



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

EN: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Introduction à la théorie des systèmes dynamiques discrets

Préparé par :

- Djenhi Roukia
- Makouf Aida

Devant le jury :

Boufelgha Nabila	M.A.A	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Président
Meskine Habiba	M.A.B	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
Boubelouta Khadidja	M.A.A	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examineur

Année Universitaire : 2016/2017

Remerciements

Au terme de ce travail, nous commençons par remercier DIEU pour nous avoir donné la volonté et le courage pour terminer ce modeste travail.

Nous tenons à remercier énormément notre encadreuse Madame MESKINE Habiba pour son aide appréciable sa disponibilité et ses conseils qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Nous exprimons également notre gratitude à tous les enseignants et professeurs du département de Mathématiques et Informatique du centre universitaire de Mila à notre formation depuis notre premier cycle d'étude jusqu'à la fin de notre cycle universitaire, et on remercie nos familles et nos amis pour leur grand soutien.

Nos remerciements aussi les membres de jury d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer notre travail.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction Générale	vi
1 Notions générales sur les systèmes dynamiques	1
1.1 Définition et notation	1
1.1.1 Systèmes dynamiques	1
1.1.2 Systèmes autonomes et non-autonomes	2
1.1.3 l'espace des phases	4
1.1.4 Flot et trajectoire	4
1.1.5 Points fixes	5
1.1.6 Ensembles limites	5
1.1.7 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs	5
1.1.8 Portrait de phase	6
1.2 Les attracteurs	6
1.2.1 Les différents types d'attracteurs	8
1.2.2 Bassin d'attraction	9
2 les systèmes dynamiques discrets	10
2.1 Définition	10
2.1.1 Systèmes dynamiques discrets d'ordre 1 de dimension m	10

2.1.2	Systèmes dynamiques discrets non-autonomes	11
2.1.3	Systèmes dynamiques discrets d'ordre supérieur	11
2.1.4	Point fixe et point périodique	12
2.1.5	Notion d'orbite	15
2.2	Étude graphique des systèmes dynamiques	17
2.3	Étude de la stabilité d'un SDD	19
2.3.1	Stabilité des points fixes	20
2.3.2	Stabilité des points périodiques	21
2.3.3	Critère de stabilité	21
2.4	Nature des singularités	26
2.5	Bifurcations	30
2.5.1	Différents types de bifurcations d'un système dynamique discret	32
3	Systèmes chaotiques	35
3.1	Définition du chaos	36
3.1.1	Chaos au sens de Devaney	36
3.2	Caractéristique du chaos	37
3.2.1	Sensibilité aux condition initiales	37
3.2.2	Exposants de Lyapunov	38
3.2.3	Dimension fractale	41
3.2.4	Attracteur étrange	43
3.3	Transitions vers le chaos	43
3.3.1	Le doublement de période	43
3.3.2	L'intermittence vers le chaos	44
3.3.3	La quasi-périodicité	44
4	Exemples de Systèmes dynamiques chaotiques discrets	45
4.1	Fonction logistique	45
4.2	Le modèle de Hénon et le modèle de Lozi	51
4.2.1	L'application de Hénon	51
4.2.2	L'application de Lozi	54

❖ *TABLE DES MATIÈRES*

Conclusion générale

61

TABLE DES FIGURES

1.1	Attracteurs réguliers.	8
1.2	Attracteur étrange de Lozi.	9
2.1	l'orbite du système $x_n = 4.5x_n - 3.5x_n^2$:premier pas.	18
2.2	l'orbite du système $x_n = 4.5x_n - 3.5x_n^2$:deuxième pas.	18
2.3	Le portrait de phases d'un système dynamique non-linéaire.	19
2.4	Col de type 1, $S_{1,2} > 0$	28
2.5	Col de type 2, $S_1 > 0$ et $S_2 < 0$	28
2.6	Col de type 3, $S_{1,2} < 0$	28
2.7	Noeud de type 1, $S_{1,2} > 0$	29
2.8	Noeud de type 2, $S_1 > 0$ et $S_2 < 0$	29
2.9	Noeud de type 3, $S_{1,2} < 0$	29
2.10	Foyer de type 1, $ReS_{1,2} > 0$	30
2.11	Foyer de type 2, $ReS_{1,2} < 0$	30
2.12	Diagramme de bifurcation du système de Hénon pour $b = 0.3$	32
2.13	Diagramme de bifurcation.	32
2.14	Diagramme de bifurcation fold.	33
2.15	Diagramme de bifurcation de doublement de période.	33
3.1	Scénarios de transition par doublement de période.	44

4.1	Le graphe de fonction logistique pour $a = 3.8$	46
4.2	Représentation graphique des itérations de la fonction logistique pour $a = 3.8282$	46
4.3	Diagramme de bifurcation de la fonction logistique sur l'intervalle $2 \leq a \leq 4$	47
4.4	Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a = 0.5$	48
4.5	Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a = 2$	48
4.6	Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a = 3.1$	48
4.7	Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a = 4$	50
4.8	Variation d'exposants de Liapunov de la fonction Logistique.	50
4.9	Attracteur chaotique de la suite logistique pour $a = 4$	50
4.10	Diagramme de bifurcation de Hénon.	53
4.11	Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Hénon.	53
4.12	Attracteur de Hénon pour $a = 1.4, b = 0.3$	54
4.13	Stabilisation de point $P1$	57
4.14	Stabilisation de point $P2$	58
4.15	Diagramme de bifurcation de la carte de Lozi pour $b = 0.1$	58
4.16	Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Lozi.	59
4.17	Attracteur de Lozi.	60
4.18	Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$	60

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les systèmes dynamiques ont été développés au cours du 19ème siècle et maintenant, ils sont utilisés dans de très nombreux domaines : géophysique, biologie, économie, médecine,...

En mathématiques, en chimie et en physique théorique, un système dynamique est un ensemble très général de composants en interaction (un système), répartis sur plusieurs états et structurés selon certaines propriétés, il est le plus souvent régi par un ensemble d'équations différentielles ou d'équations aux différences décrivant le mouvement des composants (leur dynamique) où interviennent une classe de paramètres accessibles, ou bien un système dynamique consiste en un espace de phases dont les coordonnées décrivent l'état dynamique du système à n'importe quel moment et dont une règle dynamique spécifique la tendance future immédiate de toutes les variables d'état composant le système, donnée par la valeur présente de ces mêmes variables d'état.

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques introduit par Newton depuis 1665. Le but de la théorie des systèmes dynamiques est de modéliser des processus qui évoluent dans le temps et d'étudier leur comportement. Cette étude doit permettre de prédire le comportement du système et de le réguler afin d'obtenir les résultats désirés. Pour élaborer un modèle il faut tout d'abord définir quelles sont les valeurs qui évoluent dans le temps, les états du système. Ensuite, il faut trouver des équations mathématiques qui décrivent leur évolution. Généralement, ce sont des équations différentielles (si le temps est considéré comme continu) ou en différences finies(si le temps du modèle est discret).

Les systèmes dynamiques discrets sont généralement définis sous forme d'itérations d'une application d'un espace métrique dans lui même.

Les systèmes d'équations différentielles paramétrées peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle...) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre (l'attracteur du système était un équilibre et devient un cycle par exemple). Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation et la valeur du paramètre associée est appelée valeur de bifurcation.

Il existe plusieurs systèmes présentant ce comportement ils sont dits chaotiques, ils sont régis par des lois déterministes dépendent d'un ou de plusieurs paramètres et leur évolution dans le temps est imprévisible. Le terme chaos définit un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais qui est très sensible aux conditions initiales, et imprédictible à long terme.

Dans ce mémoire nous étudions souvent les systèmes dynamiques discrets.

Cette mémoire est composée d'une introduction générale et quatre chapitres organisés comme suite :

Dans le premier chapitre : nous présentons quelques notions importantes sur les systèmes dynamiques.

Le deuxième chapitre : nous donnons les différents types de systèmes dynamiques discrets et nous allons étudier tout ce qui est lié à un système dynamique discret (l'étude graphique, l'étude de stabilité), bifurcations .

Dans le troisième chapitre : nous faisons un panorama sur la théorie du chaos déterministe tels que : la définition du chaos, les caractéristiques du chaos et les divers scénarios de transition vers le chaos.

En fin : nous allons étudier trois exemples de systèmes dynamiques chaotiques discrets .

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Dans ce chapitre nous allons donner quelques notions générales sur les systèmes dynamiques (système autonome et non-autonome, point fixe, flot, trajectoire, attracteur,...).

1.1 Définition et notation

En mathématiques, en physique et en ingénierie un système dynamique est un système "classique" qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- causale (c.à.d que son avenir ne dépend que des phénomènes du passé ou du présent).
- déterministe (c.à.d qu'à une "condition initiale" donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur "un et un seul état futur" possible).

1.1.1 Systèmes dynamiques

Un Système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques, encore appelés paramètres

du système, sont fixes.

-Dans le cas où la composante "temps" est continue le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, \mu), x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{V} \subseteq \mathbb{R}^p.$$

-Dans le cas où le temps est discret le système dynamique est présenté par une application itérative.

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu), x_n \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{V} \subseteq \mathbb{R}^p, n \geq 0.$$

Où $t \in I \subseteq \mathbb{R}_+$ est le temps, $x : t \in I \rightarrow x(t) \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état du système, \mathbb{R}^n est l'espace des phases, et $\mu \in \mathbb{V} \subseteq \mathbb{R}^p$ est le vecteur de paramètres.

Exemple 1.1. (cas continue) Le système de Lorenz est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sigma(v - u), \\ \frac{dv}{dt} = -uw - \rho v - v, \\ \frac{dw}{dt} = uv - \beta w; \end{cases}$$

où u, v et w sont les variables d'état du système, σ, ρ et β sont des paramètres réels. L'espace de phase est \mathbb{R}^3 , l'espace de paramètre est \mathbb{R}^3 .

Exemple 1.2. (cas discret) L'application de Hénon :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} = bx_n, \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels. L'espace des phases est \mathbb{R}^2 et l'espace des paramètres est \mathbb{R}^2 .

1.1.2 Systèmes autonomes et non-autonomes

Définition 1.1.

Un système différentielle est dit autonome si f ne dépend pas explicitement de t dans ce

cas on l'écrira :

$$\dot{x} = f(x, \mu).$$

Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome.

Exemple 1.3. Soit l'équation :

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+t}.$$

Cette équation est non autonome.

Remarques 1.1.

On peut aussi utiliser le procédé d'extension d'état pour transformer un système non-autonome en système autonome.

En effet. La non-autonomie se traduit par une équation de la forme :

$$\dot{x} = f(x, t, \mu).$$

Il suffit dès lors d'ajouter l'état $x_{n+1} = t$, la forme ce qui réhabilite la forme :

$$\dot{x} = f(x, \mu).$$

Avec cette fois $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'équation supplémentaire $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Exemple 1.4. Soit le système non-autonome suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 3t, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$$

On pose $x_3 = t$, alors $\dot{x}_3 = 1$, donc le système autonome est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 3x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_3 = 1. \end{cases}$$

1.1.3 l'espace des phases

Définition 1.2.

On appelle *espace des phases*, un espace abstrait dont les axes sont les variables dynamiques du système, ou bien est une structure correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Ce peut être un espace vectoriel, une variété différentielle ou un fibré vectoriel, un espace mesurable...

1.1.4 Flot et trajectoire

Considérons le système autonome :

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^n, f \in C^r(U), U \subseteq \mathbb{R}^n, (r \geq 1) \quad (*)$$

Définition 1.3.

On appelle *flot* du système dynamique (*) la famille d'applications :

$$\phi_t : x_0 \in U \mapsto x(x_0, t), t > 0.$$

Autrement dit, étant donné un point (matériel) en x de l'espace du phase, le flot du système permet de préciser la position $\phi_t(x)$ du point après un déplacement d'une durée t . Le flot d'un système dynamique est un point de vue globale et géométrique sur les équation différentielles pour t fixé, le flot est représentative de la manière dont l'application $x(t, x_0)$ fait évoluer un ensemble donné de point x_0 dans l'espace de phase.

Proposition 1.1. $\phi_t(x_0)$ possède les propriétés suivantes :

1. $\phi_t(x_0)$ est de classe C^r ,
2. $\phi_0(x_0) = x_0$,
3. $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$.

Définition 1.4.

L'ensemble des points $\{x(x_0, t)/t \in \mathbb{R}\}$ est la trajectoire (orbite) dans l'espace d'état

passant au point x_0 à l'instant initial $t = 0$. Et on note :

$$\gamma_{x_0} = \{(x_0, t) / t \in \mathbb{R}\}.$$

1.1.5 Points fixes

Définition 1.5.

On appelle point fixe (ou point stationnaire ou point d'équilibre ou point critique) de (*), le point \bar{x} de l'espace des phases tq :

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

1.1.6 Ensembles limites

Définition 1.6.

Un point $a \in I$ est un point ω -limite d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n} = a,$$

où ϕ_t est le flot du système $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Un point $b \in I$ est un point α -limite d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow -\infty$ tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n} = b.$$

Définition 1.7. L'ensemble des points α -limite (resp ω -limite) est désigné par $\alpha(x)$ (resp $\omega(x)$), et on définit l'ensemble limite de $x(x_0, t)$ par l'ensemble :

$$\alpha(x) \cup \omega(x).$$

1.1.7 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs

En physique, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système

dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

Les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, et pour préciser cette définition, on dit qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale x_0 a un et un seul état final $x(t)$; il faut pour cela qu'il existe une application bijective de l'espace des phases.

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\phi_t(x_0) = x(x_0, t).$$

Si le système est dissipatif, le flot ϕ n'est pas bijectif et il existe en général un ou plusieurs attracteurs dans l'espace des phases du système.

1.1.8 Portrait de phase

Définition 1.8.

Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentative dans l'espace de phase. Étant donné un système dynamique, $\dot{x} = f(x, t)$. Sans résoudre les équations, on peut toujours, à un instant t donné, représenter graphiquement (à l'aide de flèches) le champ des \dot{x} (le champ des vitesses si x sont des coordonnées). La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour avoir une idée du comportement du système.

