



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme de
Master en mathématiques**

Spécialité : Mathématiques Appliquées

*Coexistence entre certains types de
synchronisation des systèmes chaotiques
fractionnaires*

Présenté par :

- BENSIMESSAOUD SOUMIA
- ARAR SALMA

Devant le jury composé de:

M. S. ABDELOUAHAB (M. C. A)	C. U. Abd Elhafid Boussouf	Président
S. KAOUACHE (M. A. A)	C. U. Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
W. LAOUIRA (M. C. B)	C. U. Abd Elhafid Boussouf	Eximinateur

Année Universitaire : 2018/2019

Table des matières

Introduction générale	1
1 Systèmes dynamiques et chaos	3
1.1 Systèmes dynamiques	4
1.1.1 Système dynamique continu	4
1.1.2 Système dynamique discret	4
1.1.3 Flot, Point fixe et Portrait de phase	5
1.1.4 Attracteurs et bassin d'attraction	8
1.2 Le chaos	10
1.2.1 Caractéristiques du chaos	10
1.2.2 Route vers le chaos	12
1.2.3 Quelques avantages du Chaos	13
1.3 Conclusion	14
2 Calcul fractionnaire et stabilité des systèmes fractionnaires	15
2.1 Calcul fractionnaire	16
2.1.1 Fonctions spéciales	16
2.1.2 Dérivées fractionnaires	18
2.1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	18
2.1.4 Dérivée fractionnaire au sens Grünwalf-Letnikov	19
2.1.5 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	19
2.2 Équations différentielles fractionnaires	21
2.2.1 Existence et unicité	21

2.2.2	Résolution analytique des équations différentielles d'ordre fractionnaire	23
2.2.3	Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires	30
2.3	Stabilité	32
2.3.1	Stabilité des systèmes fractionnaires linéaires	32
2.3.2	Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaire	33
2.4	Conclusion	35
3	Coexistence entre certains types de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires	36
3.1	Synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires	37
3.1.1	Systèmes couplés	37
3.1.2	Différents types de Synchronisation	38
3.2	Coexistence entre certains types de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires	40
3.3	Conclusion	46
	Conclusion générale	47
	Bibliographie	48

Table des figures

1.1	Représentation du flot	6
1.2	Des portraits de phase dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$	7
1.3	Point fixe, Cycle limite, Tore.	9
1.4	L'attracteur de Lorenz pour $\sigma=10, r=28, b=8/3$	10
2.1	Région de stabilité pour $0 < \alpha < 1$	34
3.1	Accouplement bidirectionnel	37
3.2	Accouplement unidirectionnel	38
3.3	Projections de portrait de phase du système(3.34)	44
3.4	Les courbes d'erreur de synchronisation 3.39	46

Liste des tableaux

1.1	Différents comportement d'un tel système dynamique en fonction d'ex- posants de lyapunov	12
-----	---	----

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



Remerciement

Louange à dieu tout puissant de nous avoir aidé, éclairer le

Chemin pour achever notre travail et nos études.

Nos remerciements à nos très chers parents, frères, sœurs,

*Collègues et amis respectives qui nous ont encouragés, soutenu durant tout
notre parcours.*

Un remerciement particulier à notre encadreur

Mr Kaouche Smail

*pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils qui nous ont
assistés pour l'accomplissement de notre projet malgré les préoccupations
administratives. Nous remercions vivement le Dr*

Abdelouahab Mohamed Salah et

*madame Laouira Widad membres de jury pour l'honneur qu'ils nous
ont accordé en acceptant de juger notre travail.*

*Enfin nous remercions toutes personnes qui ont contribué de près ou de loin à
l'achèvement de ce travail.*



Dédicace

Avec les sentiments d'amour et de gratitude je dédie ce modeste travail :

*A ma très chère mère "**Zakia**", ma
raison d'être ma raison de vivre, la
lanterne qui éclaire mon chemin*

A mon père , mes sœurs , mes frères et leurs enfants .

*A ma chère Soeur **Kanza** et mon chère Frère **Houcine**
qui m'ont toujours encouragés.*

*A tous ma famille, à mes amis sur tout **Zineb**
mes collégues et tous mes amis
proches.*

Merci

SELMA

Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à
Ma Mère à Ma Mère à Ma Mère*

Merci Mama «Fatima»

Mon Père

Mes frères, mes sœurs et leurs enfants

Toutes mes amies sur toutes :

*Chahra **Meriem*

Mes collègues des mathématiques

*Tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai
oubliés veuillez*

M'excuser.

Soumia

التلخيص:

نهتم في هذه المذكرة بدراسة مشكل التعايش بين بعض أنواع التزامن المتعلقة بالأنظمة الديناميكية الفوضوية ذوات رتب اشتقاق كسرية.

من أجل تحقيق هذا الهدف قمنا بداية بذكر المفاهيم الأساسية المتعلقة بالأنظمة الديناميكية

كما تطرقنا إلى ظاهرة الفوضى بذكر مميزاتها و الطرق المؤدية إليها, وبعد ذلك تطرقنا إلى موضوع الحساب التفاضلي الكسري حيث عالجنا الحلول الجلية للمعادلات التفاضلية الخطية ذات رتب الاشتقاق الكسرية, أما المعادلات التفاضلية غير الخطية فقمنا بإعطاء حلول عددية باستعمال الطرق المطروحة.

أخيرا قمنا بمعالجة الموضوع الأساسي للمذكرة وتمثل في دراسة التعايش لبعض أنواع التزامن بتطبيق طريقة المحرك المستمر مع الاستشهاد بمثال عددي لتأكيد النتائج النظرية المدروسة.

الكلمات المفتاحية:

الأنظمة الديناميكية الفوضوية الكسرية, الحساب التفاضلي الكسري, مشتقة كسرية بالتجاه كابيتور, المزامنة, التعايش, المحرك المستمر

Résumé :

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude du problème de la coexistence entre certains types de synchronisation des systèmes dynamiques fractionnaires et chaotiques.

Pour atteindre cet objectif, nous commençons par mentionner quelques concepts et caractéristiques de base relatifs aux systèmes dynamiques, ainsi que le chaos en mentionnant ses avantages et les voies qui y conduisent. Nous abordons ensuite la question du calcul fractionnel et nous présentons des éléments importants, Méthodes de solution analytique et numérique. Nous étudions les conditions de stabilité des solutions.

La dernière partie est consacrée à la présentation d'un nouveau type de synchronisation dit coexistence entre certains types de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires par l'application de la méthode de contrôle continu. Des simulations numériques sont effectuées pour tester l'efficacité du système de synchronisation proposés.

Mots-clés:

Les systèmes dynamiques chaotiques fractionnaires, calcul fractionnaire, dérivée fractionnel au sens de Caputo, synchronisation, contrôle continu, coexistence.

Abstract:

In this work, we are interested in studying the problem of co-existence between some types of synchronization of fractional chaotic dynamic systems.

In order to achieve this goal, we started by mentioning some basic concepts and characteristics related to dynamic systems. We also referred to the phenomenon of chaos by mentioning its advantages and the ways leading to it. After that we discussed the subject of calculus fractional and important elements were presented in it, Methods of analytical and numerical solution, end study the conditions of stability of solutions.

In the end, we presented definitions of some types of synchronization which we studied to co-exist with the application of the continuous control method and confirmation of numerical application.

Key words:

fractional chaotic dynamic systems, co-existence, calculus fractional, continuous control, synchronization, Caputo fractional Derivative.

Introduction Générale

La théorie du chaos a été reconnue, à partir des années 1960, grâce aux travaux d'un certain nombre des chercheurs (tel que Lorenz [27]), et en raison des nouveaux outils de calculs (sur les ordinateurs). Dans la littérature, il n'y avait aucune définition formelle du chaos. Cependant, les caractéristiques typiques du chaos incluent la non-linéarité, le déterminisme, la sensibilité aux conditions initiales et l'imprévisibilité.

Beaucoup des systèmes dynamiques sont mieux caractérisés par ce comportement dans les domaines physiques [38], chimiques [35], biologiques [16] et économiques [13], etc.

D'autre part, dans la littérature, on trouve souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre arbitraire. Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann-Liouville.

De très nombreux systèmes ont été présentés par un modèle dynamique d'ordre fractionnaire, basé en général sur la notion de différentiation de l'ordre non entier. L'étude des systèmes fractionnaires sont, d'une part, considérés comme des systèmes à mémoire, notamment pour la prise en compte des conditions initiales, et, d'autre part, ils présentent une dynamique beaucoup plus complexe. En effet, on a constaté que beaucoup de vrais systèmes physiques sont mieux caractérisés par des modèles dynamiques d'ordres fractionnaires, à savoir les systèmes biologiques [41] et les systèmes viscoélastiques [4], etc.

Le concept de synchronisation chaotique a été employé pour la première fois dans les travaux de Yamada et Fujisaka [42] qui ont utilisé une approche locale

de la synchronisation des systèmes chaotiques. Par la suite Afraimovich et al [2], ont développé les concepts fondamentales liés à la synchronisation chaotique, et ultérieurement Pecora et Carroll [7] ont défini la synchronisation des systèmes chaotiques qui sont connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés entre un système émetteur (maitre) et un système récepteur (esclave). Ces travaux ont ouvert la vois des applications du chaos aux communications sécurisées [33] et cryptologie [21].

Plusieurs concepts de synchronisation ont été proposés dans la littérature, parmi lesquels on trouve : la synchronisation complète [?], l'anti-synchronisation [37], la synchronisation généralisée [45], la synchronisation projective [29], la synchronisation projective modifiée [26]. Plusieurs méthodes de contrôle ont été appliquées pour réaliser la synchronisation, à savoir le système le contrôle continu [18], le contrôle adaptatif [15] et le contrôle de mode glissant [44].

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit en général dans ce contexte particulier. Il porte principalement sur la conception d'un nouveaux schéma de synchronisation dit coexistence entre certains types de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires. La méthodologie est illustrée par l'intermédiaire des exemples numériques. La suite de ce mémoire est organisée de la façon suivante :

Le premier chapitre est consacré à l'introduction des éléments fondamentaux associés aux systèmes dynamiques et quelques concepts introductifs à la théorie du chaos.

Le deuxième chapitre est consacré aux études des définitions de base du calcul fractionnaire ainsi que les différentes définitions concernant la stabilité des systèmes fractionnaires.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de notre travail.

Enfin, ce mémoire est clôturé par une conclusion générale et quelques perspectives.

Systemes dynamiques et chaos

Dans ce chapitre, nous rappelons les principales notions de base des systemes dynamiques. Ensuite, nous presentons un ensemble des definitions sur le theme du chaos.

1.1 Systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques est utilisée pour étudier les systèmes physiques, chimique, biologique et économique, etc, qui évoluent au cours du temps. En générale, nous distinguons deux types du système dynamique à savoir :

- Système dynamique continu.
- Système dynamique discret.

