



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

EN: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

L'estimateur de quasi maximum de vraisemblance laplace pour le processus APARCH

Préparé par : Boukedjani Rokia
Lebcir Souad

Devant le jury

Hadj Ali Toria
Labeid Boudjamaa
Boularouk Yakoub

C.U. Abd Elhafid Boussouf	Président
C.U. Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
C.U. Abd Elhafid Boussouf	Examineur

Année Universitaire : 2016/2017

Table des matières

1	Introduction	10
1.1	Historique	10
2	Définitions et Notations	14
2.1	Processus Stochastique	14
2.2	Série chronologique	15
2.3	Les lois de probabilité	16
2.3.1	La loi Normale	18
2.3.2	La loi de Laplace	18
2.4	La stationnarité	19
2.5	L'estimation	21
2.5.1	L'estimateur de vraisemblance quasi maximale	22
3	Processus Asymétric Power ARCH Model - APARCH -	24
3.1	Processus APARCH	24
3.2	Existence et stationnarité	26
3.3	Hypothèses nécessaires pour la convergence d'EQMV-Laplace	30

3.4	Consistance forte	31
3.5	La normalité asymptotique	37
4	Application numérique	46
4.1	Estimation des paramètres d'un modèle APARCH	47
4.2	Etude comparative	52

Table des figures

2.1	Schéma d'une série chronologique.	17
2.2	Représentation graphique de la distribution Gauss et la distribution Laplace.	20

Liste des tableaux

4.1	Série APARCH(1,0) de paramètres $\omega = 0.5, \alpha = 0.2, \delta =$ $0.8, \gamma = 0.4.$	48
4.2	Série APARCH(1,1) de paramètres $\omega = 0.3, \alpha = 0.4, \gamma =$ $0.2, \beta = 0.2, \delta = 0.6.$	50
4.3	Racine d'erreur moyenne quadratique $\hat{\theta}_n^{LQL}$ et $\hat{\theta}_n^{GQL}$ pour le processus APARCH (1,1).	54

Remerciement

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au département de mathématique et informatique de branche mathématique fondamental et appliqué, de la faculté des sciences et technologie de centre Universitaire de Mila, ma plus grande gratitude va à mon encadreur Monsieur *BOULAROUK YAKOUB*, pour sa disponibilité et la confiance qu'elle m'a accordée. J'ai profité pendant longtemps du savoir et du savoir-faire dont j'ai pu bénéficier au cours de nombreuses discussions.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur „„ pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de ce mémoire. Que Monsieur „„„ trouve ici l'expression de mes vifs remerciements pour avoir bien voulu juger ce travail.

Afin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux
qui m'ont aidée à la réalisation de ce modeste mémoire

ROKIA DIDICACE

Je dédie ce modeste travail :

♡ A ma très chère mère HANIA qui a beaucoup sacrifié à mon bonheur,
qui a partagé mes malheurs et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.

♡ A l'âme de mon père ABDELGHANI qui m'a beaucoup conseillé de
continuer mes études, que Dieu est pitié de son âme et l'accueil dans
son vaste paradis.

♡ A ma soeur ASMA et mes frères TAKI EDDIN,
BILAL et sa fiancée MANAL.

♡ A mon Fiancé ADEL

♡ A mes grand père ABDERAHMEN et HOUSSIN A mes grand-mères,
et mes très chers oncles, tantes, cousins et Cousines qui m'ont encouragé durant ma vie estudiantine

♡ A tous mes amis : Kaltom,Somia,Nadjla,Salma,Solef,Sarra

SOUAD DIDICACE

Je dédie ce modeste travail :

♡ A ma très chère mère Hadria qui a beaucoup sacrifié à mon bonheur,
qui a partagé mes malheurs et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.

♡ A mon père Mouhamed qui m'a beaucoup conseillé de continuer mes
études

♡ A mon Mari Fateh ,et sa familles

♡ A mes soeurs Wassila, Lila, Nawal, Rahma, Chayma
et mon frère Soufiane et sa femme Chahera .

♡ A tous mes amis : Leila, Imane, Ismahan

Résumé

Dans ce mémoire de master

Tout d'abord, nous exposons un bref historique du domaine des séries chronologiques et de l'invention des différents modèles stochastiques, en suite, dans le deuxième chapitre nous donnons des définitions et notations de quelques mots utiles dans domaine de ses séries chronologique comme le bruit blanc, les lois de probabilités.

