الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

# Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

**En: Mathématiques**

**Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées**

# *Le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires*

**Préparé par :**

*Benmerzoug Nour El Houda*

**Devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mme. Fadel Wahida | M.A.B | C.U.Abd Elhafid Boussouf | Président |
| Mme. Sekhane Chafika | M.A.B | C.U.Abd Elhafid Boussouf | Rapporteur |
| Mme. Meskine Habiba | M.A.B | C.U.Abd Elhafid Boussouf | Examinateur |

**Année Universitaire : 2016/2017**

# Remerciements

Avant tout, je tiens à remercie le bon Dieu tout puissant qui m'a aidé à terminer ce travail.

Je remercie Mme Sekhane Chafika , qui a encadré ce mémoire avec beaucoup de patience et de gentillesse. Elle a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes. Je la remercie très sincèrement pour sa disponibilité

Mes vifs remerciements au membre du jury Mme Meskine Habiba et Mme Fadel Wahida qui a accepté d'avoir un membre du jury et d'examiner ce travail.

Finalement,un grand remerciement à toutes mes familles pour leur patience et soutien, les personnes qui ont contribuées de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci

Nour El Houda

## الإهـــداء

**بسم الله الرحمن الرحيم**

**(قل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون)**

**صدق الله العظيم**

إلهي لايطيب الليل إلا بشكرك ولايطيب النهار إلى بطاعتك .. ولاتطيب اللحظات إلا بذكرك .. ولاتطيب الآخرة إلا بعفوك .. ولاتطيب الجنة إلا برؤيتك

**"الله جل جلاله"**

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة .. ونصح الأمة .. إلى نبي الرحمة ونور العالمين

**"سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم"**

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار.. إلى من علمني العطاء بدون انتظار.. إلى من أحمل أسمه بكل افتخار.. أرجو من الله أن يمد في عمرك لترى ثمارالقد حان قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك نجوم أهتدي بها اليوم وفي الغد وإلى الأبد..

**والدي العزيز**

الى ملاكي في الحياة .. إلى معنى الحب وإلى معنى الحنان و التفاني .. إلى بسمة الحياة وسر الوجود

إلى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب

**أمي الحبيبة**

إلى من رافقتني منذ أن حملنا حقائب صغيرة ومعك سرت الدرب خطوة بخطوة وماتزال ترافقني حتى الآن.. إلى شمعة متقدة تنير ظلمة حياتي..

**أختي: مريم Mariya**

الى أخي ورفيق دربي في هذه الحياة ، معك أكون أنا و بدونك أكون مثل أي شيء ، إلى من أرى التفاؤل بعينه والسعادة في ضحكته .. في نهاية مشواري أريد أن أشكر ك على مواقفك النبيلة إلى من تطلعت لنجاحي بنظرات الأمل

**إخوتي: رمزي Bng , حمزة, محمد**

إلى الإخوة و الأخوات ، إلى من تحلو بالإخاء وتميزوا بالوفاء والعطاء إلى ينابيع الصدق الصافي إلى من معهم سعدت ، وبرفقتهم في دروب الحياة الحلوة والحزينة سرت إلى من كانوا معي على طريق النجاح والخير إلى من عرفت كيف أجدهم وعلموني أن لا أضيعهم

**أصدقائي**

*Nour El Houda*

# Le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires

Benmerzoug Nour El Houda

3 juin 2017

Centre Universitaire de MILA

# Table des matières

# Notations

## Notations générales

$D(A)$ **:** domaine de l'opérateur $A$.

$G(A)$ **:** graphe de l'opérateur $A$.

$R(A)$ **:** l'image de l'opérateur $A$.

$N(A)$ **:** noyau de l'opérateur $A$.

$\rho(A)$ **:** l'ensemble résolvant de $A$.

$\sigma(A)$ **:** spectre de $A$.

$\sigma(X,Y)$ **:** la topologie faible sur $X$.

$V_p(A)$ **:** l'ensemble des valeurs propres de $A$.

$A^*$ **:** l'opérateur adjoint de l'opérateur $A$.

$\|\cdot\|$ **:** la norme.

$|\;|$ **:** la norme Hilbertienne.

$(\cdot\,,\cdot)$ **:** produit scalaire dans la dualité $X'$, $X$.

$H$ **:** un espace de Hilbert.

$X'$ **:** l'espace dual de $X$.

$L(H)$ **:** l'espace des applications linéaires continus de $H$ de $H$.

$K(X,X) = K(X)$ **:** l'ensemble des applications linéaires compactes de $X$ dans $X$.

$B(x_0;r) = \{x; \|x - x_0\| < r\}$ **:** boule ouverte centrée en $x_0$ de rayon $r$.

$B_x$ **:** boule unité de l'espace normé $X$.

$\bar{\Omega}$ **:** est l'adhérence de $\Omega$.

$J$ **:** injection canonique de $X$ dans $X''$.

$\sigma(X,Y)$ **:** topologie faible de $X$ dans $Y$.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) =$ grad $u$.

$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} =$ Laplacien de $u$ .

# Espaces fonctionnels

$\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **:** ouvert.

$\partial\Omega$ **:** frontière de $\Omega$.

$v_{|\partial\Omega}$ **:** elle signifie que la trace de $v$ su $\partial\Omega$ est nulle.

$L(X,Y)$ **:** l'espace normé d'opérateurs linéaires bornés de $X$ dans $X$.

$L^2(\Omega)$ **:** l'espace de Lebesgue d'exposant 2 sur $\Omega$.

$D(\Omega)$ **:** l'espace des fonctions différentiables et à support compact dans $\Omega$.

$\mathcal{C}_0(\Omega)$ **:** l'espace des fonctions continues nulles au bord de $\Omega$.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ **:** l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $\Omega$.

$\mathcal{C}_c(\Omega)$ **:** fonctions continues *à* support compact dans $\Omega$.

$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$**.**

$\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ **:** fonctions continues sur $\Omega$.

$\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ **:** fonctions $u$ de $\mathcal{C}^2(\Omega)$.

$H^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ **:** l'espaces de sobolev.

# Introduction Générale

La plupart des phénomènes physiques se modélisent grâce aux équations aux dérivées partielles. Le mathématicien s'intéresse plus particulièrement à l'existence et à l'unicité de solutions de telles équations. Le théorème de Hille-Yosida est une alternative au théorème de Cauchy-Lipschitz pour la résolution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

pour une famille d'opérateurs linéaires $A$ non bornés.
Au cours de ce mémoire, nous nous consacrons en premier lieu à poser les bases théoriques nécessaires à la démonstration du théorème de Hille-Yosida. En particulier nous étudions les propriétés générales de l'opérateur $A$ puis celles-ci sont utilisées pour examiner le cas du laplacien. Nous donnons dans un second temps une application du théorème de Hille-Yosida à l'équation de la chaleur et nous nous intéressons plus généralement dans une seconde partie aux problèmes d'évolution semi-linéaires et en particulier à l'équation de la chaleur semi-linéaire, avec finalement l'étude d'un terme source particulier.

# Chapitre 1

# Opérateurs

## 1.1 Opérateurs non-bornés

### 1.1.1 Définitions

soit $X$ et $Y$ deux espaces de Banach.

**Définition 1.1.**
*Une application $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$, $x \longmapsto Ax$ est dit opérateur.*
*Un opérateur $A$ est dit linéaire si :*
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in D(A)$ *on a :* $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

**Définition 1.2.**
*Un opérateur $A$ est continue au $x_0$ si et seulement si :*
$\forall x \in X$ *tel que* $x \longmapsto x_0 \Rightarrow Ax \longmapsto Ax_0$.
*Autrement dit :* $\forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \|x - x_0\|_X < \sigma \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_Y < \epsilon$.

