métaux liquides [4].

II.4.2. Inconvénients

1. Malgré sa simplicité, il n'est pas couramment disponible sur le marché contrairement aux viscosimètres rotatifs (cylindres concentriques, viscosimètres à cônes).
2. Les vitesses de cisaillement utilisés dans le fluide sont très faibles.
3. Des recherches ont montré l'importance du mouillage de la paroi du cylindre par le liquide testé sur les résultats. Parfois, le glissement entre les interfaces liquide-paroi, peut conduire à des erreurs dues à un amortissement plus faible des forces visqueuses [4].

II.5. Viscosimètre rotatif

Le liquide à étudier est placé dans l'interstice de deux cylindres coaxiaux. L'un des cylindres tourne à la vitesse angulaire ω grâce à un moteur. L'autre cylindre est relié à un dispositif de rappel comme par exemple un ressort de raideur k . Après un certain laps de temps, l'ensemble atteint un état d'équilibre, le couple de torsion compense le couple moteur, par l'intermédiaire du couple des forces de frottement. Dans ce cas, la viscosité est déterminée à partir de la formule suivante

$$\mu = A \frac{k}{\omega} \quad (\text{II. 3})$$

où A est une constante caractéristique du viscosimètre [3].

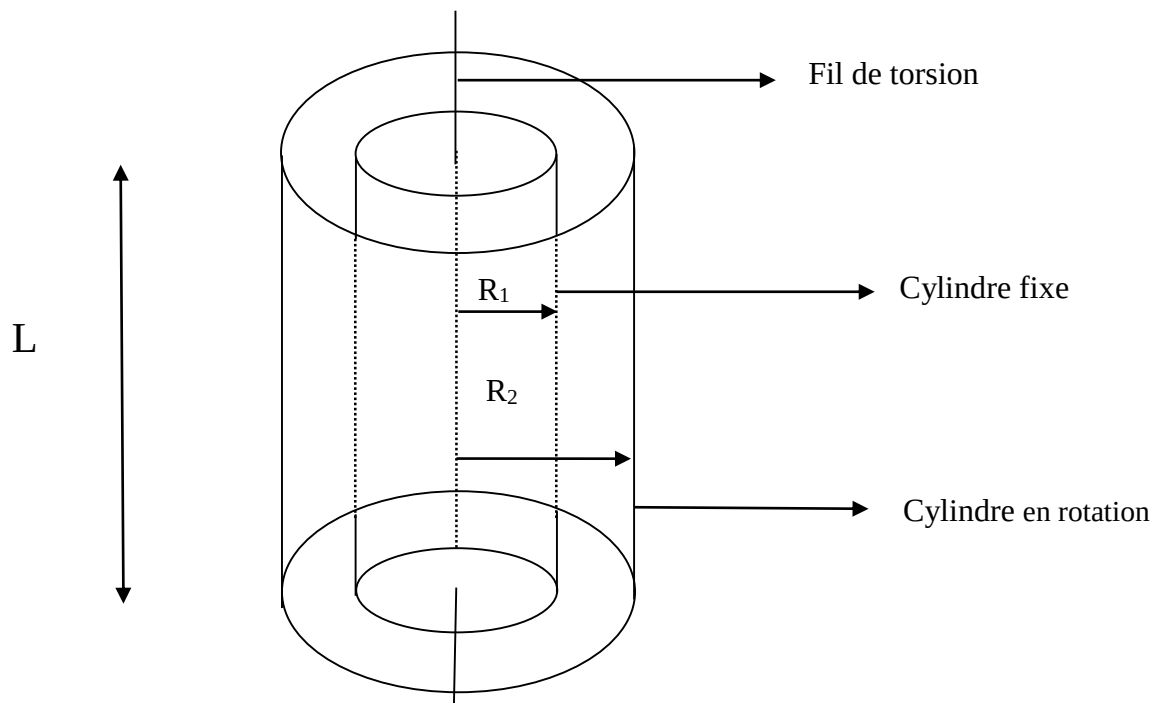


Figure II. 4 : Schéma d'un viscosimètre rotatif.

II.5.1. Avantages

1. Les liquides de faible viscosité peuvent être mesurés commodément avec des cylindres concentriques puisque ces derniers enferment le liquide, empêchant son écoulement, par opposition aux viscosimètres à plaques coniques et à plaques parallèles.
2. Un bon contrôle de la température est possible dans l'appareil du type Searle (cylindre intérieur tournant) en installant un bain à température constante autour du cylindre extérieur qui est fixe. Puisque la température a un effet important sur la viscosité, il faut veiller à assurer l'uniformité de la température dans l'ensemble de l'échantillon.
3. On peut obtenir une vitesse de cisaillement élevée dans l'échantillon liquide en modifiant l'espace entre les deux cylindres.
4. Un écoulement uniforme et laminaire à l'intérieur de l'échantillon liquide, qui est une condition nécessaire pour mesurer la viscosité, est réalisable dans un agencement de cylindres concentriques.
5. La surface interne du cylindre extérieur et la surface extérieure du cylindre intérieur peut être sablées pour empêcher le glissement de la paroi [4].

II.5.2. Inconvénients

1. Le nettoyage de l'appareil après chaque expérience nécessite du temps et un soin important en raison de la délicatesse des composants.
2. Le maintien de la température uniforme dans l'ensemble de l'échantillon est un défi dans le viscosimètre de Couette avec le cylindre extérieur qui tourne puisqu'un bain à température constante ne peut pas être installé à l'extérieur du cylindre extérieur contrairement à l'appareil Searle où le cylindre externe est fixé.
3. L'excentricité entre les cylindres concentriques a un effet défavorable sur des mesures. Ainsi, avant chaque série d'expériences, il faut s'assurer que les deux cylindres sont concentriques l'un avec l'autre.
4. Dans les liquides de faible viscosité, les instabilités (vortex de Taylor) sont une possibilité, conduisant à des données erronées. Ainsi, une bonne connaissance du critère de stabilité et une connaissance approfondie des tourbillons sont nécessaires, avant toute mesure [4].

Chapitre III

Analyse théorique du viscosimètre oscillatoire

III. 1. Le pendule de torsion

Le pendule de torsion est un exemple de mouvement sinusoïdal. Il s'agit d'un corps solide suspendu à un fil qui peut se tordre autour de soi même. En faisant tourner le corps solide d'un certain angle θ autour de l'axe OC , il se met en oscillation autour de cet axe.

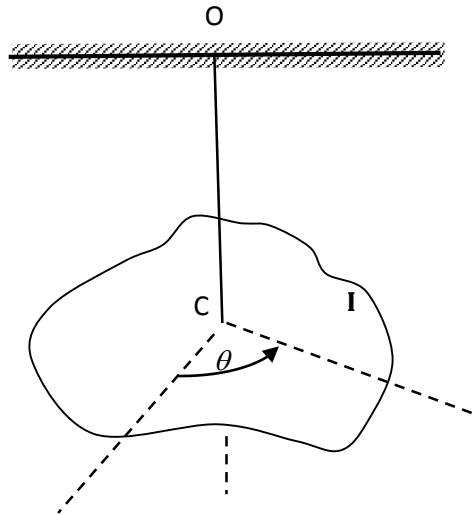


Figure III. 1 : Le pendule de torsion.

Si nous supposons que le centre de gravité du corps solide est situé au point C . Quand le corps tourne d'un angle θ à partir de sa position d'équilibre, le fil se tord et exerce sur le corps un moment de rappel M_{ext} autour de l'axe OC . Ce moment s'oppose à la rotation θ et sa valeur est donnée par la formule

$$M_{ext} = -k\theta \quad (\text{III. 1})$$

où k est la constante de torsion du fil. Si I est le moment d'inertie du corps autour de l'axe OC , l'équation du mouvement (deuxième loi de Newton) s'écrit alors

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta \quad (\text{III. 2})$$

soit

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0 \quad (\text{III. 3})$$

Nous remarquons que cette équation différentielle est l'équation caractéristique d'un mouvement oscillatoire dont la période T est donnée par la relation suivante [5].

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad (\text{III. 4})$$

Le viscosimètre oscillatoire à torsion consiste de deux cylindres concentriques entre lesquels le fluide à étudier est placé. Le cylindre intérieur est relié à un fil de torsion qui joue le rôle d'un ressort de rappel. Quand le cylindre extérieur est soumis à un mouvement oscillatoire, le mouvement est transmis directement par le fluide au cylindre intérieur qui à son tour se met en oscillation avec une contrainte qui est la force de rappel du au fil de torsion. Le but de notre travail est l'étude théorique du mouvement de cet ensemble qui constitue un viscosimètre dit de torsion. En appliquant un mouvement oscillatoire de faible amplitude au cylindre extérieur avec une certaine fréquence ; le cylindre intérieur se met en mouvement oscillatoire avec une autre amplitude et il se crée un déphasage entre ces deux mouvements. Notre analyse théorique permet la détermination de la relation entre les deux amplitudes et le déphasage en fonction des paramètres qui caractérisent le système et spécialement la viscosité cinématique du fluide entre les deux cylindres.