1.1.1 Système dynamique continu

Dans le cas général un système dynamique en temps continu peut être représenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x} = f(x, t, q), \quad (1.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'états, $q \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des paramètres, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$ est appelé champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$.

1.1.2 Système dynamique discret

Dans ce cas où le temps est discret, le système dynamique est décrit par une équation aux différence suivante :

$$X_{k+1} = f(x_k, p) \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Remarque 1.1.

Si la fonction f dépend explicitement du temps, le système (1.1) est dit non-autonome.

Sinon, on dit que le système (1.1) est autonome.

Remarque 1.2.

On peut toujours transformer un système non-autonome en un système autonome, en utilisant un changement de variable $x_{k+1} = t$.

Remarque 1.3.

On dit que le système (1.1) est linéaire si f est linéaire, sinon le système (1.1) est dit non linéaire.

Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs[32]

Chez les physiciens, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie. Donc le premier possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, et l'autre possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Mais n'oublions pas que les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, alors pour préciser cette définition, on arrive à dire qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale x_0 un et un seul état final $x(t)$.

1.1.3 Flot, Point fixe et Portrait de phase

Dans la suite on limite notre étude sur les systèmes dynamiques autonomes en temps continue de la forme suivante

$$\dot{x} = f(x); \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^r(U), \quad U \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Pour assurer que le système (1.3) a une solution unique, nous rappelons le théorème suivant :

Théorème 1.1.1. (*Théorème de Cauchy-Lipschitz*)

Considérons l'équation différentielle (1.3), où f est une fonction continue et localement lipschitzienne sur un domaine U de $\mathbb{R}^n$ et a valeur dans $\mathbb{R}^n$.

*Alors, pour tout $x_0 \in U$, il existe une **solution maximale unique** de (1.3) satisfaisante $x(0) = x_0$.*

Flot

Définition 1.1.1. [10]

Soit $x(x_0, t), x_0 \in U$, une solution de (1.3) avec une condition initiale $x(0) = x_0$.

On appelle flot de (1.3), l'application ϕ_t satisfaisante les propriétés suivantes :

- (i) $\phi_t(x_0)$ est de classe C^r ,
- (ii) $\phi_0(x_0) = x_0$,
- (iii) $\phi_t(\phi_s(x_0)) = \phi_{t+s}(x_0)$.

Dans le cas ou le système est linéaire, c'est à dire :

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.4)$$

le flot est donné par :

$$\phi(t) = x_0 e^{At}. \quad (1.5)$$

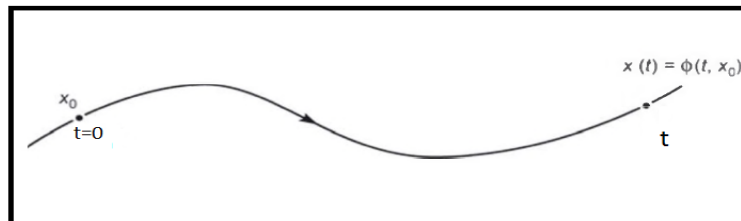


FIGURE 1.1 – Représentation du flot

Point fixe

Définition 1.1.2.

On dit que le point x^* est un point fixe (point critique, point singulier, ou point stationnaire) du système (1.3), lorsqu'il vérifie la relation suivante :

$$f(x^*) = 0, \quad (1.6)$$

si non x^* est un point ordinaire.

Définition 1.1.3.

On dit que le point ordinaire x^* est un point périodique, s'il existe un nombre $T > 0$ vérifie

$$\phi(T, x^*) = x^*. \quad (1.7)$$

Définition 1.1.4.

On dit que le point ordinaire x^* est récurrent, si pour tout $T \in \mathbb{R}$ il existe $t > T$ pour tout voisinage V de x^* , $\phi(t, x^*) \in V$.

Portrait de phase**Définition 1.1.5.**

Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires d'un système dynamique dans l'espace des phase(ou bien un ensemble des orbites fléchées).(Figure(1.2)[34])

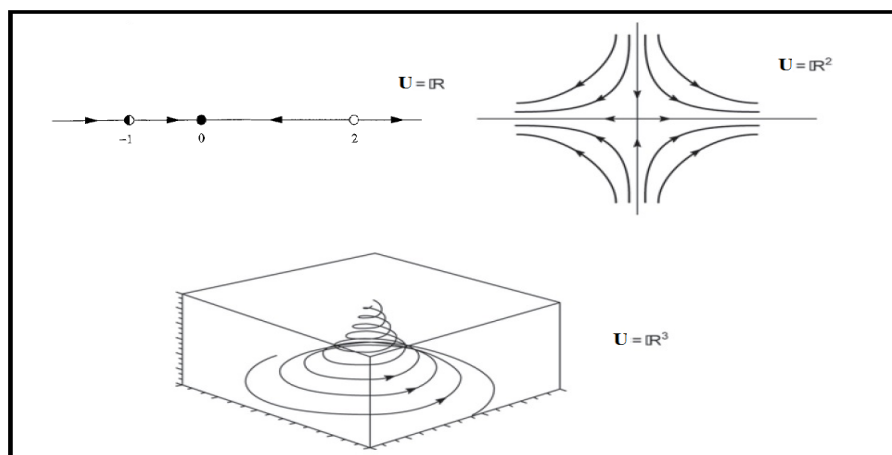


FIGURE 1.2 – Des portraits de phase dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

1.1.4 Attracteurs et bassin d'attraction

Ensemble α -limite et ω -limite

Définition 1.1.6. [40]

1. Un point $a \in U$ est un point ω -limite d'une trajectoire $\phi(., x_0)$ du système (1.3), s'il existe une suite $(t_n) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, x_0) = a. \quad (1.8)$$

2. De même, un point $b \in U$ est un point α -limite d'une trajectoire $\phi(., x_0)$ du (1.3), s'il existe une suite $(t_n) \rightarrow -\infty$, quand $n \rightarrow +\infty$, tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, x_0) = b. \quad (1.9)$$

Ensemble invariant

Définition 1.1.7. [24]

Un ensemble invariant d'un système dynamique (T, X, ϕ_t) est une sous ensemble $S \subset X$, tel que $x_0 \in S$ implique que $\phi_t(x_0) \in S$ pour tout $t \in T$.

Attracteur

Définition 1.1.8. [10]

Soit A un ensemble compact de l'espace des phases. On suppose que A est un ensemble invariant, i.e

$$\Phi_t(A) = A, \text{ pour tout } t. \quad (1.10)$$

On dit que A est stable si pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A , tel que toute solution $x(x_0, t) = \phi(x_0)$ restera dans U , si $x_0 \in V$. De plus, si :

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi(V) = A, \quad (1.11)$$

et s'il existe une orbite dense dans A , alors A est un attracteur.

Bassin d'attraction

On appelle bassin d'attraction de A et on note $Att(A)$ l'ensemble des points attirés par A .

Proposition 1.1.1.

Un attracteur d'un système dynamique vérifie les conditions suivantes :

1. A un ensemble invariante.
2. A admet un orbite dense.
3. La réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

Types des attracteurs

On distingue deux types d'attracteurs : régulier et étrange (chaotique).

Attracteur régulier

Ce type d'attracteur caractérise l'évolution à long terme des systèmes dynamiques non chaotiques. Il existe trois types distincts (La figure (1.3)) :

- **Le point fixe :**

C'est le cas le plus simple et courant, il est représenté par une solution constante (un point) dans l'espace des phases.

- **Le cycle limite :**

C'est une trajectoire fermée dans l'espace des phases qui attire les trajectoires, et est une solution périodique.

- **L'attracteur quasi-périodique (Tore) :**

représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes.[6]

Attracteurs étrange

Sont bien plus complexes que les autres, et caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques.

À titre d'exemple, on prend le système de Lorenz[39] qui est représenté par la figure (1.4) suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= (r - \sigma)x + ry - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{cases}$$

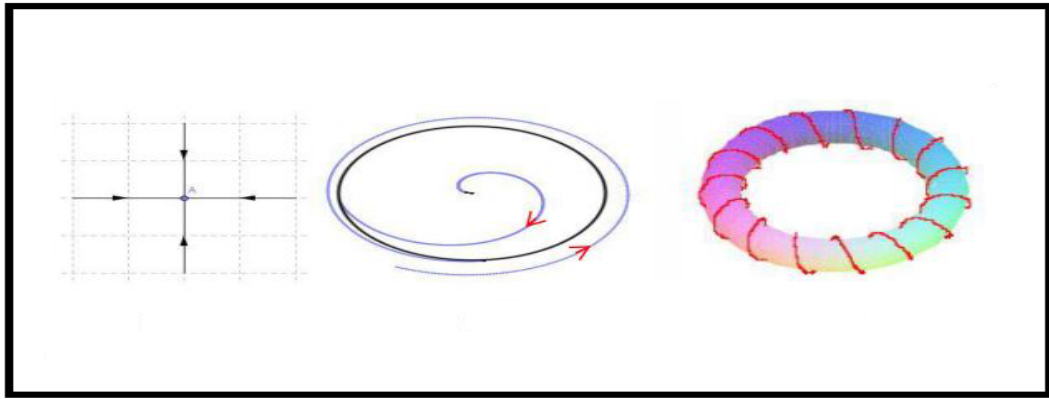
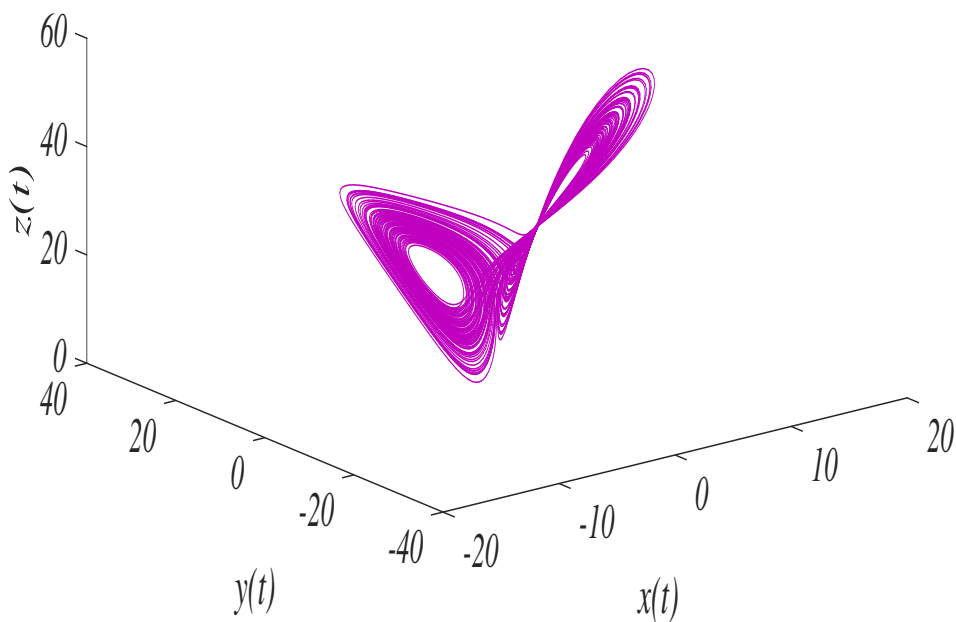


FIGURE 1.3 – Point fixe, Cycle limite, Tore.