**Définition 1.3.**
*Un opérateur linéaire $A$ est borné s'il existe $C \geq 0$ telle que,*

$$\forall x \in D(A) : \|Ax\| \leq C \|x\|$$

*On dit sinon $A$ est non borné.*

**Définition 1.4.**
*Un opérateur $A$ est dit fermé si $G(A)$ est fermé dans $X \times Y$.*

**Définition 1.5.**
*Un opérateur $A$ est dissipatif si* $\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \|x - \lambda Ax\| \geq \|x\|$.
*Si de plus $(I - \lambda A)$ est surjectif on dit que $A$ est m-dissipatif.*

**Définition 1.6.**
*$A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire non-borné*

1. *$A$ est monotone si $-A$ est dissipatif.*
2. *$A$ est maximal monotone si $-A$ est m-dissipatif.*
3. *$A$ est m-accétif si $\overline{D(A)} = X$ et l'opérateur $-A$ est m-dissipatif.*

**Définition 1.7.**
*soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur non-borné à domaine dense, il existe un unique opérateur $A^* : D(A^*) \subset Y' \longrightarrow X'$, appelé adjoint de $A$ qui vérifie :*

$$\forall x \in D(A), \forall v \in D(A^*), (v, Ax)_{Y',Y} = (A^*v, x)_{X',X}$$

*De plus, soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire non borné avec $\overline{D(A)} = H$.*

*On peut considérer $A^*$ comme un opérateur non-borné sur $H$ en identifiant $H$ et $H'$. on a alors les définitions suivantes :*

1. *L'opérateur $A$ est dit symétrique si : $\forall x, x' \in D(A), (Ax, x') = (x, Ax')$.*
2. *L'opérateur $A$ est dit autoadjoint si : $A^* = A$ c'est a dire :*
   - *$D(A^*) = D(A)$.*
   - *pour tout $x \in D(A), A^*x = Ax$.*

### 1.1.2 Propriétés

**Proposition 1.1.** *[6]*
*Soit $A$ un opérateur maximal monotone, $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$. Alors :*

1. *$D(A)$ est dense dans $H$.*
2. *$G(A)$ est fermé dans $H \times H$.*
3. *pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ sur $H$, $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur non-borné et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{L(H)} \leq 1$.*

**Proposition 1.2.** *[6]*
*Soit $A$ un opérateur monotone et de domaine dense. Alors :*
*$A$ est maximal monotone $\Leftrightarrow$ $A^*$ est maximal monotone et $G(A)$ est fermé.*

**Proposition 1.3.** *[6]*
*Soit $A$ un opérateur monotone et de domaine dense. Alors :*
*$A$ est symétrique $\Leftrightarrow$ $A$ est autoadjoint.*

**Proposition 1.4.** *[6]*
*Soit $A$ un opérateur linéaire de domaine dense si :*

1. *$G(A) \subset G(A^*)$.*
2. *$A$ est monotone.*

*alors :*
*$A$ est maximal monotone $\Leftrightarrow$ $A$ est autoadjoint.*

## 1.2 Opérateurs compacts

Soit $L(X,Y)$ un espace normé d'opérateurs linéaires bornes de $X$ dans $Y$.

**Définition 1.8.**
*On dit qu'un opérateur $A \in L(X,Y)$ est compact si limage par $A$ de la boule unité de l'espace $X$, est relativement compacte dans l'espace $Y$.*

**Théorème 1.1.** *[1]*
*Tout opérateur compact $A \in L(X,Y)$ fait correspondre un ensemble borné dans $X$ un ensemble compact dans $Y$.*

**Remarque 1.1.**
*$A$ est compact si et seulement si l'image de toute partie bornée est relativement compacte ou, de façon équivalente si et seulement si, l'image de toute suite bornée posséder une sous-suite convergente.*

**Théorème 1.2.** ***Le lemme de Riesz*** *[1]*
*L'identité d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si cet espace est de dimension finie.*

**Remarque 1.2.**
*Dans le texte qui suit, l'ensemble de tous les opérateurs de $L(X,Y)$ qui sont compacts sera désigné par $\sigma(X,Y)$.*

**Théorème 1.3.** *[1]*
*$\sigma(X,Y)$ est un sous-espace dans $L(X,Y)$.*

**Théorème 1.4.** *[1]*
*Si $X$ ou $Y$ sont de dimension finie, on a $\sigma(X,Y) = L(X,Y)$.*

**Proposition 1.5.** *[1]*
*Tout opérateur de rang fini est compact.*

**Corollaire 1.1.** *[1]*

$$Si\ A = \lim_{n\to\infty} A_n;\ où\ les\ A_n\ sont\ des\ opérateurs\ compacts\ ou\ de\ dimension\ finie.$$

*alors, $A$ est un opérateur compact.*

**Théorème 1.5.** *[1]*
*Soient $A \in L(X,Y)$ et $B \in L(X,Y)$ : Si l'un quelconque (au moins) de ces deux opérateurs est compact, leur produit $BA$ est un opérateur compact.*

**Théorème 1.6.** ***Schauder*** *[1]*
*Soit $A \in L(X,Y)$ ; où $Y$ est complet. L'opérateur $A$ est compact si et seulement si son adjoint $A^*$ est compact.*

## 1.3 Propriétés spectrales

### 1.3.1 Propriétés spectrales des opérateurs compacts et autoadjoints compacts

**Proposition 1.6.** *[9] Si $A \in K(X)$ alors $R(I - A)$ est fermé dans $X$.*

**Lemme 1.1.** *[9] Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Si $Y$ est un sous-espace vectoriel fermé de $X$, distinct de $X$, alors il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, Y) \geq 1/2$.*

**Théorème 1.7.** *[9] Soit $A \in K(X)$. Alors, $I - A$ est injectif si et seulement si $I - A$ est inversible.*

**Lemme 1.2.** *[9] Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre de vecteurs de $X$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = Vect\{e_0, ..., e_n\}$. Alors, il existe une famille libre $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$X_n = Vect\{f_0, ..., f_n\}, \|f_n\| = 1 \text{ et } d(f_{n+1}, X_n) \geq \frac{1}{2}$$

*Soit $A \in L(X)$ tel qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$ vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, Ae_n = \lambda_n e_n \tag{1.1}$$

*Alors, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda_{n+1} I - A) f_{n+1} \in X_n \tag{1.2}$$

**Corollaire 1.2.** ***(Alternative de Fredholm)****[9]*

*Soient $A \in K(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. On considère **l'équation de Fredholm** : pour $y \in X$, trouver $x \in X$ tel que*

$$\lambda x - Ax = y \tag{1.3}$$

*alors deux cas sont possibles :*

1. *soit, pour tout $y \in X$, il existe un unique $y \in X$ solution de (1.3).*
2. *soit, l'équation homogène $\lambda x - Ax = 0$ admet une solution $x \neq 0$.*

*Dans le second cas, l'équation (1.3) admet une solution (non unique) si et seulement si $y \in R(\lambda I - A)$.*

**Lemme 1.3.** *[9] Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors,*

$$\|A\| = \max\{|\lambda| \backslash \lambda \in Vp(A)\}$$

*En particulier, si $Vp(A)\backslash\{0\} = \emptyset$ alors $A = 0$.*

**Proposition 1.7.** *[9] Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, $Vp(A)$ est fini si et seulement si $A$ est de rang fini.*

### 1.3.2 Spectre d'un opérateur compact

**Définition 1.9.**

*Soit $X$ un espace de Banach. $A \in L(X)$*
*L'ensemble résolvant est :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (A - \lambda I) \text{ est bijectif de } X \text{ sur } X \}.$$

*Le spectre $\sigma(A)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant, $\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A)$.*
*On dit que $\lambda$ est valeur propre $-$ et on note $\lambda \in V_p(A)-$ si*

$$N(A - \lambda I) \neq 0$$

*$N(A - \lambda I)$ est l'espace propre associé à $\lambda$.*

**Remarque 1.3.**

*Si $\lambda \in \rho(A)$ alors $(A - \lambda I)^{-1} \in L(X)$.*

**Remarque 1.4.**

*Il est clair que $V_p(A) \subset \sigma(A)$. En général, l'inclusion est stricte : Il peut exister $\lambda$ tel que :*
*$N(A - \lambda I) = \{0\}$ et $R(A - \lambda I) \neq X$. (Un tel $\lambda$ appartient au spectre mais n'est pas valeur propre).*

*Si $\dim X < \infty$ alors, $\sigma(A) = V_p(A)$.*

**Proposition 1.8.** *[1]*

*Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble compact et*

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, +\|A\|]$$

**Proposition 1.9.** *[1]*

*Soit $X$ un espace de Banach et $A$ un opérateur compact de $X$ dans $X$, de spectre $\sigma(A)$*

1. *Si $X$ est de dimension infinie, $0 \in \sigma(A)$.*
2. *$\lambda \neq 0 \in \sigma(A) \Longleftrightarrow \lambda$ est valeur propre de $A$. Le sous-espace propre associé est de dimension finie.*
3. *$\sigma(A)$ est dénombrable et s'il est infini, on peut ranger ses éléments en une suite $(\lambda_n)_n$,*
$$|\lambda_{n+1}| \leqslant |\lambda_n| \text{ avec, } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

*Dans l'espace de Hilbert $H$, considérons un opérateur linéaire $A$ défini sur un ensemble $D(A)$ dense dans $H$.*

**Définition 1.10.**

*Si $D(A) \subset D(A^*)$ et si $A^*x = Ax$ sur $D(A)$, i.e si $A^*$ est une extension de $A$, on dit que $A$ est un opérateur symétrique.*

**Remarque 1.5.**

*Tout opérateur auto-adjoint $A$ est fermé, $\overline{D(A)} = H$ et, pour tout $x, y$ de $D(A)$, on a toujours*

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

### 1.3.3 Spectre d'un opérateur autoadjoint compact

**Proposition 1.10.** *[6] Soit $V_p(A)$ l'ensemble des valeurs propres de $A$. Alors :*

1. *$V_p(A)$ est une partie infinie, dénombrable et bornée de $\mathbb{R}$ dont le seul point d'accumulation est 0.*
2. *les sous-espaces propres correspondant à des valeurs propres non nulles sont de dimension finie.*
3. *les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

**Théorème 1.8.** *[8]*

*Si $H$ est un espace de Hilbert séparable et $A$ un opérateur autoadjoint compact sur $H$, alors $H$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de $A$.*

# Chapitre 2

# Le théorème de Hille-Yosida

## 2.1 Introduction

On s'intéresse à la résolution du problème d'évolution :

$$(P)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où $A$ est un opérateur défini sur un espace $X$.
Nous allons d'abord étudier le cas où l'espace $X$ est un espace de Hilbert et l'opérateur $A$ un opérateur maximal monotone, puis nous affaiblirons les hypothèses et nous essaierons de mettre en évidence les remèdes nous permettant de conclure.