Dans le troisième chapitre, nous introduisons le modèle Asymetric Power ARCH (APARCH), puis nous étudions la stationnarité et le comportement asymptotique de l'estimateur de Quasi-maximum Laplace pour ce modèle.

Finalement, dans le dernier chapitre, nous appliquons notre méthode pour une séries chronologique simulée (APARCH) comme nous exposons les avantages de cet estimateur par rapport au classique estimateur quasi-maximum de vraisemblance Gaussien (EQMV Gaussien) à travers des simulations numériques qui confirment la précision de cet estimateur.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Historique

La modélisation représentant une étape cruciale dans l'étude des séries chronologiques. Elle a connu une grande évolution durant les cinquante dernières années et plusieurs modèles de représentation ont été proposés.

En 1970, Box et Jenkins ont publié un livre *Time series : forecasting and control* [4], dans lequel ils ont présenté et étudié les modèles Auto-régressifs moyenne mobile (ARMA) et les modèles Auto-régressifs moyenne mobile intégré (ARIMA) de bruits Gaussiens et de variance constante. Les deux processus proposés dépendent de leurs passés et celui des bruits.

En 1982, Engel [9] a proposé le modèle Auto-régressif conditionnellement hétéroscédastique (ARCH) avec bruits Gaussiens, qui a permis à la variance conditionnelle de changer en fonction des erreurs passées au

l du temps, tout en laissant la variance inconditionnelle constante. Ce modèle s'est déjà révélé utile dans la modélisation de plusieurs phénomènes. Dans Engle (1982) [9], Engle (1983) [10] et Engle et Kraft (1983) [11], des modèles pour le taux d'inflation sont construits en admettant l'hypothèse que l'inflation tend à changer au

l du temps. En 1984, Weiss [17] a considéré les modèles ARMA avec erreurs ARCH de bruits Gaussiens. Il a utilisé ces modèles pour la modélisation de seize séries chronologiques micro-économiques américaines.

En 1993, Ding et al.[7] ont étudié la structure de l'auto-corrélation de ϱ^d représente le rendement quotidien de cinq cent titres boursiers journaliers et d est un nombre positif. Ils ont trouvé que pour de longs délais, ϱ^d a des auto-corrélations positives significatives. Ce résultat les a motivés pour proposer une nouvelle généralisation pour la classe des modèles ARCH, dite Asymmetric Power ARCH (APARCH). En outre, ils ont montré que ce modèle englobe sept autres modèles connus dans la littérature. Après la mise en place des modèles GARCH et APARCH, Ding et al. (1993) [7] ont introduit les modèles ARMA avec erreurs GARCH à base de bruits Gaussiens et les modèles ARMA avec erreurs APARCH à base de bruits Gaussiens comme généralisation des modèles ARMA avec erreurs ARCH. En 2007, Doukhan et Wintenberger [8] ont écrit sous forme générale la classe des processus causaux affines :

$$X_t = M_\theta^t \zeta_t + f_\theta^t \quad (1.1.1)$$

qui contient les processus ci-dessus et d'autres.

Plusieurs méthodes d'estimation paramétriques ont été utilisées, parmi les quelles, on trouve :

i/ Méthode du moindre carrée :

cette méthode consiste à trouver les valeurs des paramètres de modèle qui minimisent la somme de carrés des erreurs $\sum_{t=0}^n \zeta_t^2$, cette méthode a été utilisé par Box et Jenkins [4] pour les modèles ARMA ; Engel [9] pour les modèles ARCH

ii/ Méthode du maximum de vraisemblance (MV) :

cette méthode est la plus utilisée dans l'estimation des paramètres de modèles de séries chronologiques, Box et Jenkins [4] l'ont utilisée pour l'estimation des modèles ARMA, Engel [9] l'a utilisée pour les modèles ARCH, Bolerselv [2] pour les modèles GARCH, Bardet et Wintenberger [5] pour la classe des processus causaux affines avec bruits Gaussiens, cette classe contient les modèles ARMA avec erreurs GARCH et beaucoup d'autres.

