



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

EN: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Synchronisation Généralisée entre deux Systèmes Chaotiques et Hyper- chaotiques

Préparé par :

- Bouhroud Ibtissam
- Taiba Fatiha

Devant le jury :

- Bououden Rabah (M.A.A) C.U.Abd Elhafid Boussouf Président
- Kaouache Smail (M.A.A) C.U.Abd Elhafid Boussouf Encadreur
- Mehazem Allal (M.A.A) C.U.Abd Elhafid Boussouf Examineur

Année Universitaire : 2016/2017

REMERCIEMENTS

En premier lieu, nous tenons à manifester notre louange à Dieu par aisance et excellence de nous avoir donné la volonté et la santé pour pouvoir achever ce travail, veuille-t-Il nous guider toujours dans le droit chemin

Nous tenons à remercier vivement notre encadreur ***Kaouache Smail*** pour sa disponibilité son encouragement et ses précieux conseils tout au long de ce travail.

Ensuite, Nous tenons à remercier spécialement le président Ms : ***Bououden Rabah*** et l'examineur Ms : ***Mehazem Allal*** d'avoir accepté de présider le jury de notre soutenance.

Et aussi nos remerciements s'adressent en particulier

Tous les enseignants de Département Mathématique et informatique

Nos remerciements vont également à tous ceux qui nous en aidé de près ou de loin au long de la réalisation de ce travail.

IBTISSAM et FATIHA

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

À Celle à qui mon cœur depuis sa naissance n'a pas pu éprouver qu'amour et reconnaissance, à celle qui a donné un sens à mon existence en m'offrant une éducation digne de confiance À ma chère Mère : ***BOUBEKREUR DALILA***, merci À mon marié ***MOHAMED*** qui m'aide très beaucoup, merci À mon père : ***SAYEH***, pour son amour et son soutien moral depuis mon enfance. Ma chère Père merci. À tous les membres de ma famille ; mes frères (**Hicham, Yasser, Zohir**), mes Sœurs (**Ilham, Saedia**), et à tous mes cousins. À mes meilleurs amis : **Badiaa, Nadjah, Salma, Fatiha**
Et à tous qui m'ont connu et aidé de près et de loin dans la réalisation de ce travail Ainsi qu'à tous mes camarades de la deuxième promotion de Mathématique.

IBTISSAM

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

À Celle à qui mon cœur depuis sa naissance n'a pas pu éprouver qu'amour et reconnaissance, à celle qui a donné un sens à mon existence en m'offrant une éducation digne de confiance À ma chère Mère ***Saada*** . À mon père, pour son amour et son soutien moral depuis mon enfance. Ma chère Père ***Makhlouf***, merci. À mon marié ***AMMAR*** qui m'aide très beaucoup, merci.

À tous les membres de ma famille ; mes frères (**Imad, ramdan, Ahmed**), mes Sœurs (**Dhebiya, Wafa, Safinaz**), et à tous mes cousins. À mes meilleurs amis : **Badiaa, Nadjah, Salma, Ibtissam**

Et Ma petite babie : **Rimas nour el imane**

Et à tous qui m'ont connu et aidé de près et de loin dans la réalisation de ce travail Ainsi qu'à tous mes camarades de la deuxième promotion de Mathématique.

FATIHA

TABLE DES MATIÈRES

Introduction Générale	iv
1 Introduction aux systèmes dynamiques	1
1.1 Notions générales	1
1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz	3
1.3 Dépendance aux conditions initiales et aux paramètres	8
1.4 Généralités	15
1.4.1 Cas d'un système homogène $\dot{x} = A(t)x$	16
1.4.2 Cas d'un système non-homogène $\dot{x} = A(t)x + B(t)$	17
1.5 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	17
1.5.1 Cas homogène	17
1.5.2 Cas non-homogène	20
1.6 Systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2	23
1.7 Méthode indirecte (Linéarisation)	32
1.8 Méthode direct (fonction de Lyapunov)	36
2 Généralités sur les systèmes chaotiques	39
2.1 Définition sur le chaos	39
2.2 Les avantages du chaos	40

2.3	Techniques de caractérisation du comportement chaotique	41
2.3.1	L'espace de phases	42
2.3.2	Les exposants de Lyapunov	45
2.4	Exemples de systèmes chaotiques	47
3	Synchronisation généralisée entre deux systèmes chaotique et hyper-chaotique	50
3.1	Résultats théoriques	50
3.2	Synchronisation entre les systèmes $m - D$ et $n - D$ en $n - D$	51
3.3	Synchronisation entre les systèmes $n - D$ et $m - D$ en $m - D$	53
3.4	Simulation numérique	54
3.4.1	Simulation des systèmes 3D et 4D (cas $d=3$)	54
3.4.2	Simulation des systèmes 3D et 5D (cas $d=5$)	58
	Conclusion Générale	62
	Bibliographie	62

TABLE DES FIGURES

1.1	Point selle (col)	24
1.2	Noeud stable $\mu < \lambda < 0$	25
1.3	Noeud propre stable $\mu = \lambda < 0$. avec deux vecteurs propres indépendants .	26
1.4	Noeud impropre stable $\mu = \lambda < 0$.avec un seul vecteur propre indépendant	27
1.5	Foyer stable, $a < 0$. et $b > 0$	28
1.6	Centre à l'origine, $b > 0$	29
1.7	A) Instable B) localement stable C) Asymptotiquement stable.	32
1.8	Portrait de phase du pendule avec frottement	36
2.1	Attracteurs du système de Zhou	48
2.2	Les exposants du Lyapunov	49
3.1	Attracteurs de système MBSCCS	55
3.2	Attracteurs de système de Lorentz 4	56
3.3	Evolution de système erreur 3	58
3.4	Attracteurs de système de Lorentz de l'ordre 5	59
3.5	Evolution de système erreur 5	61

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'histoire de la synchronisation remonte au dix-septième siècle, quand le scientifique néerlandais, Christian Huygen aurait constaté que deux de ses horloges à balancier, placées côte à côte, convergeaient rapidement vers un mouvement identique en phase et en fréquence ; c'est-à-dire que les deux horloges avaient une parfaite synchronisation. S'il les perturbait, elles se resynchronisaient en une demi-heure, et s'il les éloignait, la synchronisation cessait. Dans la terminologie moderne, cela signifie que les deux horloges ont été synchronisées.

Récemment, les chercheurs de la synchronisation se sont intéressés aux systèmes chaotiques. Et comme ces derniers sont caractérisés par la sensibilité aux conditions initiales, la synchronisation entre deux systèmes chaotiques paraissait impossible. Mais les travaux de plusieurs scientifiques dans ce domaine ont montré le contraire.

En 1990, des travaux du Hubler ont démontré que les systèmes d'entraînement avec les signaux apériodiques pourraient induire certains comportements intéressants comme la résonance ou la stimulation non linéaire des modes particuliers. L'idée d'employer un signal apériodique spécial, à savoir un signal chaotique, pour conduire un système non linéaire provient des travaux de Carroll et Pecora [1] leurs travaux concentrés sur une configuration spéciale impliquant deux systèmes couplés de sorte que le comportement de la seconde dépend du comportement du premier, mais réciproquement, le premier n'est pas influencé par le comportement de la seconde. Le premier système produisant le signal



chaotique, s'appelle le système émetteur (maître) et le deuxième c'est le système récepteur (esclave).

Dans le contexte des éléments chaotiques couplés, de nombreux différents états de synchronisation ont été étudiés au cours des années passées, à savoir la synchronisation complète ou identique (CS : Complete or identical synchronization) [2]), synchronisation en phase (PS : Phase synchronization) [3] et en décalage (LS : Lag synchronization) [4], la synchronisation généralisée (GS : Generalized synchronization) [5], la synchronisation de latence intermittente (SLI : Intermittent lag synchronization) [6], la synchronisation de phase imparfaite (IPS : Imperfect phase synchronization) [7] et Quasi synchronisation (AS : Almost synchronization) [8].

La CS a été la première découverte et est la forme la plus simple de la synchronisation des systèmes chaotiques. GS va plus loin en utilisant des systèmes complètement différents et en associant la sortie d'un système, pour une fonction donnée.

La GS entre les systèmes chaotiques et hyper chaotiques a suscité beaucoup d'intérêt en raison de ses applications importantes dans les systèmes écologique [9], les systèmes physiques [10], les systèmes chimiques [11], les communications sécurisées [12], et ainsi de suite.

Notre objectif est d'étudier le phénomène de la synchronisation généralisée de quelques systèmes chaotiques et hyperchaotiques, en utilisant la méthode de contrôle continue pour réaliser ce phénomène et en basant sur le critère de stabilité des systèmes linéaires pour garantir la stabilité du système erreur, ce qui implique la réalisation de la synchronisation.

Ce mémoire vis à donner une étude simple sur la synchronisation généralisée entre deux systèmes dynamiques chaotiques et hyper chaotiques.

Le reste de ce travail est organisé comme le suivant :

Dans le premier, nous rappelons quelques éléments fondamentaux aux systèmes dynamiques, notamment la définissons des systèmes dynamique, le théorème fondamentale d'existence et d'unicité pour le système autonome non linéaire et quelques notions de la stabilité d'un système dynamique non linéaire notamment la méthode indirecte qui basée sur la linéarisation et la méthode directe qui basée sur l'utilisation d'une fonction appelée



fonction de Lyapunov

Nous présentons dans le deuxième chapitre quelques propriétés d'analyse des systèmes dynamiques chaotiques qui permirent d'analyser qualitativement les points marquants de ces systèmes chaotiques, notamment la non linéarité de ces système, le déterminisme, la sensibilité aux conditions initiales, L'attracteurs chaotiques et les exposants de Lyapunov qui permirent de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ.

Tandis que dans le dernier chapitre on propose une synchronisation généralisée entre deux différents systèmes chaotiques et hyper chaotiques, en utilisant la méthode du contrôle continue qui sera étendue aux systèmes dynamiques. Pour garantir la stabilité du système erreur nous aurons basé sur le critère de stabilité des systèmes linéaires

A la fin de ce mémoire, nous donnerons une conclusion générale et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES

1.1 Notions générales

Considérons le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

tel que $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ et E un ouvert de \mathbb{R}^n . Nous allons montrer que pour certaines conditions sur la fonction f le système (1.1) admet une solution unique passant par le point $x_0 \in E$ définie dans un intervalle maximale d'existence $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. En général il est impossible de résoudre explicitement le système non-linéaire (1.1) par suite nous donnons un grand intérêt à l'étude qualitative locale, en particulier nous allons introduire le théorème de Hartman-Grobman [13] qui montre que topologiquement le comportement local du système non-linéaire (1.1) au voisinage d'un point d'équilibre x_0 (tel que $f(x_0) = 0$) est typiquement déterminé par le comportement du système linéaire $\dot{x} = Ax$ au voisinage de l'origine avec $A = Df(x_0)$ la dérivée de f à x_0 .

Le système (1.1) est dit autonome, Lorsque la fonction f dépend explicitement de t

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1.2)$$

Le système est dit non-autonome, en revanche tout système non-autonome (1.2), avec $x \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire sous forme d'un système autonome (1.1), avec $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ en effet on pose $x_{n+1} = t$ alors $\dot{x}_{n+1} = 1$, et la théorie fondamentale de (1.1) et (1.2) ne se différa plus significativement.

1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans cette section nous allons présenter le théorème fondamentale d'existence et unicité pour le système autonome non-linéaire :

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.3)$$

Pour la preuve de ce théorème nous allons utiliser la méthode des approximations successives qui va servir en même temps à montrer la continuité et la différentiabilité des solutions par rapport aux conditions initiales et aux paramètres.

Définition 1.1. Soit E un ouvert de \mathbb{R}^n , la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite Lipschitzienne sur E

$$\exists K \in \mathbb{R}^*, \forall x, y \in E : |f(x) - f(y)| \leq K |x - y|.$$

La fonction f est dite localement Lipschitzienne sur E si pour chaque point $x_0 \in E$ il existe un ϵ voisinage de x_0 , $N_\epsilon(x_0) \subset E$ et un constant

$$K_0 > 0, \forall x, y \in N_\epsilon(x_0) : |f(x) - f(y)| \leq K_0 |x - y|.$$

ϵ voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, est une boule ouverte de rayon ϵ i.e

$$N_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n / |x - x_0| < \epsilon\}.$$

lemme 1. Soit E un ouvert de \mathbb{R}^n , et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $f \in C^1(E)$ alors f est localement Lipschitzienne sur E .