## 2.2 Cas d'un espace de Hilbert et d'un opérateur maximal monotone

On se place dans le cas où $X = H$ est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté $(\cdot,\cdot)$.
Soit $A$ un opérateur maximal monotone. On pose pour tout $\lambda > 0$

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \text{ et } A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

$J_\lambda$ est **la résolvante** de $A$ et $A_\lambda$ est **la régularisée Yosida** de $A$.
On retiendra que $\|J_\lambda\|_{L(H)} \leq 1$.

Les opérateurs $A_\lambda$ sont (linéaires) bornés, nous pouvons donc utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz pour résoudre le problème de Cauchy approché :

$$(P_\lambda)\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A_\lambda u = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \in D(A) \end{cases}$$

En effet :

$$\forall\lambda > 0, A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda) \Rightarrow \|A_\lambda\|_{L(H)} \leq \frac{2}{\lambda}$$

D'où, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $\lambda > 0$, il existe $u_\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H)$ unique solution du problème $(P_\lambda)$.
Nous allons montrer que les solutions $u_\lambda$ de $(P_\lambda)$ convergent vers une solution de $(P)$.

### 2.2.1 Lemmes préliminaires

**Lemme 2.1.** *[6] Soit $A$ un opérateur maximal monotone. Alors :*

1. $A_\lambda v = A(J_\lambda v), \forall v \in H, \forall\lambda > 0.$
2. $A_\lambda v = J_\lambda A v, \forall v \in D(A), \forall\lambda > 0.$
3. $|A_\lambda v| \leq |Av|, \forall v \in D(A), \forall\lambda > 0.$
4. $\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda v = v, \forall v \in H.$
5. $\lim_{\lambda\to 0} A_\lambda v = Av, \forall v \in D(A).$
6. $(A_\lambda v, v) \geq 0, \forall v \in H, \forall\lambda > 0.$
7. $|A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda}|v|, \forall v \in H, \forall\lambda > 0.$
8. $\forall\lambda, \mu > 0, J_\lambda, J_\mu, A_\lambda, A_\mu$ *commutent.*

*Démonstration.* On démontre que $J_\lambda, J_\mu, A_\lambda, A_\mu$ commutent pour tous $\lambda, \mu > 0$. Pour cela, montrons que $J_\lambda$ et $J_\mu$ commutent.
Soit $x \in H$. Notons $z = J_\lambda J_\mu x$ et montrons que $z = J_\mu J_\lambda x$.
On a $z \in D(A)$ d'où :

$$(I + \lambda A)z = J_\mu x \text{ car } (I + \lambda A)J_\lambda = I \text{ sur } D(A).$$

et, en multipliant par $J_\mu^{-1}$ à gauche.

$$(I + \mu A)(I + \lambda A)z = x$$

Par commutativité de ces deux derniers opérateurs, il vient :

$$(I + \lambda A)(I + \mu A)z = x$$

d'où le résultat. Donc $J_\lambda$ et $J_\mu$ commutent. Par les points 1 et 2, il en résulte que $A_\lambda$ et $A_\mu$ commutent ainsi que $A_\lambda$ et $J_\mu$.

**Lemme 2.2.** *[6] Soit $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H)$ une fonction vérifiant :*

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w = 0 \ sur \ \mathbb{R}^+ \tag{2.1}$$

*Alors les fonctions : $t \mapsto |w(t)|$ et $t \mapsto |\frac{dw}{dt}(t)| = |A_\lambda w(t)|$ sont décroissantes sur $\mathbb{R}^+$.*

**Lemme 2.3.** *[6] L'espace $D(A^2)$ est dense dans $D(A)$ pour la norme du graphe.*

### 2.2.2 Théorème de Hille-Yosida

**Théorème 2.1.** *[3] Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur maximal monotone. Alors, pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, H) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, D(A))$ du problème d'évolution :*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \ sur \ \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

*De plus, on a pour tout $t \geq 0$ :*

$$|u(t)| \leq |u_0| \ et \ \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|.$$

*Démonstration.*

**Unicité :**

Soient $u$ et $\overline{u}$ deux solutions du problème précédent. On a :

$$\frac{d}{dt}(u - \overline{u}) + A(u - \overline{u}) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+.$$

Prenons le produit scalaire avec $u - \overline{u}$, il vient :

$$\left(\frac{d}{dt}(u - \overline{u}) + A(u - \overline{u}), u - \overline{u}\right) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+.$$

Or,

$$\left(\frac{d}{dt}(u - \overline{u}), u - \overline{u}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u - \overline{u}|^2$$

et, par monotonie de $A$ :

$$(A(u - \overline{u}), u - \overline{u}) \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+.$$

D'où :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u-\overline{u}|^2 \leq 0$$
soit encore $t \mapsto |u-\overline{u}|^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, |u(t)-\overline{u}(t)|^2 \leq |u(0)-\overline{u}(0)|^2$$
d'où :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, |u(t)-\overline{u}(t)|^2 = 0$$
et
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, u = \overline{u}$$
On en déduit donc que : $u = \overline{u}$ sur $\mathbb{R}^+$.

**Existence :**

Soit $u_\lambda$ la solution du problème :
$$(P_\lambda) \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A_\lambda u = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \in D(A) \end{cases}$$

**Etape 1**

On a l'estimation :
$$\forall t \geq 0, \forall \lambda > 0, \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0| \tag{2.3}$$
Ceci résulte du lemme (2,2).

**Etape 2** :

La suite $(u_\lambda)_\lambda$ converge uniformément vers $u$ sur $[0;T]$ quand $\lambda$ tend vers 0.
En effet, $H$ étant un espace de Hilbert, montrons que, à $t$ fixé, $u_\lambda(t)$ est de Cauchy.
Soient $\lambda, \mu > 0$. On a :
$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$
D'où, en prenant le produit scalaire de l'expression ci-dessus avec $u_\lambda - u_\mu$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0$$
Or,
$$\begin{aligned}(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) &= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu) \\ &= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu)\end{aligned}$$

car

$$\forall v \in D(A), \left(A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)\right) \Rightarrow (v - J_\lambda v = \lambda A_\lambda v)$$

et (lemme (2,1))

$$\begin{array}{rcll} \forall \lambda > 0, A_\lambda v & = & A(J_\lambda v) & \forall v \in H \\ & = & J_\lambda A v & \forall v \in D(A) \end{array}$$

Par monotonie de $A$, on a donc :

$$(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) \leq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu)$$

D'où

$$\forall \lambda, \mu > 0, \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu)|Au_0|^2$$

Intégrons cette dernière inégalité par rapport à $t$, il vient :

$$|u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 4(\lambda + \mu)t|Au_0|^2$$

et

$$|u_\lambda - u_\mu| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)t}|Au_0| \xrightarrow[\lambda,\mu \to 0]{} 0$$

Donc : pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la suite $(u_\lambda(t))_\lambda$ est de Cauchy sur $(H, |.|)$. Elle converge.
Notons $u(t)$ sa limite. On a :

$$\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+, |u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)t}|Au_0|$$

Soit $\lambda > 0$ fixé et soit $t \in \mathbb{R}^+$

$$\forall \mu > 0, |u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)t}|Au_0|$$

Par passage à la limite sur $\mu (\mu \to 0)$ :

$$\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+, |u_\lambda(t) - u(t)| \leq 2\sqrt{\lambda t}|Au_0|$$

On en déduit la convergence uniforme de $u_\lambda$ vers $u$ sur $[0; T]$ :
Soit $\epsilon > 0$ fixé.
Posons $\eta$ tel que : $2\sqrt{\eta T}|Au_0| \leq \epsilon$
Alors :

$$\begin{array}{rcl} \forall |\lambda| \leq \eta, \forall t \in [0; T], |u_\lambda(t) - u_\mu(t)| & \leq & 2\sqrt{\lambda T}|Au_0| \\ & \leq & \epsilon \end{array}$$

et $(u_\lambda)_\lambda$ converge uniformément vers $u$ sur chaque intervalle borné $[0;T]$. La limite uniforme d'une suite d'applications continues étant continue, $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+;H)$.