1.2 Les attracteurs

Lors de l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système dynamique, on trouve des objets dans l'espace des phases qui attirent un grand nombre de solutions issues de conditions initiales différentes. Ces objets sont appelés attracteurs et ensembles attractants.

Définition 1.9. (ensemble invariant)

Soit A un sous ensemble de l'espace des phases \mathbb{R}^n , A est dit invariant (resp positivement invariant) par un flots ϕ_t , si pour tout t dans \mathbb{R} (resp dans $[0, +\infty[$), $\phi_t(A)$ est inclus dans A .

Définition 1.10. (ensemble attractant)

Un ensemble invariant fermé A est un ensemble attractant s'il existe un voisinage U tel que :

$$\begin{cases} F(U) \subset U, \\ \forall x \in U, F^{(n)}(x) \rightarrow A, \text{ pour } n \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Attracteur

Définition 1.11.

Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteur. En général, un attracteur est défini comme une sous partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

Attracteur dans le cas discret

Définition 1.12. (Guckenheimer-Holmes)

Soit (f, \mathbb{D}) un système dynamique discret, une sous partie A de \mathbb{D} est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1. A est fermée,
2. A est positivement invariante,
3. A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage ouvert U de A tel que :
 - (a) U est positivement invariant,
 - (b) U est attiré par A : $\forall u \in U$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(f^t(u), A) = 0.$$

1.2.1 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux type attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1) Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

- a) **points fixes** : C'est le plus simple attracteur, le système évolue vers un état de repos.
- b) **Le cycle limite périodique** : C'est une trajectoire dans l'espace de phase qui se reforme sur elle-même.
- c) **Courbe invariant** : Les courbes invariantes des systèmes discrets sont analogues au tore des flots continus, on peut réduire la dynamique sur une courbe fermée invariante à celle d'une application du cercle unité dans lui-même appelé "cercle application".

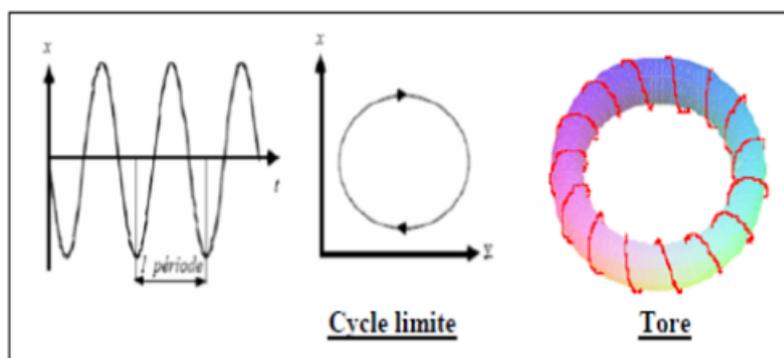


FIGURE 1.1 – Attracteurs réguliers.

2) Attracteurs chaotiques(ou étrange)

Définition 1.13.

Soit A un ensemble de \mathbb{R}^n , alors A est appelé attracteur étrange s'il est chaotique (l'attracteur vérifie la notion de sensibilité aux conditions initiales).

1.2.1.1 Les caractéristiques d'un attracteur étranges

-La dimension d de l'attracteur est fractale (non entier) avec $0 < d < n$, ou n est la

dimension de l'espace des phases.

-Sensibilité aux conditions initiales : deux trajectoires initialement voisines finissent toujours par s'écartier l'une de l'autre.

-Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nul.

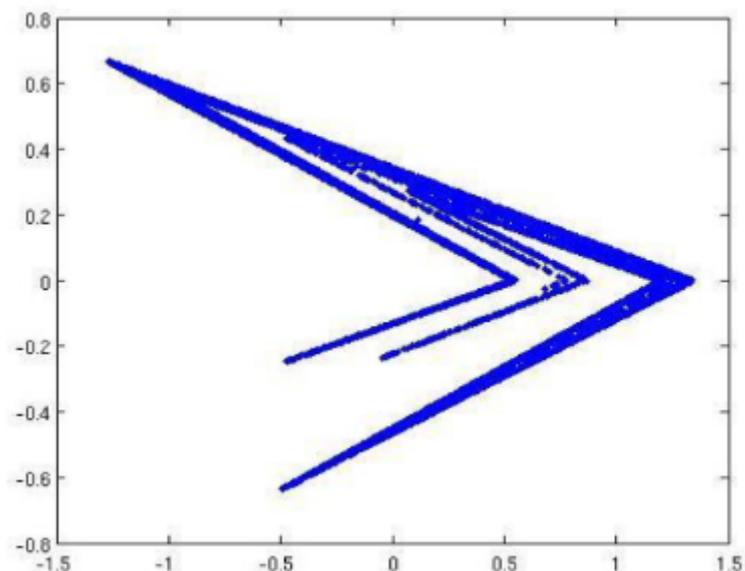


FIGURE 1.2 – Attracteur étrange de Lozi.

1.2.2 Bassin d'attraction

On rappelle que tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions (3.a) et (3.b) dans la définition (1.12) est appelée voisinage attiré par A . Il faut remarquer que bien qu'il existe un voisinage attiré U , on ne peut pas affirmer qu'il est unique : en effet A peut admettre plusieurs voisinages attirés par lui même.

On donne quelques définitions du bassin d'attractions :

Définition 1.14.

On appelle bassin d'attraction $B(A)$ de A le plus grand voisinage attiré par A , c.à.d

$$B(A) = \bigcup \{U \in V(A) : U \text{ est un voisinage attiré par } A\},$$

avec $V(A)$ l'ensemble de tous les voisinages de A .

Définition 1.15.

Le bassin d'attraction $B(A)$ de A , c'est l'ensemble des points dont les trajectoires convergent asymptotiquement vers A , donc

$$B(A) = \bigcup_{t < 0} \varphi_t(U).$$

CHAPITRE 2

LES SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS

Dans ce chapitre on a cinq sections, dans la première section on présente les types de systèmes dynamiques discrets (Systèmes dynamiques discrets d'ordre 1 et d'ordre 2, Systèmes dynamiques discrets non-autonome) et quelques définitions (point fixe, point périodique, l'orbite,...,etc), la deuxième et troisième section à propos de l'étude graphique et la stabilité d'un SDD, dans la quatrième section on présente la nature des singularités, dans la cinquième section on présente la bifurcation et ces trois types (fold ou pli, flip ou doublement de période, Neimark-Sacker).

2.1 Définition

2.1.1 Systèmes dynamiques discrets d'ordre 1 de dimension m

Définition 2.1.

Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble et $f : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$ une fonction continue et dérivable. On appelle

systèmes dynamiques discrets (SDD) d'ordre 1 en dimension m la récurrente suivante :

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{D}; \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0.$$

On utilisera souvent la notation (f, \mathbb{D}) pour désigner le système dynamique définie par une fonction f sur l'ensemble \mathbb{D} .

2.1.2 Systèmes dynamiques discrets non-autonomes

Définition 2.2.

Si la fonction f est dépend explicitement de x et de la variable du temps n alors le système s'appelle non-autonome :

$$x(0) = x_0; \quad x_{n+1} = f(n, x_n), \quad n \geq 0.$$

2.1.3 Systèmes dynamiques discrets d'ordre supérieur

Ces systèmes sont décrits par des équations aux différences finies d'ordre $r \geq 2$ autonomes ou non :

$$x_{n+r} = f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+r-1}), \quad n \geq 0. \quad (2.1)$$

Il existe une procédure simple qui permet de transformer en un système d'ordre 1 tout système dynamique d'ordre supérieur. Pour cela il suffit de définir un nouvel espace de phase formé des vecteurs de la forme :

$$y_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+r-1} \end{pmatrix}$$

La dimension de cet espace sera mr . Dans cet espace on définit l'application $g : \mathbb{R}^{mr} \mapsto \mathbb{R}^{mr}$ par la forme :

$$g(y) = \begin{pmatrix} g_1(y) \\ g_2(y) \\ \vdots \\ g_r(y) \end{pmatrix},$$

$$g_k(y) = \begin{pmatrix} g_{k.m+1} \\ g_{k.m+2} \\ \vdots \\ g_{k.m+m} \end{pmatrix},$$

tel que $k = 1, \dots, r - 1$,

$$g_r(y) = f(y).$$

Alors, l'équation (2.1) est équivalente à l'équation suivante pour y_n :

$$y_{n+1} = g(y_n).$$

Dans certains cas (surtout linéaires) cette transformation permet d'appliquer aux systèmes d'ordre supérieur les mêmes méthodes d'analyse qu'aux systèmes d'ordre 1.

2.1.4 Point fixe et point périodique

Définition 2.3.

On appelle "point fixe" d'un système dynamique tout point x_s tel que :

$$x_s = f(x_s).$$

Parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou point d'équilibre.

Exemple 2.1.

Soit le système défini par :

$$x_{n+1} = x_n^2, \quad x(0) = x_0.$$

On voit facilement que Les points $x = 1$ et $x = 0$ sont les points fixes de ce système, parce que $1^2 = 1$ et $0^2 = 0$.

En général, on trouve les points fixes en résolvant l'équation :

$$f(x) = x.$$

Définition 2.4.

Un point x est dit périodique pour f s'il existe $p > 0$ tel que $f^p(x) = x$ et on définit la période comme étant le plus petit des entiers p strictement positifs vérifiant $f^p(x) = x$ où

$$f^p(x) = \underbrace{f(f(f(f(\dots f(x))\dots)))}_{p \text{ fois}}.$$

Remarques 2.1.

Tout point fixe, est un point périodique de période $p = 1$.

Exemple 2.2.

Considérons un système de dimension 1 défini par la fonction.

$$f(x) = ax(1 - x), x \in \mathbb{R}.$$

Ici a est un paramètre que nous allons supposer dans l'intervalle $a \in]0, 4[$. Regardons si ce système a des point périodiques de période fondamentale 2.

Ces point doivent être solutions l'équation :

$$f(f(x)) = x \tag{2.2}$$

On doit exclure des le départ les point fixes (c.à.d point de période 1). Qui sont solution

de l'équation :

$$ax(1 - x) = f(x) = x.$$

On en déduit que :

$$x \neq 0, \quad x \neq 1 - \frac{1}{a}.$$

Passons à l'équation (2.2) :

$$a^2x(1 - x)(1 - ax(1 - x)) = x;$$

les point que nous recherchons sont donc racines d'un polynôme de degré 4 :

$$a^3x^4 - 2a^3x^3 + a^2(1 + a)x^2 - (a^2 - 1)x = 0.$$

Nous connaissons déjà deux de ses racines : ce sont les deux points fixes. Pour les éliminer et trouver plus facilement les deux autres racines nous allons factoriser ce polynôme en le divisant par le polynôme de l'équation :

$$a^3x^4 - 2a^3x^3 + a^2(1 + a)x^2 - (a^2 - 1)x = (ax^2 - (a - 1)x)(a^2x^2 - (a^2 + a)x + a + 1).$$

Donc les point périodiques que nous cherchons sont solutions réelles de l'équation.

$$a^2x^2 - (a^2 + a)x + a + 1 = 0;$$

les racines de ce polynôme sont de la forme :

$$x_{1,2} = \frac{a + 1}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(a - 3)(a + 1)}.$$

Alors, si $a > 3(\Delta > 0)$ il y a deux points périodique distincts. Ils appartiennent donc à la même orbite périodique de période 2.

Si $a < 3(\Delta < 0)$ il n'y pas de points périodique.

Enfin, si $a = 3(\Delta = 0)$, il y a un seul point périodique, qui coïncide avec l'un des point fixes.

2.1.5 Notion d'orbite

Nous allons étudier dans la suite seulement les systèmes d'ordre 1. Notre but sera décrire l'évolution des états du système en fonction des conditions initiales. Nous aurons donc besoin d'introduire la notion de trajectoire ou orbite du système.

Soit un (SDD) d'ordre 1 défini par l'itération d'une fonction $f(x)$:

$$x(0) = x_0, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0 \quad (2.3)$$

Définition 2.5.

Étant donné le point initial x_0 , on appelle orbite (ou trajectoire) du système (2.3) la suite :

$$O(x_0) = \{x_0, x_1 = f(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots\}.$$

Exemple 2.3.

Soit un (SDD) en dimension 1 défini par la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, +\infty]$.

Prenons pour condition initiale $x_0 = \frac{1}{2}$.

L'orbite correspondante est :

$$x_0 = \frac{1}{2},$$

$$x_1 = f(x_0) = \frac{1}{4},$$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{1}{16}, \dots$$

Remarquons que $x_n = f(x_{n-1}) = f^{(n)}(x_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Prenons un autre point initial, $x_0 = 2$. Alors

$$x_0 = 2,$$

$$x_1 = f(x_0) = 4,$$

$$x_2 = f(x_1) = 16, \dots$$

Dans ce cas, quand $n \rightarrow +\infty$ on a : $x_n = f(x_{n-1}) = f^{(n)}(x_0) = 2^{2^n} \rightarrow +\infty$.

Et enfin, si l'on choisit pour point initial $x_0 = 1$ on voit que

$$O(x_0) = \{1, 1, x_n = 1^{2^n} = 1, \dots\}.$$

On observe donc ici trois comportements différents du même système en fonction du point initial choisi. Ainsi nous pouvons parler des propriétés d'un système, en décrivant toutes ses orbites possibles.

Définition 2.6.

Une orbite $O(x_0)$ est dit périodique s'il existe un $p > 0$ t.q :

$$x_{n+p} = x_n, \quad \forall n \geq 0. \tag{2.4}$$

Une orbite périodique $O(x_0)$ est toujours une suite de points périodiques. Tous ces points s'appellent points périodiques de période p du système (2.3).

Définition 2.7.

Une orbite est dite éventuellement périodique s'il existe un $p > 0$ et un $N > 0$ tel que l'égalité (2.4) est vérifiée pour tout $n > N$.

Définition 2.8.

Le plus petit nombre p qui vérifie (2.4) s'appelle "période fondamentale " de l'orbite $O(x_0)$.

2.2 Étude graphique des systèmes dynamiques

Nous allons parler dans cette partie de moyens très simples de visualiser le comportement de certains systèmes. Ces représentations nous permettront de mieux comprendre les phénomènes que nous allons étudier.