Démonstration : Comme E est un ouvert de \mathbb{R}^n alors pour un $x_0 \in E$ donné il existe un $\epsilon > 0$ tel que $N_\epsilon(x_0) \subset E$.

Soit $K = \sup_{|x-x_0|<\epsilon} \| (Df(x)) \|$ (i.e K est le maximum de $Df(x)$ sur le compact

$|x - x_0| < \epsilon$).

Pour $x, y \in N_\epsilon(x_0)$, on pose $u = y - x$. Alors $x + su \in N_\epsilon(x_0)$ pour $0 \leq s \leq 1$ car $N_\epsilon(x_0)$ est un ensemble convexe.

On considère la fonction $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$F(s) = f(x + su).$$

Alors $F' = Df(x + su)u$, donc

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= F(1) - F(0) \\ &= \int_0^1 F'(s) ds = \int_0^1 Df(x + su)u ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq \int_0^1 |Df(x + su)u| ds \\ &\leq \int_0^1 \|Df(x + su)\| |u| ds \\ &\leq K |u| = K |y - x|, \end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration.

Théorème 1.1. (Théorème fondamentale d'existence et unicité) Soit E un ouvert de \mathbb{R}^n contenant x_0 , et supposons que $f \in C^1(E)$, alors il existe $a > 0$ tel que le problème :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

de Cauchy admet une solution unique sur l'intervalle $[-a, a]$.

Démonstration : Comme $f \in C^1$ alors d'après le lemme (1.2.1), f est localement lipschitzienne sur E (i.e pour chaque $x_0 \in E$), il existe un ϵ voisinage $N_\epsilon(x_0) \subset E$ et un

constante $K > 0$ telque pour tout $x, y \in N_\epsilon(x_0)$ on a $|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|$.

Soit $b = \frac{\epsilon}{2}$ alors la fonction continue $f(x)$ est bornées dans le compact

$$N_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / |x - x_0| \leq b\}.$$

Soit $M = \max_{N_0} |f(x)|$.

Soit $u_k(t)$ la suite définie par

$$\begin{cases} U_0(t) = x_0 = x(0) \\ U_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(U_k(s)) ds, k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (1.5)$$

Soit $a > 0$ tel que $u_k(t)$ soit définie et continue sur $[-a, a]$ et satisfaisant

$$\max_{t \in [-a, a]} |u_k(t) - x_0| \leq b. \quad (1.6)$$

Il s'ensuit que $f(u_k(t))$ est définie et continue sur $[-a, a]$ de plus

$u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_k)(s) ds$ est définie et continue sur $[-a, a]$ et satisfaisant

$$|u_{k+1}(t) - x_0| \leq \int_0^t |f(u_k)(s)| ds \leq Ma.$$

Pour tout $t \in [-a, a]$ Choisissons alors $0 < a \leq \frac{b}{M}$.

Il en résulte par récurrence que $u_k(t)$ est définie et continue et satisfaisant (1.6) pour tout $t \in [-a, a]$ et $k = 0, 1, 2, \dots$ donc $u_k(t) \in N_0$.

On montre par récurrence que pour tout $j \geq 1$, on a

$$|u_{j+1}(t) - u_j(t)| \leq (Ka)^j b. \quad (1.7)$$

Pour $j = 1$ on a

$$\begin{aligned}
 |u_2(t) - u_1(t)| &\leq \int_0^t |f(u_1(s)) - f(u_0(s))| ds \\
 &\leq K \int_0^t |u_1(s) - x_0| ds \\
 &\leq Kab.
 \end{aligned}$$

Supposons que l'égalité (1.7) est vérifiée pour certain $j \geq 1$ et on montre qu'elle est vérifiée pour $j + 1$

$$\begin{aligned}
 |u_{j+2}(t) - u_{j+1}(t)| &\leq \int_0^t |f(u_{j+1}(s)) - f(u_j(s))| ds \\
 &\leq K \int_0^t |u_{j+1}(s) - u_j(s)| ds \\
 &\leq K(Ka)^j b \left| \int_0^t ds \right| \\
 &\leq K(Ka)^j ba = (Ka)^{j+1} b.
 \end{aligned}$$

Alors (1.7) est vérifié pour $j \geq 1$.

On pose $\alpha = Ka$, et notons choisisse a telque $0 < a < \frac{1}{K}$.

Soit $m > m' > N$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 |u_m(t) - u_{m'}(t)| &= |u_m(t) - u_{m-1}(t) + u_{m-1}(t) - u_{m-2}(t) + u_{m-2}(t) \cdots u_{m'+1}(t) - u_{m'}(t)| \\
 &\leq |u_m(t) - u_{m-1}(t)| + |u_{m-1}(t) - u_{m-2}(t)| + \cdots + |u_{m'+1}(t) - u_{m'}(t)| \\
 &= \sum_{j=m'}^{m-1} |u_{j+1}(t) - u_j(t)| \\
 &\leq \sum_{j=N}^{\infty} |u_{j+1}(t) - u_j(t)|.
 \end{aligned}$$

En utilisant (1.7) on obtient

$$|u_m(t) - u_{m'}(t)| \leq \sum_{j=N}^{\infty} \alpha^j b = \frac{b\alpha^N}{1-\alpha}. \quad (1.8)$$

Donc $|u_m(t) - u_{m'}(t)| \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Alors

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ tel que } m' > N \Rightarrow \|u_m(t) - u_{m'}(t)\| = \max_{t \in [-a, a]} |u_m(t) - u_{m'}(t)| < \epsilon.$$

Donc $(u_k(t))$ est une suite de Cauchy dans l'espace $C([-a, a])$ qui est un espace complet donc $(u_k(t))$ converge uniformément vers une limite $u(t) \in C([-a, a])$.

Passant à la limite dans la relation (1.5), on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{k+1}(t) = x_0 + \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^t f(u_k(s)) ds.$$

C'est-à-dire :

$$u(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s)) ds. \quad (1.9)$$

Comme u continue sur $[-a, a]$ et f de classe $C^1(E)$ alors (1.9) est différentiable et on a $u'(t) = f(u(t))$.

De plus $u_0 = x_0 + \int f(u(s)) ds = x_0$. Donc la limite $u(t)$ est une solution du problème de Cauchy (1.6) sur l'intervalle $[-a, a]$.

Il reste à montrer l'unicité de la solution.

On suppose que le problème (1.4) admet deux solutions u et v sur l'intervalle $[-a, a]$ la

fonction continue $w(t) = |u(t) - v(t)|$ atteint son maximum en un certain $t^* \in [-a, a]$.
Donc

$$\begin{aligned}
 \|u - v\| &= \max_{t \in [-a, a]} |u(t) - v(t)| \\
 &\leq \left| \int_0^{t^*} (f(u(s)) - f(v(s))) ds \right| \\
 &\leq \int_0^{|t^*|} |f(u(s)) - f(v(s))| ds \\
 &\leq K \int_0^{|t^*|} |u(s) - v(s)| ds \\
 &\leq Ka \|u - v\| \leq \|u - v\|,
 \end{aligned}$$

(car $Ka < 1$) donc $u = v$, d'où l'unicité de la solution.

1.3 Dépendance aux conditions initiales et aux paramètres

Dans cette section nous allons étudier la dépendance de la solution du problème de Cauchy (1.10) au condition initiale y et aux paramètres $\mu \in \mathbb{R}^n$ (i.e étudier la différentiabilité de la solution $u(t, x_0, \mu)$ par rapport à y et à μ).

Soit le problème :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \mu) \\ x(0) = y \end{cases} \quad (1.10)$$

lemme 2. (Gronwall) *Supposons que g est une fonction continue positive et satisfaisant*

$$g(t) \leq C + K \int_0^t g(s) ds,$$

pour tout $t \in [0, a]$ tel que C et K sont des constants positifs.

Alors pour tout $t \in [0, a]$,

$$g(t) \leq Ce^{Kt}.$$

Démonstration :

On pose :

$$G(t) = C + K \int_0^t g(s) ds,$$

on a $g(t) \geq 0 \Rightarrow G(t) \geq 0, \forall t \in [0, a]$

$$G'(t) = K.g(t) \leq K.G(t)$$

$$\frac{G'(t)}{G(t)} \leq K$$

(comme $\frac{G'(t)}{G(t)} > 0$ et $K > 0$)

$$\int_0^t \frac{G'(s)}{G(s)} ds \leq \int_0^t K ds.$$

$$\ln(G(t)) - \ln(G(0)) \leq Kt$$

$$\ln(G(t)) \leq Kt + \ln c$$

$$G(t) \leq ce^{Kt}$$

$$\Rightarrow g(t) \leq G(t) \leq ce^{Kt}, \forall t \in [0, a]$$

Théorème 1.2. (*Dépendance aux conditions initiales*)

Soit E un ouvert de \mathbb{R}^n contenant x_0 . Supposons que $f \in C^1(E)$. Alors il existe $a > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in N_\delta(x_0)$ le problème à condition initiale :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = y \end{cases}, \quad (1.11)$$

admet une solution unique $u(t, y)$, avec $u \in C^1(G)$ et $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

De plus pour chaque $y \in N_\delta(x_0)$, $u(t, y)$ est deux fois continument différentiable par rapport à $t \in [-a, a]$.

Démonstration :

- **La différentiabilité par rapport à t**

Soit $u(t, y)$ la solution du problème (1.13),

alors

$$\dot{u}(t, y) = f(u(t, y)).$$

Comme $u(., y)$ est f sont différentiable alors $u(., y)$ est différentiable et on a

$$\ddot{u} = Df(u(t, y)) \cdot \dot{u}(t, y),$$

qui est clairement continue car $u(\cdot, y), \dot{u}(\cdot, y), Df$ sont continue donc la solution $u(\cdot, y)$ est deux fois continument différentiable.

• **La différentiabilité par rapport à y**

Fixons $y_0 \in N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ et choisissons $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $|h| < \frac{\delta}{2}$. Donc $y_0 + h \in N_{\delta}(x_0)$. Considérons $u(t, y_0)$ et $u(t, y_0 + h)$ les deux solutions du problème (1.11) à conditions initiales $y = y_0$ et $y = y_0 + h$ respectivement. On a

$$\begin{aligned} |u(t, y_0 + h) - u(t, y_0)| &\leq |h| + \int_0^t |f(u(s, y_0 + h)) - f(u(s, y_0))| ds \\ &\leq |h| + K \int_0^t |u(s, y_0 + h) - u(s, y_0)| ds. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [-a, a]$. Alors d'après le lemme de Gronwall

$$|u(s, y_0 + h) - u(s, y_0)| \leq |h| e^{K|t|}, \quad (1.12)$$

pour tout $t \in [-a, a]$.

Notons $\Phi(t, y_0)$ la matrice fondamentale des solutions du problème

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A(t, y_0)\Phi \\ \Phi(0) = I \end{cases} \quad (1.13)$$

avec $A(t, y_0) = Df(u(t, y_0))$ et I la matrice d'identité. Il est clair que $\Phi(t, y_0)$ est unique et continue sur un intervalle $[-a, a]$ comme solution du problème (1.13). Le développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction f au voisinage de u_0 donne

$$f(u) - f(u_0) = Df(u_0)(u - u_0) + R(u - u_0),$$

avec $\frac{|R(u-u_0)|}{|u-u_0|} \rightarrow 0$ lorsque $|u - u_0| \rightarrow 0$ donc

$$\begin{aligned}
 |u(t, y_0 + h) - u(t, y_0) - \Phi(t, y_0)h| &\leq \int_0^t |f(u(s, y_0 + h)) - f(u(s, y_0)) - Df(u(s, y_0))\Phi(t, y_0)h| ds \\
 &\leq \int_0^t \|Df(u(s, y_0))\| |u(s, y_0 + h) - u(s, y_0) - \Phi(t, y_0)h| ds \\
 &+ \int_0^t |R(u(s, y_0 + h)) - u(s, y_0)| ds.
 \end{aligned}$$

Comme $\frac{|R(u-u_0)|}{|u-u_0|} \rightarrow 0$ lorsque $|u - u_0| \rightarrow 0$ et $u(s, y)$ continue sur G , alors

$$\forall \epsilon_0 > 0 \exists \delta_0 > 0 \text{ tel que } \delta_0 > 0 \Rightarrow |R(u(s, y_0 + h) - u(s, y_0))| < \epsilon_0 |u(s, y_0 + h) - u(s, y_0)|, \forall t \in [-a, a].$$

Posons

$$g(t) = |u(s, y_0 + h) - u(s, y_0) - \Phi(t, y_0)h|.$$

Alors d'après (1.12) et (1.14). Pour tout $t \in [-a, a]$, $y_0 \in N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ et $|h| < \min(\frac{\delta}{2}, \delta_0)$.