**Etape 3**

Si $u_0 \in D(A^2)$, c'est-à-dire : $u_0 \in D(A)$ et $Au_0 \in D(A)$, $\dfrac{du_\lambda}{dt}$ converge uniformément quand $\lambda$ tend vers 0 sur chaque intervalle borné $[0;T]$.

En effet, soit $v_\lambda = \dfrac{du_\lambda}{dt}$.

On a :

$$\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$$

D'après l'étape 2 :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq (A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, \lambda A_\lambda v_\lambda - \mu A_\mu v_\mu)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda + v_\mu|^2 \leq (|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|)(\lambda|A_\lambda v_\lambda| + \mu|A_\mu v_\mu|)$$

Or, d'après le lemme (2,1) :

$$\begin{array}{rcl} |A_\lambda v_\lambda| & \leq & |A_\lambda v_\lambda(0)| \\ & \leq & |A_\lambda A_\lambda u_0| \end{array}$$

De plus,

$$\begin{array}{rcl} A_\lambda A_\lambda u_0 & = & A_\lambda(A(J_\lambda u_0)) \\ & = & A(J_\lambda A J_\lambda u_0) \\ & = & J_\lambda^2 A^2 u_0 \text{ car } Au_0 \in D(A). \end{array}$$

D'où

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leq |A^2 u_0| \text{ car } \|J_\lambda\|_{L(H)} \leq 1.$$

et

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 & \leq & 2|A^2u_0|(\lambda+\mu)|A^2u_0| \\ & \leq & 2(\lambda+\mu)|A^2u_0|^2 \end{array}$$

Ceci implique de la même manière qu'à l'étape 2 que $v_\lambda$ converge uniformément quand $\lambda$ tend vers 0 sur chaque intervalle borné.

**Etape 4**

Si $u_0 \in D(A^2)$ : si $u_\lambda$ converge uniformément vers $u$ et $\dfrac{du_\lambda}{dt}$ converge uniformément vers $v$, alors $u$ est différentiable et $v = \dfrac{du}{dt}$ et la fonction $u$ ainsi définie satisfait à l'équation $\dfrac{du}{dt} + Au = 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et à la condition $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H)$
En effet, d'après l'étape 2

$$\begin{cases} \lim_{\lambda\to 0} u_\lambda = u \\ \lim_{\lambda\to 0} \dfrac{du_\lambda}{dt} = \ \ v \text{ (convergence uniforme sur tout intervalle borné).} \end{cases}$$

Comme $u_\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H)$, on a :

$$\forall x, u_\lambda(x) = \int_0^x \frac{du_\lambda}{dt}(y)dy + u_\lambda(0) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} u(x) = \int_0^x v(y)dy + u(0)$$

Donc : $u$ est différentiable sur $\mathbb{R}^+$ et $\dfrac{du}{dt} = v$.
Ceci implique que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H)$.
Utilisant le fait que $A_\lambda v = AJ_\lambda v$ pour tout $v \in H$, le problème $(P_\lambda)$ s'écrit encore :

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u_\lambda(0) = u_0 \in D(A^2) \end{cases}$$

Or

$$J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t) \text{ quand } \lambda \text{ tend vers } 0.$$

En effet, d'après le lemme(2,1),

$$\forall v \in H, \lim_{\lambda\to 0} J_\lambda v = v$$

D'où :

$$\begin{aligned} \forall \lambda > 0, \forall t \geq 0, |J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| &\leq |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq \|J_\lambda\|_{L(H)} |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \text{ car } \|J_\lambda\|_{L(H)} \leq 1. \end{aligned}$$

et

$$\forall t \geq 0, |J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| \leq |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, par passage à la limite quand $\lambda$ tend vers 0 dans :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \frac{du_\lambda}{dt} + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0$$

on obtient par continuité de l'opérateur $A$ :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \frac{du}{dt} + Au(t) = 0$$

et $u \in D(A)$ car le graphe de $A$ est fermé ($A$ est maximal monotone).
Enfin, comme $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H)$, la fonction $t \mapsto Au(t)$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans $H$ et, par conséquent, $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; D(A))$. Compte-tenu de (2.3), on a aussi :

$$\forall t \geq 0, \forall \lambda > 0, \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0|$$

**Etape 5**
Si $u_0 \in D(A)$, la solution du problème $(P)$ est la limite dans $H$ des solutions obtenues à l'étape 3 pour $u_0 \in D(A^2)$.
En effet, d'après le lemme (2,3), $D(A^2)$ est dense dans $D(A)$ : il existe donc $(u_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(A^2)$ telle que $u_{0,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_0$, pour la norme $|u| + |Au|$.
Le résultat obtenu à l'étape 4 s'applique à $u_{0,n}$ :
il existe une fonction $u_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H)$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{r} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ u_n(0) = u_{0,n} \end{array}\right.$$

et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ :

$$|u_n(t)| \leq |u_{0,n}| \text{ et } \left|\frac{du_n}{dt}(t)\right| = |Au_n(t)| \leq |Au_{0,n}|.$$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{du_n}{dt}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $(H, |.|)$. En effet, d'après ce qui précède :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall m, n \in \mathbb{N}, |u_m(t) - u_n(t)| \leq |u_{0,m} - u_{0,n}| \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car } u_{0,n} \text{ converge.}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall m, n \in \mathbb{N}, \left|\frac{du_m}{dt}(t) - \frac{du_n}{dt}(t)\right| \leq |Au_{0,m} - Au_{0,n}| \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car } Au_{0,n} \text{ converge.}$$

L'espace $H$ étant complet, il en résulte que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Notons $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H)$, $\left(\dfrac{du_n}{dt}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\dfrac{du}{dt}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; H)$ et $\dfrac{du}{dt} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; H)$ comme limites uniformes d'applications continues, d'où $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; H)$. De plus, par passage à la limite dans l'égalité :

$$\frac{du_n}{dt} + Au_n = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+.$$

on obtient, comme dans l'étape 4, du fait que le graphe de $A$ est fermé, que $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; D(A))$ et

$$\frac{du}{dt} + Au = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+.$$

Enfin, appliquant le lemme (2,1), on a :

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ et } \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0| \text{ pour tout } t \geq 0.$$

On peut montrer par récurrence, à condition d'avoir des hypothèses supplémentaires sur $u_0$ que la solution du problème d'évolution considéré est plus régulière (si $u_0 \in D(A^k)$, alors $u \in \mathcal{C}^{k-j}(\mathbb{R}^+; D(A^j))\, \forall j = 0, 1, ..., k$).

### 2.2.3 Cas autoadjoint

Dans le cas où $A$ est un opérateur maximal monotone autoadjoint, on peut affaiblir l'hypothèse $u_0 \in D(A)$.

**Théorème 2.2.** *[6]*
*Soit $A$ un opérateur maximal monotone autoadjoint. Alors pour tout $u_0 \in H$, il existe une unique fonction*

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; H) \cap \mathcal{C}^1(]0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}(]0, +\infty[; D(A))$$

*telle que*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \ \textit{sur } ]0, +\infty[ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

*De plus on a*

$$|u(t)| \leq |u_0| \ \textit{et} \ \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t}|u_0|, \forall t > 0.$$

$$u \in \mathcal{C}^k(]0, +\infty[; D(A^l)) \ \forall k, l \ \textit{entiers.}$$

## 2.3 Cas d'un espace de Banach quelconque

Nous étendons maintenant le théorème de Hille-Yosida dans le cas d'un espace de Banach quelconque. Nous introduisons pour cela la notion de semi-groupe de contraction qui va se reveler être l'outil essentiel de la démonstration. Commençons par donner la définition d'un semi-groupe de contractions :

**Définition 2.1.** ***Semi-groupe de contractions***
*On appelle semi-groupe de contractions une famille à un paramètre* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *d'opérateurs linéaires continus sur* $X$ *espace de Banach telle que :*

1. $\|S(t)\| = 1$ *pour tout* $t \geq 0$.
2. $S(0) = Id$.
3. $S(t+s) = S(t) \circ S(s)$ *pour tous* $t, s \geq 0$.
4. *Pour tout* $u_0 \in X, S(t)u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$.