La méthode du maximum de vraisemblance exige la connaissance de la loi de probabilité du bruit. Pour cette raison, les travaux cités ci-dessus et d'autres, supposent que la loi de probabilité est Gaussienne. Elle fournit une bonne représentation pour plusieurs séries chronologiques. C'est la loi la plus utilisée en statistique, est critiquée dans certaines de ses utilisations pour sa queue étroite. Fance et al : (2011) ont écrit un article [12] dans lequel ils ont proposé une estimation en deux étapes pour les paramètres des mo-

dèles GARCH avec bruits non Gaussiens. Barnard et al : (2014) ont donné des résultats inférentiels pour les modèles ARMA avec erreurs de distributions types puissance exponentielle multivariés. En général, la fonction de vraisemblance n'est pas calculable puisque $(X_0; X_{-1}; \dots)$ sont inconnus. C'est pourquoi on utilise la quasi-vraisemblance qu'on obtient en remplaçant le passé du processus par des zéros. Les propriétés asymptotiques de log quasi-vraisemblance.

Chapitre 2

Définitions et Notations

2.1 Processus Stochastique

On désigne par $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, T un ensemble arbitraire et S un espace métrique muni de la tribu borélienne notée $\mathcal{B}(S)$. T est souvent appelé ensemble des indices (souvent, on aura $T = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p, \mathbb{N}, \dots$). T peut faire référence au temps, à l'espace ou aux deux à la fois.

L'indice $t \in T$ désigne alors un instant ($\mathbb{R}_+$), une date ($\mathbb{N}$), un point, ou encore un point à un certain instant. S est appelé espace d'état (souvent, on aura $S = \mathbb{R}, \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, un ensemble fini ou dénombrable).

Définition 1 *Un processus stochastique (ou aléatoire) est une famille de variables aléatoires (c'est-à-dire, des applications mesurables) définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indexée par T et à valeurs dans S .*

Si T est un sous-ensemble d'un espace multidimensionnel, on préfère utiliser la dénomination de champ stochastique. Un processus stochastique est noté par $\{X_t\}_{t \in T}$. La valeur de la variable aléatoire X_t en un certain $\omega \in \Omega$ est désignée par $X_t(\omega)$.

La famille de toutes les distributions finies-dimensionnelles de X s'appelle la loi spatiale du processus. Si $S \subseteq \mathbb{R}$, on parle de loi temporelle.

2.2 Série chronologique

Définition 2 *Une série temporelle, ou série chronologique, est une suite de valeurs numériques représentant l'évolution d'une quantité spécifique au cours du temps. De telles suites de variables aléatoires peuvent être exprimées math afin d'en analyser le comportement, généralement pour comprendre son épassée et pour en prévoir le comportement futur. Une telle transposition mathématique utilise le plus souvent des concepts de probabilités et de statistique.*

Proposition 1 *Les séries temporelles sont considérées à tort comme étant une branche exclusive de l'économétrie. Cette dernière est une discipline qui est relativement jeune alors que les séries temporelles ont été utilisées bien avant, par exemple en astronomie (1906) et en météorologie (1968).*

L'objet des séries temporelles est l'étude des variables au cours du temps. Même s'ils n'ont pas été à l'origine de cette discipline, ce sont les économètres

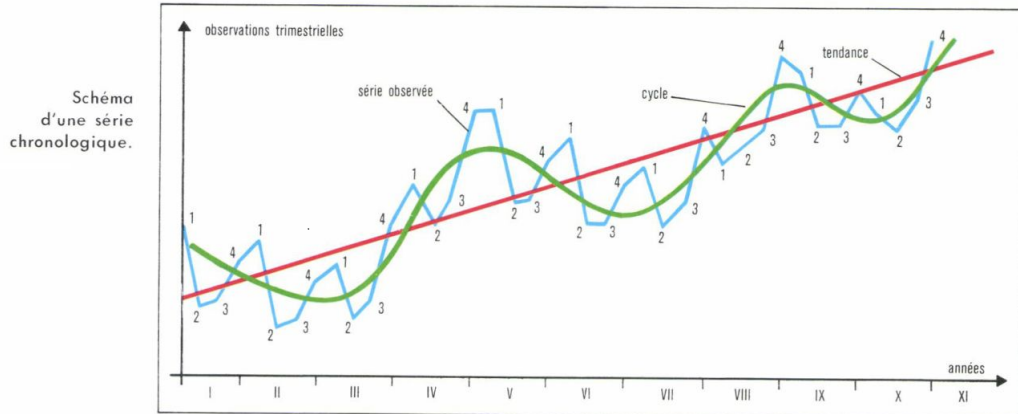


FIGURE 2.1 – Schéma d’une série chronologique.

qui ont assuré les grandes avancées qu’a connues cette discipline (beaucoup de « Prix Nobel » d’économie sont des économètres).