FIGURE 1.4 – L'attracteur de Lorenz pour $\sigma=10, r=28, b=8/3$.

1.2 Le chaos

1.2.1 Caractéristiques du chaos

Dans cette section, nous nous limitons à définir brièvement le phénomène chaotique apparaissant dans un système non linéaire dynamique déterministe.

Le chaos (ou hyper-chaos) est un phénomène non linéaire qui a été observé dans les systèmes physiques, mécaniques, médicaux, biologiques, économiques et électriques [17, 43]. Il existe plusieurs définitions possibles du chaos. Ces définitions ne sont pas toutes équivalentes, mais elles convergent vers certains points communs caractérisant ainsi le chaos. Ci-dessous, nous résumons quelques caractéristiques qui permettent de comprendre les points marquants d'un système chaotique.

La non-linéarité

En effet, Un système linéaire ne peut pas être chaotique.

Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique, puisque la plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales. En effet, pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement ; les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement.[6]

Attracteur étrange

Un système chaotique dissipatif possède (au moins) un attracteur d'un type particulier appelé attracteur étrange. Géométriquement, un tel attracteur peut être décrit comme le résultat d'opérations d'étirement et de repliement d'un cycle de l'espace des phases, répétée un nombre infini de fois.[40]

Exposants de Lyapunov

L'évolution d'un flot chaotique est difficile à appréhender, car la divergence des trajectoires est rapide, c'est pour quoi on utilise les exposants de Lyapunov qui permettent de mesurer la divergence (ou la convergence) possible entre deux orbites issues de conditions initiales voisines, et aussi sert à mesurer le degré de la stabilité et donne une information quantitative sur la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le terme λ_L est appelé exposant de la trajectoire $x_k = f^k(x_0)$, et ne

État	Point	Dimension	Exposants de lyapunov
Point d'équilibre	Point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0.$
Périodique	Cercle	1	$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0.$
Période d'ordre 2	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0.$
Période d'ordre K	K-Tore	K	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0, \quad \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0.$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0.$
Hyper-chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0.$

TABLE 1.1 – Différents comportement d'un tel système dynamique en fonction d'exposants de lyapunov

doit pas être confondu avec λ ou λ_i , valeur propre d'un système linéaire. λ_L mesure le taux moyen de convergence ou de divergence de deux trajectoires issues de conditions initiales très proches.

1. Si $\lambda < 0$, l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique.
Il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique.
2. Si $\lambda = 0$, les orbites issues de conditions initiales différentes, gardent une séparation constante, ni ne convergent, ni divergent l'une par rapport à l'autre.
Un système physique avec un tel exposant est dit conservatif.
3. Si $\lambda > 0$, les trajectoires divergentes, l'orbite est chaotique. Intuitivement, cela reflète la sensibilité aux conditions initiales.

La notion d'exposant de Lyapunov se généralise aux systèmes de dimension, qui possèdent alors exposants de [6]

Le tableau suivant représente les différents comportement d'un tel système dynamique.(1.1)

1.2.2 Route vers le chaos

On ne sait toujours pas à l'heure actuelle dans quelles conditions un système va devenir chaotique. Cependant, il existe un certain nombre de scénarios de transition

vers le chaos[40], qui sont universels. On considère que le système possède un paramètre dit "contrôle". Lorsqu'on varie ce paramètre, le système peut passer d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénario de transition et devenir chaotique.

1. l'intermittance vers le chaos :

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

2. Le doublement de période

Qui est caractérisé par une succession de bifurcations fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, puis par 4, puis par 8, ..., etc ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique.

3. La quasi-périodicité

qui intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi-périodique.

1.2.3 Quelques avantages du Chaos

Puisque les systèmes chaotiques ont des trajectoires non périodiques et sont sensibles aux conditions et aux paramètres initiaux, logiquement il peut aussi être employé pour cacher des signaux d'informations afin de transmettre ceux-ci d'une manière sécurisée.

1.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques notions de base sur les systèmes dynamiques et quelques concepts de la théorie du chaos. Nous avons également présenté les différentes caractéristiques intrinsèques aux systèmes chaotiques.

Calcul fractionnaire et stabilité des systèmes fractionnaires

Depuis plus de trois siècles, un grand nombre de chercheurs se sont concentrés sur le sujet mathématique du calcul fractionnaire, portant sur les dérivées et les intégrales d'ordre arbitraire. Par rapport à la théorie classique, les équations différentielles d'ordre fractionnaire décrivent plus précisément le nombre de systèmes dans les domaines interdisciplinaires, tels que les systèmes viscoélastiques, et des systèmes d'ondes électromagnétiques [23, 20]. Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions sur le calcul fractionnaire. Nous présentons quelques rappels sur les fonctions de Gamma d'Euler et de Mittag-Leffler et sur les différentes propriétés de la dérivée fractionnaire[36]. Enfin, nous présentons les solutions analytiques et les solutions numériques des équations fractionnaires, ainsi que la stabilité de telles équations.

2.1 Calcul fractionnaire

2.1.1 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma et Bêta d'Euler et de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge la factoriel aux valeurs non entières.

Définition 2.1.1.

La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt; \quad \alpha > 0. \quad (2.1)$$

Propriétés de la fonction Gamma

1. l'une des propriétés de base de la fonction Gamma est satisfaite l'équation suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2.2)$$

2. La fonction Gamma généralisé la factorielle et $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0) = +\infty$.

3. Prolongement de $\Gamma(z)$ pour $z < 0$:

Supposons $-1 < z < 0$ donc $0 < z+1 < 1$, dans ce cas $\Gamma(z+1)$ est bien définie par la formule d'Euler, mais pas $\Gamma(z)$. Il convient alors de définir $\Gamma(z)$ par la relation

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}. \quad (2.3)$$

Et tendon le procédé de proche en proche, ainsi pour $-(n-1) < z < -n$ (n entier positif ou nul), on aura

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}; \quad 0 < z+n+1 < 1,$$

$\Gamma(z)$ est indéfinie pour toutes les entiers négatives.

Fonction Bêta

Définition 2.1.2.

La fonction Bêta d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt; \quad x > 0; \quad y > 0. \quad (2.4)$$

• La relation entre la fonction Bêta d'Euler et la fonction Gamma est donnée par :

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (2.5)$$

Fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, $\exp(z)$ a un rôle important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de cette fonction à un seul paramètre à été introduite par G.M.Mittag-leffler est définie par la série :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}; \quad \alpha > 0. \quad (2.6)$$

La fonction de Mittag-leffler avec deux paramétrés α et β est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}; \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2.7)$$

L'utilisation de (2.7) donne :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (2.8)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}. \quad (2.9)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}. \quad (2.10)$$

En générale :

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}. \quad (2.11)$$

• On peut aussi représenter la fonction Mittag-leffler par l'intégrale :

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{t^{\alpha-1} e^t}{t^\alpha - z} dt. \quad (2.12)$$

- La dérivée d'ordre n , $n = 0, 1, 2, \dots$, de la fonction Mittag-leffler à un paramètre est :

$$E_{\alpha}^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \alpha n + 1)}. \quad (2.13)$$

- La dérivée d'ordre n , $n=0, 1, 2, \dots$, de la fonction Mittag-leffler à deux paramètres est :

$$E_{\alpha,\beta}^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \alpha n + \beta)}. \quad (2.14)$$

2.1.2 Dérivées fractionnaires

Pour la dérivée fractionnaire, il ya plusieurs approches. Dans cette section, nous présenterons les plus trois célèbres, parmi elles : la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov et la dérivée fractionnaire de Caputo.

2.1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Considérons une fonction f définie pour $t > a$. Soit

$$(D^{-1}f)(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau, \quad (D^{-2}f)(t) = \int_a^t (D^{-1}f)udu = \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau)d\tau \right) du,$$

en répétant l'intégrale précédente n fois on obtient d'après la formule de Cauchy.

$$(D^{-n}f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau. \quad (2.15)$$

En utilisant la fonction Gamma et en remplaçant la valeur n par réel $p > 0$, on obtient :

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau. \quad (2.16)$$

Dans (2.15), l'entier n doit satisfaire la condition $n > 1$.

La condition correspondante pour p est faible, pour l'existence de l'intégrale de Riemann-Liouville (2.16), on doit avoir $p > 0$.

Propriétés

Soient $f \in C^0([a, b])$, $p > 0$ et $q > 0$:

- $\lim_{p \rightarrow 0} ({}_a^R D_t^{-p} f(t)) = f(t).$
- ${}_a^R D_t^{-p} ({}_a^R D_t^{-q} f(t)) = {}_a^R D_t^{-(p+q)} f(t) = {}_a^R D_t^{-q} ({}_a^R D_t^{-p} f(t)).$

Derivée d'ordre fractionnaire

Soit f une fonction intégrable sur $[a, t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n - 1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^p f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau, \\ &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a^R D_t^{-(n-p)} f(t)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.1.4 Dérivée fractionnaire au sens Grünwalf-Letnikov

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ la dérivée d'ordre entier p (si p est positif), et l'intégrale répétée $(-p)$ fois (si p est négatif) d'une fonction f par la formule générale suivante :

$${}_a^{GL} D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{p}{k} f(t - kh),$$

avec

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2) \cdots (p-k+1)}{k!},$$

est la notation pour le coefficient binomiale.

- La généralisation de cette formule pour p non entier (avec $0 \leq n - 1 < p < n$)

$${}_a^{GL} D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(-p)\Gamma(k+1)} f(t - kh).$$

2.1.5 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Soit $f \in C^n([a, b])$, $p > 0$. La dérivée fractionnaire de la fonction f au sens de Caputo est définie par la formule :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^p f(t) &= {}_a^R D_t^p \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p-n+1}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Comme l'opérateur fractionnaire de Caputo est plus cohérent que celui de Riemann-Liouville, c'est cet opérateur qui nous allons employer tout au long de ce travail. En

outre, une modification de l'algorithme d'Adams-Bashforth-Moulton, proposée dans [1, 12], sera utilisée pour la simulation numérique des équations fractionnaires.

Propriétés

1. Soit $p \leq 0$, avec $n - 1 < p < n$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les dérivée ${}_a^C D_t^p$ et ${}_a^R D_t^p$ existe alors :

$${}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)}.$$

Donc, lorsque $f^{(k)}(a) = 0$, pour $k = 1, 2, 3 \dots n-1$, on aura

$${}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^R D_t^p f(t)$$

2. soit $n \in \mathbb{N}^*, 0 < n-1 < p < n$:

$$\lim_{p \rightarrow n} ({}_a^C D_t^p f(t)) = f^{(n)}(t).$$

3. soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n-1 < p < n$:

$${}_a^C D_t^p ({}_a^C D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{p+m} f(t).$$

4. La dérivée au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle.
5. La dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante n'est pas nulle ni constante mais on a :

$${}_a^R D_t^p f(t) = \frac{c(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)}.$$

Autres propriétés fondamentales

Les définitions des dérivées fractionnaires étant basée sur celles des intégrations d'ordre fractionnaire, une dérivation d'ordre fractionnaire revêt un caractère global contrairement à une dérivation entière.