*L'opérateur* $u_0 \in X \mapsto S(t)u_0 = u(t)$ *a un effet régularisant sur la donnée initiale.*

**Théorème 2.3.** ***Hille-Yosida****[6]*
*Soit* $A$ *un opérateur m-accrétif dans* $X$.

1. *Alors pour tout* $u_0 \in D(A)$ *il existe une fonction*

$$u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; X) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; D(A))$$

*unique telle que*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \ \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

*De plus, on a*

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \ \text{et} \ \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|, \forall t \geq 0.$$

2. *Si* $u(t)$ *est solution (2,4), alors l'application*

$$\begin{aligned} D(A) &\xrightarrow{S(t)} D(A) \\ u_0 &\mapsto u(t) \end{aligned}$$

*vérifie :*

*(i)* $S(t)$ *est une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1 pour tout* $t \geq 0$.

*(ii)* $S(t)$ *se prolonge à* $X$ *tout entier.*

*(iii)* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$*définit un semi-groupe sur* $X$.

*(iv) L'application :*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\to X \\ t &\mapsto S(t)u_0 \end{aligned}$$

*est continue sur* $\mathbb{R}^+$

*Dans la démonstration du théorème nous serons amenés à considérer à nouveau le problème* $(P_\lambda)$ *:*

$$(P_\lambda)\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \ \textit{sur}\ \mathbb{R}^+ \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

$u_\lambda$ *désigne la solution du problème approché et* $A_\lambda$ *désigne la régularisée de Yosida de* $A$*. Pour* $u_0 \in X$*, comme* $A_\lambda \in L(X)$*, le problème ci dessus possède une unique solution d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Notons* $S_\lambda$ *le semi-groupe associé à* $u_\lambda, u_\lambda(t) = S_\lambda(t)u_0$.

# Chapitre 3

# Problèmes semi-linéaires

Soient $X$ un espace de Banach, $A : D(A) \subset X \to X$ linéaire un opérateur m-accrétif, $F : X \to X$ une application de $X$ dans $X$.

Nous allons nous intéresser au problème de Cauchy suivant :

$$(P') \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F(u), \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

## 3.1 Lemmes préliminaires

**Lemme 3.1.** ***Gronwall****[2]*

*Soient $T > 0, \lambda \in L^1([0;T]), \lambda \geq 0$ pp et $C_1, C_2 \geq 0$. Soit $\phi \in L^1([0;T]), \phi \geq 0$ pp telle que $\lambda\phi \in L^1([0;T])$ et $\phi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\phi(s)d(s)$, pp $t \in [0;T]$. Alors :*

$$\phi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s)ds\right), \ pp\ t \in [0;T].$$

**Lemme 3.2.** ***Théorème du point fixe de Banach****[5]*

*Soit $X$ un espace métrique complet, non vide. On note $d$ la distance sur $X$ et on considère $F$ une application de $X$ dans lui-même.*
*On suppose $F$ contractante, c'est-à-dire : il existe une constante positive $k$, strictement inférieure à 1, telle que : $d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y)$ pour tous $x, y \in X$.*
*Alors : il existe un unique point $a \in X$ tel que $F(a) = a$. De plus, ce point peut s'obtenir comme limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérées, définies par récurrence à partir d'un point quelconque $x_0$ de $X$ selon $x_{n+1} = F(x_n)$. On a en outre :*

$$\forall n \geq 1 : d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x)$$

## 3.2 Solutions globales généralisées

**Définition 3.1.** *On appelle* ***solution globale généralisée*** *du problème* $(P')$ *toute fonction* $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; X)$ *telle que :*

$$\forall t \geq 0, u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds$$

*où* $S(t)$ *désigne le semi-groupe associé à l'opérateur* $A$.

**Définition 3.2.** *On dit qu'une fonction* $F : X \to X$ *est lipschitzienne sur les bornés de* $X$ *si, pour tout* $r > 0$, *il existe une constante notée* $M_r$ *telle que :*

$$\forall u, v \in B(0,r), |F(u) - F(v)|_X \leq M_r |u - v|_X$$

*On a un résultat d'existence concernant les solutions locales du problème de Cauchy* $(P')$.

**Théorème 3.1.** *[6] Si* $u_0 \in X$. *Si* $F$ *est lipschitzienne de constante de lipschitz* $M > 0$, *alors le problème* $(P')$ *admet une unique solution globale généralisée notée* $u$.
*Si* $u_0 \in D(A)$, $u$ *est localement lipschitzienne.*

*Démonstration.* **Première partie**
**Existence**
Posons

$$\psi(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds$$

L'application $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; X)$.
Nous allons appliquer le théorème du point fixe de Banach à $\psi$ dans l'espace $X_\alpha$, $\alpha$ à déterminer, défini par :

$$X_\alpha = \{u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; X); \sup_{t>0} e^{-\alpha t}|u(t)|_X < +\infty\}$$

muni de la norme : $|u|_{X_\alpha} = \sup_s (e^{-\alpha s}|u(s)|_X)$. Cet espace est complet car fermé dans le complet $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; X)$.
Déterminons à quelles conditions sur $\alpha$ l'application $\psi$ est contractante de $X_\alpha$ dans $X_\alpha$.
L'application $\psi$ envoie $X_\alpha$ sur $X_\alpha$ pour tout $\alpha > 0$.
En effet, on a :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, |\psi(u)(t)|_X &\leq |S(t)u_0|_X + \int_0^t \|S(t-s)\|_{L(X)} |F(u(s))|_X ds \\ &\leq |u_0|_X + \int_0^t |F(u(s))|_X ds, \text{car } \|S(t)\|_{L(X)} \leq 1, \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{array}{rcl}\forall s \in [0,t], |F(u(s))|_X & \leq & |F(u(s)) - F(0)|_X + |F(0)|_X \\ & \leq & M|u(s)|_X + C\end{array}$$

d'où :

$$|\psi(u)(t)|_X \leq |u_0|_X + \int_0^t (M|u(s)|_X + C)ds$$

Multiplions cette dernière inégalité par $e^{-\alpha t}$ pour $t > 0$ ($e^{-\alpha t} < 1$ pour tout $t > 0$). On obtient :

$$\begin{array}{rcl}\forall t > 0, e^{-\alpha t}|\psi(u)(t)|_X & \leq & e^{-\alpha t}|u_0|_X + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}e^{-\alpha s}(M|u(s)|_X + C)ds \\ & \leq & e^{-\alpha t}|u_0|_X + M\sup_s(e^{-\alpha s}|u(s)|_X)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}ds + C\left(\int_0^t ds\right)e^{-\alpha t} \\ & \leq & e^{-\alpha t}|u_0|_X + M|u|_{X_\alpha}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}ds + Cte^{-\alpha t}\end{array}$$

De plus,

$$\begin{array}{rcl}\forall t > 0, \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}ds & = & e^{-\alpha t}\int_0^t te^{\alpha s}ds \\ & = & \dfrac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \leq \dfrac{1}{\alpha}\end{array}$$

Donc :

$$\forall t > 0, e^{-\alpha t}|\psi(u)(t)|_X \leq |u_0|_X + \frac{1}{\alpha}M|u|_{X_\alpha} + C\sup_t(te^{-\alpha t})$$

et

$$\sup_{t>0} e^{-\alpha t}|\psi(u)(t)|_X < +\infty$$

c'est-à-dire : pour tout $\alpha > 0$, $\psi : X_\alpha \to X_\alpha$.
L'application $\psi$ est une contraction si $\alpha > M$.
En effet, soient $u, v \in X_\alpha$. On a, pour tout $t \geq 0$ :

$$|\psi(u)(t) - \psi(v)(t)|_X = \left|\int_0^t S(t-s)(F(u(s)) - F(v(s)))ds\right|_X$$

et

$$\begin{array}{rcl}|\psi(u)(t) - \psi(v)(t)|_X & \leq & \int_0^t \|S(t-s)\|_{L(X)}|(F(u(s)) - F(v(s)))|_X ds \\ & \leq & M\int_0^t |u(s) - v(s)|_X ds\end{array}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\forall t > 0, e^{-\alpha t}|\psi(u)(t) - \psi(v)(t)|_X &\leq M \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} e^{-\alpha s}|u(s) - v(s)|_X ds \\
&\leq \frac{M}{\alpha}|u - v|_{X_\alpha}
\end{aligned}$$

Donc $\psi$ est une contraction sur $X_\alpha$ si $\dfrac{M}{\alpha} < 1$.
Pour $\alpha > M$, si $F$ est lipschitzienne, il existe un unique point fixe pour $\psi$ sur $X_\alpha$.
Ainsi, le problème de Cauchy $(P')$ admet une solution dans $X_\alpha \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; X)$ si $F$ est lipschitzienne.