Parmi ses principaux objectifs figurent la détermination de tendances au sein de ces séries ainsi que la stabilité des valeurs (et de leur variation) au cours du temps.

Définition 3 (le processus bruit blanc) (*noté BB, ou White noise*)

Un Bruit Blanc est une suite de v.a.r. $\varepsilon_t, t \in T$ telle que :

$$\begin{cases} E(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall \quad t \in T \\ \gamma(h) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = 0 \end{cases}$$

Il s’agit d’une suite de v.a.r homoscédastiques et non autocorrélées (et même

indépendantes c'est pourquoi on parle aussi de processus identiquement et indépendamment distribué).

2.3 Les lois de probabilité

En théorie des probabilités et en statistique, une loi de probabilité décrit le comportement aléatoire d'un phénomène dépendant du hasard. L'étude des phénomènes aléatoires a commencé avec l'étude des jeux de hasard. Jeux de dés, tirage de boules dans des urnes et jeu de pile ou face ont été des motivations pour comprendre et prévoir les expériences aléatoires. Ces premières approches sont des phénomènes discrets, c'est-à-dire dont le nombre de résultats possibles est fini ou au plus dénombrable.

Il existe beaucoup de lois de probabilités différentes. Parmi toutes ces lois, on utilise la loi normale et la loi de Laplace.

2.3.1 La loi Normale

La loi normale, ou loi gaussienne, est une loi centrale en théorie des probabilités et en statistique. Elle décrit le comportement des séries d'expériences aléatoires lorsque le nombre d'essais est très grand.

Lemme 1 *La loi normale est caractérisée par sa moyenne (qui est également sa médiane) et par son écart-type, son support est la droite réelle. Sa densité est symétrique et sa forme est communément appelée la courbe de Gauss ou*

courbe en cloche :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

2.3.2 La loi de Laplace

Dans la théorie des probabilités et en statistiques, la loi (distribution) de Laplace est une densité de probabilité continue, nommée d'après Pierre-Simon de Laplace.

On la connaît aussi sous le nom de loi double exponentielle, car sa densité peut être vue comme l'association des densités de deux lois exponentielles, accolées dos à dos.

Lemme 2 *La loi de Laplace s'obtient aussi comme le résultat de la différence de deux variables exponentielles indépendantes.*

Une variable aléatoire possède une distribution Laplace (σ, b) si sa densité de probabilité est :

$$f(x|\sigma, b) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\sigma|}{b}}$$

Le réel σ est un paramètre de position et $b > 0$ un paramètre d'échelle. Si $\sigma = 0$ et $b = 1$, la loi de Laplace est dite standard et sa restriction à la demi-droite réelle positive est la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

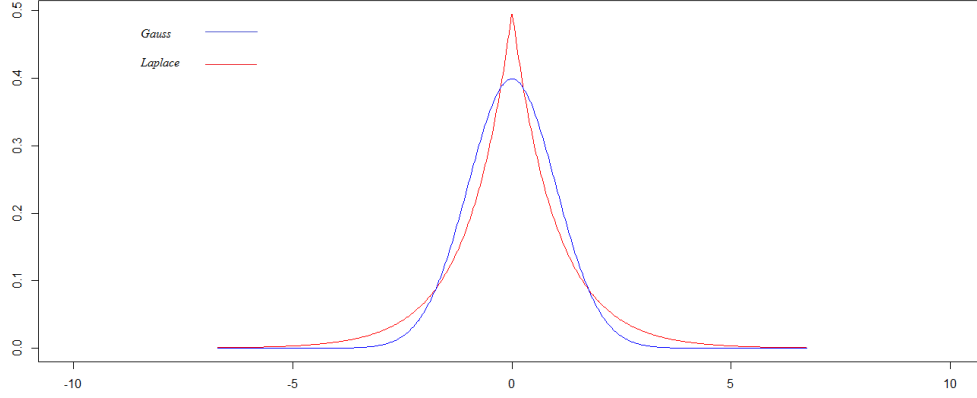


FIGURE 2.2 – Représentation graphique de la distribution Gauss et la distribution Laplace.