Certaines propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires sont :

- 1- Les opérateurs intégration ordre fractionnaire vérifient la propriété de semi-groupe. Contrairement aux opérateurs intégration d'ordre fractionnaire, les opérateurs de dérivation d'ordre fractionnaire (réel ou complexe), ne vérifient la propriété de semi-groupe que sous certaines conditions.
- 2- La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires

2.2 Équations différentielles fractionnaires

Une équation différentielle d'ordre fractionnaire est écrit en générale ce la forme suivante :

$$D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+. \quad (2.19)$$

Dans ce qui suit, on s'intéresse sur les équations différentielles fractionnaires suivantes :

$${}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, \quad (2.20)$$

où ${}^c D^\alpha y(t)$, designer l'opérateur de dérivation au sens de Caputo.

2.2.1 Existence et unicité

Considérons le problème aux conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \\ D_0^k y(t) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1 \dots n-1, \end{cases} \quad (2.21)$$

tq $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n-1 < \alpha < n$.

Lemme 2.2.1. [1]

Si la fonction f est continue alors le problème aux conditions initiales (2.21) est équivalent à l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (2.22)$$

Preuve.

* Nous supposons en premier lieu que y est solution de (2.22), on peut la écrire sous la forme réduite :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + {}_0 D_t^{-\alpha} f(t, y(t)).$$

Appliquons l'opérateur ${}_0^c D_t^\alpha$ sur les deux cotés de cette équation on obtient :

$$\begin{aligned} {}_0^c D_t^\alpha y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^c D_t^\alpha t^k}{k!} + {}_0^c D_t^\alpha {}_0 D_t^{-\alpha} f(t, y(t)), \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} {}_0^c D_t^\alpha t^k}{k!} + f(t, y(t)). \end{aligned}$$

Puisque $k < \alpha$, ${}_0^c D_t^\alpha t^k = 0$ et ${}_0^c D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t))$.

Par suite y est une solution de l'équation différentielle (2.21).

Appliquons maintenant l'opérateur ${}_0^c D_t^j$, tq $0 \leq j \leq n-1$ sur l'équation de Voltera (2.22) on trouve :

$$\begin{aligned} {}_0^c D_t^j y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_0^c D_t^j \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + {}_0^c D_t^j {}_0 D_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t)), \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_0^c D_t^j \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + {}_0 D_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t)). \end{aligned}$$

On a

$${}_0^c D_t^j t^k = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k, \\ \Gamma(k+1) & \text{si } j = k, \\ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-j+1)} t^{k-j} & \text{si } j < k. \end{cases}$$

Alors

$${}_0^c D_t^j t^k|_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k, \\ \Gamma(k+1) & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j < k. \end{cases}$$

puisque $\alpha - j \geq 1$, l'intégrale ${}_0 D_t^{-(\alpha-j)} f(t, y(t))|_{t=0}$ est nulle.

Donc ${}_0^c D_t^j y(0) = y_0^{(j)}$.

* Supposons maintenant que y est solution de l'équation différentielle (2.21) et montrons que y est solution de l'équation de Voltera (2.22).

Considérons la fonction $z(t) = f(t, y(t))$, alors $z \in C[0, h]$:

$$\begin{aligned} z(t) = f(t, y(t)) &= {}_0^c D_t^\alpha y(t) = {}_0^R D_t^\alpha y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^{\alpha-k}}{\Gamma(k-\alpha+1)}, \\ &= {}_0^R D_t^\alpha y(t) - {}_0^R D_t^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!}, \\ &= {}_0^R D_t^\alpha (y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)} t^k}{k!}), \\ &= {}_0^R D_t^\alpha (y - T_{n-1}[y, 0])(t). \end{aligned}$$

où $T_{n-1}[y, 0] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)}$ est le polynôme de Taylor de degré $n-1$ pour la fonction y autour de 0.

En appliquant l'opérateur ${}_0 D_t^{-n}$ sur les deux membres de cette dernière relation on obtient :

$${}_0 D_t^{-n} z(t) = {}_0 D_t^{-(n-\alpha)} (y - T_{n-1}[y, 0])(t) + q(t),$$

avec q un polynôme de degré ne dépassant pas $n - 1$.

Comme z est continue, la fonction ${}_0D_t^{-n}z$ a un zéro d'ordre au moins n à l'origine.

En outre la différence $y - T_{n-1}[y, 0]$ a la même propriété par construction.

Et donc la fonction ${}_0D_t^{-(n-\alpha)}(y - T_{n-1}[y, 0])$ doit avoir un zéro d'ordre n aussi.

Par suite, le polynôme q a la même propriété, mais comme il est de degré ne dépassant pas $n - 1$, il en résulte que $q = 0$.

Par conséquent :

$${}_0D_t^{-n}z(t) = D_t^{-(n-\alpha)}(y - T_{n-1}[y, 0])(t).$$

En appliquant maintenant l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville $D^{n-\alpha}$ sur les deux membres de cette équation, on trouve :

$$y(t) - T_{n-1}[y, 0](t) = {}_0D_t^{-\alpha}z(t).$$

En substituant $z(t)$ et $(y - T_{n-1}[y, 0])(t)$, on obtient l'équation de Voltera :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} y_0^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

□

Théorème 2.2.1. [1]

Soit $k > 0, h^* > 0$ et $y_0^{(i)} \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n - 1$. On définit $G = [0, h^*] \times \mathbb{R}$, et soit la fonction continue $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaisant la condition de Lipchitz par rapport à y suivant :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| < L|y_1 - y_2|.$$

Posons :

$$h = \min\{h^*, (kT(\alpha + 1)/M)\frac{1}{\alpha}\},$$

avec :

$$M = \sup_{t, z \in G} |f(t, z)|,$$

alors il existe une unique solution y du problème (2.21), tel que $y \in [0, h]$.

2.2.2 Résolution analytique des équations différentielles d'ordre fractionnaire

En générale, pour résoudre une équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire, on utilise la fonction de Mittag-leffler E_α qui donne l'expression explicite de

la solution.[12]

Cas d'une équation unidimensionnelle

Théorème 2.2.2.

Supposons que $\alpha > 0$ et $n = \lceil \alpha \rceil + 1$, alors la solution générale du problème :

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha y(t) = \lambda y(t) + q(t), & \lambda \in \mathbb{R}, \text{ et } q \in C[0, h] \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, & k = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2.23)$$

est :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} u_k(t) + \tilde{y}(t), \quad (2.24)$$

avec

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} {}_0 D_t^{-\alpha} q(t), & \text{si } \lambda = 0, \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u'_0(\tau) d\tau, & \text{si } \lambda \neq 0, \end{cases} \quad (2.25)$$

et

$$u_k(t) = D^{-k} e_\alpha(t), \text{ avec } e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.26)$$

Preuve 2.2.1.

• Cas où $\lambda = 0$. Le problème (2.23) devient :

$$\begin{cases} {}^C_0 D_t^\alpha y(t) = q(t), \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, & k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Comme $e_\alpha(t) = E_\alpha(0) = 1$, on obtient alors $u_k(t) = \frac{t^k}{k!}$, pour tout $k = (0, 1, \dots, n-1)$.

L'utilisation de la relation entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo, donne :

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = {}_0^R D_t^\alpha y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} = q(t). \quad (2.27)$$

C'est à dire :

$${}_0^R D_t^\alpha y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} + q(t). \quad (2.28)$$

En introduisant l'intégrale de Riemann-Liouville sur les deux cotés de cette dernière égalité, on trouve :

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-\alpha} {}^R D_t^\alpha y(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0) {}_0D_t^{-\alpha} t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + {}_0D_t^{-\alpha} q(t), \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0) t^k}{k!} + {}_0D_t^{-\alpha} q(t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Cette expression est équivalente à :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0) u_k(t) + \tilde{y}(t), \quad \text{où} \quad \tilde{y}(t) = {}_0D_t^{-\alpha} q(t). \quad (2.30)$$

• Cas où $\lambda \neq 0$. La preuve se fait en deux étapes (a) et (b).

a) La fonction u_k satisfait l'équation différentielle homogène, c'est à dire :

${}_0^C D_t^\alpha u_k = \lambda u_k, \forall k = 1, \dots, n-1$ et vérifie les conditions initiales $u_k^{(j)}(0) = \delta_{kj}$ (delta de Kronecker) pour $j, k = 0, \dots, n-1$.

b) La fonction $\tilde{y}$ est une solution de l'équation différentielle non homogène, avec les conditions initiales homogènes.

On commence par (a). Un calcul simple montre que :

$$e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)}. \quad (2.31)$$

Par suite :

$$u_k = D^{-k} e_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j + k}}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)}. \quad (2.32)$$

Montrons maintenant que u_k est une solution de l'équation différentielle homogène.

En effet :

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha u_k(t) &= {}_0^C D_t^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\alpha j + k}}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)}, \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)} {}_0^C D_t^\alpha t^{\alpha j + k}, \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha(j-1) + 1 + k)} t^{\alpha(j-1) + k}, \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\Gamma(\alpha j + 1 + k)} t^{\alpha j + k}, \\ &= \lambda u_k(t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ce qui assure que u_k est une solution de l'équation homogène.

De plus, si $j = k$, on a :

$$u_k^{(k)}(0) = D^k D^{-k} e_\alpha(0) = e_\alpha(0) = 1. \quad (2.34)$$

Pour $j < k$, on a :

$$u_k^{(j)}(0) = D^j D^{-k} e_\alpha(0) = D^{-(k-j)} e_\alpha(0) = 0. \quad (2.35)$$

Et pour $j > k$, on a :

$$u_k^{(j)}(0) = D^j D^{-k} e_\alpha(0) = D^{(j-k)} e_\alpha(0) = 0. \quad (2.36)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) u'_0(\tau) d\tau, \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau) e'_\alpha(\tau) d\tau, \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t) e'_\alpha(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.37)$$

On rappelle que cette intégrale existe toujours, quelque soit $t > 0$, car q est une fonction continue, e'_α intégrable, et $\tilde{y}(0) = 0$.

Pour $\alpha > 1$ et d'après la règle standard de la différentiation des intégrales dépendant d'un paramètre, on a :

$$D\tilde{y}(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t) e''_\alpha(t-\tau) d\tau + \frac{1}{\lambda} q(t) \underbrace{e'_\alpha(0)}_{=0}. \quad (2.38)$$

En utilisant la continuité de q et la singularité faible de e''_α , on peut vérifier facilement que $D\tilde{y}(0) = 0$.