**Unicité :**

Soient $u$ et $v$ deux solutions généralisées de $(P')$. On a :

$$\forall t \geq 0, u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds$$
$$\forall t \geq 0, v(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t-s)F(v(s))ds$$

d'où, par différence :

$$\forall t \geq 0, u(t) - v(t) = S(t)(u_0 - v_0) + \int_0^t S(t-s)(F(u(s)) - F(v(s)))ds$$

Alors :

$$\forall t \geq 0, |u(t) - v(t)|_X \leq |u_0 - v_0|_X + M \int_0^t |u(s) - v(s)|_X ds$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\forall t \geq 0, |u(t) - v(t)|_X &\leq |u_0 - v_0|_X \exp\left(M \int_0^t ds\right) \\
&\leq |u_0 - v_0|_X e^{Mt}
\end{aligned}$$

Or, $u_0 = v_0$ si $u$ et $v$ sont solutions généralisées de $(P')$. Donc $u = v$.

**Deuxième partie**

Soit $u_0 \in D(A)$. Alors $u$ est localement lipschitzienne.
En effet, soient $h > 0$ et $t \in [0; T]$. Etudions $u(t+h) - u(t)$.
Pour cela, considérons $u(t+h)$ comme solution à l'instant $t$ de :

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av = F(v) \\ v(0) = u(h) \end{cases}$$

On a :

$$\forall t \geq 0, |u(t+h) - u(t)|_X \leq e^{Mt}|u(h) - u_0|_X, \text{ d'après la partie précédente.}$$

Or,

$$|u(h) - u(0)|_X \leq |S(h)u_0 - u_0|_X + \int_0^h |F(u(s))|_X ds$$

De plus,

$$|S(h)u_0 - u_0|_X \leq C'h$$

car, d'après les étapes 4 et 5 de la démonstration du théorème de Hille-Yosida (cas Banach), l'application $t \mapsto u(t) = S(t)u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+; X) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; D(A))$, d'où en particulier :

$$u(h) = u(0) + hu'(0) + h^2\epsilon(h), \text{ avec } u'(0) = Au_0 \text{ et } u(0) = u_0.$$

D'après la partie existence,

$$\int_0^h |F(u(s))|ds \leq \int_0^h (M|u(s)|_X + C)ds$$

D'où, finalement :

$$|u(h) - u(0)|_X \leq C'h + \int_0^h (M|u(s)|_X + C)ds$$

Comme $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; X)$, il existe $h_0$ tel que ;

$$\forall h \leq h_0, |u(s)|_X \leq 2|u_0|_X$$

et

$$|u(h) - u(0)|_X \leq C''h$$

Donc :

$$\forall t \geq 0, |u(t+h) - u(t)|_X \leq C''he^{Mt}$$

et

$$\forall t \in [0; T], |u(t+h) - u(t)|_X \leq C_T h$$

## 3.3 Solutions globales classiques

**Définition 3.3.** *Soit $u_0 \in D(A)$. On appelle **solution classique globale** toute fonction $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap \mathcal{C}^1(]0, +\infty[; X)$ telle que :*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F(u), \ \textit{sur } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

*De plus, de la même manière que pour les solutions globales généralisées, on a un résultat d'existence d'une solution globale classique au problème de Cauchy $(P')$.*

**Théorème 3.2.** *[6] Si $F$ est lipschitzienne et $\mathcal{C}^1$(c'est-à-dire, l'application :*

$$u \in X \mapsto F'(u) \in L(X)$$

*est continue et $|F'(u)| \leq M$), alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe $u$ solution globale classique de $(P')$.*

*La démonstration de ce théorème repose sur le fait essentiel suivant : dans le cas non homogène, si $u_0 \in D(A)$ et $f \in \mathcal{C}^1([0;T];X)$, alors toute solution généralisée est solution classique.*
*De plus, si l'espace $X$ est réflexif, on remarque que l'on peut préciser la régularité de la solution généralisée et montrer que c'est une solution classique.*

## 3.4 Solutions locales

**Définition 3.4.** *1. On appelle **solution généralisée locale** de $(P')$ toute fonction $u$ telle que :*

$$\forall u_0 \in X, \exists T > 0, \exists u \in \mathcal{C}([0;T[;D(A)); \forall t > T, u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds$$

*2. On dit que $(P')$ admet une solution classique locale si :*
*$\forall u_0 \in D(A), \exists T > 0, \exists u \in \mathcal{C}([0;T[;D(A)) \cap \mathcal{C}^1(]0;T[;X)$ tels que :*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F(u), \ \ \textit{sur}\ \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

**Théorème 3.3.** *[6] Soit $F : X \to X$ lipschitzienne sur les bornés. Alors :*
*$\forall u_0 \in X, \exists T > 0, \exists! u \in \mathcal{C}([0;T[;X)$ solution généralisée locale de $(P')$.*

*Démonstration.*
Appliquons le théorème du point fixe de Banach (lemme préliminaire) à l'espace :

$$K_T = \{u \in \mathcal{C}([0;T[;X); |u(t) - u_0|_X \leq 2|u_0|_X + 1, \forall t \leq T\}$$

et à la fonction : $\phi : K_T \to K_T$ telle que $\phi(u)(t) = S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds.$

Notons que l'espace $K_T$ est une space de Banach car fermé dans le complet $(\mathcal{C}([0;T[;X), |.|_X)$.
L'application $\phi$ envoie $K_T$ sur $K_T$ si $T \leq \dfrac{1}{M_K(2|u_0| + 1) + |F(u_0)|}$.
En effet, on a :

$$\forall t, |\phi(u(t)) - \phi(u_0)|_X \leq |S(t)u_0|_X + |u_0|_X + \int_0^t |S(t-s)|_X |F(u(s))|_X ds$$

Notons $M_K$ la constante de Lipschitz de $F$ sur $B(0, 3|u_0|_X + 1)$. Par hypothèse si $u \in K_T$,

$$\forall s \leq T, |u(s)|_X \leq |u_0|_X + 2|u_0|_X + 1$$

d'où :

$$\forall s \leq T, u(s) \in B(0, 3|u_0|_X + 1)$$

et

$$\forall t \leq T, \forall s \leq T, |F(u(s))|_X \leq |F(u(s)) - F(u_0)|_X + |F(u_0)|_X$$

Donc :

$$\forall t \leq T, |F(u(s))|_X \leq M_K|u(s) - u_0|_X + |F(u_0)|_X$$

$$\Longrightarrow \forall t \leq T, |\phi(u(t)) - u_0|_X \leq 2|u_0|_X + T[M_K(2|u_0|_X + 1) + |F(u_0)|_X]$$

On en déduit donc que $\phi$ est à valeurs dans $K_T$ si $T[M_K(2|u_0|_X + 1) + |F(u_0)|_X] \leq 1$.
L'application $\phi$ est contractante si $T < \dfrac{1}{M_K}$.
En effet, soient $u, v \in K_T$. On a :

$$\phi(u) - \phi(v) = \int_0^t S(t-s)[F(u(s)) - F(v(s))]ds$$

D'où :

$$\begin{aligned}
|\phi(u) - \phi(v)|_X &\leq \int_0^t |F(u(s)) - F(v(s))|_X ds \\
&\leq M_K \int_0^t |u(s) - v(s)|_X ds \\
&\leq M_K \int_0^t \sup_{s \leq T} |u(s) - v(s)|_X ds \\
&\leq M_K T \sup_{s \leq T} |u(s) - v(s)|_X
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\phi$ est une contraction pour $M_K T < 1$. D'après le théorème du point fixe de Banach, il existe un unique $u \in K_T$ tel que $u = \phi(u)$. Pour tout $u_0 \in X$, on a mis en évidence un temps $T$ et une solution $u \in K_T$ de $u = \phi(u)$.