III.2. Equation du mouvement du cylindre intérieur

La figure III.2 montre le schéma de notre viscosimètre oscillatoire à torsion. Les deux cylindres ont une longueur L , le cylindre intérieur a un rayon R , tandis que le cylindre extérieur a un rayon aR où a est un coefficient qui est peu différent de l'unité.

Le cylindre intérieur est un pendule de torsion, il est constitué d'un cylindre plein au quel on attache un fil de torsion de coefficient de torsion k . Si nous tournons le cylindre d'un angle quelconque θ_R , sous l'effet de la torsion du fil, il se met à osciller autour de son axe central. Selon la deuxième loi du mouvement de Newton, l'équation du mouvement pour un tel pendule est

$$I \frac{d^2\theta_R(t)}{dt^2} = \sum_i M_{ext} \quad (\text{III. 5})$$

où I est le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de rotation et M_{ext} est le moment des forces extérieures qui agissent sur le cylindre. En substituant, les expressions des moments des forces extérieures, l'équation précédente devient

$$I \frac{d^2 \theta_R(t)}{dt^2} = -k \theta_R(t) + \tau_{r\theta} S \times R \quad (\text{III. 6})$$

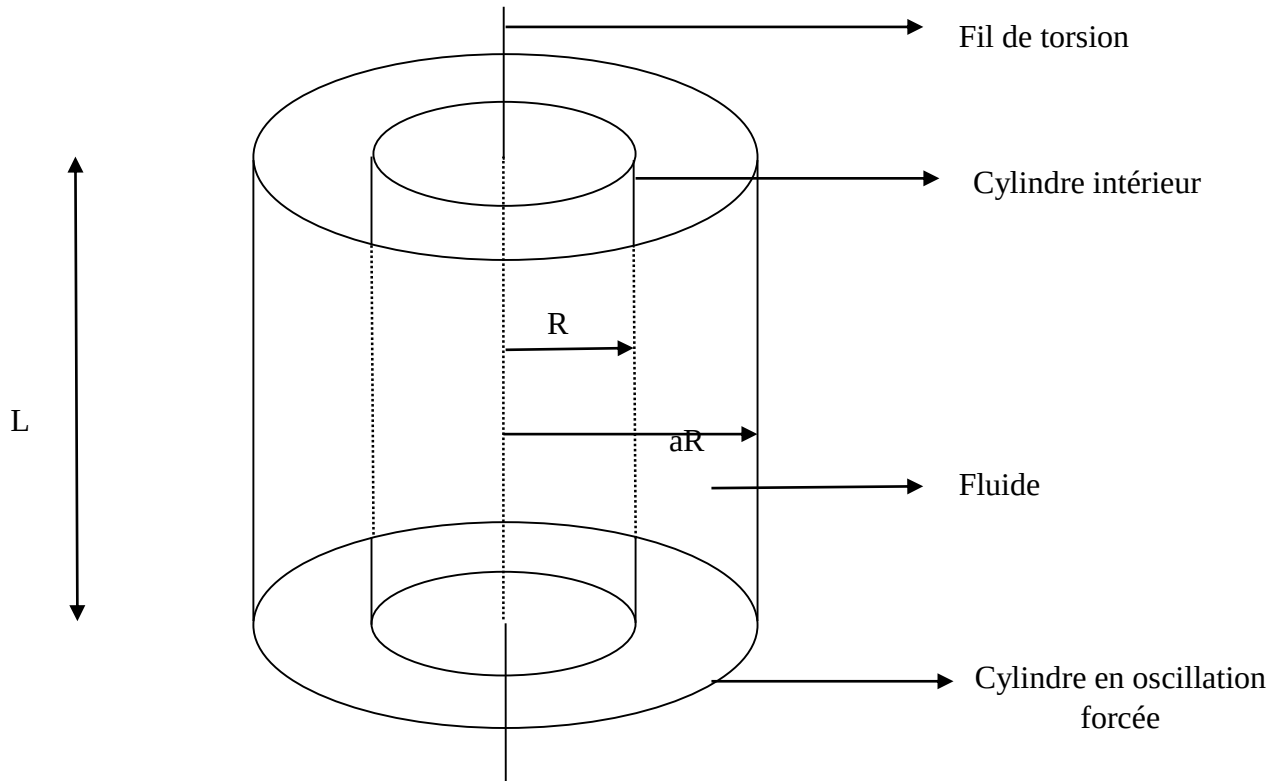


Figure III.2 : Schéma d'un viscosimètre oscillatoire.

où $S = 2\pi RL$ est la surface latérale du cylindre et $\tau_{r\theta}$ est la contrainte de cisaillement tangentielle donnée par l'expression suivante

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta(r,t)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (\text{III. 7})$$

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta(r,t)}{r} \right) \quad (\text{III. 8})$$

Injectons les expressions de la surface et la contrainte tangentielle dans l'équation (III.6), il vient alors

$$I \frac{d^2 \theta_R(t)}{dt^2} = -k \theta_R(t) + (2\pi RL)R \left[\mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta(r,t)}{r} \right) \right]_{r=R} \quad (\text{III. 9})$$

soit

$$I \frac{d^2 \theta_R(t)}{dt^2} = -k \theta_R(t) + 2\pi \mu R^2 L \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta(r,t)}{r} \right) \right]_{r=R} \quad (\text{III. 10})$$

cette équation est soumise aux conditions initiales suivantes

$$\theta_R(0) = 0 \quad (\text{III. 11})$$

$$\frac{d\theta_R(0)}{dt} = 0 \quad (\text{III. 12})$$

III.3. Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques pour un fluide newtonien

Equation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(V_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{III. 13})$$

Les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien en coordonnées cylindriques sous leurs formes générales sont

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right] \quad (\text{III.14})$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (\text{III.15})$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] \quad (\text{III.16})$$

III.4. Equation du mouvement du fluide entre les deux cylindres

Comme le fluide est mis en rotation par le cylindre extérieur, la seule composante qui reste et celle qui est dans la direction de l'angle θ et par conséquent, les deux autres équations sont identiquement nulles.

$$\rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (\text{III.17})$$

l'écoulement est axisymétrique, donc il n'y a pas de variation suivant θ

$$V(r, \theta, z, t) = V(r, z, t) \quad (\text{III.18})$$

il n'y a ni écoulement, ni variation de la vitesse selon la direction radiale et selon l'axe Z

$$(V_r = 0 \text{ et } V_z = 0)$$

$$V(r, \theta, z, t) = V(r, t) = V_\theta(r, t) \quad (\text{III.19})$$

l'écoulement est incompressible

$$\rho = cte \quad (\text{III.20})$$

après ces considérations, les équations du mouvement pour le fluide se résument à l'équation suivante

$$\rho \frac{\partial V_\theta(r, t)}{\partial t} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_\theta(r, t)}{\partial r} \right) - \frac{V_\theta(r, t)}{r^2} \right] \quad (\text{III.21})$$

cette équation peut s'écrire aussi sous la forme

$$\rho \frac{\partial V_\theta(r, t)}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta(r, t)) \right] \quad (\text{III.22})$$

III.4.1. Condition initiale

Le fluide à l'instant initial est au repos, la condition initiale s'écrit alors

$$V_\theta(r, 0) = 0 \quad (\text{III.23})$$

III.4.2. Conditions aux limites

Le fluide est confiné entre les deux cylindres, l'un tourne avec la vitesse $\frac{d\theta_R(t)}{dt}$ et le deuxième cylindre tourne avec la vitesse $\frac{d\theta_{aR}(t)}{dt}$, dans ce cas, les conditions aux limites s'écrivent

$$V_\theta(R,t) = R \frac{d\theta_R(t)}{dt} \quad (\text{III.24})$$

$$V_\theta(aR,t) = aR \frac{d\theta_{aR}(t)}{dt} \quad (\text{III.25})$$

III.4.3. Adimensionnalisation de l'équation du mouvement du cylindre intérieur

Le terme $r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta(r,t)}{r} \right)$ qui apparait dans l'équation du mouvement du cylindre intérieur peut s'écrire comme

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta(r,t)}{r} \right) = r \left(-\frac{V_\theta(r,t)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta(r,t)}{\partial r} \right) = -\frac{V_\theta(r,t)}{r} + \frac{\partial V_\theta(r,t)}{\partial r} \quad (\text{III.26})$$