Systèmes dynamiques discrets de dimension 1

Soit un (SDD) de dimension 1 défini par une fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x(0) = x_0, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

On peut visualiser sur le plan (x,y) l'évolution d'une orbite $O(x_0)$ en utilisant le graphe de la fonction f et la droite $y = x$.

Prenons par exemple la fonction

$$f(x) = 4.5x - 3.5x^2.$$

Nous allons représenter l'orbite qui commence dans le point $x_0 = 0.2$. Traçons d'abord le graphe de la fonction f et la droite $y = x$ (voir la figure 2.1). Sur le plan (x, y) l'orbite commence dans le point $(x_0, 0)$. Nous traçons maintenant une ligne verticale du point $(x_0, 0)$ jusqu'au graphe de la fonction $f(x)$. Le point d'intersection est exactement le point (x_0, x_1) avec $x_1 = f(x_0)$. Ensuite, nous traçons une ligne horizontale à partir du point (x_0, x_1) jusqu'au point (x_1, x_1) d'intersection avec la droite $y = x$.

A partir de ce point nous traçons encore une ligne verticale vers le graphe de la fonction $f(x)$ pour trouver le point suivant $x_2 = f(x_1)$ (voir la figure 2.2).

En continuant ainsi nous pouvons suivre l'évolution de l'orbite sur autant de points que nous le voulons.

Cette représentation graphique des systèmes est particulièrement utile parce qu'elle

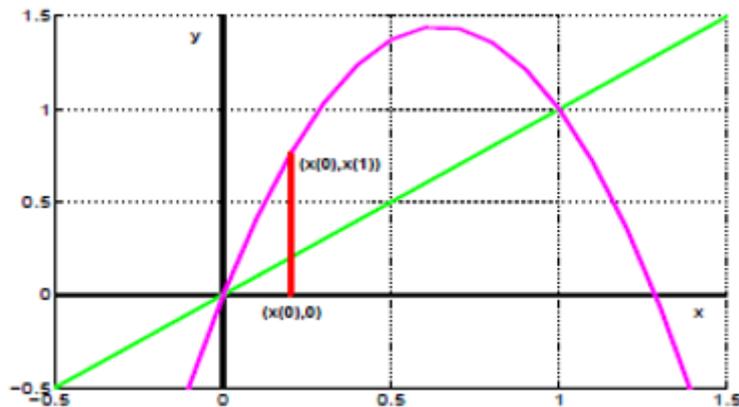


FIGURE 2.1 – l'orbite du système $x_n = 4.5x_n - 3.5x_n^2$:premier pas.

permet de voir clairement les points fixes (ce sont les points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ et de la droite).

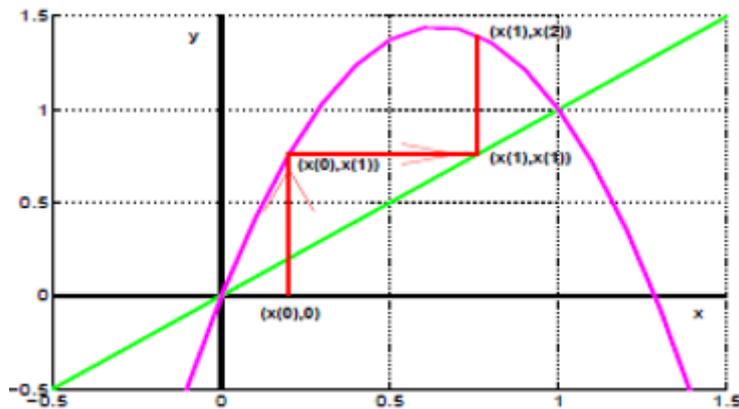


FIGURE 2.2 – l'orbite du système $x_n = 4.5x_n - 3.5x_n^2$:deuxième pas.

Systèmes dynamiques discrets de dimension 2

Un système dynamique discret de dimension 2 est décrit par deux équations :

$$x_1(n+1) = f_1(x_1(n), x_2(n)),$$

$$x_2(n+1) = f_2(x_1(n), x_2(n)).$$

Pour étudier ces systèmes on utilise souvent des portraits de phases. Pour tracer le portrait de phases d'un système dynamique défini par l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

on choisit sur le plan une grille de points (x_1, x_2) assez dense et l'on trace dans chaque point la direction du départ de l'orbite qui commence dans ce point. Cette direction pour un point initial

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix},$$

est définie par le vecteur

$$X(1) - X(0) = f(X(0)) - X(0).$$

Cela donne un aperçu (voir le figure 2.3) de toutes les orbites possibles du système. Si l'on s'intéresse à une orbite particulière, on peut la retrouver sur le portrait de phases, en suivant les directions du champ de vecteurs tracées à partir du point initial de l'orbite.

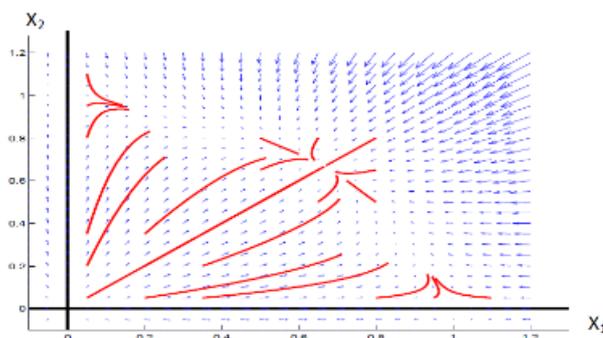


FIGURE 2.3 – Le portrait de phases d'un système dynamique non-linéaire.

On peut observer à l'aide d'un portrait de phases les points fixes du système. Ce sont les points tels que $f(x_s) = x_s$. Donc, le vecteur de direction du portrait de phases doit être nul dans un point fixe. Le comportement des orbites du système autour d'un point fixe est important. Le portrait de phases nous permet une première analyse qualitative

de ce comportement. Sur la figure (2.3) sont tracées quelques orbites commençant dans des points proches des points fixes.

Sur un portrait de phases on peut également apercevoir des orbites périodiques, si le système en a. Dans ce cas, on peut distinguer des courbes closes formées par un groupe de vecteurs de directions.

2.3 Étude de la stabilité d'un SDD

L'étude du comportement d'un système dynamique discret, correspond à l'étude de stabilité des points fixes et des points périodiques.

Les trois théorèmes suivants donnent respectivement l'existence et l'unicité des points fixes.

Théorème 2.1.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, b]$. Supposons que

$$|f'(x)| < 1, \quad \forall x \in [a, b].$$

Alors la fonction f a un unique point fixe x_s tel que $f(x_s) = x_s$ dans l'intervalle $[a, b]$.

Théorème 2.2. (Théorème de Brouwer)

Toute application continue $f : \bar{B}^n \rightarrow \bar{B}^n$ avec $\bar{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, admet un point fixe c'est-à-dire l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans \bar{B}^n .

Théorème 2.3. (Théorème de contraction de Banach)

Soit $f : \bar{B}^2 \rightarrow \bar{B}^2$ application continue, où \bar{B}^2 est le disque unitaire fermé ($\bar{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$).

Supposons que :

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \lambda |x_1 - x_2|.$$

Pour tous vecteurs $x_{i,j} \in \bar{B}^2$ et un certain $0 < \lambda < 1$. Alors il existe un point fixe unique

$x_s \in \bar{B}^2$. De plus on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_s \text{ pour tout } x \in \bar{B}^2.$$

2.3.1 Stabilité des points fixes

Soit un SDD d'ordre 1 de dimension 1 défini par une fonction $f : D \rightarrow D$. Ici $D = [a, b] \in \mathbb{R}$ est un intervalle. Supposons que ce système possède un point fixe x_s .

Définition 2.9. Un point x_s s'appelle stable (attractif) si $\forall \varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ telle que :

$$\text{si } |x_0 - x_s| < \delta \text{ alors pour tout } n > 0 \mid |x_n - x_s| < \varepsilon.$$

Définition 2.10.

Un point fixe s'appelle répulsif (instable) s'il existe un $\varepsilon > 0$ telle que : $\forall x_0 \in U_\varepsilon(x_s)$ il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que : $\forall n > n_0$

$$|x_n - x_s| > \varepsilon.$$

Définition 2.11.

L'équilibre est globalement asymptotiquement stable (ou globalement attractif) si pour chaque $x_0 \in D$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_s.$$

Définition 2.12.

L'équilibre est localement asymptotiquement stable (ou localement attractif) s'il existe $\beta > 0$, telle que pour chaque $x(0) \in D \cap B(x_0, \beta)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_s.$$

Définition 2.13.

Soit x_s un point fixe d'un système dynamique défini par une fonction $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Supposons que f est dérivable au point x_s . On dit que x_s est un point selle si dans le

spectre du Jacobienne $Df(x_s)$ de la fonction f une partie des valeurs propres sont de valeur absolue inférieure à 1 est les autres sont de valeur absolue supérieure à 1.

2.3.2 Stabilité des points périodiques

Définition 2.14.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définissant un SDD d'ordre 1. Soit $O(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ une orbite périodique de période p (ou cycle d'ordre p ou encore un p -cycle) de ce système d'ordre 1. On dit que cette orbite est attractive (ou répulsive) si chacun de ses points est un point fixe attractif (respectivement un point répulsif) de l'application $f^p(x)$.

2.3.3 Critère de stabilité

2.3.3.1 Stabilité d'un SDD de dimension 1

Théorème 2.4. (Critères de stabilité des points fixes)

Soit $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue sur I ayant un point fixe $x_s \in I$. Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout le voisinage $U_\varepsilon(x_s)$ du point x_s et que la dérivée de la fonction f est continue au point x_s . Alors le point x_s est :

- Attractif si et seulement si

$$\left| \frac{d}{dx} f(x_s) \right| < 1.$$

- Répulsif si et seulement si

$$\left| \frac{d}{dx} f(x_s) \right| > 1.$$

Exemple 2.4.

Considérons la fonction

$$f(x, a, b) = ax^3 - bx.$$

Quel que soit le choix des paramètres a et b le point $x_s = 0$ est un point fixe du système.

La dérivée de la fonction $f(x)$ est

$$\frac{d}{dx}f(x) = 3ax^2 - b.$$

La fonction est dérivable dans tout un voisinage du point fixe $x_s = 0$. La dérivée calculée au point x_s est égale à :

$$\frac{d}{dx}f(x_s) = -b.$$

Alors, d'après les théorèmes 2.4 :

Si $|b| > 1$, x_s est un point répulsif et ;

si $|b| < 1$, x_s est un point attractif.

2.3.3.2 Situation indéterminée $|\frac{d}{dx}f(x_s)| = 1$

On peut observer que les théorème 2.4 ne disent rien sur le comportement du système autour d'un point fixe si la dérivée de la fonction $f(x)$ dans ce point est égale à ± 1 . On peut néanmoins caractériser ces points, si l'on a quelques informations sur la deuxième (et éventuellement la troisième) dérivée de $f(x)$. Supposons que x_s est un point fixe tel que la fonction $f(x)$ est dérivable sur tout un voisinage de ce point et que sa dérivée est continue en x_s . Supposons ensuite que $|\frac{d}{dx}f(x_s)| = 1$. Tout dépend du comportement de la dérivée au voisinage de x_s .

Dans ce cas, il ya d'autre théorème qui déduire la nature de point fixe.

Théorème 2.5.

Soient $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue et dérivable sur I . Soit $x_s \in I$ un point fixe de l'application f tel que

$$|\frac{d}{dx}f(x_s)| = 1.$$

Supposons qu'il existe un voisinage U_δ du point x_s tel que la seconde dérivée f'' existe sur tout ce voisinage.

- i) Si $f''(x_s) > 0$ (f' est strictement croissante) alors x_s est un point semi-stable à gauche.

ii) Si $f''(x_s) < 0$ (f' est strictement décroissante) alors x_s est un point semi-stable à droite.

iii) Si $f''(x_s) = 0$ (f' a un point d'extremum local) et si la troisième dérivée existe alors

iii).1 Si $f'''(x_s) < 0$ (maximum local) x_s est un point attractif faible ;

iii).2 Si $f'''(x_s) > 0$ (minimum local) x_s est une source faible.

Voici le tableau d'analyse qui résume ce qui a été dit ci-dessus.

$f'(x_s)$	$f''(x_s)$	$f'''(x_s)$	Caractéristique du point fixe
$ f'(x) > 1$	Indifférent	Indifférent	Point source
$ f'(x) < 1$	Indifférent	Indifférent	Point attractif
$ f'(x) = 1$	$f''(x_s) < 0$	Indifférent	Semi-stable à droite
$ f'(x) = 1$	$f''(x_s) > 0$	Indifférent	Semi-stable à gauche
$ f'(x) = 1$	$f''(x_s) = 0$	$f'''(x_s) < 0$	Attracteur faible
$ f'(x) = 1$	$f''(x_s) = 0$	$f'''(x_s) > 0$	Source faible

Théorème 2.6. (Critères de stabilité des points périodiques.)

Soient $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une fonction continue sur I . Supposons que le SDD défini par la fonction $f(x)$ possède une orbite périodique $O(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\} \subset I$ de période p (ou cycle d'ordre p ou encore p -cycle). Supposons en plus qu'autour de chaque point de l'orbite $x(i) \in O(x_0), i = 0, 1, \dots, p-1$ il existe un voisinage $U_{\delta_i} \subset I$ tel que la fonction $f(x)$ est dérivable dans ce voisinage et que sa dérivée est continue en $x(i)$. Alors l'orbite $O(x_0)$ est :

-Attractive si et seulement si :

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x_0) \right| = \left| \prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j)) \right| < 1.$$

-Répulsive si et seulement si :

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x_0) \right| = \left| \prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j)) \right| > 1.$$

Le cas est indéterminé si :

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x_0) \right| = \left| \prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j)) \right| = 1.$$

Exemple 2.5.

Prenons le système étudié dans le chapitre 2 (exemple 2.2) défini par la fonction

$$f(x) = ax(1 - x), x \in \mathbb{R}.$$

Ici a est un paramètre que nous allons. Supposer dans l'intervalle $a \in]0, 4[$.