## 3.5 Solutions maximales

**Proposition 3.1.** *[6]*

1. *Si* $u_i$ *est une solution locale définie sur* $[0;T_i]$ *pour* $T_i < T_j, u_{j/[0;T_i]} = u_i$ *si* $\sup\{T_i; i \in I\} = T_{\max} \leq \infty$*, alors on peut définir* $u \in \mathcal{C}([0;T_{\max}[;X)$ *telle que :*

$$\forall t < T_{\max}, u(t) = S(t)u_0 + \int_0^T S(t-s)F(u(s))ds$$

   *On appelle u* ***solution maximale généralisée****.*

2. *De plus, si* $u \in \mathcal{C}([0;T[;D(A)) \cap \mathcal{C}^1(]0;T[;X)$*, alors u est appelée* ***solution maximale classique****.*

**Théorème 3.4.** *[6] Il existe une fonction* $T : X \to \mathbb{R}^+$ *avec les propriétés suivantes : pour tout* $u_0 \in X$*, il existe* $u \in \mathcal{C}([0;T(u_0)[;X)$ *telle que pour tout* $t < T(u_0)$*, u est l'unique solution généralisée globale dans* $\mathcal{C}([0;T];X)$ *; de plus,*

$$\forall t \in [0;T(u_0)[, 2K(|F(0)|_X + 2|u(t)|_X) \geq \frac{1}{T(u_0)-t} - 2$$

*En particulier, on a l'alternative :*

*soit* $T_{\max} = T(u_0) \ = \ +\infty$ *et la solution est globale.*
*soit* $T_{max} = T(u_0) \ < \ +\infty$ *et* $|u(t)|_X \xrightarrow[t \to T(u_0)]{} +\infty$ *et la solution explose en temps fini.*

*Ce dernier résultat est l'analogue du théorème d'explosion pour les équations différentielles ordinaires.*

# Chapitre 4

# Équation de la chaleur semi-linéaire

On prend maintenant un problème semi-linéaire concret pour illustrer la théorie sur les EDP semi-linéaires. On s'intéresse donc à l'équation de la chaleur avec une donnée $F : X \to X$ localement lipschitzienne. On note $X = \mathcal{C}_0(\Omega)$, l'espace des fonctions continues à support compact dans $\Omega$. Le problème s'énonce ainsi : On cherche

$$u \in \mathcal{C}([0,T],X) \cap \mathcal{C}([0,T],H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0,T],L^2(\Omega)), \Delta u \in \mathcal{C}([0,T],L^2(\Omega))$$

tel que :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = F(u) \\ u(0) = u_0 \in X \end{cases} \tag{4.1}$$

On a alors :

**Proposition 4.1.** *[10] Soit $u_0 \in X, T > 0$ et $u \in \mathcal{C}([0,T],X)$. Alors $u$ est solution du problème (4.1) si et seulement si $u$ vérifie :*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds \tag{4.2}$$

**Définition 4.1.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

1. *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) | \nabla u \in L^2(\Omega)^n\} \tag{4.3}$$

*L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot\,,\cdot)$ défini par*

$$(u,v) = \int_\Omega uv dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \tag{4.4}$$

2. *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme étant l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

## 4.1 L'opérateur de la chaleur

Etudions à titre d'application l'opérateur $A$ défini sur $X = L^2(\Omega)$ par $Au = -\Delta u$. On va montrer que le domaine du laplacien est

$$D(\Delta) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

Raisonnons par double inclusion. Soit $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, on sait que $H^2(\Omega)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$. On a $u \in H_0^1(\Omega)$ et pour tout $i$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$, d'où pour tout $j$, $\frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j} u \in L^2(\Omega)$ et $\Delta u \in L^2(\Omega)$, donc $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset D(\Delta)$.

Soit $u \in D(\Delta)$, montrons que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.
Par définition de $D(\Delta)$ on a $u \in H_0^1(\Omega)$. De plus si $\Omega$ est un ouvert de classe $\mathcal{C}^2$ et de frontière bornée, d'après le théorème de régularité du problème de Dirichlet il vient que $u \in H^2(\Omega)$.

On remarque que $A$ est un opérateur non borné, ceci est facile à voir en dimension un, en effet considérons les modes propres de $A$, à savoir $u_n(x) = \sin(n\pi x)$, on a $A(u_n(x)) = -n^2\pi^2 \sin(n\pi x)$. Quelle que soit la norme considérée on a

$$\frac{\|Au_n\|}{\|u_n\|} = n^2\pi^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Etudions maintenant le problème suivant, soit $f \in L^2(\Omega)$, existe-t-il (et est elle unique) une solution de l'équation :

$$\begin{cases} u - \lambda \Delta u = f, \lambda > 0 \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.5}$$

Soient $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ et $v \in D(\Omega)$, multiplions l'équation par $v$ et intégrons par parties sur $\Omega$, on obtient en utilisant la formule de Green :

$$-\lambda \int_\Omega \Delta u v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$
$$= \lambda \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

On a alors par densité des fonctions continues dans $H_0^1(\Omega)$, la formulation variationnelle :
trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\lambda \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

C'est-à-dire en notant $a(u,v) = \lambda \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv$ et $L(v) = \int_\Omega fv,$ cela revient à trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a(u,v) = L(v)\, \forall v \in H_0^1(\Omega)$.
Appliquons le théorème de Lax-Milgram :

– $v \mapsto L(v)$ est linéaire grâce à la linéarité de l'intégrale.
– Continuité : $|L(v)| \leq \|f\|_0 \|v\|_0$, or $\|v\|_0 \leq \|v\|_1$ donc $|L(v)| \leq \|f\|_0 \|v\|_1$ et donc $L$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$.
– Continuité de a : Pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ on a $|a(u,v)| \leq \max\{1, \lambda\} \langle u, v \rangle_1$. D'où pourtout $u \in H_0^1(\Omega)$ :

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_1 \|v\|_1$$

et donc $v \mapsto a(u,v)$ est continue pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.
– Coercivité : Il faut montrer qu'il existe une constante $\alpha$ telle que $|a(u,u)| \geq \alpha \|u\|_1$. On a :

$$|a(u,u)| = \left| \lambda \int_\Omega \nabla u^2 + \int_\Omega u^2 \right| \geq \min\{1, \lambda\} \|u\|_1^2$$

Donc le théorème de Lax-Milgram s'applique et donne l'existence pour tout $f \in L^2(\Omega)$, d'un unique $u \in H_0^1(\Omega)$, solution du problème variationnel. De cela on déduit également que l'opérateur $(Id + \lambda A)$ est bijectif.
Deplus $A$ est monotone car $\forall u \in D(A)$, on a encore une fois d'après la formule de Green :

$$\int_\Omega |\nabla u^2| = \int_\Omega (-\Delta u) u \geq 0$$

Donc $A$ est un opérateur maximal monotone.
Montrons maintenant que $A$ est auto-adjoint : il suffit de vérifier qu'il est symétrique car on vient de voir qu'il est maximal monotone, on a :

$$\langle Au, v \rangle = \int_\Omega (-\Delta u) v = \int_\Omega \nabla u \nabla v \text{ et}$$

$$\langle u, Av \rangle = \int_\Omega u(-\Delta v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

Le laplacien est un opérateur non borné. Il n'est pas compact, par contre $(-\Delta)^{-1}$ est un compact de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

## 4.2 Valeurs propres du laplacien

**Théorème 4.1.** *[9] Soit $\Omega$ un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $H_0^1(\Omega)$ est donné par*

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) | v_{|\partial\Omega} = 0 \textit{ sur } \partial\Omega\}. \tag{4.6}$$

**Proposition 4.2.** ***(Inégalité de Poincaré)****[9]*
*Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans une direction d'espace. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega |v|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \tag{4.7}$$

**Théorème 4.2.** ***(Rellich)****[9]*
*Soit $\Omega$ un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. L'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

*La formulation faible du problème $-\Delta u = \lambda u$ dans $\Omega$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est la suivante :*

$$\textit{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \textit{ telle que } \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int_\Omega uv dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

*On obtient bien un problème du type :*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \textit{ et } u \in V \backslash \{0\} \textit{ tels que} \\ \\ \qquad a(u,v) = \lambda (u,v)_H, \forall v \in V. \end{cases} \tag{4.8}$$

*avec $H = L^2(\Omega), V = H_0^1(\Omega)$ et $a(\cdot\,,\cdot)$ est la forme bilinéaire symétrique définie sur $V$ par*

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

*L'injection de $V$ dans $H$ est compacte d'après le Théorème 4.2. De plus, l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ étant dense dans $L^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.*

**Corollaire 4.1.** *[9] Soit $\Omega$ un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une suite croissante $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de réels positifs qui tend vers l'infini et une base hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ telle que*

$$u_k \in H_0^1(\Omega) \textit{ et } -\Delta u_k = \lambda_k u_k \textit{ pp dans } \Omega. \tag{4.9}$$

## 4.3 Existence locale

**Théorème 4.3.** *[6] Pour tout $u_0 \in X$, il existe un unique $u$ défini sur $[0,T]$ solution de (4.1), pour tout $t \in [0,T]$.*
*De plus si $T < \infty$ alors $\|u(t)\| \to +\infty$ quand $t \to T$.*

*Démonstration.*
Soit $u_0 \in X$. La proposition implique que trouver une solution de (4.1) équivaut

à trouver $u$ vérifiant (4.2). On applique le théorème d'existence locale déjà vu précédemment. On pose

$$g : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$$

tel que $F(u)(x) = g(u(x))$. On vérifie que $g$ est lipschitzienne sur les bornés. Montrons donc que :

$$\forall r \forall h, v \in B(0, r), \exists M_r, \|g(t, h) - g(t, v)\| \leq M_r \|h - v\|$$

Soit $r > 0$, pour tout $x$, $\|F(h)(x) - F(v)(x)\| = \|g(h(x)) - g(v(x))\|$, or $F$ est localement lipschitzienne donc pour tout $h \in B(0, r)$, il existe $V_h$ et $K_h$, tels que pour tous $v, w \in V_h$, on a

$$\begin{aligned} \|F(h)(x) - F(v)(x)\| &\leq K_h \|v(x) - w(x)\| \\ &\leq \max_r \big( \sup_{h \in B(0,r)} K_h \big) \|v(x) - w(x)\| \end{aligned}$$

Donc on peut appliquer le théorème d'existence locale car la constante de Lipschitz est indépendante de $h$.