Sachant que l'espace entre les deux cylindres est très petit ($a \approx 1$), il est légitime de négliger la courbure et de ce fait, il est possible d'écrire l'approximation suivante

$$-\frac{V_\theta(r,t)}{r} + \frac{\partial V_\theta(r,t)}{\partial r} \approx \frac{\partial V_\theta(r,t)}{\partial r} \quad (\text{III.27})$$

l'équation du mouvement du cylindre intérieur devient dans ce cas

$$I \frac{d^2 \theta_R(t)}{dt^2} = -k \theta_R(t) + 2\pi \mu R^2 L \frac{\partial V_\theta(r,t)}{\partial r} \quad (\text{III.28})$$

III.4.4. Changement de variables

Effectuons le changement de variables suivant

$$x = \frac{r - R}{(a - 1)R} \quad (\text{III.29})$$

$$\tau = \sqrt{\frac{k}{I}} t \quad (\text{III.30})$$

et introduisons les paramètres M , A et ϕ tel que

$$M = \frac{\mu}{(a-1)^2 \rho R^2} \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (\text{III.31})$$

$$A = \frac{2\pi \rho R^4 L (a-1)}{I} \quad (\text{III.32})$$

$$\phi = \frac{2\pi \rho R^3 L (a-1)}{\sqrt{k I}} V_\theta(r,t) \quad (\text{III.33})$$

A partir du changement de variables mentionné ci-dessus, on peut écrire les relations suivantes

$$dt = \sqrt{\frac{I}{k}} d\tau \quad (\text{III.34})$$

$$V_\theta(r,t) = \frac{\sqrt{k I}}{2\pi \rho R^3 L (a-1)} \phi(x,\tau) \quad (\text{III.35})$$

calculons la dérivée $\frac{\partial V_\theta(r,t)}{\partial r}$ en fonction des nouvelles variables

$$\frac{\partial V_\theta(r,t)}{\partial r} = \frac{\sqrt{k I}}{2\pi \rho R^3 L (a-1)} \frac{\partial \phi(x,\tau)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} \quad (\text{III.36})$$

le terme $\frac{\partial x}{\partial r}$ en vertu de la relation (III.36) est

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{(a-1)R} \quad (\text{III.37})$$

en substituant les relations (III.34), (III.36) et (III.37) dans l'équation (III.28) il vient

$$I \frac{d^2 \theta_R(\tau)}{\frac{I}{k} d\tau^2} = -k \theta_R(\tau) + 2\pi \mu R^2 L \frac{\sqrt{k I}}{2\pi \rho R^4 L (a-1)^2} \left(\frac{\partial \phi(x,\tau)}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (\text{III.38})$$

en réarrangeant les termes et en tenant compte de la relation (III.38), cette équation devient

$$\frac{d^2 \theta_R(\tau)}{d\tau^2} = -\theta_R(t) + M \left(\frac{\partial \phi(x,\tau)}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (\text{III.39})$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\theta_R(0) = 0 \quad (\text{III.40})$$

$$\frac{\partial \theta_R(0)}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{III.41})$$

III.4.5. Adimensionnalisation de l'équation du mouvement du fluide

Le terme $\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta(r, t)) \right]$ qui apparait dans l'équation du mouvement du fluide peut s'écrire comme

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta(r, t)) \right] = -\frac{1}{r^2} V_\theta(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_\theta(r, t)}{\partial r^2} \quad (\text{III.42})$$

sachant que l'espace entre les deux cylindres est très petit ($a \approx 1$), nous pouvons encore négliger la courbure et écrire

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta(r, t)) \right] \approx \frac{\partial^2 V_\theta(r, t)}{\partial r^2} \quad (\text{III.43})$$

l'équation du mouvement du fluide devient dans ce cas

$$\rho \frac{\partial V_\theta(r, t)}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 V_\theta(r, t)}{\partial r^2} \quad (\text{III.44})$$

en effectuant le changement de variables déjà mentionné, on peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{\partial \phi(x, \tau)}{\partial \tau} = M \frac{\partial^2 \phi(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\text{III.45})$$

avec les conditions initiale et les conditions aux limites suivantes

$$\phi(x, 0) = 0 \quad (\text{III.46})$$

$$\phi(0, \tau) = A \frac{d\theta_R(t)}{d\tau} \quad (\text{III.47})$$

$$\phi(1, \tau) = A \frac{d\theta_{aR}(t)}{d\tau} \quad (\text{III.48})$$

III.5. Résolutions des équations différentielles obtenues

La théorie du viscosimètre oscillatoire est régit par le système d'équations différentielles aux dérivées partielles suivant

$$\frac{d^2\theta_R(\tau)}{d\tau^2} = -\theta_R(\tau) + M \left(\frac{\partial\phi(x,\tau)}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (\text{III.49})$$

$$\theta_R(0) = 0 \quad (\text{III.50})$$

$$\frac{\partial\theta_R(0)}{\partial\tau} = 0 \quad (\text{III.51})$$

$$\frac{\partial\phi(x,\tau)}{\partial\tau} = M \frac{\partial^2\phi(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (\text{III.52})$$

$$\tau = 0 \quad , \quad \phi = 0 \quad (\text{III.53})$$

$$x = 0 \quad , \quad \phi(x,\tau) = A \frac{d\theta_R(t)}{d\tau} \quad (\text{III.54})$$

$$x = 1 \quad , \quad \phi(x,\tau) = A \frac{d\theta_{aR}(t)}{d\tau} \quad (\text{III.55})$$

nous cherchons la solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles (III.52) sous la forme

$$\phi(x,\tau) = \text{Re} \left(\phi^0(x) e^{i \bar{\omega} \tau} \right) \quad (\text{III.56})$$

où $\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{I}{K}}$. En calculant les dérivées première et seconde de la fonction $\phi(x,\tau)$ respectivement par rapport au temps adimensionnel τ et la distance adimensionnelle x , nous obtenons

$$\frac{\partial\phi(x,\tau)}{\partial\tau} = i \bar{\omega} \phi^0(x) e^{i \bar{\omega} \tau} \quad (\text{III.57})$$

$$\frac{\partial^2\phi(x,\tau)}{\partial x^2} = \phi^{0''}(x) e^{i \bar{\omega} \tau} \quad (\text{III.58})$$

en substituant ces expressions dans l'équation (III.52), il vient

$$i \bar{\omega} \phi^0(x) e^{i \bar{\omega} \tau} = M \phi^{0''}(x) e^{i \bar{\omega} \tau} \quad (\text{III.59})$$

en divisant les deux membres de cette équation par le terme $e^{i \bar{\omega} \tau}$, nous arrivons à l'équation différentielle ordinaire

$$\phi^0(x) - \frac{i \bar{\omega}}{M} \phi^0(x) = 0 \quad (\text{III.60})$$

dont la solution est donnée par l'expression suivante

$$\phi^0(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} x} \quad (\text{III.61})$$

en l'injectant dans la relation (III.56), la fonction $\phi(x, \tau)$ s'écrit alors sous la forme

$$\phi(x, \tau) = \left[c_1 e^{\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} x} \right] e^{i \bar{\omega} \tau} \quad (\text{III.62})$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes d'intégration que nous déterminons à partir des conditions aux limites. En appliquant la condition aux limites (III.54), c'est-à-dire

$$x = 0, \quad \phi(x, \tau) = A \frac{d\theta_R(\tau)}{d\tau} \quad (\text{III.63})$$

la solution de l'équation (III.49) est cherchée sous la forme

$$\theta_R(\tau) = \text{Re} \left(\theta_R^0 e^{i \bar{\omega} \tau} \right) \quad (\text{III.64})$$

sa dérivée première par rapport à la variable adimensionnelle τ est

$$\frac{d\theta_R(\tau)}{d\tau} = i \bar{\omega} \theta_R^0 e^{i \bar{\omega} \tau} \quad (\text{III.65})$$

en substituant cette expression dans la condition aux limites (III.63), nous obtenons la relation suivante

$$\left[c_1 e^{\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} x} \right]_{x=0} e^{i \bar{\omega} \tau} = i \bar{\omega} A \theta_R^0 e^{i \bar{\omega} \tau} \quad (\text{III.66})$$

soit

$$c_1 + c_2 = i \bar{\omega} A \theta_R^0 \quad (\text{III.67})$$

la deuxième condition aux limites pour la fonction $\phi(x, \tau)$ est

$$x=1 \quad , \quad \phi(x, \tau) = A \frac{d\theta_{aR}(\tau)}{d\tau} \quad (\text{III.68})$$

si nous supposons que le mouvement du cylindre extérieur est sinusoïdal, alors son équation du mouvement peut être représenté par la relation suivante