Nous savons que quand

$$3 < a < 4.$$

le système possède une orbite périodique de période 2. Les points de cette orbite sont

$$x_0 = \frac{a + 1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{a + 1 - \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a}.$$

Prenons d'abord $a = 3.2$. Alors

$$x_0 = \frac{2.1 + \sqrt{0.21}}{3.2} \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{2.1 - \sqrt{0.21}}{3.2}.$$

Appliquons le théorème 2.6. La dérivée de la fonction $f(x)$ est

$$f'(x) = a - 2ax = a(1 - 2x).$$

Alors

$$\frac{d}{dx} f^{(2)}(x_0) = f'(x_0) \cdot f'(x_1) \simeq 0.16 < 1.$$

L'orbite $O(x_0)$ est donc attractive.

Prenons maintenant $a = 3.5$. Les calculs similaires montrent que

$$x_0 = 6/7, x_1 = 3/7;$$

et

$$\left| \frac{d}{dx} f^{(2)}(x_0) \right| = |f'(x_0) \cdot f'(x_1)| = 5/4 > 1.$$

Dans ce cas, l'orbite est répulsive.

2.3.3.3 Stabilité d'un SDD de dimension m

Théorème 2.7. (Critère de stabilité du point fixe)

Soient $U \in \mathbb{R}^m$ un ensemble ouvert et $f : U \rightarrow U$ une application continue sur cet ensemble. Supposons que le système dynamique défini par la fonction f possède un point fixe $x_s \in U$. Supposons ensuite qu'il existe un voisinage $U_\varepsilon(x_s)$ du point fixe tel que la fonction f est dérivable et que sa dérivée $Df(x)$ est continue sur ce voisinage, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|Df(x) - Df(y)\| < \varepsilon.$$

Alors

-Si toutes les valeurs propres de la matrice $Df(x_s)$ ont les valeurs absolues inférieure à 1 le point x_s est un point fixe attractif.

-Si la valeur absolue d'une valeur propre est supérieure à 1, le point x_s est un point fixe répulsif.

Théorème 2.8. (*Critères de stabilité des points périodiques*)

Soit x le point périodique d'un cycle d'ordre p . Si le spectre de la matrice $Df^p(x)$ est contenu à l'intérieur du cercle unité, le cycle est stable, si une des valeurs propres a un module plus grand que un, le cycle est instable.

2.4 Nature des singularités

pour caractériser la nature des singularités (points fixes et orbites), on introduit la notion des multiplicateurs caractéristiques :

(a) Si la dimension de la récurrence $p = 1$, le multiplicateur d'un point fixe x_s est $S = f'(x_s)$ et le multiplicateur d'un cycle d'ordre n , (x_1, x_2, \dots, x_n) est

$$S = \prod_{i=1}^n f'(x_i).$$

Un point fixe ou un cycle est dit attractif si $|S| < 1$ et répulsif si $|S| > 1$.

(b) Si $p > 1$, le multiplicateur d'un point fixe x_s ou d'un cycle d'ordre n sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de $f(x_s)$ ou de $f^n(x_i)$, $i = 1, \dots, n$.

(b.1) Si $p = 2$, on associe à un point fixe ou à un cycle, deux multiplicateurs S_i ($i = 1, 2$) qui sont les valeurs propres de la linéarisation de f ou de f^n ($n = 1, 2, \dots$) en ces singularités.

On distingue alors les singularités suivantes :

Col : S_1 et S_2 sont réels : $|S_1| < 1$ et $|S_2| > 1$ Un col est un point instable :

- de type 1 si $S_1 > 0$ et $S_2 > 0$,
- de type 2 si $S_1 > 0$ et $S_2 < 0$ (ou $S_1 < 0$ et $S_2 > 0$),
- de type 3 si $S_1 < 0$ et $S_2 < 0$.

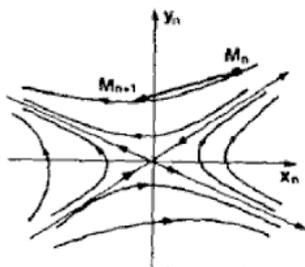


FIGURE 2.4 – Col de type 1, $S_{1,2} > 0$.

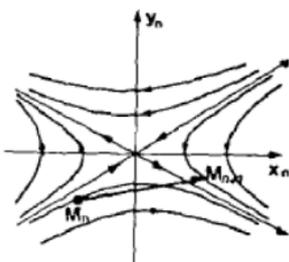


FIGURE 2.5 – Col de type 2, $S_1 > 0$ et $S_2 < 0$.

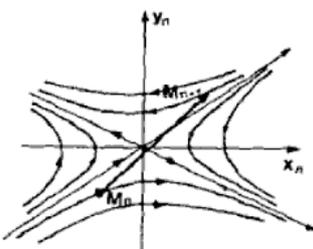


FIGURE 2.6 – Col de type 3, $S_{1,2} < 0$.

Noeud : S_1 et S_2 sont réels

- stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2$,
- instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2$.

Comme pour le col, le noeud peut être de type 1,2 ou 3. Comme pour le col, le noeud peut être de type 1,2 ou 3.

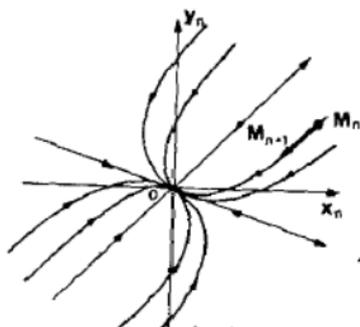


FIGURE 2.7 – Noeud de type 1, $S_{1,2} > 0$.

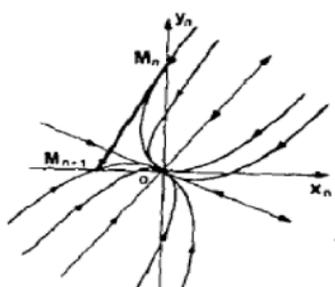


FIGURE 2.8 – Noeud de type 2, $S_1 > 0$ et $S_2 < 0$.

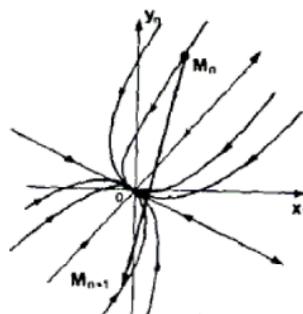


FIGURE 2.9 – Noeud de type 3, $S_{1,2} < 0$.

Foyer : S_1 et S_2 sont conjuguée et $\rho = |S_i|$, $i = 1, 2$,

– stable si $\rho < 1$,

– instable si $\rho > 1$, $i = 1, 2$.

1. Si $Re(S_i)_{i=1,2} > 0$ foyer de type 1.

2. Si $Re(S_i)_{i=1,2} < 0$ foyer de type 2.

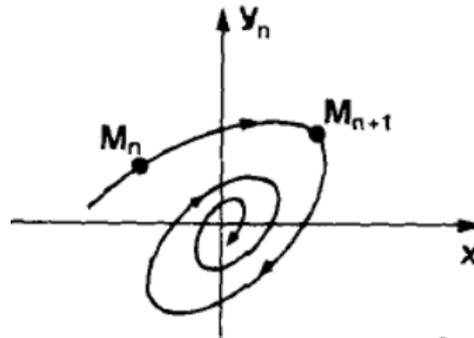


FIGURE 2.10 – Foyer de type 1, $ReS_{1,2} > 0$.

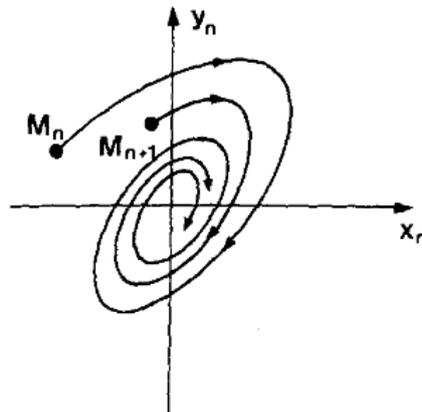


FIGURE 2.11 – Foyer de type 2, $ReS_{1,2} < 0$.

(b.2) Si $p = 3$ il ya trois multiplicateurs $S_i (i = 1, 2, 3)$ qui sont les valeurs propres d'un point fixe ou d'un cycle dans \mathbb{R}^3 .

Col : S_1, S_2 et S_3 sont réels

- de type 1 si $|S_i| < 1, i = 1, 2$ et $|S_3| > 1$,
- de type 1 si $|S_i| > 1, i = 1, 2$ et $|S_3| < 1$.

Col-foyer : S_1 et S_2 sont complexes conjuguées, et S_3 est réel

- de type 1 si $|S_i| < 1, i = 1, 2$ et $|S_3| > 1$,
- de type 1 si $|S_i| > 1, i = 1, 2$ et $|S_3| < 1$.

Noeud : S_1, S_2 et S_3 sont réels

- stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$
- instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2, 3$.

Noeud-foyer : S_1 et S_2 sont complexes conjuguées, et S_3 est réel

- stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$,
- instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2, 3$.

2.5 Bifurcations

Nous allons étudier ici des familles des systèmes dynamiques dépendant d'un paramètre réel $\mu \in \mathbb{R}$:

$$x(0) = x_0, \quad x_{n+1} = f(\mu, x_n), \quad n \geq 1.$$

Définition 2.15.

Lorsque le système dynamique dépend continûment d'un ou de plusieurs paramètres, la variation de ces paramètres peut entraîner des changements qualitatifs dans l'espace des phases, tels que l'apparition ou la disparition de singularités, le changement de stabilité d'une singularité, le changement de type de singularités, ...etc.

Ces changements qualitatifs s'appellent bifurcations.

Définition 2.16.

Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.

Exemple 2.6. *(Diagramme de bifurcation du système de Hénon)*

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} = bx_n, \end{cases}$$

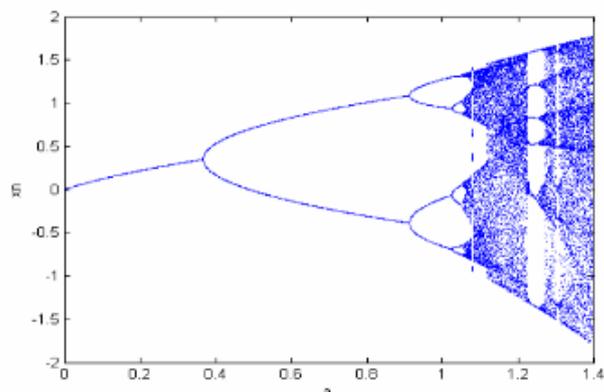


FIGURE 2.12 – Diagramme de bifurcation du système de Hénon pour $b = 0.3$.

Exemple 2.7. (*Diagramme de bifurcation de l'équation logistique*)

l'équation logistique décrit par :

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) .$$

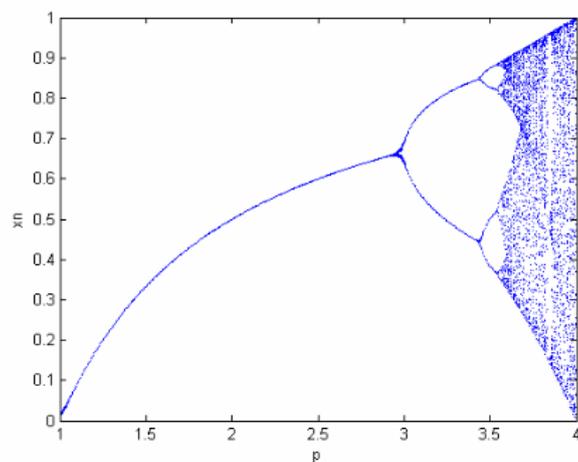


FIGURE 2.13 – Diagramme de bifurcation.

2.5.1 Différents types de bifurcations d'un système dynamique discret

Dans cette section, on considère trois types de bifurcations locales : la bifurcation de doublement de période, la bifurcation de Neimark et la bifurcation pli ou point selle (ou

col)/noeud. Ces bifurcations sont locales car elles peuvent être analysées par la linéarisation du système au voisinage d'un point dynamique contemporain avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica.

2.5.1.1 Bifurcation fold ou pli

Cette bifurcation se produit lorsque l'une des deux valeurs propres est égale à $+1$. Ce type de bifurcation donne naissance à deux cycles d'ordre k en même temps, l'un est attractif et l'autre est instable. Cette situation peut être représentée par :

$$\emptyset \leftrightarrow \text{cycle attractif} + \text{cycle répulsif.}$$

Où \emptyset signifie absence de cycle.

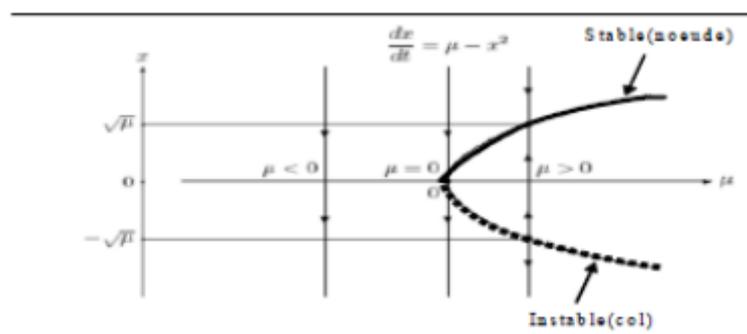


FIGURE 2.14 – Diagramme de bifurcation fold.

2.5.1.2 Bifurcation flip ou doublement de période

Cette bifurcation a lieu lorsqu'une des deux valeurs propres est égales à -1 . Un cycle d'ordre k qui subie cette bifurcation va changer de nature et crée un cycle d'ordre $2k$ de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable. Cette situation peut être

représentée par :

Cycle attractif d'ordre $k \leftrightarrow$ cycle répulsif d'ordre $k +$ cycle attractif d'ordre $2k$.