On a

$$g(t) \leq M_1 \int_0^t g(s) ds + \epsilon_0 |h| a e^{Ka},$$

avec

$$M_1 = \sup_{x \in N_{\frac{\delta}{2}}} \|Df(x)\|.$$

Soit $\epsilon_0 > 0$. Alors d'après le lemme de Gronwall pour tout, on a

$$g(t) \leq \epsilon_0 |h| ae^{aK} e^{aM_1} = \epsilon_0 |h| ae^{a(K+M_1)},$$

pour tout $t \in [-a, a]$ et $|h| < \min(\frac{\delta}{2}, \delta_0)$. Donc

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|u(s, y_0 + h) - u(s, y_0) - \Phi(t, y_0)h|}{|h|} = 0,$$

uniformément pour tout $t \in [-a, a]$. Alors d'après la définition de la dérivée de u par rapport à y , on a

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0) = \Phi(t, y_0), \quad (1.14)$$

pour tout $t \in [-a, a]$, et comme $\Phi(t, y_0)$ est continue sur $[-a, a] \times N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ alors u est continument différentiable par rapport à y sur $[-a, a] \times N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$.

Corrolaire 1.1. *Sous les mêmes hypothèses du théorème précédant, on a*

$$\Phi(t, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(t, y).$$

Pour tout $t \in [-a, a]$. Et $y \in N_{\delta}(x_0)$ si et seulement si $\Phi(t, y)$ est la matrice fondamentale des solutions du problème, on a

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = Df(u(t, y))\Phi \\ \Phi(0) = I \end{cases} \quad (1.15)$$

pour tout $t \in [-a, a]$ et $y \in N_{\delta}(x_0)$.

Remarque 1.1. *Similairement, si $f \in C^k(E)$, alors la solution $u(t, y)$ du problème (1.10) est de classe $C^k(G)$. Et si f est une fonction analytique pour $x \in E$, alors*

$u(t, y)$ est analytique à l'intérieur de G .

Théorème 1.3. (Dépendance au paramètres) Soit E un ouvert de \mathbb{R}^{n+m} contenant (x_0, μ_0) . Supposons que $f \in C^1(E)$. Alors il existe $a > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in N_\delta(x_0)$ et $\mu \in N_\delta(\mu_0)$ le problème à condition initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \mu) \\ x(0) = y \end{cases}, \quad (1.16)$$

admet une solution unique $u(t, y, \mu)$ avec $u \in C^1(G)$ et $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0) \times N_\delta(\mu_0)$.

Ce théorème ressort directement du théorème précédant en remplaçant les vecteurs x_0, x, \dot{x} et y par $(x_0, \mu_0), (x, \mu), (\dot{x}, 0)$ et (y, μ) respectivement.

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

De nombreux phénomènes naturels peuvent se modéliser en première approximation par des systèmes différentiels linéaires. D'autre part on sait résoudre complètement les systèmes linéaires à coefficients constants. Ceci a donné une grande importance pratique à ces systèmes.

1.4 Généralités

Un système différentiel linéaire du premier ordre dans \mathbb{R}^n est une équation de la forme

$$\dot{x} = A(t)x + B(t), \tag{1.17}$$

où $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est la fonction inconnue

et $A(t) = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$.

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ sont des fonctions continues données.}$$

Théorème 1.4. *Si la fonction matricielle A et la fonction vectorielle B sont continues sur un intervalle I alors le problème à conditions initiales*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (1.18)$$

avec $t_0 \in I$ et x_0 est un vecteur constant, admet une solution unique sur tout l'intervalle I .

Preuve 1. *Pour la démonstration, il suffit de voir que la fonction $f(t, x) = A(t)x + B(t)$ est continue sur I est lipschitzienne de rapport $k = \|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|$.*

Pour résoudre le système non homogène (1.19), on a besoin d'abord de résoudre le système homogène associé.

1.4.1 Cas d'un système homogène $\dot{x} = A(t)x$

Le système homogène associé au système (1.21)

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Soit S l'ensemble des solutions maximales. Alors $\forall x, y \in S$ et tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

On a $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in S$.

Donc S est un sous espace vectoriel.

Corollaire 1.2. *L'ensemble S des solutions maximales est un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} .*

1.4.2 Cas d'un système non-homogène $\dot{x} = A(t)x + B(t)$

Revenons au système plus générale (1, 19), il existe au moins une solution maximale y . Soit x est une solution quelconque, alors $z = x - y$ satisfait l'équation homogène (1.20) et réciproquement. Par conséquent, l'ensemble des solutions maximales donnée par

$$y + S = \{y + z; z \in S\},$$

où S est l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène (1, 19) associé, l'ensemble $y + S$ des solutions maximales de (1, 20) est un translate de S , c'est donc un espace affine de dimension n sur \mathbb{R} , admettant S comme direction vectorielle.

1.5 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

1.5.1 Cas homogène

Considérons le système homogène à coefficients constants

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.20)$$

En utilisant les itérations de picard (1, 5), on obtient

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t Ax_0(s)ds = x_0 + Ax_0 \int_{t_0}^t ds = x_0 + tAx_0 \\ x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t Ax_1(s)ds = x_0 + Ax_0 \int_{t_0}^t ds + A^2x_0 \int_{t_0}^t sds = x_0 + tAx_0 + \frac{t^2}{2}A^2x_0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Par récurrence

$$x_m(t) = \sum_{i=0}^m \frac{t^i}{i!} A^i x_0.$$

En passant à la limite quand m tend vers l'infini, on obtient

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} A^i x_0.$$

Dans le cas unidimensionnel ($n = 1$) cette série n'est autre que la fonction exponentielle, donc nous écrivons

$$x(t) = \exp(tA)x_0,$$

et on définit la matrice exponentielle

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i.$$

lemme 3. *Soit A une matrice carrée, alors*

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}.$$

Démonstration : Comme A commute avec lui même, alors, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \frac{e^{Ah} - I}{h} \\
 &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \dots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\
 &= e^{At} \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \dots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\
 &= Ae^{At}.
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Théorème 1.5. *Soit A une matrice carrée. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné, le problème à conditions initiales (1.21) admet une solution unique définie par :*

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Démonstration :

L'existence et l'unicité est garanti par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Il ne reste qu'à démontrer que $x(t) = e^{At}x_0$ est une solution de problème (1.21), d'après le lemme (1.5.1) on a

$$x'(t) = Ae^{At}x_0 = Ax(t),$$

d'autre part :

$$x(0) = e^0x_0 = I.x_0 = x_0.$$

Donc $x(t)$ est solution de (1.21).

Exemple 1.5.1. *Résoudre le problème :*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (1.23)$$

avec $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Solution 1. d'après le théorème (1.5.1)

la solution est $x(t) = e^{At} \cdot x_0$

$$x(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$x(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

1.5.2 Cas non-homogène

Considérons le système non-homogène à coefficients constantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (1.24)$$

avec A une matrice ($n \times n$) et $B(t)$ une fonction vectorielle continue.

Définition 1.2. Soit le système homogène associé à (1.25)

$$\dot{x} = Ax. \quad (1.25)$$

Toute fonction matricielle ($n \times n$) non-singulière $\Phi(t)$, qui satisfait $\Phi'(t) = A\Phi(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ est appelée matrice fondamentale des solutions du système homogène (1.26).

Remarque 1.2. La fonction $\Phi(t) = e^{At}$ est une matrice fondamentale de (1.26) qui satisfait $\Phi(0) = I$.

De plus, toute matrice fondamentale $\Phi(t)$ de (1.26) est donnée par :

$$\Phi(t) = e^{At}C,$$

avec C une matrice non-singulière.

Théorème 1.6. Si $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale de (1.26), alors l'unique solution du système linéaire non-homogène (1.25) est donnée par :

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)B(s)ds. \quad (1.26)$$

Démonstration : Supposons que $x(t)$ soit donnée par (1.27), alors

$$x'(t) = \Phi'(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)B(t) + \int_0^t \Phi'(t)\Phi^{-1}(s)B(s)ds.$$

Et comme $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale de (1.26), il en résulte que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$. D'où :

$$\begin{aligned} x'(t) &= A[\Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)B(s)ds] + B(t) \\ &= Ax(t) + B(t), \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} x(0) &= \Phi(0)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^0 \Phi(0)\Phi^{-1}(s)B(s)ds \\ &= x_0 \end{aligned}$$

donc $x(t)$ est solution de(1.25)

Remarque 1.3. Avec $\Phi(t) = e^{At}$ la solution du système linéaire non-homogène (1.25) est donnée par :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds. \quad (1.27)$$

Exemple 1.5.2. Résoudre le problème de l'oscillateur harmonique forcé :

$$\ddot{x} + x = f(t). \quad (1.28)$$

Cette équation se ramène au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + f(t), \end{cases} \quad (1.29)$$

qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\dot{x} = Ax(t) + B(t),$$

$$\text{avec : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

et

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

On a :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Donc la solution du système avec la condition initiale $x(0) = x_0$ est :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds \\ &= e^{At}x_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} \sin(t-s)f(s) \\ \cos(t-s)f(s) \end{pmatrix} ds \end{aligned} \quad (1.30)$$

1.6 Systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2 .

Dans cette section nous rappelons les différents portraits de phase possibles dans le plans \mathbb{R}^2 pour le système linéaire plan.

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.31)$$

avec $x \in \mathbb{R}^2$ et A une matrice carré (2×2). Pour cela on s'intéresse dans un premier temps au système.

$$\dot{y} = By, \quad (1.32)$$

avec $B = P^{-1}AP$ (B a l'une des formes).

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Le portrait de phase de (1.32) est alors obtenu à partir du portrait de phase de (1.33) en utilisant la transformation linéaire des coordonnées $x = Py$.

Cas 1 : Valeurs propres réels de signes opposés

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda < 0 < \mu$.

Dans ce cas la solution de (1.33) avec la condition initiale :

$y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} y_0. \quad (1.33)$$

Alors $y_1(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et $y_2(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow -\infty$. L'origine est appelé point selle (col).

En éliminant t de y_1 et y_2 on obtient $y_2 = \frac{c}{|y_1|^\alpha}$ avec $c = c_2 |c_1|^\alpha$ et $\alpha = -\frac{\mu}{\lambda} > 0$.

La FIGURE (1.1) illustre ce portrait de phase (si $\mu < 0 < \lambda$ les flèches seront inversés).

Le portrait de phase de (1.32) est linéairement équivalent au portrait de phase de (1.33).

Cas 2 : Différentes valeurs propres réelles de mêmes signes

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu < \lambda < 0$.

La solution de (1.33) est donnée par (1.34).

Alors $y(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. L'origine est appelé noeud stable.

En éliminant t de y_1 et y_2 on obtient $y_2 = \frac{c}{|y_1|^\alpha}$ avec $c = \frac{c_2}{|c_1|^\alpha}$ et $\alpha = \frac{\mu}{\lambda} > 1$.

La FIGURE (1.2) illustre ce portrait de phase (si $\lambda < \mu < 0$ les axes seront permutés).

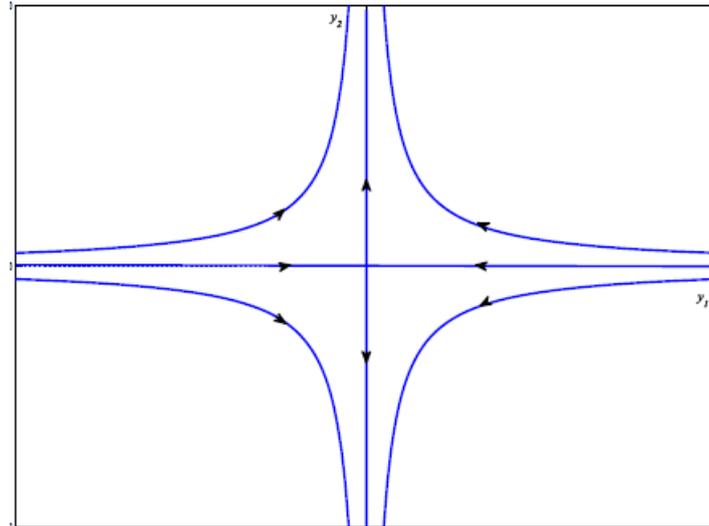


FIGURE 1.1 – Point selle (col)

Si $\mu, \lambda > 0$ les flèches seront inversés, dans ce cas l'origine est appelé noeud instable.