De la même manière, on trouve également :

$$D^k \tilde{y}(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) e_\alpha^{(k+1)}(t-\tau) d\tau, \quad \text{pour tout } k = 0, \dots, n-1. \quad (2.39)$$

Donc, $D^k \tilde{y}(0) = 0$.

Alors $\tilde{y}$ satisfait toutes les conditions initiales homogènes.

Montrons maintenant que $\tilde{y}$ est une solution de l'équation différentielle non homogène.

Puisque :

$$e'_\alpha(u) = \frac{d}{du} e_\alpha(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j u^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)}. \quad (2.40)$$

Nous avons, donc :

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) e'_\alpha(t - \tau) d\tau, \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(\tau) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j (t - \tau)^{\alpha j - 1}}{\Gamma(\alpha j)} d\tau, \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha j)} \int_0^t q(\tau) (t - \tau)^{\alpha j - 1} d\tau, \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{(j-1)} {}_0D_t^{-\alpha j} q(t).
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 {}^C_0D_t^\alpha \tilde{y}(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} {}^C_0D_t^\alpha {}_0D_t^{-\alpha j} q(t), \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} {}_0D_t^{-\alpha(j-1)} q(t), \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j {}_0D_t^{-\alpha j} q(t), \\
 &= q(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j {}_0D_t^{-\alpha j} q(t), \\
 &= q(t) + \lambda \tilde{y}(t).
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Cas d'une équation multidimensionnelle

On considère l'équation différentielle fractionnaire

$${}^C_0D_t^\alpha y(t) = Ay(t) + q(t). \tag{2.43}$$

Avec $0 < \alpha < 1$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ et $q : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Pour résoudre le problème (2.43), on commence par résoudre le problème homogène correspondant, i.e,

$$q(t) = 0 \forall t \in [0, h].$$

Donc :

$${}^C_0D_t^\alpha y(t) = Ay(t). \tag{2.44}$$

• Cas où A admet des valeurs propres simples :

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et $v_1, v_2, \dots, v_n$ les vecteurs propres associés.

Alors la solution de (2.44) est de la forme :

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k v_k E_{\alpha}(\lambda_k t^{\alpha}), \quad (2.45)$$

où $c_k \in \mathbb{R}, \forall k = 1, \dots, n$.

• Cas où A admet des valeurs propres multiples :

par exemple λ de degré de multiplicité k donc on distingue deux cas :

* Si le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ est égale à k , dans ce cas la solution de (2.43) est de la forme (2.45).

* Si le nombre des vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ est égale à m (où $m < k$), dans ce cas les autres $(k - m)$ solutions qui sont linéairement indépendantes sont données par :

$$y^{(i)}(t) = \sum_{j=m}^i u^{(j)} t^{(i-j)\alpha} E_{\alpha}^{(i-j)}(\lambda t^{\alpha}); \quad \text{pour } i = m + 1, \dots, k,$$

tel que les vecteurs propres $u^{(j)}$, sont les solutions du système linéaire non homogène :

$$(A - \lambda I)u^{(j+1)} = u^{(j)}.$$

Remarque 2.1. [19]

Soient $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$, la solution du problème homogène (2.43), alors la solution du problème non homogène (2.44), avec la condition initiale $y(0) = y_0$ est :

$$(Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))^T,$$

tel que

$$Y_i(t) = y_i(t) + \int_0^t y_i(t - \tau) q_i(\tau) d\tau \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Exemple 2.2.1.

On considère le système suivant :

$${}_0^c D_t^{\alpha} y(t) = A y(t),$$

tel que $y(t) \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

- Les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$, et les vecteurs propres sont : $v_1 = (1, 1)$ associées à λ_1 et $v_2 = (1, 4)$ associées à λ_2 .

Donc la solution générale de ce système est donnée par :

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} E_\alpha(-2t^\alpha).$$

Si

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors $c_1 = \frac{-1}{3}$, $c_2 = \frac{1}{3}$. Donc

$$y(t) = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha) + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} E_\alpha(4t^\alpha).$$

Exemple 2.2.2.

On considère le système

$${}^c D_t^\alpha = Ay(t),$$

$$\text{tel que } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = -1$ (simple), $\lambda_2 = 2$ (double).
- les vecteurs propres de A sont : $v_1 = (-3, 4, 2)^T$ associées à λ_1 et $v_2 = (0, 1, -1)$.

Puisque le nombre des vecteurs propres associées à λ_2 est égale à $(m = 1)$ inférieur à $(k = 2)$ le degré de multiplicité alors les autres $(k - m)$ solution qui sont linéairement indépendantes données par :

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= \sum_{j=1}^i u^{(j)} t^{(i-j)\alpha} E_\alpha^{(i-j)}(\lambda t^\alpha), \\ &= u^{(1)} t^\alpha E'_\alpha(2t^\alpha) + u^{(2)} E_\alpha(4t^\alpha), \end{aligned}$$

avec $u^1 = (0, 1, -1)$.

On a alors

$$(A - \lambda I)u^{(2)} = u^{(1)}.$$

On suppose que

$$u^{(2)} = (x, y, z)^T,$$

alors

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc la solution générale de ce système est donnée par :

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} E_\alpha(2t^\alpha) + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t^\alpha E'_\alpha(2t^\alpha) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_\alpha(2t^\alpha) \right].$$

2.2.3 Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires

Dans le cas où l'équation différentielle fractionnaire est non linéaire, la résolution analytique peut être impossible en général, pour cela, il est nécessaire de se tourner vers les méthodes numériques. Parmi lesquelles on cite : la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), méthode Diethelm, et la méthode d'Adams-Basheforth-Moulton.

La méthode d'Adams-Basheforth-Moulton généralisée

D'après le Lemme (2.2.1), si la fonction f est continue, alors l'équation (2.21) est équivalente à l'équation (2.22) de Volterra. L'idée de cette méthode est de remplacer l'équation (2.21) par (2.22), et ensuite remplacer (par l'utilisation la formule de produit de quadrature des trapèzes) l'intégral dans (2.22) par les nœuds $t_j, j = 0, 1, \dots, n+1$, où les fonctions $(t_{n+1} - \cdot)^{\alpha-1}$ dans l'intervalle $[0, T]$

On va appliquer l'approximation :

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \simeq \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(\tau) d\tau,$$

où $\tilde{g}_{k+1}$ est l'interpolation linéaire par morceaux de g par rapport aux nœuds $t_j, j = 0, 1, \dots, k+1$.

Ainsi :

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(t_j),$$

où :

$$a_{j,k+1} = \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} \phi_{j,k+1}(\tau) d\tau,$$

et

$$\phi_{j,k+1}(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} & \text{si } t_{j-1} < \tau < t_j, \\ \frac{t_{j+1} - \tau}{t_{j+1} - t_j} & \text{si } t_j < \tau < t_{j+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas où les nœuds sont équidistants ($t_j = jh$, avec h constant), on trouve :

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} (k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha) & \text{si } j = 0, \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} ((k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}) & \text{si } 1 \leq j \leq k, \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} & \text{si } j = k+1. \end{cases}$$

En substituant dans l'équation de Voltera, on obtient l'équation implicite de la méthode à un pas d'Adams-Moulton ;

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}).$$

Puisque l'inconnue y_{k+1} apparait dans les deux cotés de l'équation, et à cause du caractère non-linaire de f , on ne peut généralement pas la résoudre pour y_{k+1} d'une manière directe.

En insérant une valeur préliminaire approchée de y_{k+1} dans le membre de droite.

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p).$$

Alors pour résoudre l'équation, il reste à déterminer la formule du prédicateur requise pour le calcul de y_{k+1}^p .

On remplace l'intégrale dans le membre droite de l'équation de Voltera :

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - \tau)^{\alpha-1} (g(\tau)) d\tau \simeq \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} g(t_j),$$

où

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha).$$

$$y_{k+1}^p = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j).$$

Donc l'algorithme de la méthode Adams-Bashforth-Moulton est maintenant complètement.

2.3 Stabilité

la stabilité est l'une des propriétés principales de la théorie qualitative des équations différentielles des solutions. Elle nous permet de comparer le comportement des solutions en partant de différents points. Et pour les systèmes d'ordre fractionnaire Leurs stabilité est assez récente.

2.3.1 Stabilité des systèmes fractionnaires linéaires

Considérons le système différentielle fractionnaire linéaire :

$${}^c D^\alpha y(x) = Ay(x), \quad (2.46)$$

avec $y(0) = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})^t$, où $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $\alpha \in (0, 1)$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Définition 2.3.1. [11]

Le système autonome (2.46) est dite :

1. **stable**, si pour tout y_0 , il existe $\epsilon > 0$, tel que $\|y(t)\| \leq \epsilon$ pour tout $t \geq 0$;
2. **asymptotiquement stable**, si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t)\| = 0$.

Théorème 2.3.1. [8]

Soit $\alpha \in (0, 1)$ et $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Alors le système (2.46) est asymptotiquement stable si :

$$|\arg \lambda| > \frac{\alpha \pi}{2},$$

pour toutes les valeurs propres de A .

où le symbole $\arg \lambda$ signifie l'argument de la valeur complexe λ .

(voir la figure(2.1))

2.3.2 Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaire

Pour les systèmes fractionnaires non linéaire, nous pressentons deux méthodes de lyapunov pour étudier la stabilité, méthode indirecte basée sur la linéarisation [39] et méthode directe basée sur la fonction de lyapunov[9].

Linéarisation

Considérons le système dynamique fractionnaire non linière suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_{0,t}^{\alpha_1} x_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), & 0 < \alpha_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ {}^c D_{0,t}^{\alpha_2} x_1(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), & x \in \mathbb{R}^n, \\ \dots \\ {}^c D_{0,t}^{\alpha_n} x_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2.47)$$

Si

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_n = \alpha,$$

le système (2.47) est appelé système dynamique commensurable, sinon il s'agit d'un système dynamique fractionnaire incommensurable.

Les points d'équilibre $E^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ peuvent être déterminés en résolvant le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (2.48)$$

Théorème 2.3.2.

Le système dynamique fractionnaire (2.47) est appelé asymptotiquement stable pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_n = \alpha$, si toutes les valeurs propres λ_i , de la matrice Jacobienne $J = \frac{\partial f}{\partial x}|_{E^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}$, où $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]$, satisfaisant :

$$|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, i = 1, 2, \dots, n$$

Exemple

Considérons le système dynamique fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_{0,t}^\alpha u(x, y, t) = \eta + u^2 v - (w + 1)u, \\ {}^c D_{0,t}^\alpha v(x, y, t) = -u^2 v + wu. \end{cases} \quad (2.49)$$

On peut obtenir facilement les équilibres du système précédent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \eta + u^2v - (w + 1)u = 0, \\ -u^2v + wu = 0. \end{cases}$$

Alors le seule point d'équilibre de système est

$$E^* = (\eta, \frac{w}{\eta}).$$

La matrice Jacobienne du système associée au point d'équilibre E^* est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} w - 1 & \eta^2 \\ -w & -\eta^2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique correspondant est :

$$\lambda^2 + \lambda(\eta^2 - w + 1) + \eta^2.$$

On prend les valeurs de parementes $\eta = 1, w = 2.25$ et $\alpha = 0.97$.