## 4.4 Existence globale

**Théorème 4.4.** *[6] On suppose qu'il existe des constantes $K$ et $C$ telles que :*

$$uF(u) \leq C|u|^2, \ \textit{pour } |u| > K.$$

*Alors pour tout $u_0 \in X$ la solution de (4.1) donnée par (4.2) est globale.*

*Démonstration.* Montrons que

$$\sup_{[0,T]} \|u(t)\| < +\infty$$

Ceci donnera que $T = +\infty$ et que la solution est globale. Faisons une estimation d'énergie c'est-à-dire multiplions l'équation par $u$ et intégrons sur $\Omega$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u|^2 = - \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |F(u)u|$$

Les intégrales ci-dessus sont bien définies compte tenu de l'espace dans lequel on a choisi $u$. On scinde la dernière intégrale :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u|^2 = - \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_{\Omega \cap \{|u| \leq K\}} |F(u)u| + \int_{\Omega \cap \{|u| \geq K\}} C|u|^2$$

Le terme $\int_\Omega |\nabla u|^2$ est positif donc : $\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 \leq C' + C\int_{\Omega\cap\{|u|\geq K\}} |u|^2.$

On a pu majorer la première intégrale par $C'$ puisque $u$ et $F(u)$ sont continues sur un compact.

On pose $f(t) = \int_\Omega |u(t)|^2 dt$ On intègre l'inégalité précédente entre 0 et t on obtient que :

$$f(t) - f(0) \leq C't + C\int_0^t f(s)ds$$

On utilise maintenant le lemme de Gronwall qui donne :

$$f(t) \leq (f(0) + C't)\exp\left(C\int_0^t f(s)ds\right)$$

De plus $t \in [0, T]$, on obtient finalement la majoration suivante :

$$f(t) \leq (f(0) + C'T)\exp\left(C\int_0^T f(s)ds\right) < +\infty$$

On obtient ainsi le résultat souhaité.

Voici maintenant le théorème d'existence globale pour $|u|$ petit.
On notera $\lambda = \inf\{\|\nabla u\|_{L^2}, u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2} = 1\}$.

**Théorème 4.5.** *[6] On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $\mu < \lambda$ tels que :*

$$uF(u) \leq \mu|u|^2, \forall |u| \leq \alpha$$

*Alors il existe une constante $A$ telle que si $\|u_0\| \leq \alpha A$, la solution $u$ correspondante de (4.1) est globale et*

$$\|u(t)\| \leq A\|u_0\| e^{-(\lambda-u)t}, \forall t \geq 0$$

**Preuve.** *On multiplie l'équation par $u$ puis on intègre par parties sur $\Omega$ et on a :*

$$\int_\Omega u_t u dx - \int_\Omega u\Delta u dx = \int_\Omega F(u) u dx$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(t)dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega g(u(t)) u dx$$

*en utilisant la formule de Green. On pose maintenant $f(t) = \int u^2(t)dt$, on a donc :*

$$f'(t) = 2\int_\Omega g(u(t))u(t)dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2\int_{\partial\Omega} u\nabla u$$

*On peut majorer $f'$ comme suit :*

$$\begin{aligned} f'(t) &\leq 2\int_\Omega u(t)g(u(t))dx - 2\lambda \int |u(t,x)|^2 dx \\ &\leq 2\int_\Omega u(t)g(u(t))dx - 2\lambda f(t) \end{aligned}$$

*D'où* $f'(t) \leq -2\lambda f(t) + 2\int_\Omega u(t)g(u(t))dx \leq -2(\lambda-\mu)f(t)$*, et en intégrant on a :*

$$f(t) \leq e^{-2(\lambda-\mu)t} f(0)$$

*Finalement on obtient :*

$$\|u(t)\| \leq e^{-2(\lambda-\mu)t}\|u_0\|$$

# Conclusion Générale

Tout au long de ce mémoire nous avons étudié diverses méthodes, qu'elles soient hilbertiennes ou de semi-groupes, permettant de prendre des hypothèses plus faibles que celles du théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet nous avons étudié des opérateurs non bornés et obtenu des résultats d'existence et d'unicité pouvant s'étendre aux équations aux dérivées partielles comme on l'a vu pour l'équation de la chaleur.
Nous avons également mis en évidence la grande utilité de la méthode des semi-groupes car elle nous a permis d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité pour des problèmes semi-linéaires sous forme de solutions généralisées en se ramenant à de simples problèmes de points fixes. L'étude de ce genre d'équations est important car elles interviennent par exemple dans des problèmes de réaction-diffusion qui modélisent des phénomènes apparaissant dans des secteurs variés tels que la chimie, la biologie, la neurophysiologie ou encore la génétique des populations.

# Bibliographie

[1] Ahmed Yahia Rakia, Sur une classe de problèmes non standards décrits par des équations différentielles, Memoire de magistère, Université Mentourie, Constantine, 2009.

[2] Alain Haraux, Systeme dynamiques dissipatifs et applications, Masson, 1991.

[3] Ben Moussa Med Tayeb, Existence globale et comportement a l'infini des solutions d'un systeme de reaction-diffusion, Memoire de magistère, Université Kasdi Merbah, Ouargla, 27 juin 2006.

[4] Bryan P.Rynne and Martin A.Youngson, linear Functionall Analysis, London, 2008.

[5] D.R. Smart, Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge, 1974.

[6] Fanny Dardalhon, Federico Verga, Le théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires, Memoire de master, Université de Provence Axi-Marseille, France, 7 juin 2006.

[7] Haïm Brézis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, 1983.

[8] Boudis Radouane, Benhammada Abdelhakim, Les opérateurs non bornés et la théorie spectrale, Memoire de master, Centre Universitaire Abd Elhafid Boussouf, Mila, 2016.

[9] Stéphane Maingot, David Manceau, Théorie spectrale, Memoire de master, Université du Havre, France, 2009.

[10] Thierry Cazenave, Alain Haraux, Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires, Ellipses, 1990.

**Résumé**

Ce travail, concerne l'étude de théorème de Hille-Yosida et ses applications aux problèmes d'évolution semi-linéaires ce memoire comporte quatre chapitres : Le premier chapitre sur opérateurs : définitions et premières propriétés et les propriétés spectrales, le deuxième sur le théorème de Hille-Yosida dans cas d'un espace de Hilbert et d'un opérateur maximal monotone et cas d'un espace de Banach quelconque, le troisième sur problèmes semi-linéaires et le quatrième sur équation de la chaleur semi-linéaire.

**Mots clés :** Opérateur, Le théorème de Hille-Yosida, Problèmes d'évolution, Équation de la chaleur, Semi-linéaire.

**Abstract**

This work concerns the study of Hille-Yosida theorem and its applications to Problems of semi-linear evolution This memory has four chapters :
The first chapter on operators : definitions and first properties and properties Spectra, the second on the theorem of Hille-Yosida in the case of a space Of Hilbert and a maximal monotone operator and the case of any Banach space, The third on semi-linear problems and the fourth on equation Semi-linear heat.
**Keywords :** Operator, Hille-Yosida theorem, Problems of evolution, Heat equation, Semi-linear.

**ملخص**

هذا العمل يتعلق بالنظرية هليوزيدا و تطبيقاتها لدراسة مشاكل شبه خطية.
هذه المذكرة تضم اربعة فصول و هي :
الفصل الاول على المشغلي :التعاريف و الخصائص الاساسية و الخصائص الطيفية.
و الثاني على نظرية هليوزيدا في حالة وجود فضاء هلبرت من مشغل رتابة الحد الأقصى، و في حالة فضاء بناخ.
و الثالث على المشاكل شبه الخطية، و الرابع على معادلة الحرارة شبه الخطية.
**الكلمات المفتاحية** :مشغل، نظرية هليوزيدا، مشاكل التطور، معادلة الحرارة، شبه الخطية.