Le portrait de phase de (1.32) est linéairement équivalent au portrait de phase de (1.35).

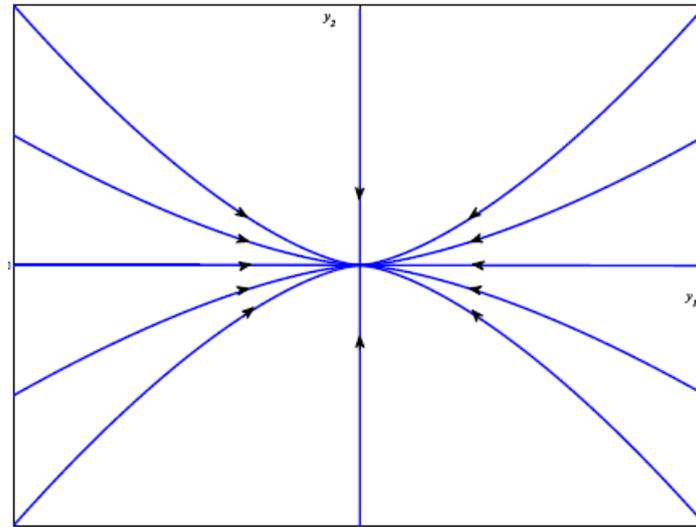


FIGURE 1.2 – Noeud stable $\mu < \lambda < 0$

Cas 3 : Valeurs propres réelles égaux

On distinct possibilités :

a) **Deux vecteurs propres indépendants**

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda = \mu < 0$.

La solution de (1.33) avec la condition initiale :

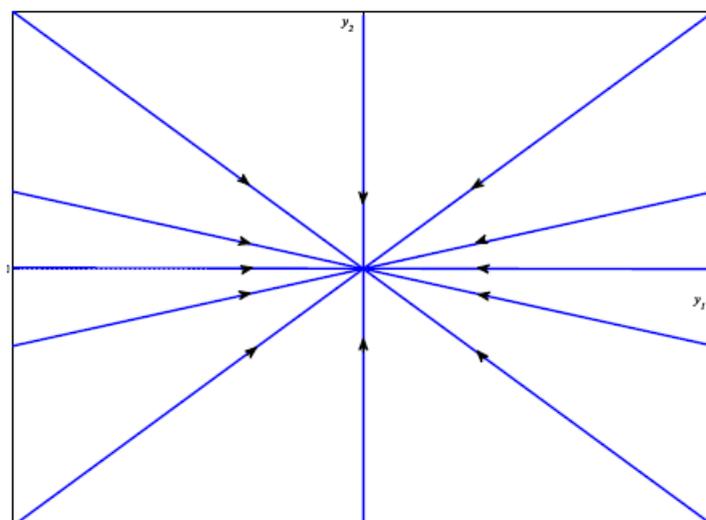
$y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} y_0. \quad (1.34)$$

Alors $y(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ l'origine est appelé noeud propre stable.

En éliminant t de y_1 et y_2 on obtient $y_2 = c |y_1|$ avec $c = \frac{c_2}{|c_1|}$

La FIGURE (1.3) illustre ce portrait de phase si $\lambda = \mu > 0$ les flèches seront inversés, dans ce cas l'origine est appelé noeud propre instable.

FIGURE 1.3 – Noeud propre stable $\mu = \lambda < 0$. avec deux vecteurs propres indépendants

Le portrait de phase de (1.32) est linéairement équivalent au portrait de phase de (1.33).

b) **Un seul vecteur propre indépendant**

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu = \lambda < 0$.

La solution de (1.33) avec la condition initiale :

$y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} y_0. \quad (1.35)$$

Alors $y(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ l'origine est appelé noeud impropre stable.

La FIGURE (1.4) illustre ce portrait de phase (si $\lambda = \mu > 0$ les flèches seront . Dans ce cas l'origine est appelé noeud impropre instable. Le portrait de phase de (1.32) est linéairement équivalent au portrait de phase de (1.33).

Cas 4 : Valeurs propres complexes

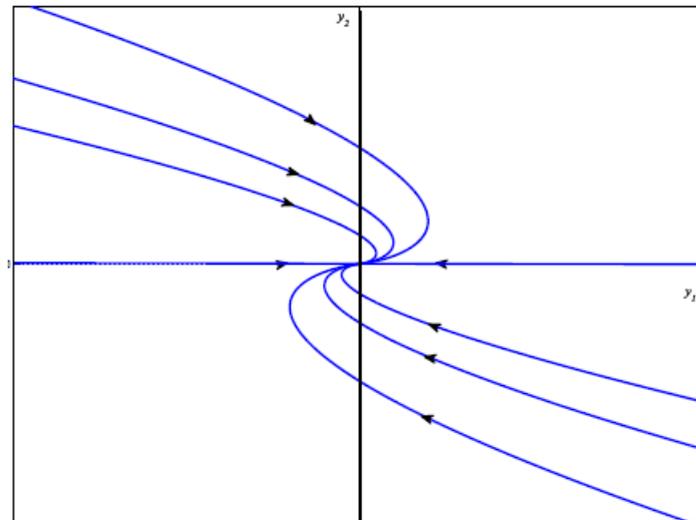


FIGURE 1.4 – Noeud impropre stable $\mu = \lambda < 0$. avec un seul vecteur propre indépendant

Soit $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a < 0$.

Introduisant les coordonnées polaires r, θ définis par : $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ et $\tan \theta = \frac{y_2}{y_1}$ et dérivant ces équations on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} = ar \\ \dot{\theta} = b \end{cases} \quad (1.36)$$

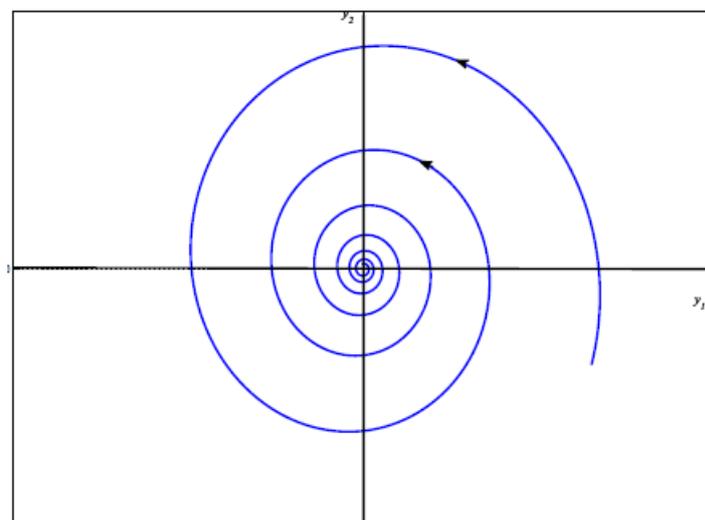
D'où la solution :

$$\begin{cases} r = r_0 e^{at} \\ \theta = bt + \theta_0 \end{cases} \quad (1.37)$$

Alors $r(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et θ augmente si $b > 0$ et diminue lorsque t augmente si $b < 0$.

Donc les trajectoires s'approchent vers l'origine en spirale, dans ce cas l'origine est appelée foyer stable.

Le FIGURE (1.5) illustre ce portrait de phase (si $a > 0$ les flèches seront inversés, dans

FIGURE 1.5 – Foyer stable, $a < 0$. et $b > 0$.

ce cas l'origine est appelé foyer instable).

Le portrait de phase de (1.32) est linéairement équivalent au portrait de phase de (1.33).

Cas 5 : Valeurs propres purement imaginaires

Dans ce cas on suppose que $a = 0$ et on procède de la même manière comme dans le cas 4.

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Introduisant les coordonnées polaires r , θ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = b \end{cases} \quad (1.38)$$

D'où la solution

$$\begin{cases} r = r_0 \\ \theta = bt + \theta_0 \end{cases} \quad (1.39)$$

Alors $r(t) = \text{constant}$ et θ augmente lorsque t augmente si $b > 0$ et diminue lorsque t augmente si $b < 0$.

Donc les trajectoires sont des cercles centrés à l'origine, dans ce cas l'origine est appelé centre.

La FIGURE (1.6) illustre ce portrait de phase. Le portrait de phase de (1.32) est linéai-

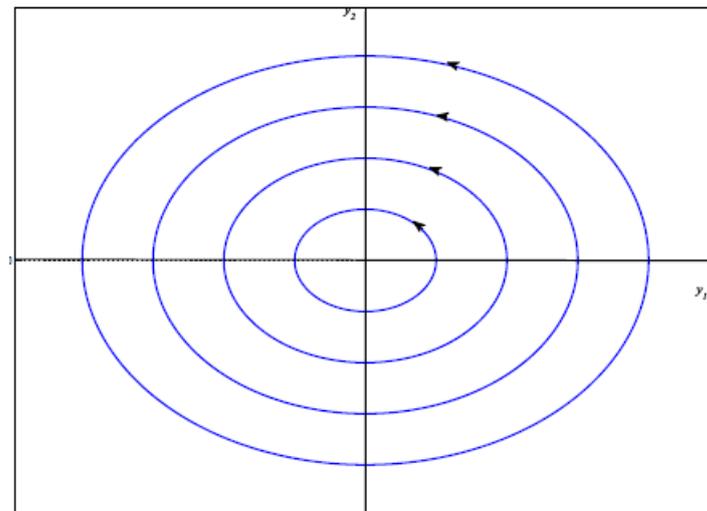


FIGURE 1.6 – Centre à l'origine, $b > 0$.

rement équivalent au portrait de phase de (1.33).

Exemple 1.6.1. (*Système linéaire avec un centre à l'origine*)

Considérons le système (1.32) avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A sont $\lambda_{1,2} = \mp 2i$,

avec les vecteurs propres $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$D'où B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solution est :

$$\begin{aligned} x(t) &= P \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} P^{-1} \cdot x_0 \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \frac{1}{2}\sin(2t)c_1 & \cos(2t) \end{pmatrix} \cdot x_0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cos(2t) - 2c_2 \sin(2t) \\ x_2(t) = \frac{1}{2}c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) \end{cases}$$

La solution vérifiée $x_1^2(t) + 4x_2^2(t) = c_1^2 + 4c_2^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Alors les trajectoires résident dans des ellipses.

NOTIONS DE STABILITÉ

La question de la stabilité se pose de la façon suivante : Si l'on écarte le système de sa position d'équilibre y reviendra-t-il ? ou bien une petite perturbation, qui éloigne le système légèrement de son régime stationnaire peut avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps ?

Considérons le système autonome suivant :

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.40}$$

Où $f \in C^1(E)$ et E un ouvert de \mathbb{R}^n .

Un point a dans E vérifiant $f(a) = 0$ est appelé point d'équilibre ou point critique du système (1.41).

Nous utilisons la notion $\phi(t, x_0)$ pour noter l'unique solution $x(t)$ de (1.41) qui satisfait $x(0) = x_0$.

L'application paramétrée $\phi_t = \phi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée flot du système (1.41).

Définition 1.3. (*Stabilité locale*)

- Un point d'équilibre a de (1.41) est stable au sens de Lyapunov si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in E$ vérifiant $\|x - a\| \leq r$, on a :

$$\|\phi_t(x) - a\| \leq \epsilon, t \geq 0.$$

- Un point d'équilibre a de (1.41) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il est stable au sens de Lyapunov et de plus pour tout x suffisant proche de a avec :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = a.$$

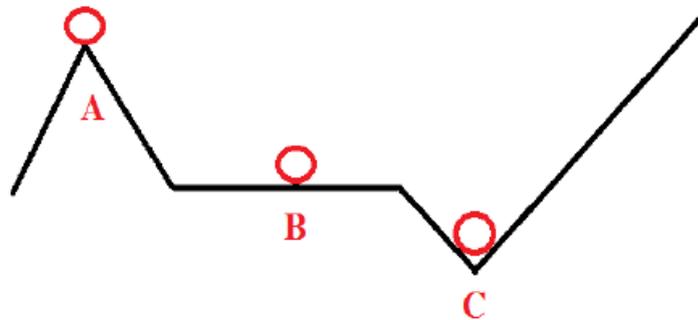


FIGURE 1.7 – A) Instable B) localement stable C) Asymptotiquement stable.

Maintenant nous présentons deux méthodes pour étudier la stabilité d'un système non-linéaire

- Méthode indirecte basée sur la linéarisation.
- Méthode directe basée sur l'utilisation d'une fonction appelée fonction de Lyapunov.