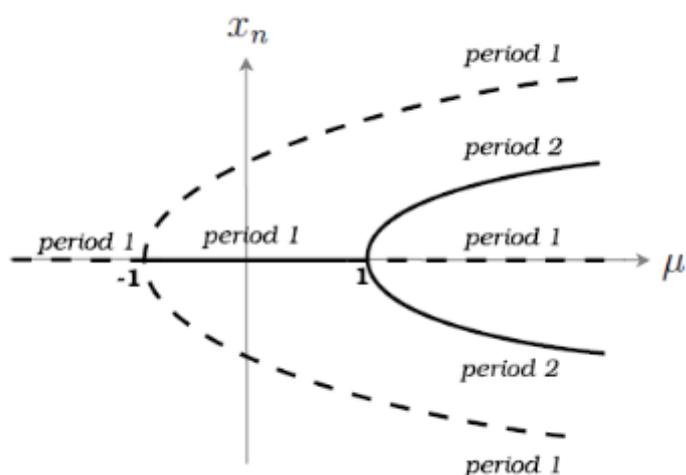


FIGURE 2.15 – Diagramme de bifurcation de doublement de période.

2.5.1.3 Bifurcation de Neimark-Sacker

Cette bifurcation se produit lorsque la matrice Jacobienne possède deux valeurs propres complexes conjuguées $S_1 = \bar{S}_2$. Elle se traduit par :

Foyer attractif d'ordre $k \leftrightarrow$ foyer répulsif d'ordre $k +$ une courbe invariante attractive.

CHAPITRE 3

SYSTÈMES CHAOTIQUES

Dans l'usage courant, le "chaos" signifie "un état de désordre". Cependant, dans la théorie du chaos, le terme est défini plus précisément. La théorie du chaos est un domaine des études en mathématiques, avec des applications dans plusieurs disciplines comme la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie, la météorologie, la sociologie et la philosophie. La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales. De petites différences dans les conditions initiales (telles que celles dues à des erreurs d'arrondi dans le calcul numérique) produisent des résultats très divergents pour de tels systèmes dynamiques, ce qui rend la prévision à long terme impossible en générale. Cela se produit même si ces systèmes sont déterministes, ce qui signifie que leur comportement futur est entièrement déterminé par leurs conditions initiales, sans éléments aléatoires impliqués. En d'autres termes, la nature déterministe de ces systèmes ne les rend pas prévisibles. Ce comportement est connu sous le nom de chaos déterministe, ou tout simplement le chaos.

3.1 Définition du chaos

Il n'existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos. Cependant, le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut :

-La non-linéarité : si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.

-Le déterminisme : un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes.

-La sensibilité : le système manifeste une haute sensibilité aux changements de conditions.

-L'imprévisible : en raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

3.1.1 Chaos au sens de Devaney

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune mathématique universelle du chaos. Avant de donner la définition du chaos, due à R.L Devaney, quelques définitions de base sont nécessaires.

Définition 3.1.

Supposons que X est un ensemble et Y un sous-ensemble de X . Y est dense dans X si, pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous-ensemble Y arbitrairement proche de x , c'est-à-dire si la fermeture de Y est égale à X : $\bar{Y} = X$. Ce qui revient à dire que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une séquence de points $\{y_n\} \in Y$ qui convergent vers x .

Définition 3.2.

On dit qu'une application $f : D \rightarrow D$ exhibe une dépendance sensible des conditions initiales s'il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour tout $x \in D$ et pour tout $\delta > 0$ il existe un $y \in D$ et un nombre $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$d(x, y) < \delta \implies d(f^{(n)}(x), f^{(n)}(y)) > \varepsilon$$

ou d représente la distance et $f^{(n)}$ la n ième itération de f .

Définition 3.3.

Soit D un espace métrique et $f : D \rightarrow D$. On dit que l'application f est topologiquement transitive si U et V étant deux ensembles non vides ouverts dans D , il existe $x_0 \in U$ et un nombre naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x_0) \in V$ ou, de façons équivalente, il existe un nombre naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Définition 3.4.

Soit f une application. Supposons que le système dynamique correspondant possède un attracteur A . On dit que ce système est chaotique sur son attracteur si

- (i) $f : A \rightarrow A$ est topologiquement transitive ;
- (ii) L'ensemble de points périodiques de f est dense dans A ;
- (iii) f a une dépendance sensible des conditions initiales.

Bien qu'il n'existe pas de définition universellement acceptée mathématiquement de la notion du chaos, cette définition reste la plus intéressante car les concepts sur lesquels elle repose sont facilement observables. De plus, elle s'applique à un très grand nombre de systèmes dynamiques chaotiques et dans certains cas elle est même facilement vérifiable.

3.2 Caractéristique du chaos

3.2.1 Sensibilité aux condition initiales

La Sensibilité aux condition initiales est un phénomène pour la première fois, dès la fin du **XIXe** siècle par **Poincaré**. Cette découverte a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Il a été redécouvert en **1963** par Lorenz lors de ses travaux en météorologie, puis a été observée par **Hénon** en **1976** dans les systèmes discrets. Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur le long terme. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système.

3.2.2 Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov sont des coefficients qui permettent de mesurer la sensibilité aux conditions initiales d'une série temporelle. Par définition, un exposant de Lyapunov est le taux exponentiel moyen de divergence des trajectoires voisines de l'espace des phases. Il mesure le taux local d'expansion de l'espace dans lequel l'expansion est maximale, c'est-à-dire en général vers l'attracteur.

Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases.

3.2.2.1 Calcul des exposants de Lyapunov

3.2.2.2 Cas d'une application discrète unidimensionnelle

Soit une application discrète f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique x_n sur x_{n+1} :
 Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \varepsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentielle. On pourra trouver un réel λ tel qu'après n itérations on a :

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| \cong \varepsilon \exp(n\lambda)$$

d'où

$$n\lambda \cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}$$

et pour $\varepsilon \rightarrow 0$ on a :

$$\begin{aligned} n\lambda &\cong \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ \lambda &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{d(x_0)} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{d(x_{n-1})} \cdot \frac{df(x_{n-2})}{d(x_{n-2})} \cdots \frac{df(x_0)}{d(x_0)} \right| \cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right| \end{aligned}$$

finalement pour $n \rightarrow \infty$ on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln | f'(x_i) | \quad (3.1)$$

avec $f'(x_i) = \frac{df(x_i)}{dx_i}$.

λ est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence de deux trajectoires distinctes, à partir de deux condition initiales très proches.

-Si $\lambda > 0$, alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.

-Si $\lambda < 0$, les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Appliquant la formule précédente pour $x_i = x_s$ tel que x_s est le point d'équilibre, il faut que

$$\lambda = \ln | f'(x_s) | .$$

Exemple 3.1.

L'application logistique

$$f(x_i) = 4x_i(1 - x_i); \quad x_i \in [0, 1].$$

En appliquant la formule (3.1) pour calculer l'exposant de Lyapunov de f .

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln | f'(x_i) | = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln | 4(1 - 2x_i) |$$

soit $\lambda = \ln 2 > 0$ d'où le comportement est chaotique.

3.2.2.3 Cas d'une application discrète multidimensionnelle

Soit f une application discrète de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m :

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Un système m dimensionnelle possède m exposants de Lyapunov $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système.

Comme précédemment, nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0) \cong \varepsilon(n\lambda).$$

Posons $x'_0 = x_0 + \varepsilon$, on a le développement en série limité d'ordre 1 de $f^n(x_0)$ au voisinage de x'_0 suivant :

$$\begin{aligned} x_n - x'_n &\approx f^n(x_0) - f^n(x'_0) \\ x_n - x'_n &\approx \frac{df^n(x_0)}{dx_0}(x_0 - x'_0) \\ &\approx J(x_0)J(x_1)\dots J(x_n)(x_0 - x'_0) \\ &\approx \prod_{i=1}^n J(x_i)(x_0 - x'_0) \end{aligned}$$

On note $\prod_{i=1}^n J(x_i)$ par $J^n(x_0)$, ainsi

$$x_n - x'_n \approx J^n(x_0)(x_0 - x'_0)$$

$J^n(x_0)$ est la matrice jacobienne de f^n au point x_0 . Il s'agit d'une matrice carrée $m \times m$, si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_n telle que $D_m^t = P_n^{-1}J^n P_n$, D_m^t est une matrice diagonale des valeurs propres $u_i(f^n(x_0))$, $i = 1, 2, \dots, m$ de J^n . On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |u_i(f^n(x_0))|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Pour le point d'équilibre x_s la formule précédant devient

$$\lambda_i = \ln |u_i(x_s)|, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Exemple 3.2. (*système de Hénon*)

(*exposant de Lyapunov dans un système dynamique discret d'ordre 2*)

considérons le système de Hénon suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases}$$

Pour $a = 1.2$ et $b = 0.4$ le système admet un attracteur étrange les exposants de Lyapunov de ce système sont :

$$l_1(x_0) = -1.2339036468, \quad l_2(x_0) = 0.3176132214.$$

3.2.2.4 Types d'attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov sont une généralisation des valeurs propres pour le point fixe et des multipliers caractéristiques pour les solutions périodiques.

Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à 0 et leur somme est négative. Un attracteur étrange possèdera toujours au moins trois exposants de Lyapunov. Dont un au moins doit être positif (voir le tableau ci-dessous)

Etat stable	Flot	Dimension de Lyapunov	Exposants de Lyapunov
point fixe	point	0	$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$
périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0,$ $0 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$
période d'ordre 2	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$ $0 > \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \dots \geq \lambda_n$
période d'ordre k	k-tore	k	$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0,$ $0 > \lambda_{k+1} \geq \lambda_{k+2} \geq \dots \geq \lambda_n$
chaotique		non entier	$\lambda_1 \geq 0, \sum \lambda_i < 0$

3.2.3 Dimension fractale

La dimension de fractale est une caractéristique géométrique du chaos. Il existe plusieurs types de dimension (dimension de capacité, dimension d'information, dimension de corrélation,...) pour les attracteurs chaotiques, parmi celle-ci on peut citer :

3.2.3.1 Dimension de Hausdorff

La définition d'une dimension non entière la plus connue et la plus utilisée théoriquement est la dimension de Hausdorff. Soit M un ensemble de \mathbb{R}^n recouvert par des ensembles A_i de petit diamètre c'est-à-dire :

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad 0 < |A_i| \leq \varepsilon.$$

On définit la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle par :

$$\mu_d(M) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^d, \quad |A_i| \leq \varepsilon. \right.$$

La dimension de Hausdorff de l'ensemble M est le réel d_H tq :

$$\mu_d(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } d > d_H \\ +\infty & \text{si } d < d_H \end{cases}$$

Définition 3.5.

On définit la dimension de Hausdorff par :

$$d_H(M) = \sup\{d, \mu_d(M) = +\infty\} = \inf\{d, \mu_d(M) = 0\}.$$

3.2.3.2 Dimension de Kaplan-Yorke

Soit j_0 un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0.$$

On définit alors la dimension de Kaplan-Yorke par la relation suivant :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}.$$

3.2.3.3 Dimension de Lyapunov

Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et soit j le grand entier naturel tel que :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j \geq 0.$$

Alors la dimension de Lyapunov défini par Kaplan-Yorke est donné par :

$$D_l = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}.$$

3.2.4 Attracteur étrange

L'attracteur étrange est une forme géométrique complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.

3.3 Transitions vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcations. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre :

3.3.1 Le doublement de période

Ce scénario a été observé dans les années 60 par **R.May** en dynamique des populations sur l'application logistique. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, ..., etc ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique.

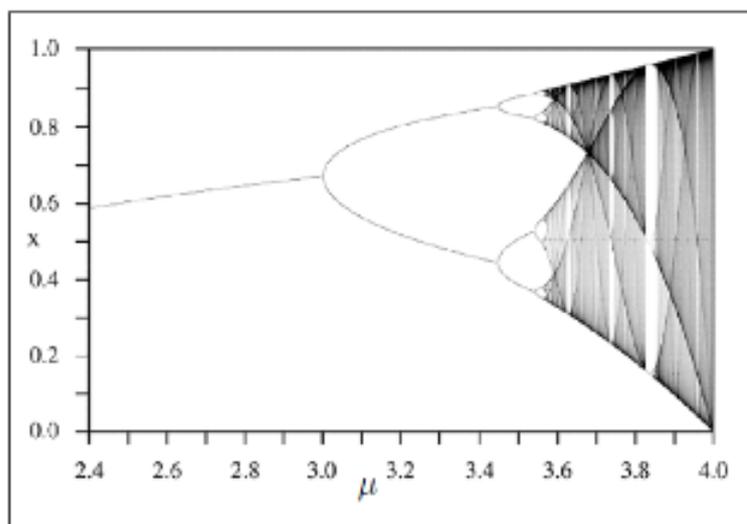


FIGURE 3.1 – Scénarios de transition par doublement de période.

3.3.2 L'intermittence vers le chaos

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées chaotiques. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement le chaos apparaît.

3.3.3 La quasi-périodicité

Le scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de **Ruelle** et **Takens** 1971. Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle, le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau paramètre et il apparaît une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'au chaos.

CHAPITRE 4

EXEMPLES DE SYSTÈMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES DISCRETS

Dans la pratique, les systèmes chaotiques discrets jouent un rôle plus important que leurs parties continues. En fait, de nombreux modèles mathématiques des processus physiques, des phénomènes biologiques, des réactions chimiques et des systèmes économiques étaient définie en utilisant des systèmes chaotiques à temps discret. Certains systèmes chaotiques discrets intéressants ont été présentés dans les deux dernière décennies.

4.1 Fonction logistique

En mathématiques, une suite logistique est une suite simple, mais dont la récurrence n'est pas linéaire. Sa relation de récurrence est

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \quad x_0 \in [0.1].$$

suivant la valeur du paramètre a (dans $[0.4]$ pour assurer que x reste dans $[0.1]$), elle génère une suite convergente, une suite soumise à oscillations ou une suite chaotique.

Souvent citée comme exemple de la complexité de comportement pouvant surgir d'une

❖ CHAPITRE 4. EXEMPLES DE SYSTÈMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES DISCRETS

relation non linéaire simple, cette suite fut popularisée par le biologiste Robert May en 1976. Une application de la suite logistique est la modélisation de la taille d'une population biologique au fil des générations.

Elle est la solution en temps discret du modèle de Verhulst. Le terme «logistique» provient de l'ouvrage de Pierre François Verhulst qui appelle courbe logistique. la solution en temps continu de son modèle. Il écrit en 1845 dans son ouvrage consacré à ce phénomène : «Nous donnerons le terme de logistique à cette courbe». L'auteur n'explique pas son choix mais «logistique» a même racine que logarithme et logistikos signifie calcule en grec.