2.4 La stationnarité

Proposition 2 (La stationnarité au sens strict) *On dit que le processus $Y_t, t \in T$ est stationnaire au sens strict (ou fortement stationnaire) si la loi de $Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}$ est la même que la loi de $Y_{t_1+\tau}, \dots, Y_{t_n+\tau}$ pour tout $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ avec $t_i \in T$, pour $i = 1, \dots, n$ et pour tout $\tau \in T$ avec $t_{i+\tau} \in T$.*

Ainsi, un processus aléatoire est strictement stationnaire si toutes ces caractéristiques c'est-à-dire tous ces moments sont invariants pour tout changement de l'origine du temps.

Mais la stationnarité au sens strict est trop restrictive et on assouplit cette condition en définissant la stationnarité du second ordre.

Proposition 3 (La stationnarité du second ordre) *Un processus $Y_t, t \in$*

T est dit stationnaire du second ordre (ou faiblement stationnaire) si $Y_t, t \in T$ est du second ordre et si les deux premiers moments sont invariants dans le temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(Y_t) = m = \text{const} \quad \forall \quad t \in T \\ \text{Var}(Y_t) = \sigma_2 = \gamma(0) < \infty \\ \text{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = E(Y_t Y_{t-h}) - E(Y_t)E(Y_{t-h}) = \gamma(h) \quad \forall \quad t \in T, \quad \forall \quad h \in T \end{array} \right. \quad (2.4.1)$$

En résumé, un processus Y_t est dit stationnaire du second ordre si sa moyenne, sa variance et sa covariance sont indépendantes du temps et si sa variance est finie. Un tel processus est sans tendance en moyenne et sans tendance en variance.

Un tel processus admet donc une loi, qui pour ses deux premiers moments, est invariante par changement de l'origine des temps.

2.5 L'estimation

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une trajectoire observée de X solution de système où $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ est inconnu. Pour estimer θ nous considérons la log-vraisemblance de $(X_1, \dots, X_n)$ conditionnellement $(X_0, X_{-1}, \dots)$. Si g est la densité de probabilité (par rapport à la mesure de Lebesgue) de ξ_0 , alors, à partir de la dé-

finition causale affine de X , ce log-vraisemblance peut s'écrire sous la forme :

$$\log(L_\theta(X_1, \dots, X_n)) = \sum_{t=1}^n \log \left(g \frac{X_t}{\sigma_t} \right). \quad (2.5.1)$$

où $\sigma_t = \sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$, avec l'hypothèse que $\sigma_t > 0$ et $f = 0$.

Cependant, comme X_0, X_{-1} sont inconnus, en général les σ_t n'est pas calculables. Pour Cela , au lieu d'utiliser directement la log-vraisemblance, un quasi-log-vraisemblance est considéré et il est défini par :

$$\log(QL_\theta) = \sum_{t=1}^n \log \left(g \left(\frac{X_t}{\sigma_\theta} \right) \right). \quad (2.5.2)$$

avec $\sigma_\theta^t = \sigma_\theta(X_{t-1}, \dots, X_1, v)$ où $u = (U_{n,n \in \mathbb{N}})$ est une suite fini.

Le choix de $(U_{n,n \in \mathbb{N}})$ n'influe pas le comportement asymptotique de L_n , et (U_n) pourrait typiquement être choisi comme une suite égale à zéro.

2.5.1 L'estimateur de vraisemblance quasi maximale

Définition 4 On connu $\tilde{\Theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} \log (QL_\theta(X_1, \dots, X_n))$ Habituellement, la distribution Gaussienne est considérée, avec $g(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et ceci fournit l'EQMV-Gaussien de θ .

Dans le présent travail, nous avons choisi la distribution de Laplace, c'est-à-dire :

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

et cela implique que

$$E|\xi_0| = 1$$

Proposition 4 (la vraisemblance de Laplace) *le quasi-vraisemblance de Laplace défini par :*

$$\begin{aligned} L_n(\theta) &= - \sum_{t=1}^n q_t(\theta) \\ q_t(\theta) &= \log |\sigma\theta| + |\sigma\theta|^{-1} |X_t| \end{aligned}$$

$$\hat{L}_n(\theta) = - \sum_{t=1}^n \hat{q}(\theta)_t, \hat{q}(\theta)_t = \log |\hat{\sigma}_\theta^t| + |\hat{\sigma}_\theta^t|^{-1} |X_t| \quad (2.5.3)$$