Les valeurs propres de ce système est :

$$\lambda_{1,2} = 0.125 \pm 0.9921i,$$

où $|\arg(\lambda_1 \text{ ou } \lambda_2)| \simeq 1.4454 < \frac{0.97\pi}{2} \simeq 1.5236$.

alors d'après le Théorème 2.3.2, le point d'équilibre E^* est instable.

Méthode de lyapunov fractionnaire

Pour cette méthode on donne une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapunov

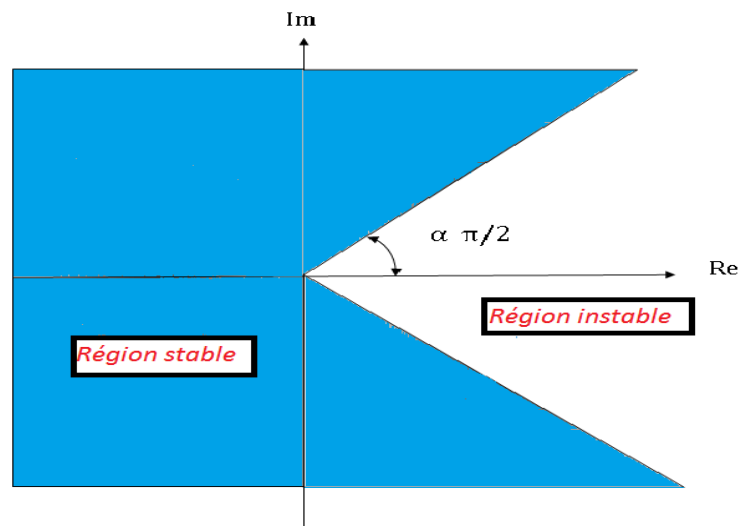
Théorème 2.3.3.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)), \tag{2.50}$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente une fonction non linéaire, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, D^α est l'opérateur de la dérivation au sens de Caputo et $\alpha \in (0, 1)$.

Lorsqu'il existe une fonction de Lyapunov positive $V(x)$ telle que $D^\alpha(V(x)) < 0$, pour tout $t \geq 0$, alors la solution de système (2.50) est asymptotiquement stable.

FIGURE 2.1 – Région de stabilité pour $0 < \alpha < 1$

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons regroupé quelques définitions de base du calcul fractionnaire, en particulier, la fonction Gamma, la fonction de Mittag-Leffler. Nous avons également présenté les solutions explicites et numériques des équations fractionnaires, ainsi que la définition de la stabilité des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire.

Coexistence entre certains types de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires

Ce chapitre traite le problème de la coexistence entre certains types de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires par l'approche d'une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapunov des systèmes fractionnaires. L'utilisation de cette nouvelle extension permet de montrer qu'on peut garantir la stabilisation ainsi que la convergence de l'erreur de synchronisation. La synchronisation proposé est illustrée par l'intermédiaire d'un exemple numérique.

3.1 Synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires

Au cours des dernières années, les recherches montrent qu'on peut également prolonger la synchronisation aux systèmes fractionnaires. C'est ce que nous essayons de faire dans ce mémoire.

3.1.1 Systèmes couplés

On dit que deux oscillateurs sont couplés, si l'existence d'une perturbation dans l'un des oscillateurs entraîne une perturbation dans l'autre ; ce qui se traduit physiquement par un transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. Ce type d'accouplement est appelé en général accouplement mutuel.

Accouplement bidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques chaotiques présentés par :

$$D^\alpha X(t) = f_1(X, t), \quad (3.1)$$

$$D^\alpha Y(t) = f_2(Y, t). \quad (3.2)$$

On dit que les deux systèmes (3.1) et (3.2) sont couplés, si on peut les réécrire les équations sous la forme :

$$D^\alpha X(t) = g_1(X, X, Y, t), \quad (3.3)$$

$$D^\alpha Y(t) = g_2(Y, X, Y, t), \quad (3.4)$$

où g_1 et g_2 sont des fonctions non linéaires, et la première variable de chaque équation représente la variable du système, tandis que la deuxième et la troisième sont le résultat de l'effet d'accouplement. La dernière représentation signifie que chaque système a un acte sur l'autre, dans ce cas on parle de l'accouplement bidirectionnel.

Accouplement unidirectionnel

Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques identiques représentés par les deux équations suivantes :

$$D^\alpha X(t) = f(X, t), \quad (3.5)$$

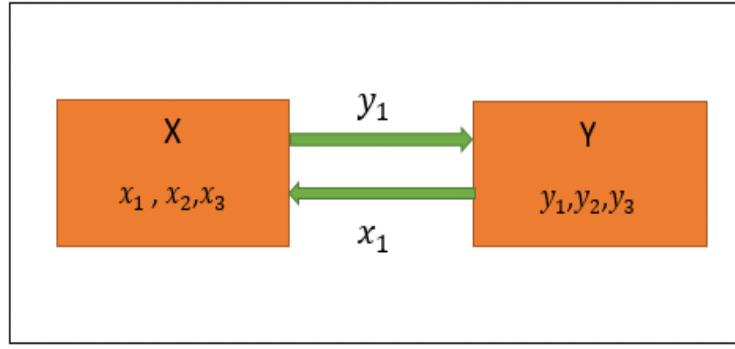


FIGURE 3.1 – Accouplement bidirectionnel

$$D^\alpha Y(t) = f(Y, t). \quad (3.6)$$

Si l'équation (3.6) va être modifier par l'effet d'accouplement et si le résultat de cette modification nous donne de nouvelles équations de la forme :

$$D^\alpha X(t) = f(X, t), \quad (3.7)$$

$$D^\alpha Y(t) = g(Y, X, t), \quad (3.8)$$

tel que $g(Y, X, t) = f(Y, t)$, pour $X = Y$, dans ce cas on parle de l'accouplement unidirectionnel. le premier système s'appelle système émetteur (maître) et le deuxième système récepteur(esclave). La dernière représentation signifie que le système émetteur a un acte sur le récepteur et le contraire est faux. Il est bien clair que ce type d'accouplement est un cas particulier d'accouplement mutuel. Dans ce mémoire on s'intéresse à l'accouplement unidirectionnel.

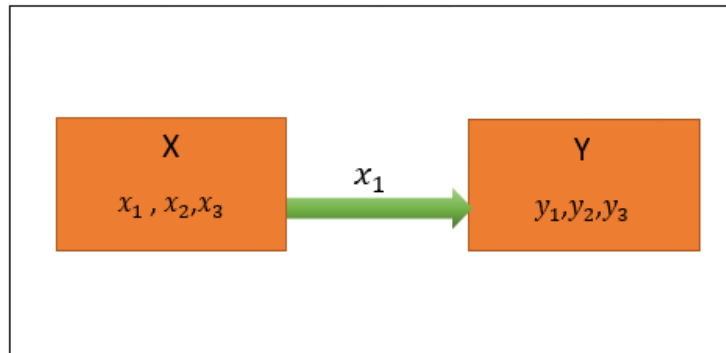


FIGURE 3.2 – Accouplement unidirectionnel

3.1.2 Différents types de Synchronisation

Plusieurs types de synchronisation ont été présentés dans la littérature. Parmi lesquels on trouve : la synchronisation complète(SC), l'anti-synchronisation(AS), la synchronisation projective (SP) et la synchronisation projective modifiée (SPM), etc.

Par exemple, dans la synchronisation complète, nous avons une coïncidence complète entre les variables d'états des deux systèmes synchronisés. Les méthodes à synchronisation complète sont typiquement associées avec la synchronisation des systèmes identiques.

Dans la synchronisation projective, l'état du système récepteur se synchronise avec un multiple de l'état du système émetteur.

Considérons maintenant les systèmes maître et esclave respectivement suivants :

$$D^\alpha x = f(x), \quad (3.9)$$

$$D^\alpha y = g(y) + u, \quad (3.10)$$

où $x, y \in \mathbb{R}^n$; sont les vecteurs d'état des systèmes maître et esclave, respectivement, $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs non linéaires des fonctions continues, et u est le vecteur de contrôle. L'objectif de cette partie consiste principalement à vérifier les performances de la méthode d'un contrôle pour différents régimes de synchronisation des systèmes chaotiques.

Synchronisation complète

La synchronisation complète a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnelles des systèmes dynamiques. c'est la forme de la synchronisation la plus simple. On dit qu'il y a une synchronisation complète entre les deux systèmes maître et esclave , s'il existe un contrôleur $u(t, x, y)$, tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0, \quad (3.11)$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes.

Si $f = g$, la synchronisation complète est dite identique.

L'étude de synchronisation sera mène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine

d'un nouveau système qu'on s'appelle "système erreur", ce dernier est donnée par l'équation :

$$e = y - x. \quad (3.12)$$

Anti-synchronisation

Le système maître et le système esclave sont dits prêts pour réaliser l'anti-synchronisation entre ces deux systèmes, s'il existe un contrôleur $u(t, x, y)$ tel que l'équation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) + x(t)\| = 0, \quad (3.13)$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes.

Synchronisation projective

On dit qu'il y a une synchronisation projective entre les deux systèmes maître et esclave, s'il existe un contrôleur efficace $u(t, x, y)$ de telle sorte que l'équation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \theta x(t)\| = 0,$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes, où θ est une constante non nulle, appelée facteur d'échelle.

Synchronisation projective modifiée

On dit qu'il y a une synchronisation projective modifiée entre les deux systèmes maître et esclave, s'il existe un contrôleur efficace $u(t, x, y)$ de telle sorte que l'équation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|By(t) - x(t)\| = 0,$$

est satisfaite pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes, où B est une matrice diagonale constante, appelée matrice d'échelle i.e, $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, ($b_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$).

Remarque 3.1.

La synchronisation complète (respectivement, l'anti-synchronisation) est le cas particulier de synchronisation projective où le facteur d'échelle $\theta = 1$ (respectivement $\theta = -1$).

3.2 Coexistence entre certains types de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires

La principale motivation de cette partie est de construire un nouveau contrôle continu pour que certains types de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires coexistent.

Pour atteindre cet objectif, nous présentons une propriété très importante pour les dérivés fractionnaires au sens de Caputo, lorsque $0 < \alpha < 1$. Cette propriété nous permet de montrer la stabilité des systèmes, en utilisant une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapunov d'ordre fractionnaire.