On considère la fonction logistique :

$$f_a : [0,1] \rightarrow [0,1] \text{ donné par } x_{n+1} = f_a(x_n),$$

où $f_a(x) = ax(1 - x)$, a est un paramètre dans $[0,4]$.

Le graphe de f_a est donné dans la Figure (4.1).

Notre analyse sera limitée à trouver des points périodiques et tracer un diagramme de

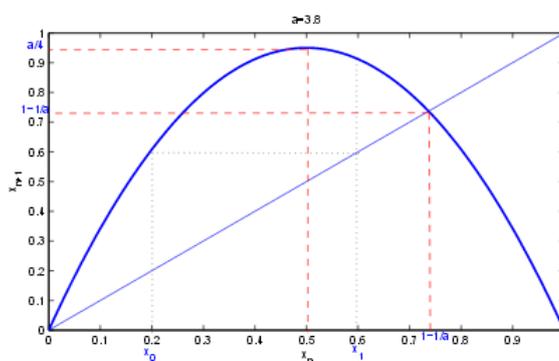


FIGURE 4.1 – Le graphe de fonction logistique pour $a = 3.8$.

bifurcation. Pour trouver des points de période un, il faut résoudre l'équation suivante :

$$f_a(x) = ax(1 - x) = x$$

ce qui donne les points qui satisfait à la condition $x_{n+1} = x_n$ pour tout n . Il existe donc deux solutions données par $x_1 = 0$ et $x_2 = 1 - \frac{1}{a}$.

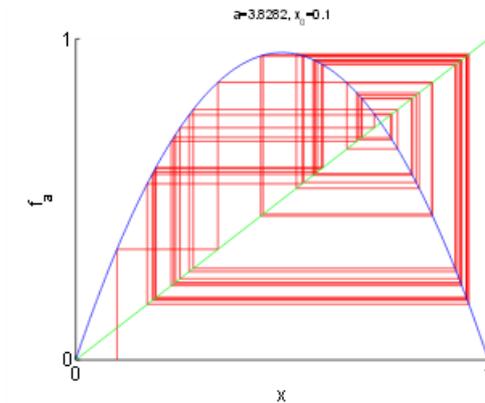


FIGURE 4.2 – Représentation graphique des itérations de la fonction logistique pour $a = 3.8282$.

La stabilité des points critiques :

- $\left| \frac{d}{dx} f_a(0) \right| = a$ donc le point fixe $x_1 = 0$ est stable (attractif) pour $0 < a < 1$, et instable (répulsif) si $a > 1$
- $\left| \frac{d}{dx} f_a(x_2) \right| = |2 - a|$, donc le point fixe $x_2 = 1 - \frac{1}{a}$ est stable pour $1 < a < 3$ et instable si $a < 1$ ou $a > 3$

Pour trouver les points de période 2, il faut résoudre l'équation suivante :

$$f_a^2(x) = a(ax(1-x))(1-ax(1-x)) = x \quad (4.1)$$

ce qui donne les points qui satisfont à la condition $x_{n+1} = x_n$ pour tout n , deux solutions de (4.1) sont connues notées $x_1 = 0$ et $x_2 = 1 - \frac{1}{a}$, (4.1) factorise comme suite :

$$x(x - (1 - \frac{1}{a}))(-a^3x^2 + (a^2 + a^3)x - (a^2 + a)) = 0,$$

l'équation $(-a^3x^2 + (a^2 + a^3)x - (a^2 + a)) = 0$ a deux solutions :

$$x_3 = \frac{a+1 + \sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a} \quad \text{et} \quad x_4 = \frac{a+1 - \sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a},$$

il y a deux points périodique de période 2 si $a > 3$, $b_1 = 3$ correspond au premier

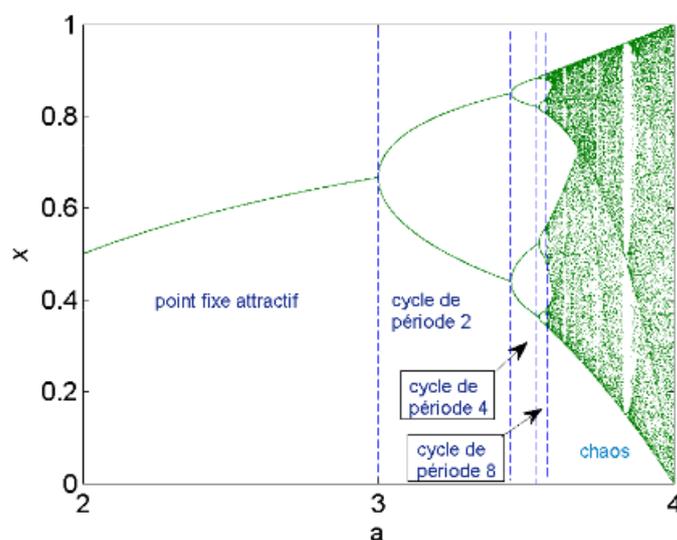


FIGURE 4.3 – Diagramme de bifurcation de la fonction logistique sur l'intervalle $2 \leq a \leq 4$.

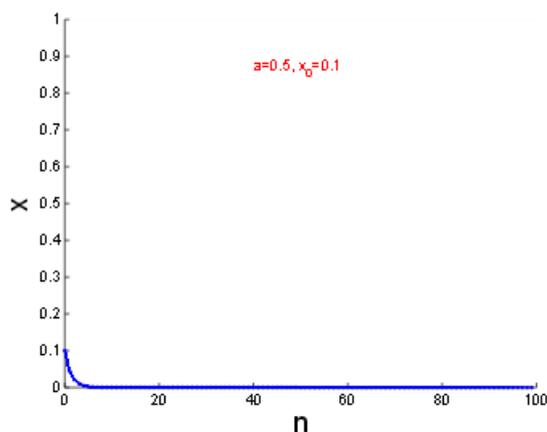


FIGURE 4.4 – Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a = 0.5$.

bifurcation pour la fonction logistique. Maintenant,

$$\frac{d}{dx} f_a^2(x_3) = -4a^3 x^3 + 6a^3 x^2 - 2(a^2 + a^3)x + a^2$$

et

$$\left| \frac{d}{dx} f_a^2(x_3) \right| = 1,$$

si $a = b_2 = 1 + \sqrt{6}$, la valeur b_2 correspond au deuxième point de bifurcation pour la fonction logistique.

Ainsi x_3 et x_4 perdent leur stabilité quand $a = b_2$.

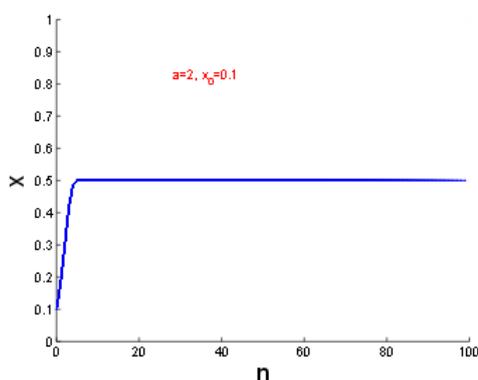


FIGURE 4.5 – Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a = 2$.

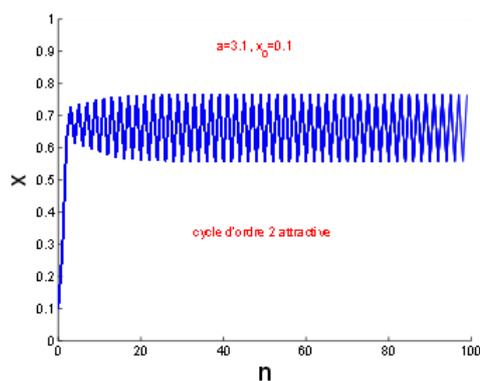


FIGURE 4.6 – Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a = 3.1$.

En résumant, pour $0 < a < 1$ le point fixe $x_1 = 0$ est stable et les chemins itératifs seront attirés par ce point. Comme a passe par un, le point fixe trivial devient instable et les chemins itératifs sont attirés par le point fixe $x_2 = 1 - \frac{1}{a}$. Pour $1 < a < b_1$, le point fixe de la période un est stable. Comme a passe par b_1 , le point fixe de période un devient instable et un point fixe de période deux est créée ($b_1 < a < b_2$). Comme a passe par b_2 , le point fixe

de la période deux perde sa stabilité et un point de période quatre est créée, ainsi de suite. Comme avec d'autres système dynamique, tous les informations obtenues jusque là peuvent être résumées sur un diagramme de bifurcation. La Figure (4.3) représente un diagramme de bifurcation pour la fonction logistique lorsque $2 \leq a \leq 4$. Les deux premiers points de bifurcation sont marqués b_1 et b_2 .

Pour des autres valeurs de a , il est intéressant de tracer des données de séries temporelles obtenues à partir de la fonction logistique. Les figures (4.4), (4.5), (4.6) (4.7) montrent le comportement les itérations successives de la fonction logistique lorsque $x_0 = 0.1$ pour les quatre cas suivant $a = 0.5, a = 2, a = 3.1, a = 4$, ces itérations donnent un régime stationnaire, périodique et chaotique.

Le diagramme de bifurcation donné dans la Figure (4.3). Ainsi, même le simple fonction quadratique $f_a(x) = ax(1 - x)$ présente une extraordinaire variété de comportements comme a varie de 1 à 4.

La Figure (4.3) montre les bifurcations de doublement de période au chaos. Cela signifie que si a passe par b_1 , le point de période un devient de période deux, au b_2 le point de période deux deviennent de période quatre, et ainsi de suite. La séquence de doublement de période extrémités à environ $a = 3.59945\dots$, où le système devient chaotique. La Figure (4.3) montre clairement les régions où le système revient à comportement périodique, même si pour une petit intervalle des valeurs a . Ces régions sont appelées les **fenêtres périodiques**.

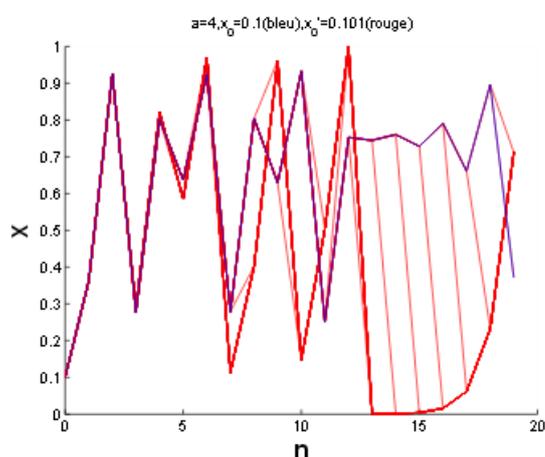


FIGURE 4.7 – Comportement dynamique observé dans la fonction logistique représenté par des itérations successive tracés pour $a = 4$.

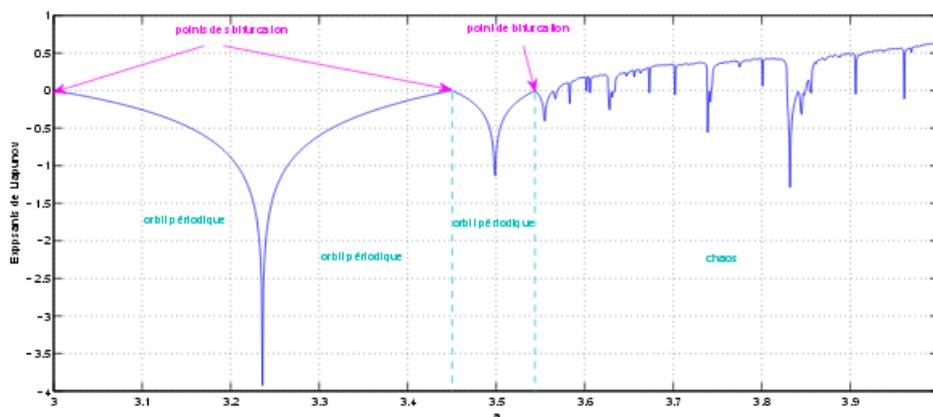


FIGURE 4.8 – Variation d'exposants de Liapunov de la fonction Logistique.

Une souvent utilisée pour déterminer si un système est chaotique ou non est d'utiliser l'exposant de Lyapunov.

Le tableau suivante représente les exposants de Liapunov calculés de la fonction logistique pour plusieurs valeurs du paramètre a avec une valeur initial égale à 0.1. Par exemple, si $a = 4$, l'exposant de Liapunov de la fonction logistique est $\lambda = \ln 2 \simeq 0.69314$, donc l'attracteur est chaotique dans ce cas.

a	0.5	1	2.1	3	3.5	3.8282	4
Exposants de Liapunov	-0.6932	-0.0003	-2.3024	-0.0002	-0.8719	0.26315	0.69316

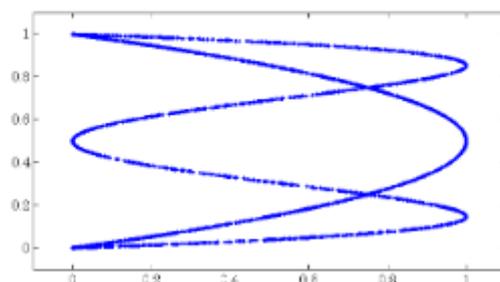


FIGURE 4.9 – Attracteur chaotique de la suite logistique pour $a = 4$.

4.2 Le modèle de Hénon et le modèle de Lozi

4.2.1 L'application de Hénon

En 1976, l'astronome Michel Hénon a obtenu ses équations en cherchant une version simplifiée du système dynamique de Lorenz à temps continu introduit en 1963, l'application de Hénon consiste en une itération à deux dimensions qui peut prendre différentes formes. Proposa l'application suivante du plan sur lui même :

$$H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (y + 1 - ax^2, bx)$$

a et b étant deux paramètres réels, où la valeur de la constante a contrôle la non-linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation. Les valeurs habituellement utilisées pour a , b sont $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

Partant d'un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) on peut calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point suivant, et ainsi de suite.