Un estimisateur de quasi maximaux de vraisemblance Laplace $\hat{\theta}_n$ est le maximisateur de L_n :

$$\hat{\theta}_n = \max_{\theta \in \Theta} \hat{L}_n(\theta)$$

Nous limitons l'ensemble Θ de manière à ce qu'une solution (X_t) de système stationnaire d'ordre 1 ou 2 existe. Des conditions supplémentaires sont également nécessaires pour assurer la consistance et la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_n$

Théorème 1 (Causalité) X_t est causal si et seulement si les racines de Φ sont à l'extérieur du cercle unité $z = 1$. La série entière $\Phi(z)$ est alors inversible et X_t admet la forme $MA(\infty)$: $X_t = \Psi(B)Z_t$, avec $\Psi(Z) = \Phi(z)^{-1}$

Lemme 3 (Localement Lipshitzien) Soient $f \in C(I \times J; R^m)$ où I est un

intervalle ouvert de R et J est un ouvert d'un espace R^m , et $(t_0, x_0) \in I \times J$
On dit que fonction f est localement lipschitzienne par rapport à sa variable x si pour tout $(t_1; x_1) \in I \times J$, il existe un voisinage de ce point dans $I \times J$ et $L > 0$ tel que pour tous $(t; x)$ et $(t; y)$ dans ce voisinage ,

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \|$$

Chapitre 3

Processus Asymétric Power ARCH Model - APARCH -

3.1 Processus APARCH

Le modèle APARCH a été introduit comme solution de système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t = \sigma_t \zeta_t \\ \sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|X_{t-i}| - \gamma_i X_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

où $\delta \geq 1$, $\omega > 0$, $-1 < \gamma_i < 1$ et $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, p$, $\beta_j \geq 0$ pour $j = 1, \dots, q$ avec α_p, β_q strictement positive et $\sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. On note ici $\theta = (\delta, \omega, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma_1, \dots, \gamma_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$.

Utilisant L l'opérateur retard habituel tel que $LX_t = X_{t-1}$ et $(1 - \sum_{j=1}^q \beta_j L^j)^{-1}$

existe, un simple calcul implique que pour $t \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_t^\delta &= \left(1 - \sum_{j=1}^q \beta_j L^j\right)^{-1} \\
&\times \left[\omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (1 - \gamma_i)^\delta (\max(X_{t-i}, 0))^\delta + \alpha_i (1 + \gamma_i)^\delta (-\min(X_{t-i}, 0))^\delta \right] \\
&= b_0 + \sum_{i \geq 1} b_i^+ (\max(X_{t-i}, 0))^\delta + \sum_{i \geq 1} b_i^- (\max(-X_{t-i}, 0))^\delta.
\end{aligned}$$

où $b_0 = w(1 - \sum_{j=1}^q \beta_j)^{-1}$ et les coefficients $(b_i^+, b_i^-)_{i \geq 1}$ sont définis par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} b_i^+ = \sum_{k=1}^q \beta_k b_{i-k}^+ + \alpha_i (1 - \gamma_i)^\delta & \text{avec } \alpha_i (1 - \gamma_i) = 0 \text{ pour } i > p; \\ b_i^- = \sum_{k=1}^q \beta_k b_{i-k}^- + \alpha_i (1 + \gamma_i)^\delta & \text{avec } \alpha_i (1 + \gamma_i) = 0 \text{ pour } i > p, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

avec $b_i^+ = b_i^- = 0$ pour $i \leq 0$. Donc, pour le modèle APARCH, $f_\theta^t \equiv 0$ et $M_\theta^t = \sigma_t$. C'est clair que $\alpha_j^{(0)}(f, \Theta) = 0$ et un simple calcul implique que $\alpha_j^{(0)}(M, \Theta) = \sup_{\theta \in \Theta} \max(|b_j^+(\theta)|^{1/\delta}, |b_j^-(\theta)|^{1/\delta})$, donc $A_0(f, \Theta)$ est vérifiée et $\sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ implique que pour n assez grand, la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^q \beta_k u_{n-k}$ est décroissante de façon exponentielle et donc $A_0(M, \Theta)$ demeure vérifiée. D'où pour $r \geq 1$, l'ensemble de stationnarité $\Theta(r)$ est définie par :

$$\Theta(r) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^{2p+q+2} \mid \left(E[|\zeta_0|^r] \right)^{1/r} \sum_{j=1}^{\infty} \max(|b_j^+|^{1/\delta}, |b_j^-|^{1/\delta}) < 1 \right\}. \quad (3.1.3)$$