1.7 Méthode indirecte (Linéarisation)

Le point critique de (1.41) se ramène à l'origine ($f(0) = 0$) par le changement de variable $X = x - a$ et le développement de Taylor de f au point $x = 0$ est donné par :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \dots$$

Lorsque x est très proche de 0, les termes non-linéaires devient négligeables devant le terme linéaire et la méthode indirecte de Lyapunov pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre 0, consiste à étudier le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax. \tag{1.41}$$

Avec :

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0) \end{pmatrix}$$

est la matrice Jacobienne de f en 0 . Le système (1.42) s'appelle le linéarisé du système non-linéaire (1.41) au point d'équilibre 0.

Définition 1.4. *Un point d'équilibre a de (1.41) est dit point hyperbolique si aucune valeur propre de la matrice $A = Df(a)$ n'admet pas la partie réelle nulle.*

Définition 1.5. *Un point d'équilibre a de (1.41) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(a)$ ont les parties réelles négatives, il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(a)$ ont les parties réelles positives et il est appelé point selle (col) si au moins une valeur propre de la matrice $A = Df(a)$ a la partie réelle positive et au moins une valeur propre a la partie réelle négative.*

Définition 1.6. *Deux systèmes autonomes sont dits topologiquement équivalent, dans un voisinage de l'origine (ou bien ont la même structure), s'il y a un homéomorphisme H*

appliquant l'ouvert \mathbb{U} contenant l'origine à l'ouvert \mathbb{V} contenant l'origine qui transforme les trajectoires du premier système dans \mathbb{U} vers les trajectoires du deuxième système dans \mathbb{V} et préserve la direction du temps.

Exemple 1.7.1. *Considérons les deux systèmes linéaires :*

$$\dot{x} = Ax \tag{1.42}$$

$$\dot{y} = By \tag{1.43}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Soit $H(x) = Rx$

avec

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $B = RAR^{-1}$.

Soit $y = H(x) = Rx$ ou $x = R^{-1}y$

alors

$$\begin{aligned} \dot{y} &= R\dot{x} \\ &= RAx \\ &= RAR^{-1}y \\ &= By. \end{aligned}$$

Théorème 1.7. (*Hartman-Grobman*) :

Soient \mathbb{U}, \mathbb{V} deux ouverts de \mathbb{R}^n contenant l'origine, $f \in C^1(\mathbb{U})$ et ϕ_t le flot du système non linéaire (1.41). Supposons que l'origine est un point d'équilibre hyperbolique. Alors il existe un homéomorphisme H de l'ouvert \mathbb{U} contenant l'origine vers l'ouvert \mathbb{V} contenant l'origine tel que pour chaque $x_0 \in \mathbb{U}$, il y a un intervalle ouvert $\mathbb{I}_0 \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et pour tout $t \in \mathbb{I}_0$.

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0).$$

i.e : H applique les trajectoires du système non-linéaire (1.41) vers les trajectoires de son linéarisé (1.42) et préserve la direction du temps.

Théorème 1.8. *Considérons le système (1.41) avec son linéarisé (1.42). Si toutes les valeurs propres de A ont leurs parties réelles négatives alors a est localement asymptotiquement stable.*

S'il existe en moins une valeur propre de A a partie réelle positive, alors a est instable.

Exemple 1.7.2. *Considérons le système d'un pendule avec frottement :*

$$\begin{cases} \dot{x} = & y \\ \dot{y} = & -ry - \frac{g}{l} \sin(x) \end{cases} \quad (1.44)$$

Avec les points d'équilibres $(n\pi, 0)$ pour tout entier n , la matrice jacobienne au point

$$(n\pi, 0) \text{ est : } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l}(L)^{n+1} & r \end{pmatrix},$$

et les valeurs propres sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{r \mp \sqrt{r^2 + (1)^{n+1} - \frac{4g}{L}}}{2}.$$

Si n est pair alors les deux valeurs propres sont à partie réelle négative. D'où le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable.

Si n est impair alors les deux valeurs propre sont réelles de signe opposés :

$$\lambda_1 = \frac{r - \sqrt{r^2 + \frac{4g}{L}}}{2} < 0 < \lambda_2 = \frac{r + \sqrt{r^2 + \frac{4g}{L}}}{2}.$$

D'où le point d'équilibre est un point selle (instable).

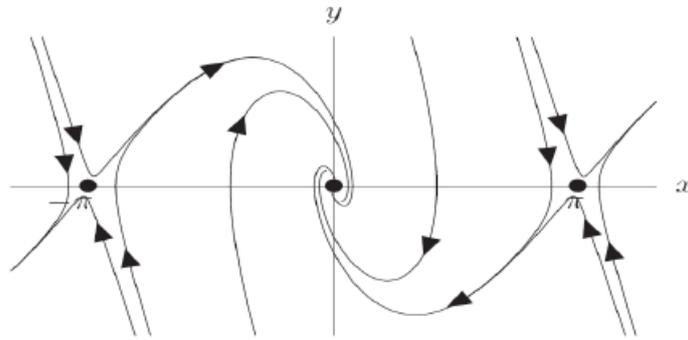


FIGURE 1.8 – Portrait de phase du pendule avec frottement

La figure (1.8) illustre le portrait de phase correspondant.

1.8 Méthode direct (fonction de Lyapunov)

La stabilité d'un point d'équilibre hyperbolique a de (1.41) est bien déterminé par les signes des parties réelles des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(a)$. La stabilité d'un point d'équilibre non-hyperbolique est typiquement plus difficile à déterminer. Dans cette section nous présentons la seconde méthode de Lyapunov qui est très utile pour déterminer la stabilité d'un tel point d'équilibre.

Définition 1.7. Si $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partiales par rapport à chaque composant de x , alors nous définissons le gradient de V comme étant la fonction vectorielle.

$$\text{grad}(V(x)) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right].$$

Définition 1.8. Soit a un point d'équilibre de (1.41). La fonction continument différentiable sur l'ouvert $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ contenant a est appelée fonction de Lyapunov pour le système (1.41) sur \mathbb{U} si :

1. $V(a) = 0$.
2. $V(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{U} - \{a\}$.
- 3.

$$\text{grad}(V(x)) \cdot f(x) \leq 0 \tag{1.45}$$

Pour $x \in \mathbb{U}$.

Si l'inégalité (1.46) est stricte pour $x \in \mathbb{U} - \{a\}$, alors V est appelée fonction de Lyapunov stricte pour le système (1.41) sur \mathbb{U} .

Notons que (1.46) implique que si $x \in \mathbb{U}$, alors :

$$\frac{d}{dt} V(\phi(t, x)) = \text{grad}(V\phi(t, x)) \cdot f(\phi(t, x)) \leq 0.$$

Le long du trajectoire $\phi(t, x)$ dans \mathbb{U} , alors V diminue le long des orbites résidant dans \mathbb{U} .

Théorème 1.9. Si V est une fonction de Lyapunov pour le système (1.41) dans l'ouvert \mathbb{U} contenant le point d'équilibre a , alors a est stable.

Si V est une fonction de Lyapunov stricte, alors a est asymptotiquement stable.

Exemple 1.8.1. *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x.y^2 \\ \dot{y} = -y + 3x^2y \end{cases} \quad (1.46)$$

L'origine est un point d'équilibre pour ce système.

Soit la fonction V définie par $V(x, y) = ax^2 + by^2$, avec a et b deux réels positifs à déterminer.

On a $V(0, 0) = 0$ et $V(x, y) > 0$, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$.

Et

$$\text{grad}(V(x)).f(x) = -2ax^2 - 2ax^2y^2 - 2by^2 + 6bx^2y^2.$$

Pour $a = 3, b = 1$, on a :

$$\text{grad}(V(x)).f(x) = -6x^2 - 2y^2 < 0, \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0).$$

Par conséquent le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

CHAPITRE 2

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES CHAOTIQUES

2.1 Définition sur le chaos

Généralement il n'existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos. Cependant, le chaos est défini comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut :

1. **La non-linéarité :**

Un système chaotique est un système dynamique non-linéaire, cependant qu'un système linéaire ne peut pas être chaotique.

2. **Le déterminisme :**

La notion de déterminisme signifie la capacité de prédire le futur d'un phénomène à partir d'un événement passé ou présent. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non-linéarités.

Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire

d'une quelconque particule. A l'opposé un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.

3. La sensibilité aux conditions initiales :

De très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.

4. L'imprévisible :

En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

5. L'irrégularité :

Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques.

Pratiquement, une dynamique chaotique peut être identifiée, en première analyse, par la reconnaissance de propriétés caractéristiques : attracteur étrange, spectre, sensibilité aux conditions initiales,..., etc.

2.2 Les avantages du chaos

En premier approche, les systèmes chaotiques sont des systèmes dynamiques qui évoluent dans un région bornée, qui possèdent une infinités des trajectoires non périodiques denses. Ils sont très sensibles aux conditions initiales ; c'est-à-dire que deux conditions initiales très proches conduisent à deux trajectoires qui s'éloignent rapidement l'une de l'autre. Les propriétés nous permettent théoriquement de générer un nombre infini de signaux chaotiques non corrélés d'un même système en utilisant différentes valeurs initiales. Ceci peut être employé pour générer des séries de nombre pseudo-aléatoires. Cette série est très utile dans certains cryptosystème traditionnel ou dans le protocole de TCP/IP. Une autre application de cette propriété est de produire des séquences chaotiques pour remplacer les séquences étalés conventionnelle utilisés dans les systèmes de spectre étalé

par séquence directe. Ensuite, il est à noter qu'en raison de leur propriété aléatoires, les signaux chaotiques ont des fonctions d'autocorrélation très étroites et des spectres de puissance à large bande proche du bruit blanc. Ainsi, la corrélation croisée de signaux chaotiques a une valeur très petits. Puisque le système a une trajectoire non périodique et est sensible aux conditions et aux paramètres initiaux, logiquement il peut aussi être employé pour crypter des messages.

Dans les systèmes de transmission conventionnels, des signaux sinusoïdaux sont employés comme signaux porteurs, ce qui offre une efficacité excellente dans une large bande. Cependant, la puissance transmise est concentrée dans une bande étroite, entraînant une densité spectrale de puissance élevée. Les problèmes principaux caractéristiques sont : l'atténuation élevée dans une bande de fréquence étroite ce qui peut mener à la perte de synchronisation, des niveaux élevés d'interférences avec d'autres utilisateurs du réseau, les possibilités élevées d'interception, etc. Au contraire, les signaux chaotiques sont habituellement identifiés comme du bruit et ont des bandes larges, ainsi ils peuvent être utilisés pour étaler l'information originale à bande étroite. Ainsi, en utilisant les signaux chaotiques pour crypter l'information, les signaux résultants sont des signaux de spectre écarté ayant une bande plus grande et des densités spectrales de puissance inférieures à des solutions usuelles.

2.3 Techniques de caractérisation du comportement chaotique

L'identification des caractéristiques des systèmes non linéaires à partir d'observations peut se faire grâce à des outils issus du domaine des dynamiques non linéaires tels que : l'espace des phases, le diagramme de bifurcation, les exposants de Lyapunov [14], [15].

2.3.1 L'espace de phases

A partir d'un état initial x_0 et après un régime transitoire, la trajectoire d'un système dynamique atteint une région limitée de l'espace de phase. Ce comportement asymptotique obtenu pour $t, k \rightarrow \infty$ est une des caractéristiques les plus importantes à étudier pour tout système dynamique. Si dans le cas d'un système linéaire la solution asymptotique est unique et indépendante de la condition initiale, en présence de non-linéarités, il existe une plus grande variété de régimes permanents, parmi lesquels :

1. Les points fixes ou points d'équilibre.
2. Les solutions périodiques.
3. Les solutions quasi-périodiques.
4. Le chaos.

2.3.1.1) Point fixe ou point d'équilibre :

Un point fixe ou point d'équilibre est une solution constante du système. Il est obtenu en résolvant le système d'équations :

- Cas discret :

$$X = G(X), \quad (2.1)$$

- Cas continu :

$$X = F(X) \Rightarrow \dot{x}(t) = 0, \quad (2.2)$$

Dans l'espace de phase, le point fixe se représente par un point. Sa valeur est déterminée en fonction de la condition initiale choisie. Ainsi, pour des conditions initiales différentes on peut retrouver plusieurs points d'équilibre. De même, ces points

peuvent être stables ou instables suivant que les trajectoires voisines convergent ou divergent entre-elles.