4.2.1.1 Les points fixes

Soit l'application de Hénon :

$$H(x, y) = (1 + y - ax^2, bx),$$

avec $0 < b < 1$. Cette application a deux points fixes

$$x_1 = \frac{b - 1 + \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}}{2a}, \quad y_1 = bx_1$$

$$x_2 = \frac{b - 1 - \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}}{2a}, \quad y_2 = bx_2$$

trouvés à partir de la relation $H(x, y) = (1 + y - ax^2, bx) = (x, y)$. Le déterminant $(b - 1)^2 + 4a$ est négative si $a < a_0 = -\frac{(b-1)^2}{4} = -0.1225$; dans ce cas il n'y a pas des points fixes.

4.2.1.2 La Stabilité

La matrice jacobienne ici a pour expression :

$$J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

et $(\det(J - \lambda I))$ est donnée par :

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2ax - \lambda & 1 \\ b & -\lambda \end{vmatrix}.$$

La matrice jacobienne J a pour valeurs propres, les valeurs données par :

$$\lambda_{1,2} = -ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b}.$$

Si l'on calcule les valeurs absolues des valeurs propres, on constate que la plus petite des valeurs propres est toujours inférieure à 1, tandis que la plus grand est inférieur, égale ou

supérieur à 1 suivant que $|x|$ inférieur, égale ou supérieur à $(1 - b)/2a$, on en déduit que le point fixe (x_2, y_2) est un point selle.

L'autre point fixe est stable si $a < 3(1 - b)^2/4 = 0.3675$.

Si $a = 3(1 - b)^2/4$, on a $\lambda_1(x_1, y_1) = b$ et $\lambda_2(x_2, y_2) = -1$.

4.2.1.3 Diagramme de bifurcation

La construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre a de 0 à 2 avec un pas de 0.0005, b est égale à 0.3.

Le diagramme obtenu est représenté par la figure (4.10).

Ce diagramme est de type de bifurcation de doublement de période, l'application de

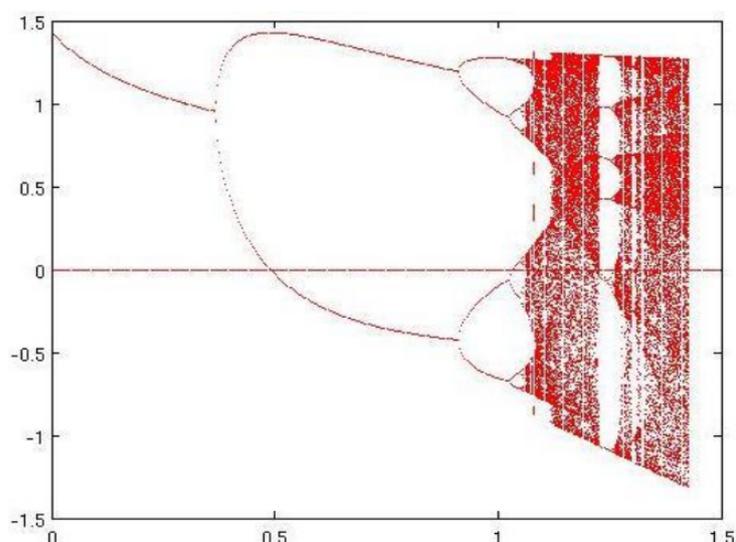


FIGURE 4.10 – Diagramme de bifurcation de Hénon.

Hénon contient deux points fixes. La partie stable se situe dans l'intervalle $[0, 0.3675]$. Un 2-cycle stable commence à $a = 0.3675$ suivi d'un 4-cycle stable à $a = 0.9$ et ainsi de suite. La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où le trajectoire commence à prendre une forme particulière.

Pour $a = 1.4$, on ne distingue plus les cycle, le système est chaotique.

4.2.1.4 Exposants de Lyapunov

On a pour $a = 1.4$, $b = 0.3$, l'application de Hénon a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.42205$, $\lambda_2 = -1.626$.

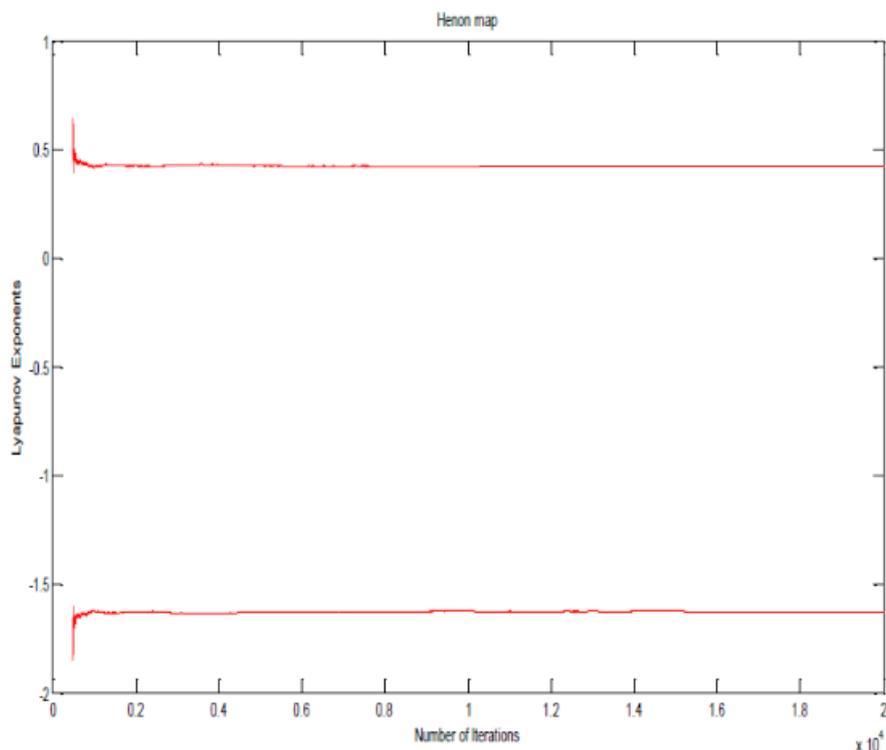


FIGURE 4.11 – Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Hénon.

4.2.1.5 Attracteur de hénon

L'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$, $b = 0.3$ est représenté dans la figure(4,12). La structure de l'attracteur se répète identiquement à elle-même aux échelles d'observation successives. Cette structure dont la permanence à différent échelle est caractéristique d'un objet fractale.

Dimension de l'attracteur de hénon On a pour $a = 1.4$, $b = 0.3$, l'application de Hénon a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.42205$, $\lambda_2 = -1.626$, la dimension de

Lyapunov par définition est égale à

$$D_L = 1 + \frac{0.42205}{|-1.626|}$$

$$D_L = 1.2596.$$

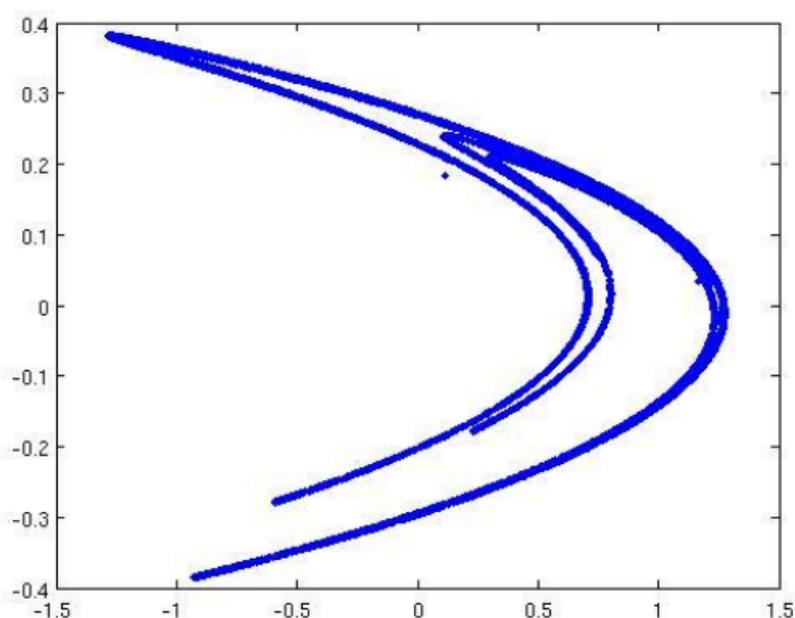


FIGURE 4.12 – Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$, $b = 0.3$.

4.2.2 L'application de Lozi

Dans le but de simplifier l'application de Hénon, René Lozi, propose l'application suivante :

$$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (y + 1 - a |x|, bx)$$

Propriétés de l'application de Lozi

1. La seule différence entre l'application de Hénon et de Lozi est que le terme non-linéaire x^2 de l'application de Hénon est remplacé par $|x|$ dans l'application de

Lozi. Cette modification de l'application de Hénon est linéaire pour $x > 0$, $x < 0$.

2. L'application de Lozi n'est pas différentiable.

3. Si $a = 0$, L'application de Lozi est une application linéaire, donc on pose toujours $a \neq 0$.

4.2.2.1 Les points fixes

Cette application possède deux points fixes :

Pour $x > 0$, il y a un seul point d'équilibre $P_1(x, y) = (\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b})$ si $b < 1 + a$.

Pour $x < 0$, il y a un autre point d'équilibre $P_2(x, y) = (\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b})$ si $b > 1 - a$.

4.2.2.2 La stabilité

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice Jacobienne :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -a \operatorname{sign}(x) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

et $(\det(J - \lambda I))$ est donnée par :

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -a \operatorname{sign}(x) - \lambda & 1 \\ b & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Donc le polynôme caractéristique est donné par :

$$p(\lambda) = (-\lambda)(-a \operatorname{sign}(x) - \lambda) - b.$$

La stabilité au point $P_1(x, y) = (\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b})$

La matrice jacobienne au point P_1 est :

$$J_+(x, y) = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Son polynôme caractéristique est le suivant :

$$\lambda^2 + a\lambda - b,$$

$$\Delta = a^2 + 4b.$$

Si $b > -\frac{a^2}{4}$ alors $\Delta > 0$, donc la matrice (4.2) a deux valeurs propres réelles :

$$\lambda_1 = \frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{-a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Si $b < -\frac{a^2}{4}$ alors $\Delta < 0$, donc la matrice (4.2) a deux valeurs propres complexes :

$$\lambda_1 = \frac{-a}{2} + i\frac{\sqrt{-a^2 - 4b}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{-a}{2} - i\frac{\sqrt{-a^2 - 4b}}{2}.$$

La stabilité du point fixe P_1 est résumée dans la proposition suivante :

Proposition 4.1.

1/ **cas** $a > 0$ et $b + \frac{a^2}{2} - 1 > 0$ on a :

-Si $b > 1 - a$ et $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$, alors le point fixe P_1 est un **point selle** ou **col**.

-Si $b < 1 - a$ et $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$, alors le point fixe P_1 est un **noeud instable**.

Pour $b + \frac{a^2}{2} - 1 < 0$

-Si $b < 1 - a$ et $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$, alors le point fixe P_1 est un **noeud stable**.

-Si $b > 1 - a$ et $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, alors le point fixe P_1 est un **col**.

2/ **cas** $a < 0$ on a :

-Si $b + \frac{a^2}{2} - 1 > 0$ et $b < 1 - a$, $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$, alors le point

fixe P_1 est un **noeud instable**.

-Si $b + \frac{a^2}{2} - 1 < 0$ et $b < 1 - a$, $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, alors le point fixe P_1 est un **noeud stable**.

- Les valeurs propres complexe sont de module inférieur à 1 si $b > -1$, alors le point fixe P_1 est un **foyer stable**.
- Les valeurs propres complexe sont de module supérieur à 1 si $b < -1$, alors le point fixe P_1 est un **foyer instable**.

La figure suivante illustre la stabilisation de point P_1

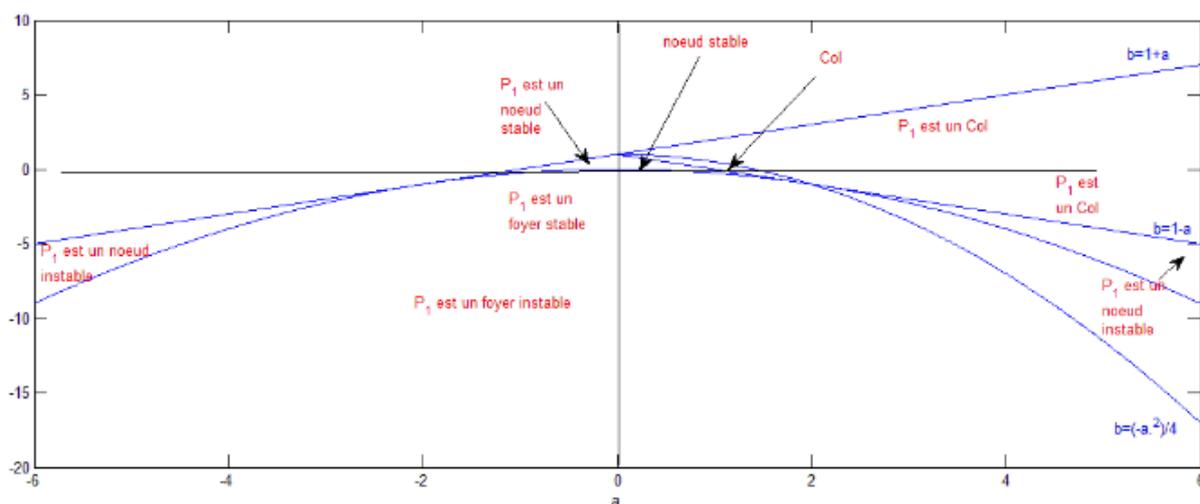


FIGURE 4.13 – Stabilisation de point P_1 .

La stabilité au point $P_2(x, y) = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b}\right)$

La matrice Jacobienne au point P_2 est :

$$J_-(x, y) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Donc le polynôme caractéristique est donné par :

$$\lambda^2 - a\lambda - b,$$

$$\Delta = a^2 + 4b.$$

Dans la région où P_2 existe ou $b > \frac{-a^2}{4}$ donc $\Delta > 0$, alors la matrice (4.3) a deux valeurs propres réelles :

$$\lambda_1 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Proposition 4.2.