$$\theta_{aR}(\tau) = \theta_{aR}^0 \operatorname{Re}(e^{i \bar{\omega} \tau}) \quad (\text{III.69})$$

dont sa dérivée première par rapport à la variable adimensionnelle τ est

$$\frac{d\theta_{aR}(\tau)}{d\tau} = i \bar{\omega} \theta_{aR}^0 e^{i \bar{\omega} \tau} \quad (\text{III.70})$$

qui après substitution dans l'équation (III.68), nous fournit la relation

$$\left[c_1 e^{\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} x} \right]_{x=1} e^{i \bar{\omega} \tau} = i \bar{\omega} A \theta_{aR}^0 e^{i \bar{\omega} \tau} \quad (\text{III.71})$$

soit

$$c_1 e^{\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} = i \bar{\omega} A \theta_{aR}^0 \quad (\text{III.72})$$

ainsi, les constantes d'intégration c_1 et c_2 sont reliées par le système suivant

$$c_1 + c_2 = i \bar{\omega} A \theta_R^0 \quad (\text{III.73})$$

$$c_1 e^{\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} = i \bar{\omega} A \theta_{aR}^0 \quad (\text{III.74})$$

posons que

$$\alpha = i \bar{\omega} A \theta_R^0 \quad (\text{III.75})$$

$$\beta = i \bar{\omega} A \theta_{aR}^0 \quad (\text{III.76})$$

le système (III.73) et (III.74) s'écrit

$$c_1 + c_2 = \alpha \quad (\text{III.77})$$

$$c_1 e^{\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} = \beta \quad (\text{III.78})$$

nous utilisons la méthode de Cramer qui consiste à calculer les déterminants suivants

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} & e^{-\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} \end{vmatrix} \quad (\text{III.79})$$

$$\Delta = e^{-\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} - e^{\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} = - \left(e^{\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} - e^{-\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} \right) \quad (\text{III.80})$$

$$\Delta = -2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} \quad (\text{III.81})$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & e^{-\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} \end{vmatrix} \quad (\text{III.82})$$

$$\Delta_1 = \alpha e^{-\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} - \beta \quad (\text{III.83})$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ e^{\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} & \beta \end{vmatrix} \quad (\text{III.84})$$

$$\Delta_2 = \beta - \alpha e^{\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}} \quad (\text{III.85})$$

et ainsi les constantes d'intégration c_1 et c_2 sont données par les formules

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (\text{III.86})$$

$$c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (\text{III.87})$$

soient

$$c_1 = \frac{\alpha e^{-\sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} - \beta}{-2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} \quad (\text{III.88})$$

$$c_2 = \frac{\beta - \alpha e^{\sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}}}{-2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} \quad (\text{III.89})$$

en substituant ces constantes d'intégration c_1 et c_2 dans l'équation (III.61), nous obtenons

$$\phi^0(x) = \frac{\alpha e^{-\sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} - \beta}{-2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} e^{\sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} x} + \frac{\beta - \alpha e^{\sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}}}{-2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} e^{-\sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} x} \quad (\text{III.90})$$

qui après certaines opérations algébriques devient

$$\phi^0(x) = \frac{\beta \operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} (x) - \alpha \operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} (x-1)}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} \quad (\text{III.91})$$

avant de résoudre l'équation (III.91), calculons la dérivée première de la fonction $\phi^0(x)$ par rapport à la variable adimensionnelle x

$$\frac{\partial \phi^0(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\phi^0(x) e^{i\bar{\omega}\tau}] \quad (\text{III.92})$$

soit

$$\frac{\partial \phi^0(x)}{\partial x} = \frac{\partial \phi^0(x)}{\partial x} e^{i\bar{\omega}\tau} \quad (\text{III.93})$$

en utilisant la relation (III. 91) définissant la fonction $\phi^0(x)$, il vient

$$\frac{\partial \phi^0(x)}{\partial x} = \frac{\beta \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} (x) - \alpha \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} (x-1)}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} \quad (\text{III.94})$$

qui pour $x = 0$ est

$$\left(\frac{\partial \phi^0(x)}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{\beta \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} - \alpha \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \right)}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} \quad (\text{III.95})$$

en y rapportant les l'expressions de α et β , nous arrivons à

$$\left(\frac{\partial \phi^0(x)}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{Ai \bar{\omega} \theta_{aR}^0 \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} - Ai \bar{\omega} \theta_R^0 \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} \quad (\text{III.96})$$

ou bien

$$\left(\frac{\partial \phi^0(x)}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{Ai \bar{\omega} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \left(\theta_{aR}^0 - \theta_R^0 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \right)}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} \quad (\text{III.97})$$

en reprenons l'équation différentielle (III.49), à savoir

$$\frac{d^2 \theta_R(\tau)}{d\tau^2} = -\theta_R(\tau) + M \left(\frac{\partial \phi^0(x)}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (\text{III.98})$$

comme sa solution est cherchée sous la forme

$$\theta_R(\tau) = \operatorname{Re} \left(\theta_R^0 e^{i \bar{\omega} \tau} \right) \quad (\text{III.99})$$

la dérivée seconde de la fonction $\theta_R(\tau)$ par rapport à la variable adimensionnelle τ est

$$\frac{d^2 \theta_R(\tau)}{d\tau^2} = i^2 \bar{\omega}^2 \theta_R^0 e^{i \bar{\omega} \tau} \quad (\text{III.100})$$

en substituant les relations (III.97) et (III.100) dans l'équation (III.98), nous obtenons

$$i^2 \bar{\omega}^2 \theta_R^0 e^{i \bar{\omega} \tau} = -\theta_R^0 e^{i \bar{\omega} \tau} + M \frac{A(i \bar{\omega})^{\frac{3}{2}} \left(\theta_{aR}^0 - \theta_R^0 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \right)}{\sqrt{M} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} e^{i \bar{\omega} \tau} \quad (\text{III.101})$$

soit

$$i^2 \bar{\omega}^2 \theta_R^0 + \theta_R^0 = M \frac{A(i\bar{\omega})^{\frac{3}{2}} \left(\theta_{aR}^0 - \theta_R^0 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \right)}{\sqrt{M} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} \quad (\text{III.102})$$

relation que nous pourrions mettre sous la forme suivante

$$\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} = \frac{i\bar{\omega} A M}{(1 - \bar{\omega}^2) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}}{\sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} + i\bar{\omega} A M \operatorname{ch} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} \quad (\text{III.103})$$

III.6. Calcul du module $\left| \frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} \right|$ et du déphasage φ

cette relation lie l'amplitude complexe θ_R^0 de la fonction $\theta_R(\tau)$ à l'amplitude réelle de la fonction

$$\theta_{aR}. \text{ Ce nombre complexe a pour module } \left| \frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} \right| \text{ et pour déphasage } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \left(\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} \right)}{\operatorname{Re} \left(\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} \right)}.$$

Reprenons l'équation (III.103)

$$\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} = \frac{i\bar{\omega} A M}{(1 - \bar{\omega}^2) \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}}{\sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} + i\bar{\omega} A M \operatorname{ch} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} \quad (\text{III.104})$$

et écrivons la sous la forme

$$\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} = \frac{i\bar{\omega} A M \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}}{(1 - \bar{\omega}^2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} + i\bar{\omega} A M \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}} \quad (\text{III.105})$$

ou sous une forme plus condensée comme

$$\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} = \frac{B}{C + D} \quad (\text{III.106})$$

où B, C et D sont des fonctions définies par les expressions suivantes

$$B = i \bar{\omega} A M \sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} \quad (\text{III.107})$$

$$C = (1 - \bar{\omega}^2) sh \sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} \quad (\text{III.108})$$

$$D = i \bar{\omega} A M \sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} ch \sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} \quad (\text{III.109})$$

intéressons-nous maintenant au terme $\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}}$ que nous pouvons écrire sous la forme

$$\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} = \sqrt{i} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{M}} \quad (\text{III.110})$$

sachant que la racine carrée du nombre complexe i s'écrit

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \quad (\text{III.111})$$

la relation (III.110) devient

$$\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{M}} \quad (\text{III.112})$$

soit

$$\sqrt{\frac{i \bar{\omega}}{M}} = \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \quad (\text{III.113})$$

en substituant cette relation dans l'équation (III.107), nous obtenons l'expression la fonction B sous la forme

$$B = - \bar{\omega} A M \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \bar{\omega} A M \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \quad (\text{III.114})$$

intéressons-nous à l'expression de la fonction C qui est

$$C = (1 - \bar{\omega}^2) sh \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \quad (\text{III.115})$$

le terme $sh \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}}$ qui figure dans cette expression, en vertu de la relation (III.113) s'écrit