2.3.1.2) **Solution périodique :**

Le régime asymptotique permanent périodique correspond à une trajectoire dont les répliques d'une portion élémentaire sont espacées à des intervalles nT , $n \in \mathbb{N}^+$ et T la période de la solution.

Dans l'espace de phase, l'ensemble limite correspondant à cette solution est une courbe fermée. Si l'espace de phase est de dimension 2, la solution périodique sera un cercle, une ellipse, ou toute autre forme géométrique fermée. Pour revenir à son état précédent, le système met exactement une période.

Si on travaille dans un espace de phase de dimension supérieur à 2, il faut tenir compte de certaines subtilités. En effet, dans un tel espace, une trajectoire périodique ne se situe pas nécessairement dans un même plan et elle peut se développer dans différentes formes fermées, il est parfois impossible d'étudier la trajectoire générée par le système dans l'espace de phase. Pour éviter ce problème on utilise la section de Poincaré.

2.3.1.3) **Solution quasi-périodique :**

Une solution quasi-périodique correspond à une somme de solutions périodiques dont le rapport des périodes est un nombre irrationnel. Un régime quasi-périodique est représenté dans l'espace d'état par un tore.

2.3.1.4) **Solution chaotique :**

Une telle solution a une trajectoire asymptotique bornée avec une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ainsi, deux trajectoires de phases initialement voisines s'écartent toujours l'une de l'autre, et ceci quelle que soit leur proximité initiale.

La moindre erreur ou imprécision sur la condition initiale peut mener à un comportement très différent ce qui ne permet pas de faire une prédiction sur le comportement à long terme du système. Ainsi, bien que l'on traite de systèmes déterministes, il est

impossible de prévoir à long terme leurs comportements.

L'espace de phases est un outil qui permet d'avoir une évaluation qualitativement de la solution obtenue. La théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants montre que la solution générale est obtenue à partir des valeurs propres de l'équation caractéristique déduite de la matrice des dérivées partielles du système. Ainsi, la méthode de l'espace de phase qui est une technique qualitative simple et efficace permet la détermination du type de stabilité du point d'équilibre, à partir de la nature des valeurs propres de la matrice Jacobienne de la fonction f linéarisée au tour du point d'équilibre x_{eq} .

La linéarisation revient à poser :

$$x = x_{eq} + \delta x. \quad (2.3)$$

Ce qui donne

$$\dot{x} = \dot{x}_{eq} + \delta \dot{x}. \quad (2.4)$$

On obtient donc :

$$\dot{x}_{eq} + \delta \dot{x} = f(x_{eq} + \delta x). \quad (2.5)$$

Par le développement de Taylor du premier ordre de $f(x)$, on obtient

$$f(x_{eq} + \delta x) = f(x_{eq}) + f'(x_{eq})(x - x_{eq}). \quad (2.6)$$

D'où

$$\delta \dot{x} = Df(x_{eq})\delta x, \quad \delta x(0) = \delta x_0, \quad (2.7)$$

où $Df(x)$ représente la matrice jacobienne de f par rapport à x , tel que

$$Df = \frac{df_i}{dx_j} \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.8)$$

Cette équation montre l'évolution dans le temps d'une perturbation δx_0 au voisinage

du point d'équilibre. Il a été démontré que les parties réelles des valeurs propres de $Df(x_{eq})$ représentent la vitesse d'expansion $Re(\lambda_i) > 0$ ou de contraction $Re(\lambda_i) < 0$ d'une spirale alors que les parties imaginaires indiquent la fréquence de rotation.

Combinant les résultats démontrés pour des valeurs propres réelles et ceux correspondant à des valeurs propres complexes, il a été établi que quelle que soit la nature des valeurs propres, le type de stabilité est déterminé comme suit :

- Si $Re(\lambda_i) < 0$:

Pour toutes les valeurs propres, alors, toute perturbation suffisamment petite tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. On dit que le point x_{eq} est asymptotiquement stable. Toute les trajectoires tendent vers ce point quelque soient les conditions initiales.

- Si $Re(\lambda_i) > 0$:

pour toutes les valeurs propres, alors n'importe quelle perturbation peut augmenter quand $t \rightarrow \infty$. On dit que le point x_{eq} est instable ; Les trajectoires de phase s'éloignent du point considéré.

- S'il existe i et j tel que , alors $Re(\lambda_i) < 0$, $Re(\lambda_j) > 0$ il s'agit d'un point d'équilibre non stable.

2.3.2 Les exposants de Lyapunov

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système. Un système sensible à de très petites variations de la condition initiale aura un exposant positif (système chaotique). En revanche, l'exposant est négatif si le système n'est pas sensible à des petites variations des conditions initiales, les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Un système de dimension n possède n exposants de Lyapunov qui mesurent le taux de divergence suivant un des axes de l'espace de phase. L'apparition du chaos exige l'existence d'un exposant positif selon au moins un axe [16], tout en rendant compte que la somme des exposants est négative (respectivement nulle) pour les systèmes dissipatifs (respectivement conservatifs).

Un exposant de Lyapunov positif (respectivement négatif) selon une direction, indique

que la divergence entre deux trajectoires voisines augmente (respectivement diminue) exponentiellement avec le temps. C'est une caractéristique d'un attracteur.

A titre d'exemple, les types d'attracteurs d'un système tridimensionnel en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont donnés dans le tableau suivant :

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	- - -
Cycle limite	0 - -
Attracteur étrange	+ 0 -

Calcul les exposants de Lyapunov :

Les exposants de Lyapunov sont généralement calculés par l'algorithme de Wolf [17].

Le calcul des exposants de Lyapunov d'un système des équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \text{ où } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (2.9)$$

Le i -ème exposant de Lyapunov est défini en fonction du taux de croissance du i -ème axe principale i v par la formule suivant :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|V_i(t)\|}{\|V_i(t_0)\|}, i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.10)$$

Les vecteurs $V_i(t)$ se transforment d'après la formule :

$$\dot{V}_i(t) = J(x)V_i(t), i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.11)$$

où $J(x)$ est la jacobienne de f au point x .

$Ax = 0$ les vecteurs v_i $i = 1, 2, \dots, n$ sont définis par :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots, 0). \\
 V_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots, 0). \\
 &\quad \vdots \\
 V_n &= (0, 0, 0, 0, \dots, 1).
 \end{aligned}$$

Pour éviter la divergence, à chaque itération les vecteurs $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ seront orthonormés par le procédé de Gram S-chmidt :

$$\dot{V}_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|}, \dot{V}_2 = \frac{V_2 - (V_2, \dot{V}_1)\dot{V}_1}{\|V_2 - (V_2, \dot{V}_1)\dot{V}_1\|}, \dots, \dot{V}_n = \frac{V_n - (V_n, \dot{V}_{n-1})\dot{V}_{n-1} - \dots - (V_n, \dot{V}_1)\dot{V}_1}{\|V_n - (V_n, \dot{V}_{n-1})\dot{V}_{n-1} - \dots - (V_n, \dot{V}_1)\dot{V}_1\|},$$

2.4 Exemples de systèmes chaotiques

Dans cette partie, nous présentons un exemple d'un système dynamique chaotique continu. On considère l'exemple du célèbre système de Zhou [18] donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = (b - z)x, \\ \dot{z} = xy + cz, \end{cases} \quad (2.12)$$

Avec les paramètres donnés $\sigma = 10, b = 16, c = -1$ et les conditions initiales :

$(x_0, y_0, z_0) = (-0.05, 0.05, -0.05)$., les attracteurs de ce système sont présentés dans la FIGURE (2.1) Les points fixes sont la solution de l'équation :

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0, \\ (b - z)x = 0, \\ xy + cz = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y, \\ z = b, \\ y^2 + cb = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

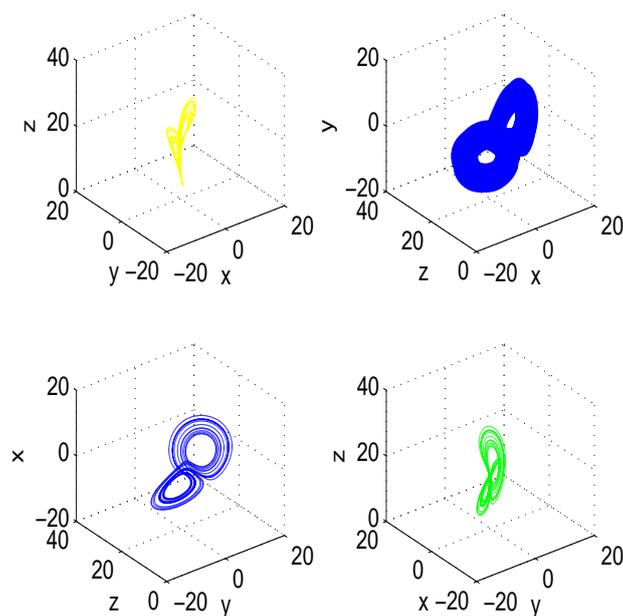


FIGURE 2.1 – Attracteurs du système de Zhou

Dans le cas générale :

$$\begin{cases} x = y, \\ z = b, \\ y^2 = -bc, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y, \\ z = b, \\ y = \pm\sqrt{-bc}, \end{cases} \quad (2.14)$$

Donc le système admet en général trois points fixes :

$$x_{f_1} = (0, 0, 0), x_{f_2} = (\sqrt{-bc}, \sqrt{-bc}, b), x_{f_3} = (-\sqrt{-bc}, -\sqrt{-bc}, b),$$

D'après la FIGURE (2.2) :

Pour $\sigma = 1$, les trois exposants du Lyapunov sont :

$$L_1 = -2.215, L_2 = 0, L_3 = 0.208.$$

Il y a $L_3 > 0$, donc le système est bien chaotique.

De plus $L_1 + L_2 + L_3 = -2.007 < 0$. Donc le système de Zhou est dissipative.

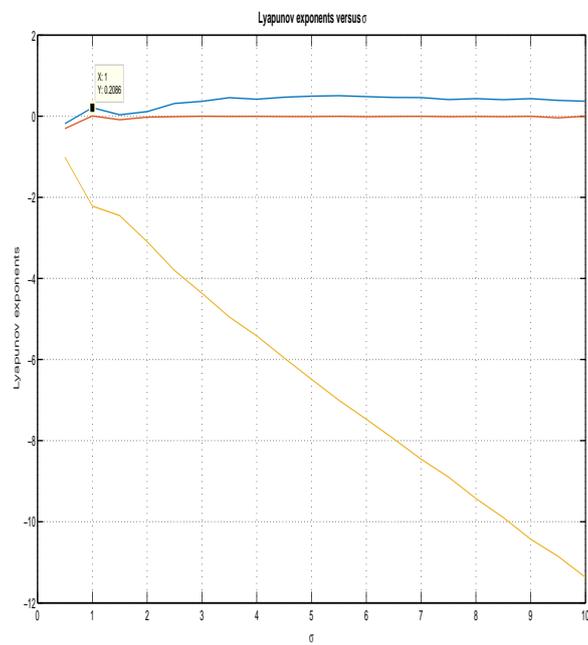


FIGURE 2.2 – Les exposants du Lyapunov

CHAPITRE 3

SYNCHRONISATION GÉNÉRALISÉE ENTRE DEUX SYSTÈMES CHAOTIQUE ET HYPER-CHAOTIQUE

Le problème de la synchronisation de deux systèmes dynamiques chaotiques va nous ramener à un autre problème qui est celui de la stabilité du système erreur au voisinage de l'origine, à cet effet, et dans cette partie on va donner une forme plutôt générale du système erreur et nous allons fournir certaines conditions simples, explicites et facile à vérifier pour la stabilité globale et sa solution.

3.1 Résultats théoriques

Considérons le système émetteur général suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{3.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système d'émetteur (3.1), $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définit un champ vectoriel dans l'espace n -dimensionnel. D'autre part, le système récepteur est donné par la relation suivante :

$$\dot{y}(t) = g(y(t)) + U, \quad (3.2)$$

où $y(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'état du système récepteur (3.2), $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ définit un champ vectoriel dans l'espace m -dimensionnel, $U \in \mathbb{R}^m$ est un contrôle (linéaire ou non) conçu de telle sorte que la synchronisation entre les deux systèmes (3.1) et (3.2) soit réalisée.