1/ **cas** $a > 0$ et $b > 1 - a$ on a :

- Si $b < 1 + a$ alors $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| > 1$. Le point fixe P_2 est un **noeud instable**.
- Si $b > 1 + a$ alors $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| < 1$. Le point fixe P_2 est un **point selle ou col**.

2/ **cas** $a < 0$ et $b > 1 - a$ on a :

- Si $b > 1 + a$ alors $|\lambda_2| > 1$, $|\lambda_1| < 1$. Le point fixe P_2 est un **point selle**.

La figure suivante illustre la stabilisation de point P_2

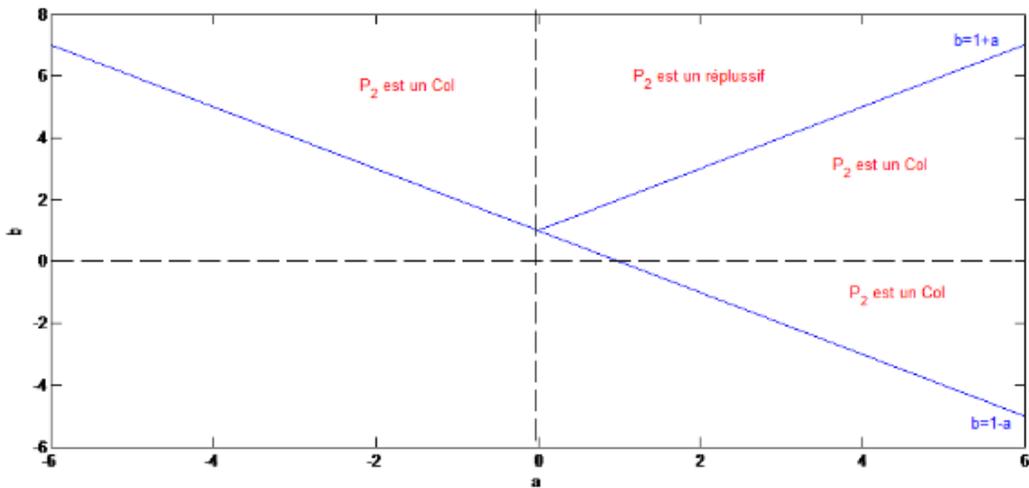


FIGURE 4.14 – Stabilisation de point P_2 .

4.2.2.3 Diagrammes de bifurcation

Dans cette section, on va étudié numériquement les différents types de bifurcations exits dans le dynamique du système de Lozi. Nous rappelons d'abord que les exposants de

Lyapunov d'une orbite périodique attractive sont négatifs. Ainsi qu'un point périodique ne peut bifurquer si au moins un de ses exposants de Lyapunov est zéro. Enfin, si au moins l'un des exposants de Lyapunov est positif, le comportement de la carte devient chaotique.

Pour $b = 0.1$ et $0.8 < a < 1.8$ nous pouvons voir différentes bifurcations comme le montre la figure (4.15). Si $0.8 < a < 0.9$ l'application de Lozi converge vers un point fixe. La première bifurcation se produit au point $a = 0.9$ du point fixe vers un cycle stable de période 2 et le long de l'intervalle $0.9 < a < 1.1$, elle converge vers un cycle stable de période 2. La deuxième bifurcation se produit au point $a = 1.1$ d'un cycle stable de période 4 vers le chaos et le long de l'intervalle $1.1 < a < 1.8$ l'application est chaotique.

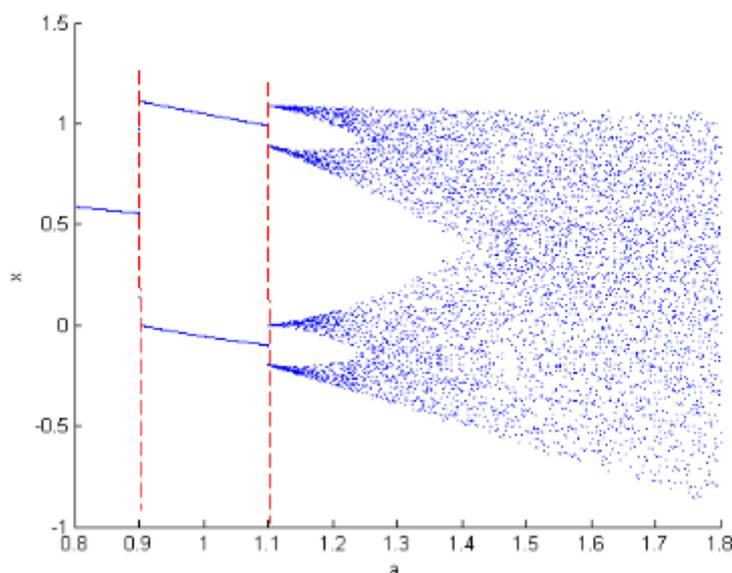


FIGURE 4.15 – Diagramme de bifurcation de la carte de Lozi pour $b = 0.1$.

4.2.2.4 Exposants de Lyapunov

Pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$, l'application de Lozi a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.69314$ qui est positif, $\lambda_2 = -1.204$. On vérifie bien cependant que la somme de ces exposants est strictement négative.

La figure (4.16) représente la variation des exposants de Lyapunov en fonction du temps

pour l'application de Lozi.

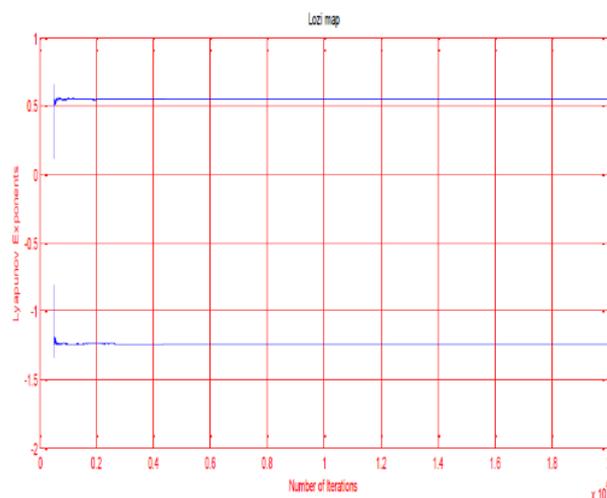


FIGURE 4.16 – Les exposants de Lyapunov en fonction du temps pour l'application de Lozi.

4.2.2.5 Attracteur de Lozi

Pour déterminer la structure de l'attracteur de Lozi, on peut faire un agrandissement d'une région de l'attracteur et on observe que la structure se répète. Pour les paramètres $a = 1.7$ et $b = 0.5$ la suite de points itérés par l'application de Lozi converge vers un attracteur étrange représenté par la figure suivante : la partie supérieure est pour $a = 1.55$ et montre un attracteur la structure en zigzag dans l'espace des phases à la suite de la destruction de l'attracteur régulier. Dans la partie inférieure, avec $a = 1.7$ l'attracteur étrange est apparente. Cette structure en forme de V.

Dimension de l'attracteur de Lozi

Pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$, l'application de Lozi a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0.69314$, $\lambda_2 = -1.204$. alors la dimension de Lyapunov est égale à

$$D_L = 1 + \frac{0.69314}{|-1.204|} = 1.5757.$$

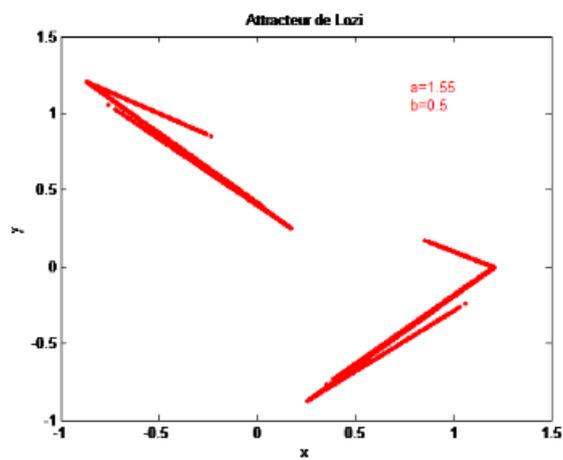


FIGURE 4.17 – Attracteur de Lozi.

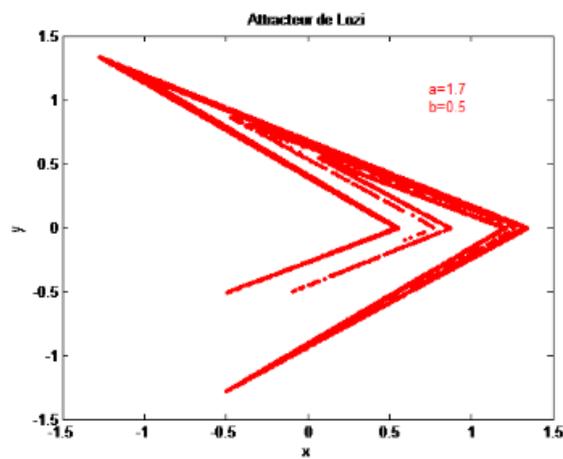


FIGURE 4.18 – Attracteur de Lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le but de ce mémoire est l'étude de la théorie des systèmes dynamiques discret. Dans les deux premiers chapitres nous avons rassemblé les outils nécessaires pour cette étude (les notions des systèmes dynamiques, stabilité d'un SDD, bifurcation), et dans le troisiem chapitre nous avons donné les caractéristiques les plus importantes d'un système chaotique.

La dernière chapitre du travail, nous avons l'étude de chaos dans un système dynamique discret, linéaire et non-linéaire de la première et deuxième ordre, autonome, à variables réelles , et puis nous avons étudié leur stabilité des points fixes, et leur régions de stabilité, les bifurcations, finalement on discute sur la route vers le chaos de ce système, avec quelque attracteurs chaotiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **A. Atasu, V. D. R. Guide, L. N. Van Wassenhove.** So what if remanufacturing cannibalizes new product sales. *Calif. Manag. Rev.* 52(2), 56–76 (2010).
- [2] **I. Aneur.** Contrôle, chaotification et Hyperchaotification des systèmes dynamique. Constantine, Mémoire de Magistère, 2007.
- [3] **A. Boukabou.** Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation. Contribution à l'élaboration de nouvelles approches. Université de Constantine. Thèse de doctorat, 2006.
- [4] **A. Désilles.** Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret. 2003.
- [5] **H. Dang-Vu, C. Delcarte.** Bifurcations et chaos une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica .
- [6] **A. A. Elsadany.** A dynamic Cournot duopoly model with different strategies. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 2014.
- [7] **M. E. Ferguson, L. B. Toktay.** The effect of competition on recovery strategies. *Prod. Oper. Manag.* 15(3), 351–368 (2006).
- [8] **M. Halimi.** Observation et détection de modes pour la synchronisation des systèmes chaotiques : une approche unifiée. Université de Lorraine. Thèse de Doctorat, 2013.

- [9] **T. Hamaizia**. Systemes Dynamiques et Chaos "Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique". Constantine, thèse de Doctorat, 2013.
- [10] **Y.A. Kuznetsov**. Elements of applied bifurcation theory. Springer-Verlag (1995).
- [11] **J. Louis Pac**. Systme dynamique cours et exercices corrigés. Dunod, Paris, (2012).
- [12] **J. H. Ma, J. L. Zhang**. Research on the price game and the application of delayed decision in oligopoly insurance market. *Nonlinear Dyn* 52(9–10), 1479–1489 (2012).
- [13] **O. Megherbi**. Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques. Universite Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, Thèse de Doctorat, 2013.
- [14] **S. Mitra, S.Webster**. Competition in remanufacturing and the effects of government subsidies. *Int. J. Prod. Econ.* 111(2), 287–298 (2008).
- [15] **T. Puu**. Chaos in duopoly pricing. *Chaos Soliton Fractals*. 1(6), 573–581 (1991).
- [16] **L. Stephen**. Dynamical Systems with Applications using MATLAB®. Springer International Publishing (2014).
- [17] **L. Shi, Z. Sheng, X. Feng**. Complexity analysis of remanufacturing duopoly game with different competition strategies and heterogeneous players. *Nonlinear Dyn* 82 :1081–1092, 2015.
- [18] **R. Subramanian, M. E. Ferguson, L. B. Toktay**. Remanufacturing and the component commonality decision. *Prod Oper Manag*, 22(1), 36–53 (2013).
- [19] **I. Talbi**. Systèmes dynamiques non linéaires et phénomènes de chaos. Constantine, Mémoire de Magistère, 2010.
- [20] **A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano**. Determining Lyapunov Exponents from a Time Series. *Physica D*, Vol. 16, pp. 285–317, 1985.
- [21] **H. J.Yu, G. L. Cai, Y. X. Li**. Dynamic analysis and control of a newhyperchaotic finance system. *Nonlinear Dyn.* 67(3), 2171–2182 (2012).
- [22] **W. Yu, Y. Yu**. A dynamic duopoly model with bounded rationality based on constant conjectural variation. *Economic Modelling* 37, 103–112, (2014).

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons présenté certains outils et concepts pour l'étude d'un système dynamique discret, comme une application de ces concepts nous avons étudié trois systèmes dynamiques chaotiques discrets de la première et deuxième ordre (la fonction logistique, l'application de hénou et l'application de lozi). Nous avons étudié les points fixes et leurs stabilités, cycles de période 2 et leurs régions de stabilité, les types de bifurcation que faire dans le comportement dynamique de ces applications. Finalement, nous avons discuté les routes vers le chaos et quelque attracteurs chaotique qu'ils existent dans les comportements de notre application.

Mots-clés

Système dynamique, Système chaotique, Stabilité, Bifurcation.

Abstract

In this thesis, we have presented some tools and concepts for the study of a discrete dynamic system, as an application of these concepts we have studied three discrete chaotic dynamical systems of the first and second order (logistic function, application Of henon and the application of lozi). We studied the fixed points and their stabilities, cycles of period 2 and their regions of stability, the types of bifurcation that make in the dynamic behavior of these applications. Finally, we discussed the roads to chaos and some chaotic attractors that they exist in the behaviors of our application.

Key words

Dynamic system ,Chaotic system, Stability, Bifurcation.