$$sh \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} = sh \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) \quad (\text{III.116})$$

sachant que [6]

$$sh(a+b) = sha chb + shb cha \quad (\text{III.117})$$

l'équation (III.116) devient

$$sh \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) = sh \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} ch i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + sh i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} ch \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \quad (\text{III.118})$$

a partir des propriétés des fonctions hyperboliques, pour toute variable y , nous avons les relations

$$sh i y = i \sin y \quad (\text{III.119})$$

$$ch i y = \cos y \quad (\text{III.120})$$

qui nous permettent de réécrire la relation (III.118) sous la forme

$$sh \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) = sh \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i ch \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \sin \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \quad (\text{III.121})$$

en injectons cette équation dans l'expression de la fonction C , nous obtenons

$$C = (1 - \bar{\omega}^2) \left(sh \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i ch \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \sin \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) \quad (\text{III.122})$$

ou bien

$$C = (1 - \bar{\omega}^2) sh \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i (1 - \bar{\omega}^2) ch \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \sin \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \quad (\text{III.123})$$

reprenons l'équation (III.109) qui donne l'expression de la fonction D , à savoir

$$D = i \bar{\omega} A M \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{i\bar{\omega}}{M}} \quad (\text{III.124})$$

tenant compte de la relation (III.113), nous pouvons récrire cette équation sous la forme

$$D = i \bar{\omega} A M \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) \quad (\text{III.125})$$

ou bien sous la forme

$$D = \left(-\bar{\omega} A M \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \bar{\omega} A M \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) \quad (\text{III.126})$$

sachant que

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad (\text{III.127})$$

la fonction $\operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right)$ s'écrit alors comme

$$\operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) = \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \operatorname{chi} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \operatorname{shi} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \quad (\text{III.128})$$

tenant compte des relations (III.119) et (III.120) déjà mentionnées, nous écrirons alors la fonction

$\operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right)$ sous la forme

$$\operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) = \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \sin \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \quad (\text{III.129})$$

en la substituant dans l'équation (III.126), la fonction D devient alors

$$D = \left(-\bar{\omega} A M \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \bar{\omega} A M \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + i \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \sin \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) \quad (\text{III.130})$$

qui après certaines simplifications s'écrit

$$D = -\bar{\omega} A M \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \sin \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) + i \bar{\omega} A M \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \sin \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) \quad (\text{III.131})$$

remarquons que les fonctions B , C et D sont des fonctions complexes composées d'une partie réelle et une partie imaginaire, dans ce cas nous pouvons les écrire sous la forme

$$B = B_1 + i B_2 \quad (\text{III.132})$$

$$C = C_1 + i C_2 \quad (\text{III.133})$$

$$D = D_1 + i D_2 \quad (\text{III.134})$$

où les fonctions B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , D_1 et D_2 sont définies par les expressions suivantes

$$B_1 = -\bar{\omega} A M \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \quad (\text{III.135})$$

$$B_2 = \bar{\omega} A M \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \quad (\text{III.136})$$

$$C_1 = (1 - \bar{\omega}^2) sh \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \quad (\text{III.137})$$

$$C_2 = (1 - \bar{\omega}^2) ch \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \sin \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \quad (\text{III.138})$$

$$D_1 = -\bar{\omega} A M \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \left(ch \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} + sh \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \sin \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) \quad (\text{III.139})$$

$$D_2 = \bar{\omega} A M \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \left(ch \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} - sh \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \sin \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{2M}} \right) \quad (\text{III.140})$$

en vertu des relations (III.132), (III.133) et (III.134) ; le rapport $\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0}$ s'écrit sous la forme condensée suivante

$$\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} = \frac{B_1 + i B_2}{(C_1 + i C_2) + (D_1 + i D_2)} \quad (\text{III.141})$$

soit

$$\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} = \frac{B_1 + i B_2}{(C_1 + D_1) + i(C_2 + D_2)} \quad (\text{III.142})$$

multiplions le numérateur et le dénominateur de cette équation par le nombre complexe conjugué $(C_1 + D_1) - i(C_2 + D_2)$ pour obtenir

$$\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} = \frac{(B_1 + i B_2)[(C_1 + D_1) - i(C_2 + D_2)]}{[(C_1 + D_1) + i(C_2 + D_2)][(C_1 + D_1) - i(C_2 + D_2)]} \quad (\text{III.143})$$

soit

$$\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} = \frac{[(B_1 + i B_2)(C_1 + D_1)] - i[(B_1 + i B_2)(C_2 + D_2)]}{(C_1 + D_1)^2 + (C_2 + D_2)^2} \quad (\text{III.144})$$

en réarrangeant les termes en séparant les parties réelles et les parties imaginaires qui apparaissent dans cette équation, nous obtenons l'expression du rapport $\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0}$ sous la forme finale suivante

$$\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} = \frac{B_1 C_1 + B_1 D_1 + B_2 D_2 + B_2 C_2 + i(B_2 D_1 + B_2 C_1 - B_1 D_2 - B_1 C_2)}{(C_1 + D_1)^2 + (C_2 + D_2)^2} \quad (\text{III.145})$$

posons que

$$\Omega = B_1 C_1 + B_1 D_1 + B_2 D_2 + B_2 C_2 \quad (\text{III.146})$$

$$\Gamma = B_2 D_1 + B_2 C_1 - B_1 D_2 - B_1 C_2 \quad (\text{III.147})$$

$$\Psi = (C_1 + D_1)^2 + (C_2 + D_2)^2 \quad (\text{III.148})$$

l'équation (III.145) devient

$$\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} = \frac{\Omega}{\Psi} + i \frac{\Gamma}{\Psi} \quad (\text{III.149})$$

comme θ_R^0 est un nombre complexe et θ_{aR}^0 est un nombre réel, le module du nombre complexe

$\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0}$ est

$$\left| \frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} \right| = \left[\left(\frac{\Omega}{\Psi} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{\Psi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.150})$$

le déphasage φ est défini par l'équation

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} \left(\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} \right)}{\operatorname{Re} \left(\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} \right)} \quad (\text{III.151})$$

soit

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \left(\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} \right)}{\operatorname{Re} \left(\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0} \right)} \quad (\text{III.152})$$

en termes de Γ et Ω , le déphasage φ s'écrit en définitive sous la forme

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\Gamma}{\Omega} \quad (\text{III.153})$$

Chapitre IV

Résultats et discussions

Les valeurs des paramètres adimensionnels M et A sont fonctions des dimensions géométriques du viscosimètre et des caractéristiques physiques du fluide utilisé qui dans notre cas est de l'eau. Les valeurs choisies pour cette étude sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Paramètres	Valeurs
R	0,055 m
L	0,25 m
a	1,001
I	0,00025 kgm ²
k	0,4 kgm ² s ⁻²
ρ	1000 kgm ⁻³
ν	1,01.10 ⁻⁶ m ² s ⁻¹

IV. 1. Variations du rapport des amplitudes et du déphasage en fonction de la fréquence ($\bar{\omega} > 1$)

La figure IV.1. montre les variations du rapport des amplitudes $\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0}$ en fonction de la fréquence $\bar{\omega}$ pour différentes valeurs du paramètre M pour A fixe. La figure montre que pour des fréquences $\bar{\omega}$ supérieure à l'unité, le rapport des amplitudes diminue avec l'augmentation de la fréquence. Pour une fréquence $\bar{\omega}$ donnée, le rapport des amplitudes augmente avec le paramètre M . Pour les grandes valeurs du paramètre M , l'influence de la fréquence $\bar{\omega}$ est très faible.