Définition 3.1. *Le système émetteur (3.1) et le système de récepteur (3.2) sont dits synchronisés en dimension D , s'il existe un contrôleur $U \in \mathbb{R}^D$ et des fonctions différentiables $Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^D$ et $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^D$ ($m > n$) de telle sorte que l'erreur de synchronisation :*

$$e(t) = Q(y(t)) - S(x(t)), \text{ satisfies } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0.$$

3.2 Synchronisation entre les systèmes $m - D$ et $n - D$ en $n - D$

Afin d'observer le comportement de synchronisation entre le système chaotique $n - D$ et le système hyperchaotique $m - D$ en $n - D$, supposons que le système émetteur est donné par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)), \quad (3.3)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont la partie linéaire et la partie non linéaire du système (3.3), respectivement. Eq. (3.3) est considérée comme système émetteur. En introduisant un contrôle additif $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$, alors le système de récepteur

contrôlée est donné par :

$$\dot{y}(t) = g(y(t)) + U, \quad (3.4)$$

où $y(t) \in \mathbb{R}^m$. Afin d'obtenir notre but, nous définissons l'erreur de synchronisation par :

$$\dot{e}(t) = (A - L_1)e(t) + R + J_Q U, \quad (3.5)$$

où

$$R = (L_1 - A)J_Q y(t) - ((L_1 - A)J_S + J_S A)x(t) + J_Q g(y(t)) - J_S f(x(t)), \quad (3.6)$$

et $L_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de contrôle à déterminer ultérieurement, J_Q et J_S sont des matrices jacobiniennes de Q et S respectivement. Supposons que $U = (u_1, u_2, \dots, u_n, 0, 0, \dots, 0)$. Alors le système erreur (3.5) devient :

$$\dot{e}(t) = (A - L_1)e(t) + R + J_{\hat{Q}} \hat{U}, \quad (3.7)$$

où :

$$\hat{Q} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

et $\hat{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^t$ est la nouvelle loi de contrôle. Nous définissons la fonction de contrôle \hat{U} comme suit :

$$\hat{U} = -(J_{\hat{Q}})^{-1} R, \quad (3.8)$$

où $(j_{\hat{Q}})^{-1}$ est l'inverse de $j_{\hat{Q}}$. Dans le cadre de ce choix particulier, le système erreur (3.7) devient

$$\dot{e}(t) = (A - L_1)e(t). \quad (3.9)$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Si L_1 est choisi de telle sorte que toutes les valeurs propres de $A - L_1$ soient strictement négatives, alors le système d'émetteur (3.3) et le système récepteur (3.4) sont globalement synchronisés.*

Preuve 2. *Supposons que le dynamique du système erreur est donnée par la relation (3.9). Puisque les valeurs propres de $A - L_1$ sont strictement négatives, alors d'après le critère de stabilité du système linéaire, toutes solutions de système d'erreur (3.9) tendent vers 0, quand t tend vers l'infini. Par conséquent, les systèmes (3.3) et (3.4) sont globalement synchronisés. Ceci complète la preuve.*

3.3 Synchronisation entre les systèmes $n - D$ et $m - D$ en $m - D$

De même, afin d'observer le comportement de synchronisation entre le système chaotique $n - D$ et le système hyperchaotique $m - D$ en $m - D$, supposons que le système émetteur est donné par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (3.10)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

En introduisant un contrôle additif $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$, alors le système de récepteur contrôlée est donné par :

$$\dot{y}(t) = By(t) + g(y(t)) + U. \quad (3.11)$$

où $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice réelle, $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est la partie non linéaire et $U \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle. Afin d'obtenir notre but, nous définissons l'erreur de synchronisation par :

$$\dot{e}(t) = (B - L_2)e(t) + R + J_Q U, \quad (3.12)$$

où

$$R = ((B - L_2)J_Q + J_Q B)y(t) - (B - L_2)J_S x(t) + J_Q g(y(t)) - J_S f(x(t)), \quad (3.13)$$

et $L_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice de contrôle à déterminer ultérieurement. Pour obtenir une synchronisation entre les systèmes (3.10) et (3.11), nous choisissons le contrôleur U comme :

$$U = -(J_Q)^{-1}R, \quad (3.14)$$

où $(J_Q)^{-1}$ est l'inverse de J_Q . Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Si L_2 est choisi de telle sorte que toutes les valeurs propres de $B - L_2$ soient strictement négatives, alors le système d'émetteur (3.10) et le système récepteur (3.11) sont globalement synchronisés.*

Preuve 3. *Même preuve du théorème (3.1)*

3.4 Simulation numérique

Dans cette partie, on va présenter la synchronisation généralisée ainsi que la simulation numérique entre les systèmes chaotiques et hyperchaotiques.

3.4.1 Simulation des systèmes 3D et 4D (cas d=3)

Dans ce cas, supposons que le système chaotique de simplest memristor [19] comme système émetteur. Le dynamique de ce système est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = a_1x_2, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -b_1(x_1 + M(x_3)x_2), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = -x_2 - \alpha_1x_3 + x_2^2x_3, \end{cases} \quad (3.15)$$

où $M(x_3(t))$ est la fonction de memristor définie par :

$$M(x_3(t)) = \gamma_1x_3^2(t) - \beta_1, \quad (3.16)$$

En utilisant la méthode de Runge-Kuta de l'ordre quatre, les attracteurs de système(3.15) avec les valeurs des paramètres $L = 3H$, $C = 1$, F , $\alpha_1 = 0.9$, $\beta_1 = 3$ et $\gamma_1 = 0.4$ sont

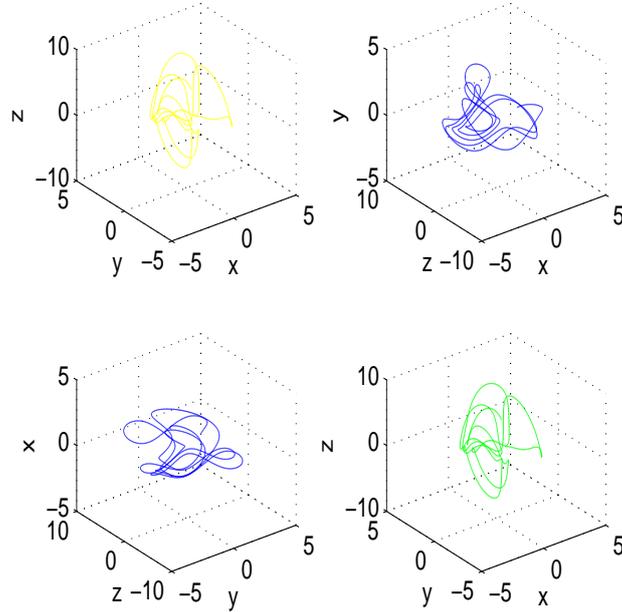


FIGURE 3.1 – Attracteurs de système MBSCCS

présentés dans la FIGURE (3.1).

La partie linéaire A et la partie nonlinéaire f du système (3.15) sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ -b_1 & b_1\beta_1 & 0 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}, f(X(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -b_1\gamma_1 x_3^2 \\ x_2^2 x_3 \end{pmatrix}$$

respectivement.

Supposons aussi que le système de Lorentz [20] est le système récepteur. Le dynamique de ce système avec un contrôle ajusté est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = a_2(y_2 - y_1) + y_4 + u_1, \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = -y_1 y_3 + c_2 y_1 - y_2 + u_2, \\ \frac{dy_3(t)}{dt} = y_1 y_2 - b_2 y_3 + u_3, \\ \frac{dy_4(t)}{dt} = -y_2 y_3 + r_1 y_4 + u_4, \end{cases}, \quad (3.17)$$

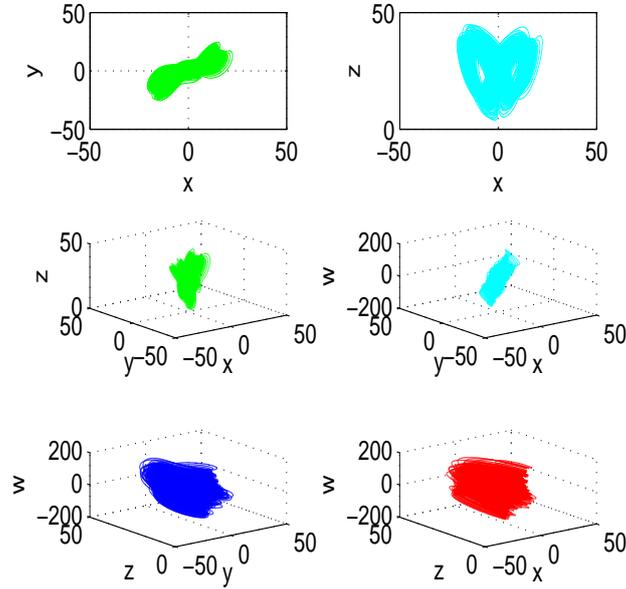


FIGURE 3.2 – Attracteurs de système de Lorentz 4

les attracteurs de système hyperchaotique de Lorentz (3.17) (avec $u_i = 0$, pour tout $i = 1, 2, 3, 4$) et $a_2 = 10$, $b_2 = \frac{8}{3}$, $c_1 = 28$ et $r_1 = -1$ sont présentés dans la FIGURE (3.2).

La partie linéaire B et la partie nonlinéaire g du système (3.17) sont données par

$$B = \begin{pmatrix} -a_2 & a_2 & 0 & 1 \\ c_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 \end{pmatrix}, \quad g(Y(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \\ -y_2 y_3 \end{pmatrix}$$

respectivement.

$$\text{Choisissons } Q(y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{pmatrix} y_1 - \frac{1}{r_1} y_4 \\ 2(y_2 - y_4) \\ 4y_3 \end{pmatrix} \text{ et } S(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + a_1 x_3 \\ x_2 - \frac{b_1}{a_1} \beta x_1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$J_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{r_1} \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad ((J_Q)^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} \text{ et } J_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ -\frac{b_1}{a_1}\beta_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour étudier la synchronisation entre les système (3.16) et (3.17), on définit le système erreur comme

$$e(t) = Q(Y(t)) - S(X(t)),$$

i.e :

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{r_1}(-y_4 - r_1x_1 + r_1y_1) \\ e_2 = -x_1 + 2y_2 - 2y_4 - a_1x_3 \\ e_3 = \frac{1}{a_1}(-a_1x_2 + 4a_1y_3 + b_1\beta_1x_1) \end{cases}$$

Soit L_1 donnée par

$$L_1 = \begin{pmatrix} -1 & -a_1 & 0 \\ b_1 & -1 - b_1\beta_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 - 1 \end{pmatrix}$$

Alors, pour

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{r_1}(-r_1e_1 - y_2y_3), \\ u_2 = -0.5e_2 + y_1y_3 - y_2y_3 + 0.5a_1x_2^2x_3, \\ u_3 = -0.25e_3 - y_1y_2 - 0.25b_1\gamma_1x_3^2, \\ u_4 = 0, \end{cases}$$

Le système erreur devient

$$\frac{de_i(t)}{dt} = -e_i, \text{ pour tout } i = 1, 2, 3. \quad (3.18)$$

Puisque toutes les valeurs propre de ce dernier système sont -1 , alors d'après le critère de stabilité du système linéaire, toute solutions de système d'erreur (3.18) tendent vers 0, quand t tend vers l'infini. Par conséquent, les systèmes (3.15) et (3.17) sont globalement synchronisés. Ceci complète la preuve. L'évolution de système erreur(3.18)est présenté dans la FIGURE(3.3).

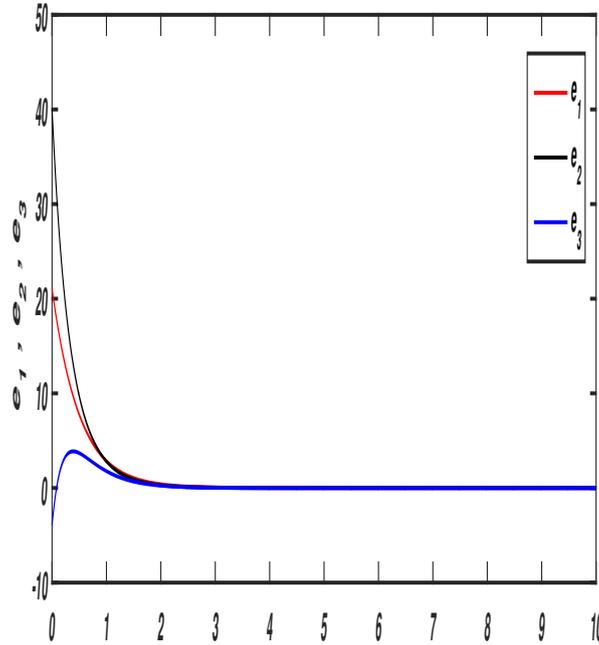


FIGURE 3.3 – Evolution de système erreur 3

3.4.2 Simulation des systèmes 3D et 5D (cas d=5)

Dans ce cas , supposons que le système de Lorentz de l'ordre cinq [20] comme un système récepteur. Le modèle mathématique de ce système est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1(t)}{dt} = -\delta(y_1 - y_2) + y_4 + u_1, \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = -y_1y_3 + r_2y_1 - y_2 - y_5 + u_2, \\ \frac{dy_3(t)}{dt} = y_1y_2 - \beta_2y_3 + u_3, \\ \frac{dy_4(t)}{dt} = -y_1y_3 + k_1y_4 + u_4, \\ \frac{dy_5(t)}{dt} = k_2y_2 + u_5, \end{array} \right. , \quad (3.19)$$

Avec les valeurs des paramètres $\delta = 10$, $\beta_2 = \frac{8}{3}$, $r_2 = 28$, $k_1 = 2$ et $k_2 \in (2, 12)$. les attracteurs de système de Lorentz (3.19) (avec $u_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$), sont présentés dans la FIGURE (3.4).