Lemme 3.2.1. [3]

Soit $x(t) \in \mathbb{R}$ une fonction dérivable au sens de Caputo. Alors, pour tout $t > t_0$,

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) \leq x(t)D^\alpha x(t), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (3.14)$$

Preuve 3.2.1. [3]

Par définition, on a :

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (3.15)$$

De même :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(\tau)\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (3.16)$$

Nous avons donc :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) - x(t)D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{[x(t) - x(\tau)]\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (3.17)$$

En utilisant le changement de variable $y(\tau) = x(t) - x(\tau)$, l'équation (3.17), peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) - x(t)D^\alpha x(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y(\tau)\dot{y}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (3.18)$$

Faisons l'intégration par parties, en posant :

$$\begin{cases} du = y(\tau)\dot{y}(\tau)d\tau, \\ v = \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \end{cases} \quad (3.19)$$

on trouve :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) - x(t)D^\alpha x(t) = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{-y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} + \frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} + \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau. \quad (3.20)$$

D'autre part, en utilisant la règle de l'hôpital, on trouve :

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \frac{-y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{2y(\tau)\dot{y}(\tau)}{2\alpha\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^{\alpha-1}} = 0. \quad (3.21)$$

Et enfin :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^2(t) - x(t)D^\alpha x(t) = \frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} + \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \geq 0, \text{ pour tout } t \geq t_0. \quad (3.22)$$

Remarque 3.2.

Le lemme précédent reste vrai, si $x(t) \in \mathbb{R}^n$, et dans ce cas :

$$\frac{1}{2}D^\alpha x^T(t)x(t) \leq x^T(t)D^\alpha x(t), \text{ pour tout } \alpha \in (0, 1) \quad (3.23)$$

Résultats théoriques

Pour définir la coexistence entre la SC, l'AS, la SP et la SPM des systèmes chaotiques fractionnaires, considérons le système couplé suivant :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad (3.24)$$

$$D^\alpha y(t) = g(y(t)) + u(t), \quad (3.25)$$

où $0 < \alpha < 1$, $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, $y = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$ sont des vecteurs d'état des systèmes maître-esclave respectivement, $u = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T \in \mathbb{R}^n$ est un paramètre de contrôle et $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions non linéaires et continues.

La synchronisation par la méthode du contrôle continu consiste à choisir le contrôle u de tel sorte que la SC, l'AS, la SP et la SPM entre les systèmes (3.24) et (3.25) coexistent.

Pour quantifier cet objectif, l'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1, \\ e_2 = y_2 - x_2, \\ e_3 = y_3 - \sigma_1 x_3, \\ e_4 = \sigma_2 y_4 - x_4, \end{cases} \quad (3.26)$$

Cette expression peut se réécrire sous forme matricielle comme suit :

$$e = My - Kx, \quad (3.27)$$

où $M = \text{diag}\{1, 1, 1, \sigma_2\}$, et $K = \text{diag}\{1, -1, \sigma_1, 1\}$.

La dynamique de l'erreur de synchronisation peut alors être exprimée comme suit :

$$D^\alpha e = MD^\alpha y - KD^\alpha x. \quad (3.28)$$

Nous avons donc le résultat suivant.

Théorème 3.2.1. [22]

Considérons le système maître-esclave (3.24) et (3.25), avec le contrôleur continu :

$$u = M^{-1}((A + C)e - MAy - Mg(y)) + KD^\alpha x, \quad (3.29)$$

où $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ est la partie linéaire des systèmes et $C \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ est la matrice de gain.

Si la matrice C est sélectionnée de tel sorte que la matrice $A + C$ est définie négative, l'erreur de synchronisation converge asymptotiquement vers zéro.

Preuve 3.2.2. [22]

La dynamique de l'erreur de synchronisation peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned} D^\alpha e &= M \times D^\alpha y - KD^\alpha x, \\ &= MAy + Mg(y) + Mu - KD^\alpha x. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Avec le choix de contrôle continu (3.29), le système d'erreur (3.30) devient :

$$D^\alpha e = (A + C)e. \quad (3.31)$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T e. \quad (3.32)$$

L'utilisation du lemme 3.2.1, donne :

$$\begin{aligned} D^\alpha V(e) &= D^\alpha \left(\frac{1}{2} e^T e \right), \\ &\leq e^T D^\alpha e \\ &= e^T (A + C) e. \end{aligned}$$

Donc, si la matrice C est sélectionnée de tel sorte que la matrice $A + C$ est définie négative, la condition du théorème est satisfaite et le système d'erreur devient asymptotiquement stable. Par conséquent, les systèmes (3.24) et (3.25) réalisent la coexistence entre les différents types de synchronisation proposées. Ceci termine la preuve du théorème.

Résultats de simulation

Pour vérifier et démontrer l'efficacité et la faisabilité de la méthode de synchronisation présentée, nous supposons que le système hyperchaotique de Rössler modifié [22] est le système émetteur. La dynamique de ce système est donnée par le modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = -x_2 - x_3 + x_4, \\ D^\alpha x_2 = x_1 + a_1 x_2, \\ D^\alpha x_3 = x_1 x_3 - a_3 x_3 + a_2, \\ D^\alpha x_4 = a_4 x_1, \end{cases} \quad (3.33)$$

On prend également le système de Rössler modifié d'ordre fractionnaire comme un

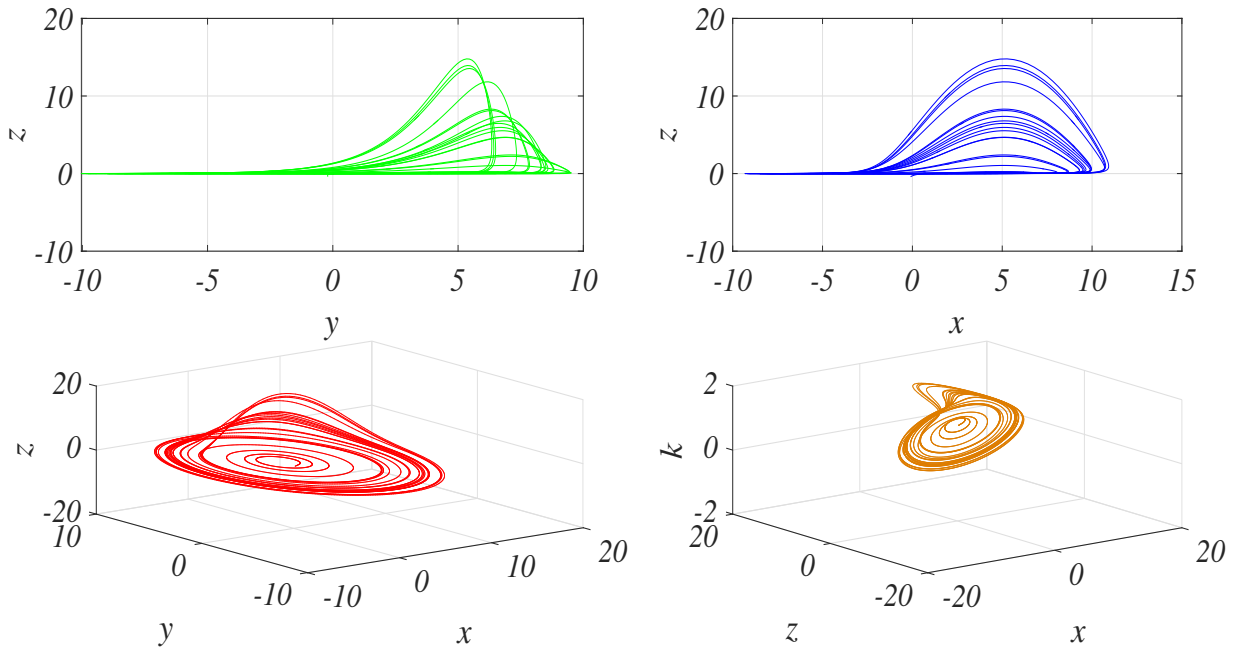


FIGURE 3.3 – Projections de portrait de phase du système(3.34)

système récepteur. Le système hyper chaotique contrôlé de Rössler modifié est exprimé par le modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} D^\alpha y_1 = -y_2 - y_3 + y_4 + u_1, \\ D^\alpha y_2 = y_1 + a_1 y_2 + u_2, \\ D^\alpha y_3 = y_1 y_3 - a_3 y_3 + a_2 + u_3, \\ D^\alpha y_4 = a_4 y_1 + u_4, \end{cases} \quad (3.34)$$

où $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ est la fonction vectorielle de contrôle continu, et α est un nombre rationnel compris entre 0 et 1. La partie linéaire des systèmes (3.33) et (3.34) est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Selon la technique de contrôle continu proposée dans la section précédente, les matrices M et K sont sélectionnées comme :

$$M = \text{diag}(1, 1, 1, 2). \quad (3.35)$$

et

$$K = \text{diag}(1, -1, 3, 1).w \quad (3.36)$$

La matrice de gain C est sélectionnée comme :

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -a_1 - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - 3 & 0 \\ -a_4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Par conséquent, le contrôle u peut être choisit comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 + y_2 + y_3 - y_4 - x_2 - x_3 + x_4, \\ u_2 = -2e_2 - y_1 - a_1 y_2 - x_1 - a_1 x_2, \\ u_3 = -3e_3 + a_3 y_3 - y_1 y_3 + 2a_2 + 3x_1 x_3 - 3a_3 x_3, \\ u_4 = -2e_4 - a_4 y_1 + \frac{1}{2} a_4 x_1. \end{cases} \quad (3.38)$$

et le système d'erreur devient :

$$\begin{pmatrix} D^\alpha e_1 \\ D^\alpha e_2 \\ D^\alpha e_3 \\ D^\alpha e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Il est facile de voir que la matrice $A + C$ est définie négative. Alors la condition du théorème est satisfaite, ce qui assure la réalisation de la synchronisation proposé.

Dans les simulations numériques, la méthode Adams-Bashforth-Moulton [1, 12] est utilisé pour résoudre les systèmes. Pour ces simulations numériques :

Les valeurs de paramètre du systèmes proposé sont donnés par :

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0.283, 0.01, 5, 0.1). \quad (3.40)$$

l'ordre de dérivation est donné par $\alpha = 0.98$.

Les conditions initiales du système émetteur sont choisies comme :

$$x_1(0) = -0.1, x_2(0) = -0.2, x_3(0) = -0.4 \text{ et } x_4(0) = 1 \quad (3.41)$$

Les conditions initiales du système esclave sont choisies comme :

$$y_1(0) = -1.1, y_2(0) = -1.8, y_3(0) = 0.4 \text{ et } y_4(0) = 1.5 \quad (3.42)$$

Le système d'erreur a donc les valeurs initiales comme :

$$e_1(0) = -1, e_2(0) = -2, e_3(0) = 1.6 \text{ et } e_4(0) = 2 \quad (3.43)$$

Les projections du portrait de phase du système(3.34) dans les plans $x_2 - x_3$, $x_1 - x_3$, $x_3 - x_4$, $x_1 - x_2 - x_3$ et $x_1 - x_3 - x_4$ sont représenté dans la Figure 3.3 et les courbes d'erreur de synchronisation (3.39) sont représenté dans la Figure 3.4.