Par conséquent, nous pouvons énoncer, pour la première fois, la forte consistance et la normalité asymptotique d'EQMV-Laplace pour les modèles APARCH comme suit :

Théorème 2 *Soit X une solution stationnaire de (3.1.1) avec $\theta_0 \in \Theta$ où Θ est le sous ensemble compact de $\Theta(r)$ définie dans (3.1.3). Alors,*

1. *Si $r = 1$, alors $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \theta_0$.*

2. *Si $r = 2$ et si Γ_M est une matrice symétrique définie positive, alors :*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_{2p+q+2}(0, (\sigma_\zeta^2 - 1)\Gamma_M^{-1}).$$

3.2 Existence et stationnarité

Comme dans Doukhan et Winterberger(2007) [8] et Bardet et Winterberger [2] Plusieurs inégalités de type Lipschitz sur σ_θ sont nécessaires pour l'obtention de l'existence et la r -stationnarité d'une solution causale et ergodique de 1.1.1. Pour cela, nous introduisons le symbole générique Ψ pour les fonctions σ et pour $g_\theta : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^m$ ou $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, notons $\|g_\theta\|_\Theta = \sup_{\theta \in \Theta} \|g_\theta\|$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle. Pour $k = 0, 1, 2$ et un certain sous espace Θ de $\mathbb{R}^d$, définissons la condition Lipshitzienne sur la fonction Ψ_θ :

Hypothèse 1 $(A_K(\Psi, \Theta)) : \forall x \in \mathbb{R}^\infty, \theta \in \Theta \mapsto \Psi_\theta(x) \in \mathcal{C}^K(\Theta), \partial_\theta^K \Psi_\theta$ sa-

atisfait $(\partial_\theta^K \Psi_\theta(0))_\Theta < \infty$ et il existe une suite $(\alpha_j^{(K)}(\Psi, \Theta))_j$ de nombres non négatifs telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

$$(\partial_\theta^K \Psi_\theta(x) - \partial_\theta^K \Psi_\theta(y))_\Theta \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(K)}(\Psi, \Theta)(x_i - y_j), \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(K)}(\Psi, \Theta) < \infty.$$

Afin d'assurer l'existence d'une solution stationnaire d'ordre $r(r \geq 1)$ pour 1.1.1, définissons l'ensemble :

$$\Theta(r) := \left\{ \theta \in \mathbb{R}^d, (\mathbf{A}_0(0, \{\theta\})) \text{ et } (\mathbf{A}_0(\sigma, \{\theta\})) \text{ sont vérifiées,} \right. \\ \left. \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(0)}(0, \{\theta\}) + (\mathbb{E}[|\zeta_0|^r])^{1/r} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(0)}(\sigma, \{\theta\}) < 1 \right\}.$$

Puis, à partir Doukhan et Wintenberger [8], nous obtenons :

Proposition 5 *Si $\theta_0 \in \Theta(r)$ pour un certain $r \geq 1$, alors il existe une unique solution causal de 1.1.1 (X_t indépendant de $(\zeta_i)_{i>t}$ pour $t \in \mathbb{Z}$), qui est stationnaire, ergodique et satisfait $E(|X_0|^r) < \infty$.*

Le lemme suivant assure que si un processus X satisfait la proposition 5, un processus APARCH prévisible causal avec X comme innovation satisfait également la proposition 5. Nous donnons d'abord la notion classique pour

une suite de nombres réels $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite exponentiellement décroissante (SED)

$$\Longleftrightarrow$$

il existe un $\rho \in [0.1[$ tel que $\mathcal{U}_n = \mathcal{O}(\rho^n)$ quand $n \rightarrow \infty$