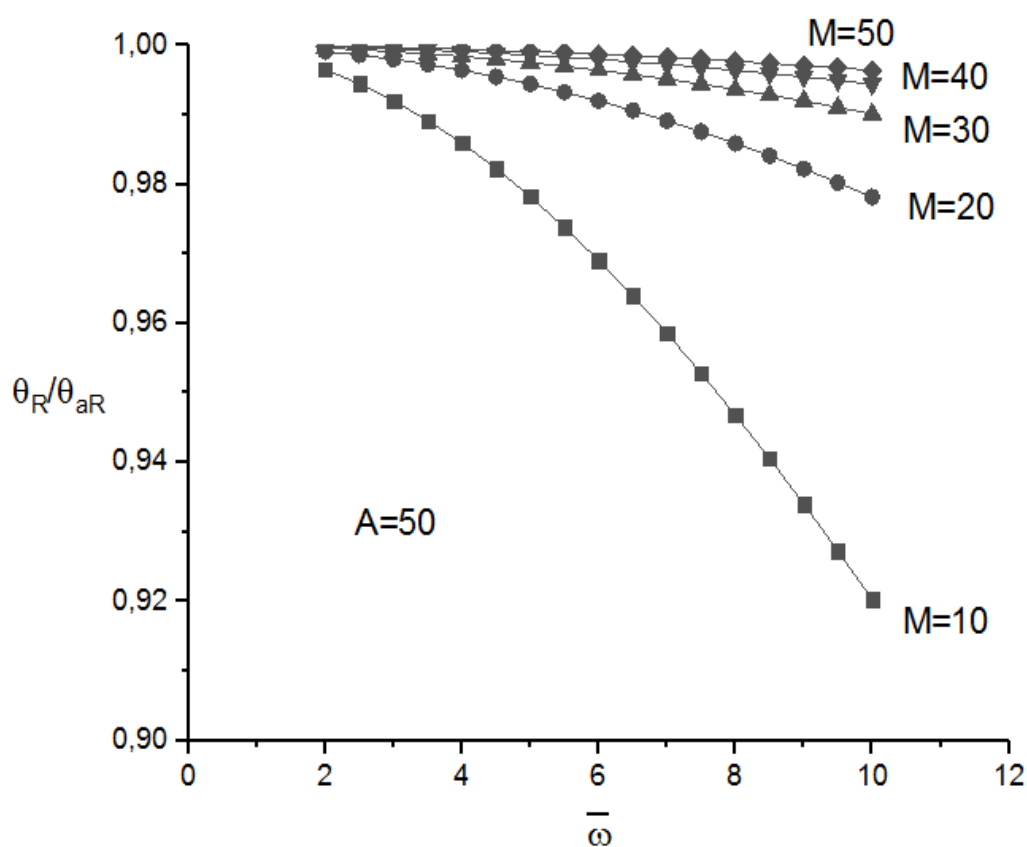


Figure IV.1. Variations du rapport des amplitudes en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de M .

La figure IV.2. illustre les variations du déphasage ϕ en fonction de la fréquence $\bar{\omega}$ pour différentes valeurs du paramètre M pour A fixe. La figure montre que pour des fréquences $\bar{\omega}$ supérieure à l'unité, le déphasage varie linéairement avec la fréquence. Pour une fréquence $\bar{\omega}$ donnée, le déphasage augmente avec le paramètre M c'est-à-dire que la pente de la droite caractérisant les variations du déphasage avec la fréquence augmente avec le paramètre M .

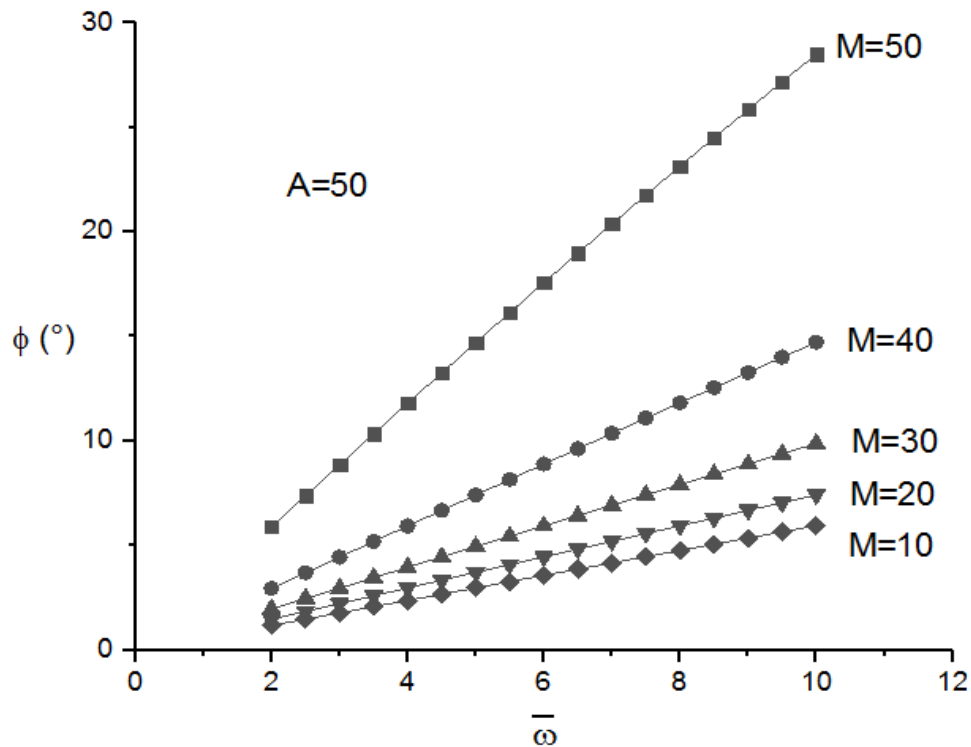


Figure IV.2. Variations du déphasage en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de M .

La figure IV.3. montre les variations du rapport des amplitudes $\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0}$ en fonction de la fréquence $\bar{\omega}$ pour différentes valeurs du paramètre A pour M fixe. La figure montre que pour des fréquences $\bar{\omega}$ supérieure à l'unité, le rapport des amplitudes diminue avec l'augmentation de la fréquence. Pour une fréquence $\bar{\omega}$ donnée, le rapport des amplitudes augmente avec le paramètre A . Cependant, cette influence n'est appréciable que pour les grandes valeurs de la fréquence et elle est quand il s'agit des fréquences faibles.

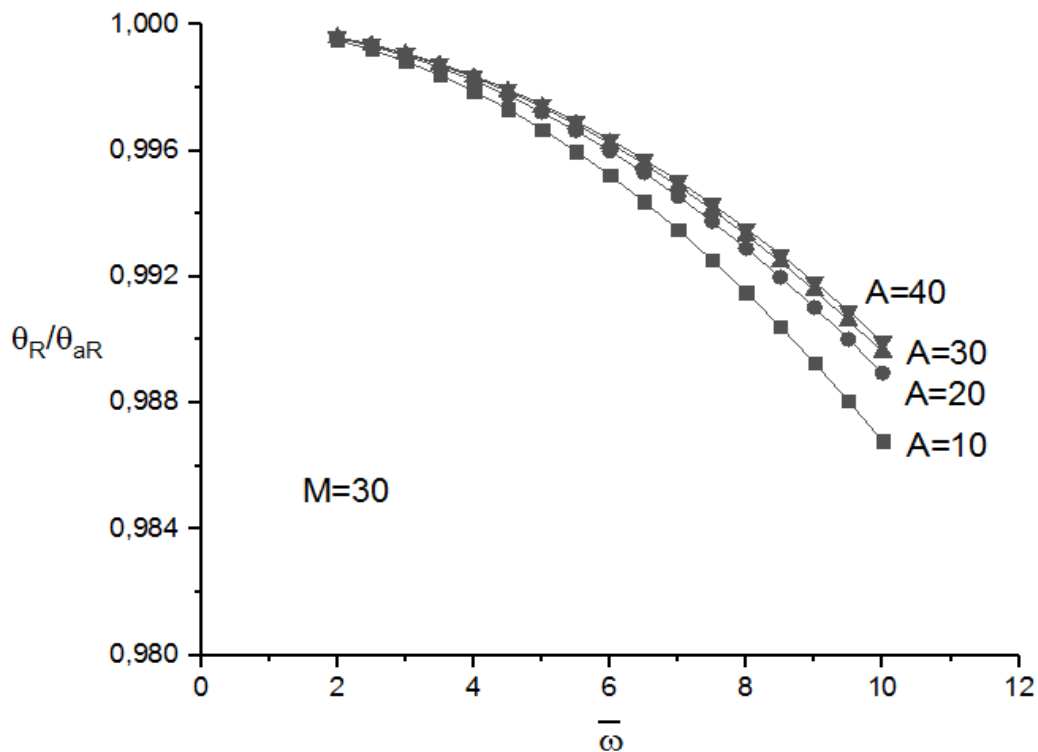


Figure IV.3. Variations du rapport des amplitudes en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de A .

Sur la figure IV.4. sont représentées les variations du déphasage ϕ en fonction de la fréquence $\bar{\omega}$ pour différentes valeurs du paramètre A pour M fixe. La figure montre aussi que pour des fréquences $\bar{\omega}$ supérieure à l'unité, le déphasage varie linéairement avec la fréquence. Pour une fréquence $\bar{\omega}$ donnée, le déphasage diminue avec l'augmentation du paramètre A mais cette influence reste faible sauf pour les grandes fréquences.