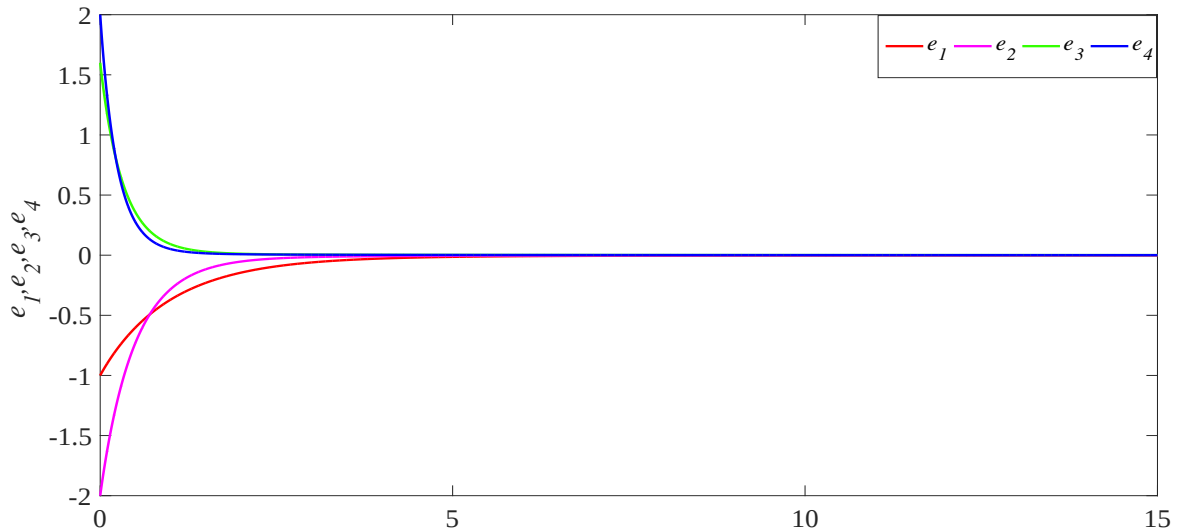


FIGURE 3.4 – Les courbes d'erreur de synchronisation 3.39

De la Figure 3.4, on peut facilement voir que toutes les variables du système d'erreur (3.39) convergent rapidement vers zéro, ce qui indique que la synchronisation souhaitée entre les systèmes hyperchaotiques (3.33) et (3.34) est achevée.

3.3 Conclusion

Dans cette partie de ce chapitre, le problème de la coexistence entre certains types de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires a été étudié. Cette synchronisation a été réalisée via un contrôle continu. Une nouvelle extension de la méthode directe de Lyapunov pour les systèmes fractionnaires a été effectuée pour conclure sur la stabilité ainsi que la convergence de l'erreur de synchronisation. Des simulations numériques ont été effectuées pour tester l'efficacité du système de synchronisation proposé.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié le problème de la coexistence entre certains types de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires. Pour atteindre cet objectif, nous avons divisé notre travail en trois chapitres :

Le premier chapitre a été consacré à la présentation des notions de base sur les systèmes dynamiques et quelques notions de la théorie du chaos.

Dans le deuxième chapitre, nous avons regroupé quelques définitions de base du calcul fractionnaire, en particulier, la fonction de Mittag-Leffler. Nous avons également présenté la définition de la stabilité des systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire commensurable ou incommensurable, en mettant en exergue les différentes régions de stabilité.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié un autre type de synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire, dit coexistence entre certains types de synchronisation des systèmes chaotiques fractionnaires. Pour garantir la stabilité du système erreur, nous avons employé la nouvelle extension de la méthode directe de Lyapunov pour les systèmes fractionnaires. Des simulations numériques ont été effectuées pour tester l'efficacité du système de synchronisation proposé.

Bibliographie

- [1] Abdelouahab, M. S. Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires. Mémoire de magistère. Univ, Mentouri, Constantine 1, 2009.
- [2] Afraimovich, V. S. Verichev, N. N. and Rabinovich, M. I. Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems. *Radiophys. Quant. Electron.* **29** (9) (1986) 795–803.
- [3] Aguila-Camacho, N. Duarte-Mermoud, M. A. and Gallegos, J. A. Lyapunov functions for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **19** (9) (2014) 2951–2957.
- [4] Bagley, R. L. and Calico, R. A. Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *Journal of Guid Control Dyn.* **14** (2) (1991) 304–311.
- [5] Benzemam, D. Systèmes chaotiques et hyperchaotiques pour la transmission sécurisée de données. Mémoire de magistère, Univ. Abou Bekr Belkaid, Tlemcen, 2010.
- [6] Bouzriba, A. Contribution à la synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire. Thèse de doctorat. Université M^{ED} Seddik BEN YAHIA-Jijel.
- [7] Carroll, T. L. and Pecora, L. M. Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **38**(4) (1991) 453–456.
- [8] Čermák, J. and al. On explicit stability conditions for a linear fractional difference system. *Fractional Calculus and Applied Analysis* . **18**(3)(2015) 651–672.
- [9] Chen, D. Zhang, R. Liu, X. and Ma, X. Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical

- networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, (2014), doi :<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.05.005>.
- [10] Dang-Vu, H. and Delcarte, C. Bifurcations et chaos : Introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. *Ellipses*, 2000.
- [11] Deliang, Q. and al. Stability analysis of fractional differential system with Riemann-Liouville derivative. *Mathematical and Computer Modelling*. **52**(2010)862-874, 2010.
- [12] Diethelm, K. The Analysis of Fractional Differential Equations. *Springer, Verlag Berlin Heideberg*, (2010).
- [13] Ding, J. and Yao, H. X. Chaos control of a kind of non-linear finance system. *Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)*. **25** (6) (2004) 500–504.
- [14] François, J. P. Oscillations en biologie : Analyse qualitative et modèles, *Springer-Verlag Berlin. Heidelberg*, 2005.
- [15] Gan, Q. Yang, Y. Fan, S. and Wang, Y. Synchronization of stochastic Fuzzy cellular neural networks with leakage delay based on adaptive control. *it Differ. Equ. Dyn. Syst.* **22** (2014) 319-332.
- [16] Garfinkel, A. Weiss, J. N. Ditto, W. L. and Spano, M. L. Chaos control of cardiac arrhythmias. *Trends in Cardiovascular Medicine*. **5** (2) (1995) 76–80.
- [17] Ginarsa, I. M. A. Soeprijanto, M. H. Purnomo. Controlling chaos and voltage collapse using an ANFIS-based composite controller-static var compensator in power systems. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*. **46** (2013) 79-88.
- [18] Guitian, H. E. and Maokang, L. U. O. Dynamic behavior of fractional order Dufing chaotic system and its synchronization via singly active control. *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.* **33** (5) (2012) 567-582.
- [19] Haouam, K. Existence et non existence de solution des équations différentielles fractionnaires. Thèse de Doctorat Univ.Mentouri. Constantine, 2008.
- [20] Heaviside, O . Electromagnetic Theory. *Chelsea, New York* ,1971.

- [21] Inzunza-Gonzalez, E. and Cruz-Hernandez, C. Double hyperchaotic encryption for security in biometric systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. **13**(1) (2013) 55–68.
- [22] Kaouache, S. and Abdelouahab, M. S. Modified Projective Synchronization between Integer Order and Fractional Order Hyperchaotic Systems. *Jour. of Adv. Research in Dynamical and Control Systems* , **10** (5) (2018) 96–104.
- [23] Koeller, R. C. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *J. Appl. Mech.* **51**(1984) 299–307.
- [24] Kuznetsov, Y. A. Elements of applied bifurcation theory : Applied mathematical science.-Verlay Newyork.Tnc,1998.
- [25] Layek, G. C. *An introduction to dynamical systems and chaos*. Springer, India, 2015.
- [26] Li, G. H. Modified projective synchronization of chaotic system. *Chaos Solitons Fractals* **32**(5) (2007) 1786-1790.
- [27] Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*. **20** (2) (1963) 130–141.
- [28] Lynch, Stephen. Dynamical Systems with Applications using MATLAB. *Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London*.2014.
- [29] Manieri, R. Rehacek, J. Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* **82** (15) (1999) 3042-3045.
- [30] Martinez, R. and al. Synchronization of integral and fractional order chaotic systems. *Springer cham Heidelberg Newyork Dordrecht London*, 2015.
- [31] Megherbi, O. Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques . Mémoire de magistère. Univ, Mouloud Memmeri, Tizi-Ouzou ,2013.
- [32] Menacer, T. Synchronisation des systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires. Mémoire de magistère. Univ, Mentouri, Constantine 1, 2010.
- [33] Olga, I. M. Alexey, A. K. and Alexander, E. H. Generalized synchronization of chaos for secure communication : remarkable stability to noise. *Physics Letters A*. **374**(29) (2010) 2925–2931.
- [34] Pac, J. L. Systèmes dynamiques : Cours et exercices corrigés. *Dunod, Paris*, 2016.

- [35] Petrov, V. Gaspar, V. Masere, J. and Showalter, K. Controlling chaos in the Belousov—Zhabotinsky reaction. *Nature*. **361** (6409) (1993) 240–243.
- [36] Podlubny, I. Fractional Differential equation. *Press, New york* ,1999.
- [37] Rehan, M. Synchronization and anti-synchronization of chaotic oscillators under input saturation. *Appl. Math. Model.* **37** (2013) 6829-6837.
- [38] Roy, R. Murphy Jr, T. W, Maier, T. D, Gills, Z. and Hunt, E. R. Dynamical control of a chaotic laser : Experimental stabilization of a globally coupled system. *Physical Review Letters*. **68** (9) (1992) 1259–1992.
- [39] Sarwar, S. and S,Iqbal. Stability analysis, dynamical behavior and analytical solutions of nonlinear fractional differential system arising in chemical reaction. *Chinese Journal of Physics*. **56**(2018)374–384.
- [40] TALBI, I. systemes dynamiques non linéaires et phénomènes de chaos . Thèse de Doctorat. Univ, Mentouri, Constantine 1,2010.
- [41] Toledo-Hernandez, R. Rico-Ramirez, V. Iglesias-Silva, G. A. and Diwekar, M. U. A fractional calculus approach to the dynamic optimization of biological reactive systems, Part I : Fractional models for biological reactions. *Chemical Engineering Science*. **117** (2014) 217–228.
- [42] Yamada, T. and Fujisaka, H. Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*. **70** (5) (1983) 1240–1248.
- [43] Yin-He, W. F. Yong-Qing, W. Qing-Yun, Z. Yun. Adaptive feedback stabilization with quantized state measurements for a class of chaotic systems. *Communications in Theoretical* . **57**(5) (2012) 808-816.
- [44] Zhen, W. Xia, H. and Hao, S. Control of an uncertain fractional order economic system via adaptive sliding mode. *Neuro computing* **83** (2012) 83–88.
- [45] Zhang, G. Liu, Z. Ma, Z. Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems. *Chaos Solitons Fract.* **32** (2) (2007) 773—779.