La partie linéaire B et la partie nonlinéaire g du système (3.19) sont données par :

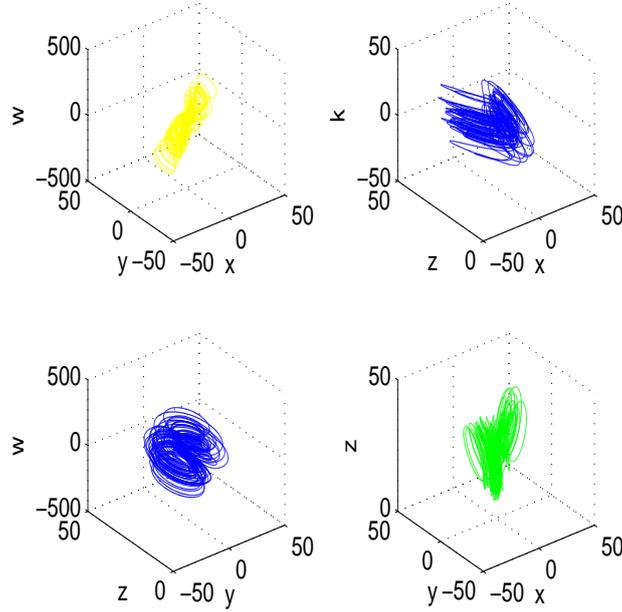


FIGURE 3.4 – Attracteurs de système de Lorentz de l'ordre 5

$$B = \begin{pmatrix} -\delta & \delta & 0 & 1 & 0 \\ r_2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g(X(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \\ -y_1 y_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Supposons aussi que le système (MBSCCS) (3.15) comme système émetteur.

$$\text{Ici, nous choisissons } Q(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = \begin{pmatrix} y_1 - y_5 \\ y_2 - y_4 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \text{ et } S(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + a_1 x_3 \\ -\frac{b_1}{a_1} \beta_1 x_1 + x_2 \\ x_2 + b_1 \beta_1 x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$J_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (J_Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ -\frac{b_1}{a_1}\beta_1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b_1\beta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour étudier la synchronisation entre les système (3.15) et (3.19), on définit le système erreur comme

$$e(t) = Q(Y(t)) - S(X(t)),$$

i.e :

$$\begin{cases} e_1 = -x_1 + y_1 - y_5, \\ e_2 = -x_1 + y_2 - y_4 - a_1x_3, \\ e_3 = \frac{1}{a_1}(-a_1x_2 + a_1y_3 + b_1\beta_1x_1), \\ e_4 = -x_2 + y_4 - b_1\beta_1x_3, \\ e_5 = -x_3 + 2y_5, \end{cases}$$

Choisissons L_2 comme :

$$L_2 = \begin{pmatrix} \delta - 1 & -\delta & 0 & -1 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta_2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

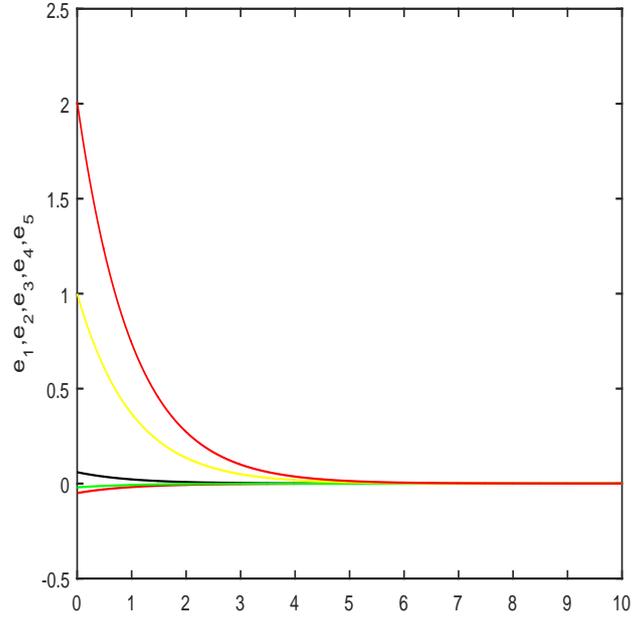


FIGURE 3.5 – Evolution de système erreur 5

Alors, pour :

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 - e_5 + x_2^2 x_3 \\ u_2 = -e_2 - e_4 + y_1 y_3 - b_1 \gamma_1 x_3^2 + a_1 x_2^2 x_3 + b_1 \beta_1 x_2^2 x_3 \\ u_3 = -e_3 - y_1 y_2 - b_1 \gamma_1 x_3^2 \\ u_4 = -e_4 + y_1 y_3 - b_1 \gamma_1 x_3^2 + b_1 \beta_1 x_2^2 x_3 \\ u_5 = -e_5 + x_2^2 x_3 \end{cases}$$

le système erreur devient :

$$\frac{de_i(t)}{dt} = -e_i, \text{ pour tout } i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (3.20)$$

Puisque toutes les valeurs propre de ce dernier système sont -1 , alors d'après le critère de stabilité du système linéaire, toute solutions de système d'erreur (3.20) tendent vers 0, quand t tend vers l'infini. Par conséquent, les systèmes (3.15) et (3.19) sont globalement synchronisés. Ceci complète la preuve. L'évolution de système erreur(3.20)est présenté dans la FIGURE(3.5).

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire, nous avons présenté une étude sur la synchronisation généralisée entre deux systèmes chaotiques et hyperchaotiques. Pour atteindre l'objectif de cette étude nous avons divisé notre mémoire en trois chapitres :

- Le premier chapitre est consacré à la présentation des notions de base sur les systèmes dynamiques tels que : la définissons des systèmes dynamiques, le théorème fondamentale d'existence et d'unicité pour le système autonome non linéaire et quelques notions de la stabilité d'un système dynamique non linéaire, notamment la méthode indirecte qui basée sur la linéarisation et la méthode directe qui basée sur l'utilisation d'une fonction appelée fonction de Lyapunov.

-Le deuxième chapitre est consacré à la définition du chaos et ses caractéristiques. Ensuite, nous nous sommes passés par les moyens de détection du chaos, notamment la sensibilité aux conditions initiales, L'attracteurs chaotiques et les exposants de Lyapunov .

Dans le troisième chapitre nous avons proposé une méthode simple de synchronisation généralisée de deux différents systèmes chaotiques et hyper chaotiques. Cette méthode est basée sur le critère de stabilité des systèmes linéaires, pour garantir la stabilité du système erreur. Pour cela, nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes pour achever la synchronisation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. M. Pecora and T. L. Carroll, Synchronization in chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.* 64, 821, (1990).
- [2] Fujisaka, H. and T. Yamada, Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems, *Prog. Theor. Phys.* 69 pp. 32 :90 ; (1983)
- [3] E. R. Rosa, E. Ott, and M. H. Hess, "Transition to phase synchronization of chaos, " *Phys. Rev. Lett.* 80, pp. 1642-1645, (1998).
- [4] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, and J. Kurthsn, From Phase to Lag Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators, *Phys. Rev. Lett.* 78, pp. 4193-4196 ; (1997).
- [5] L. Kocarev and U. Parlitz, General approach for chaotic synchronization with applications to communication, Phys. with a scalar transmitted signal, *Phys. Rev. Lett.* 76, 904- 907(1996).
- [6] S. Boccaletti and D. L. Valladares., Characterization of intermittent lag synchronization, *Phys. Rev. E*, 62 ;pp. 7497- 7500, (2000).
- [7] M.A. Zaks, E.-H. Park, M.G. Rosenblum, and J. Kurths, Alternating Locking Ratios in Imperfect Phase Synchronization, *Physical Review Letters*, 82, pp. 4228-4231, (1999).
- [8] Femat, R., Solis-Perales, G., On the chaos synchronization phenomena, *Phys. Letts. A* 262, 50, (1999).

- [9] Blasius, B., Stone, L. : Chaos and phase synchronization in ecological systems. *Int. J. Bifur. Chaos* 10, 2361–2380 (2000).
- [10] Lakshmanan, M., Murali, K. : *Chaos in Nonlinear Oscillators : Controlling and Synchronization*. World Scientific, Singapore (1996).
- [11] Han, S.K., Kerrer, C., Kuramoto, Y. : Dephasing and bursting in coupled neural oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 75, 3190–3193 (1995).
- [12] Mengue, A., Essimbi, B. : Secure communication using chaotic synchronization in mutually coupled semiconductor lasers. *Nonlin. Dyn.* 70, 1241–1253 (2012).
- [13] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems Texts in applied mathematics*. Springer, New York., 2006.
- [14] F. Alain, “Contribution à la prédiction et au contrôle des comportements apériodiques dans les convertisseurs électromécanique. Application de la théorie du chaos,” Thèse de doctorat, Université de Reims France, 2005.
- [15] T. Sauer, C. Grebogi and J. York, “How long do numerical chaotic solutions remain valid?,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 79, pp. 59-62, 1997.
- [16] G. Qi, S. Du, G. Chen, Z. Chen and Z. Yuan, “On a four-dimensional chaotic system,” *Chaos, Solution and Fractals*, Vol. 23, pp. 1671-1682, 2005.
- [17] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney and J.A. Vastano, “Determining Lyapunov exponents from a time series,” *Physica, D.* 16, pp. 285-317, 1985.
- [18] W., Y. Xu, H. Lu and L. Pan. On dynamics analysis of a new chaotic attractor, *Physics Letter A.*, 372 : 5773-5777 (2008).
- [19] Abdelouahab, MS., Lozi, R. : Hopf Bifurcation and Chaos in Simplest Fractional-Order Memristor-based Electrical Circuit. *IJIAM* 6, (2), 105.- 119 (2015).
- [20] K . S. OJO, S. T. OGUNJO, A. N. NJAH and I A. F. UWAPE. Increased order generalized synchronization of chaotic and hyperchaotic systems. *Pramana .J. Phys.*, Vol. 84, No. 1, pp. 33.45(2015)

Résumé :

La synchronisation généralisée de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue suivant le comportement de l'autre. En mathématiques la synchronisation de deux systèmes consiste à rapprocher leurs trajectoires jusqu'à ce qu'elles finissent par être confondues, sous l'effet d'une force d'accouplement exercée sur les deux systèmes.

Dans ce travail, on a proposé une méthode simple de synchronisation généralisée de deux différents systèmes chaotiques et hyper chaotique, en utilisant la méthode de contrôle continue et en basant sur le critère de la stabilité des systèmes linéaires, pour garantir la stabilité du système erreur. Pour cela, on a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour achever la stabilité de système erreur. On a montré l'effet de cette méthode pour la synchronisation, en donnant deux exemples numériques.

Mots clés : Systèmes chaotiques, Systèmes hyper chaotiques, Accouplement unidirectionnel, Synchronisation généralisée.

Abstract:

The generalized synchronization of two dynamic systems means that each evolves following the behavior of the other. In mathematics, synchronizing two systems is to bring their trajectories until the effect of a coupling power exerted on the two systems.

In this work we proposed a simple method of synchronizing two different chaotic and hyper chaotic systems via active control, based on the linear system stability criterion to ensure the stability of the error system. Where we obtained the necessary and sufficient conditions for the generalized synchronization. The effect of this method on synchronization has been shown by giving two numerical examples.

Key words: chaotic systems, hyper chaotic systems, Coupling unidirectional, Generalized synchronization.