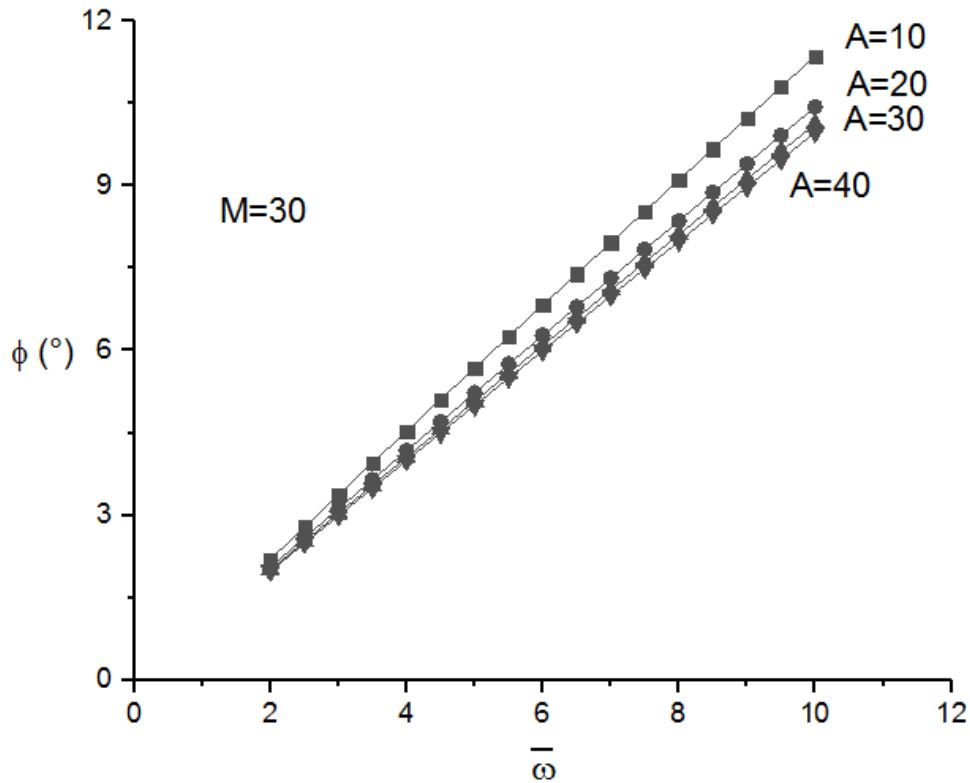


Figure IV.4. Variations du déphasage en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de A .

IV. 2. Variations du rapport des amplitudes et du déphasage en fonction de la fréquence ($\bar{\omega} < 1$)

La figure IV.5. montre les variations du rapport des amplitudes $\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0}$ en fonction de la fréquence $\bar{\omega}$ pour différentes valeurs du paramètre M pour A fixe. La figure montre que pour des fréquences $\bar{\omega}$ inférieur à l'unité, le rapport des amplitudes montre un maximum pour la fréquence $\bar{\omega} = 0,2$ pour les valeurs $M = 10, 20$ et 30 . Cependant ce maximum disparaît pour les valeurs de $M = 40$ et 50 .

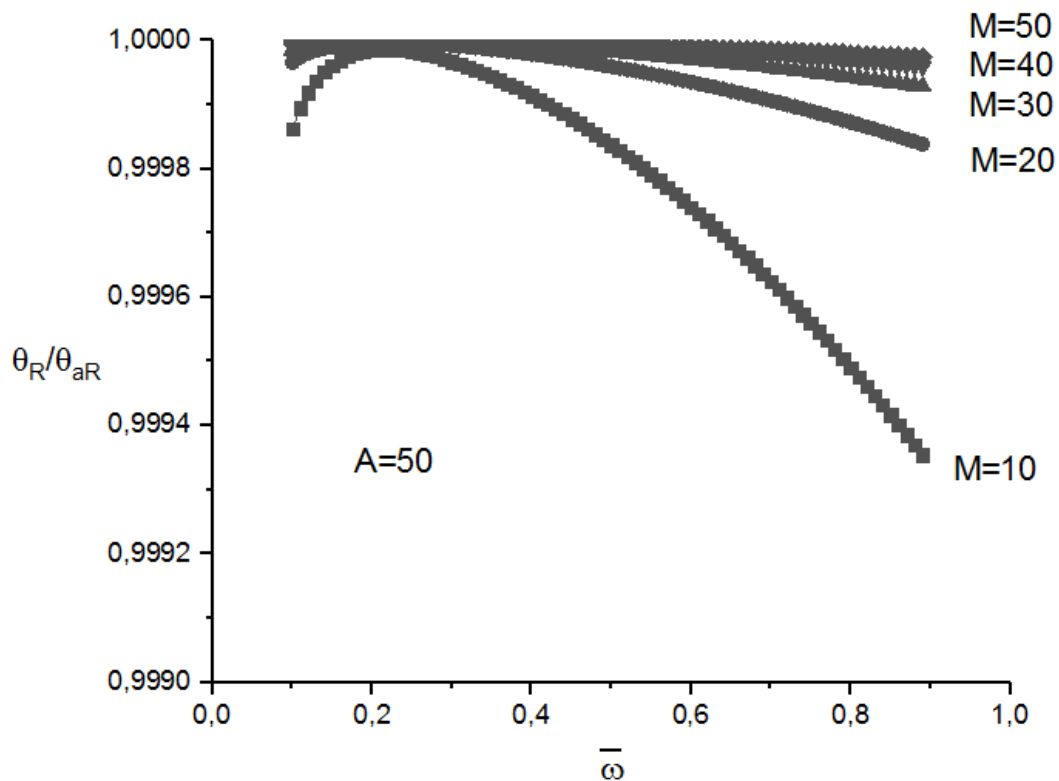


Figure IV.5. Variations du rapport des amplitudes en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de M .

Sur la figure IV.6. sont représentées les variations du déphasage ϕ en fonction de la fréquence $\bar{\omega}$ pour différentes valeurs du paramètre M pour A fixe. La figure montre que le déphasage présente un minimum pour une fréquence $\bar{\omega} = 0,2$. Quand la fréquence est supérieur à 0,2, le déphasage augmente avec la diminution du paramètre M et l'augmentation de la fréquence.

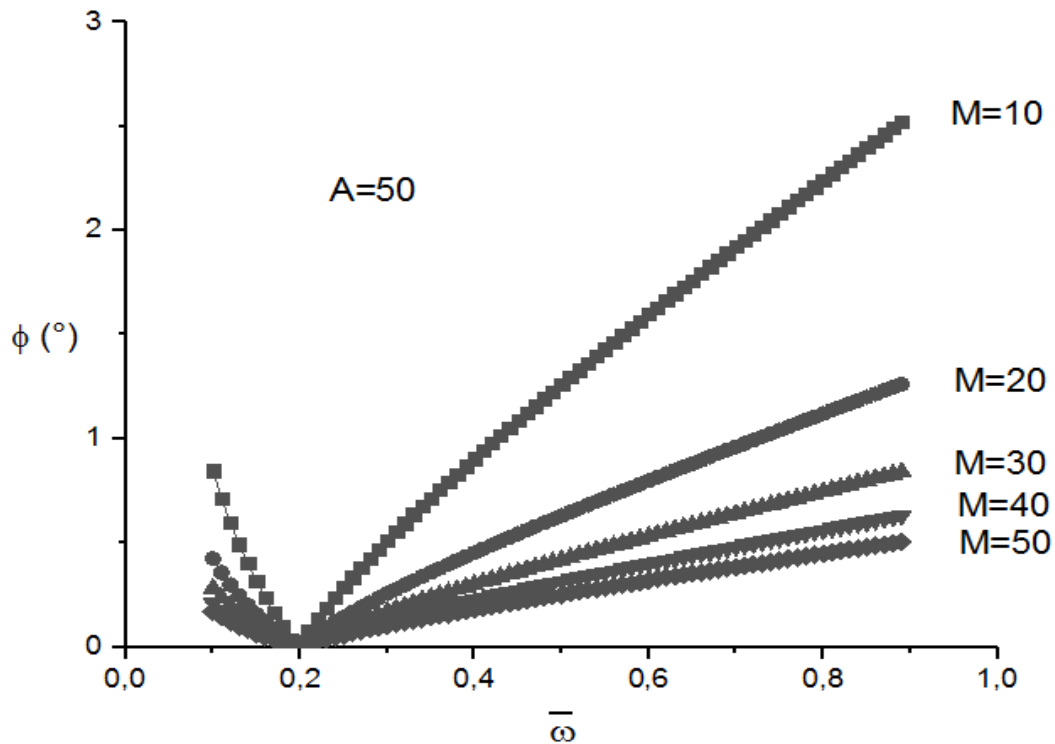


Figure IV.6. Variations du déphasage en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de M .

La figure IV.7. illustre les variations du rapport des amplitudes $\frac{\theta_R^0}{\theta_{aR}^0}$ en fonction de la fréquence $\bar{\omega}$ pour différentes valeurs du paramètre A pour M fixe. La figure montre que l'influence du paramètre A est très prononcée pour des fréquences $\bar{\omega}$ inférieur à 0,2, le rapport des amplitudes augmente avec l'accroissement du paramètre A et cesse d'être influencé au-delà de cette fréquence.

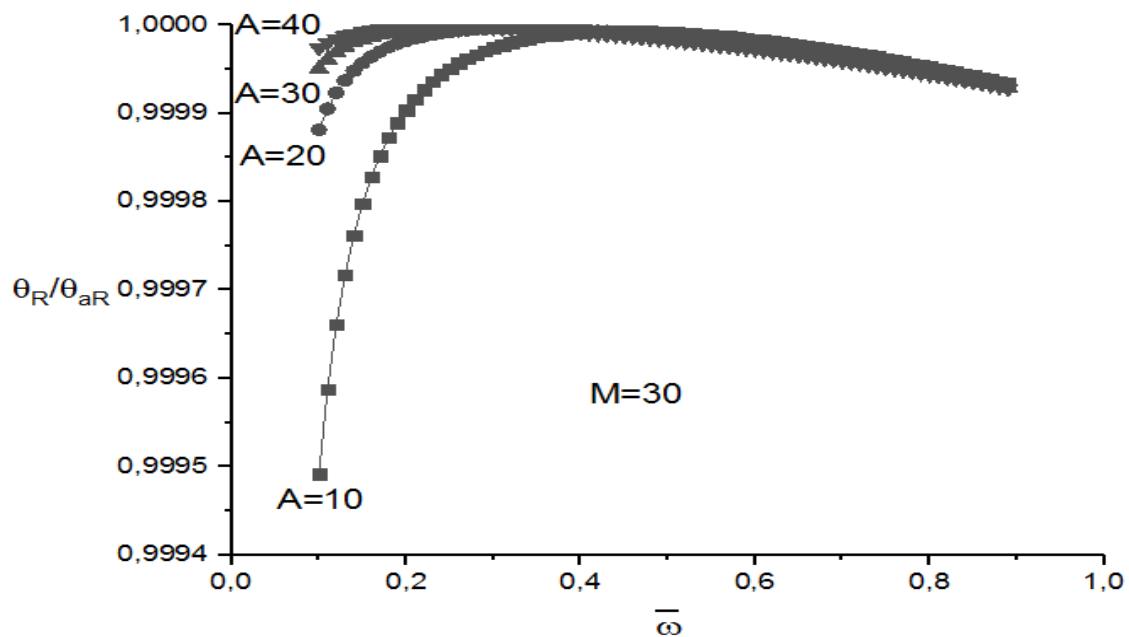


Figure IV.7. Variations du rapport des amplitudes en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de A .

Sur la figure IV.8. sont représentées les variations du déphasage ϕ en fonction de la fréquence $\bar{\omega}$ pour différentes valeurs du paramètre A pour M fixe. La figure montre que le déphasage présente des minimums différents pour chaque valeur du paramètre A . Le déphasage aussi diminue quand le paramètre A augmente.

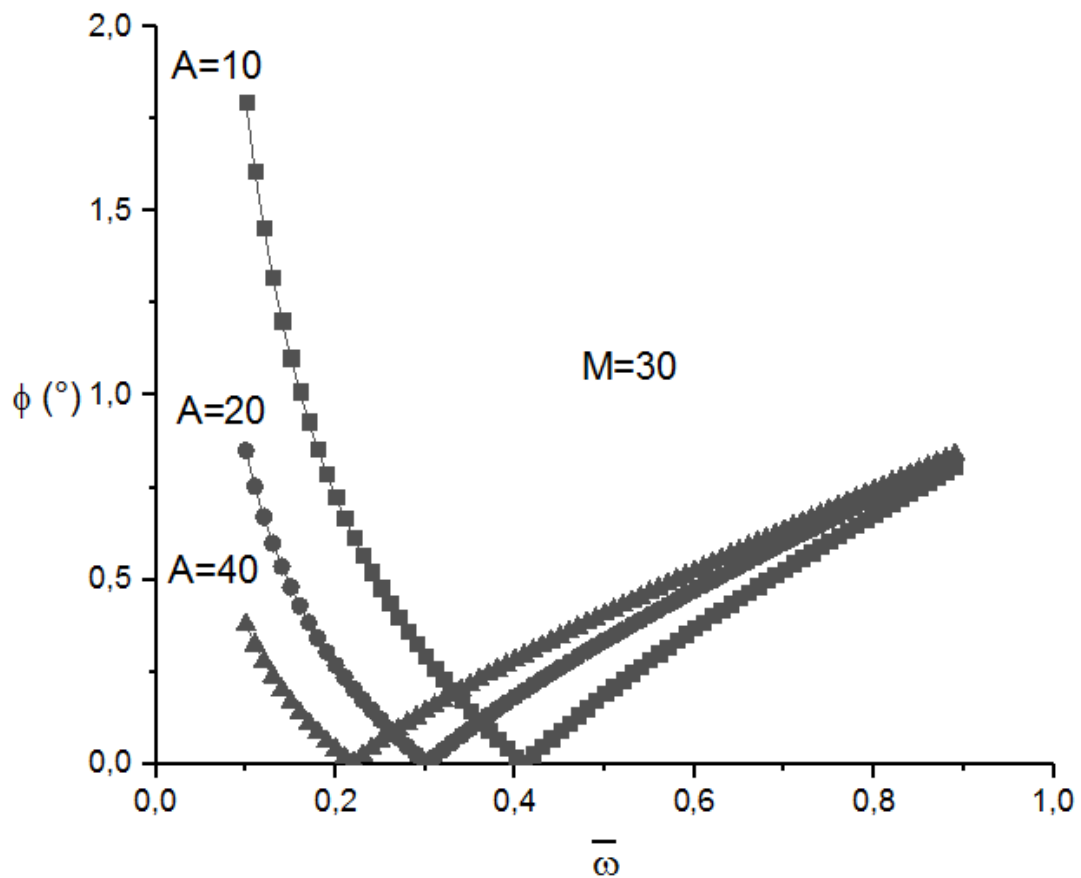


Figure IV.8. Variations du déphasage en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de A .

Ce travail concerne l'analyse théorique d'un viscosimètre oscillatoire à torsion qui est constitué de deux cylindres concentriques entre lesquels le fluide est placé. Le cylindre intérieur est fixé à un fil de torsion tandis que le cylindre extérieur est soumis à un mouvement oscillatoire de faible amplitude. Lors de ce mouvement d'oscillation, le cylindre intérieur se met aussi en mouvement oscillatoire avec une amplitude et un déphasage différents. La modélisation mathématique de ce viscosimètre est basée sur les équations du mouvement d'un corps solide couplées aux équations de l'hydrodynamique. Après avoir introduit certaines hypothèses simplificatrices comme la négligence de la courbure, les équations du mouvement du cylindre intérieur et du fluide simplifiées et écrites avec leurs conditions aux limites correspondantes. Afin de résoudre les équations différentielles aux dérivées partielles qui gouvernent ce système, des variables adimensionnelles ont été introduites et ont permis de réécrire ces équations sous une forme adimensionnelle plus adaptée à la résolution analytique.

Après avoir résolu les équations obtenues, les résultats ont été représentés graphiquement et interprétés. Les résultats ont montré que le rapport des amplitudes et le déphasage dépendent de la fréquence et de deux paramètres adimensionnels dont l'un est fonction de la viscosité cinématique du fluide utilisé entre les deux cylindres. Cependant, il serait intéressant de poursuivre ce travail pour étudier les profils de la vitesse du fluide entre les deux cylindres en fonction des paramètres adimensionnels introduits dans la modélisation mathématique de ce type de viscosimètre.

- [1] **Redhouane G .**, 2013 ; Mécanique des fluides et hydraulique, office des publications universitaire. Alger. 13-24p
- [2] **Renée G .**, 2013 ; Introduction à la mécanique des fluides, CEPADLES Editions, France. iiip
- [3] **Pascal B ., Richard M ; Eric W.**, 2011 ; Mécanique des fluides en 20 fiches, Edition Dunod, Paris. 92-93p
- [4] **Ritwik .**, 2012 ; mesuring the viscous flow behaviour of molten metals under shear, Th. Doc ; Brunel Univesity. 19-22p, 38-39p
- [5] **Alonso F.**, 1977 ; Physique générale Tome I Mécanique ; Inter Editions,Paris . 385-386 p
- [6] **Yeomans J .**, complex numbers and differential equations comments and corrections. 9p