Lemme 4 Soit X une solution p.s causal et stationnaire de 1.1.1 pour $\theta_0 \in \mathbb{R}^d$, Soit $\widetilde{X}$ tel que $\widetilde{X}_t = \Lambda_\beta(L)X_t$, pour $t \in \mathbb{Z}$ avec $\Lambda_{\beta_0}(L) = P_{\beta_0}^{-1}(L)Q_{\beta_0}(L)$ où $(P_{\beta_0}, Q_{\beta_0})$ sont les polynômes comprimés d'un processus APARCH causal et inversible avec un vecteur de paramètres inconnus $\beta_0 \in \mathbb{R}^{p+q}$. Notons $\Lambda_{\beta_0}^{-1}(x) = Q_{\beta_0}^{-1}(x)P_{\beta_0}(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j(\beta_0)x^j$. Alors $\widetilde{X}$ est une solution p.s.causal et stationnaire de l'équation :

$$\widetilde{X}_t = (\widetilde{\sigma}_{\theta_0}((\widetilde{X}_{t-i})_i \geq 1))\zeta_t \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

où $\widetilde{\sigma}_{\theta_0}$ est donné par 3.2.1 et $\widetilde{\theta}_0 = (\theta_0, \beta_0)$ De plus pour $i = 0, 1, 2$ et $(K = \sigma)$ et $(\widetilde{K} = \widetilde{\sigma})$

- Si $\alpha_j^{(i)}(K, \theta_0) = O(j^{-\beta})$ et $\beta > 1$, alors $\alpha_j^{(i)}(\widetilde{K}, \widetilde{\theta}_0) = O(j^{-\beta})$
- Si $\alpha_j^{(i)}(K, \theta_0)$ est SED, $\alpha_j^{(i)}(\widetilde{K}, \widetilde{\theta}_0)$ est SED

Preuve de Lemme 1 Comme X est un processus stationnaire et le processus APARCH(p,q) est causal inversible alors $\widetilde{X}$ est également un processus

stationnaire (les coefficients de Λ_{β_0} sont SED). De plus, il est bien connu que $\psi_j(\beta_0)_{j \in \mathbb{N}}$ sont SED. Alors nous avons :

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_t &= \Lambda_{\beta_0}(L) \left(\sigma_{\theta_0}((X_{t-i})_{i \geq 1}) \zeta_t \right) \\ \widetilde{X}_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(\beta_0) \widetilde{X}_{t-j} &= \sigma_{\theta_0}((\Lambda_{\beta_0}(L) \widetilde{X}_{t-i})_{i \geq 1}) \zeta_t \\ \widetilde{X}_t &= \widetilde{\sigma}_{\widetilde{\theta}_0}((\widetilde{X}_{t-i})_{i \geq 1}) \zeta_t\end{aligned}$$

Avec :

$$\widetilde{\sigma}_{\widetilde{\theta}_0}((x_{t-i})_{i \geq 1}) = \sigma_{\theta_0}((\Lambda_{\beta_0}^{-1}(L)x_{t-i})_{i \geq 1}). \quad (3.2.1)$$

Enfin, pour $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}_{\widetilde{\theta}_0}((x_{t-i})) - \widetilde{\sigma}_{\widetilde{\theta}_0}((y_{t-i})) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(0)}(\sigma, \theta_0) (\Lambda_{\beta_0}^{-1}(L)x_{t-j-i}) - (\Lambda_{\beta_0}^{-1}(L)y_{t-j-i}) \\ \implies \alpha_j^{(0)}(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\theta}_0) &\leq \sum_{k=1}^j \alpha_k^{(0)}(\sigma, \theta_0) |\psi_{j-k}| \quad (3.2.2)\end{aligned}$$

Les mêmes types de calculs peuvent également être effectués en considérant les dérivées première et seconde de $\widetilde{\sigma}$ par rapport à $\widetilde{\theta}$. Notons que les dérivées première et seconde de Λ_{β}^{-1} par rapport à $\widetilde{\theta}$ sont également SED.

Finalement :

- Si quand $j \longrightarrow \infty$, $\alpha_j^{(0)}(k, \theta_0) = O(j^{-\beta})$ avec $\beta > 1$ et $\psi_j = O(\rho^j)$ avec

$0 \leq \rho < 1$, alors il existe un $C > 0$ tel que $\sum_{k=1}^j \alpha_k^{(0)}(k, \theta_0) |\psi_{j-k}| \leq$

$C \sum_{k=1}^j k^{-\beta} \rho^{j-k} \sim -c(\log \rho)^{-1} j^{-\beta}$ et donc $\alpha_j^{(0)}(\tilde{k}, \tilde{\theta}_0) = O(j^{-\beta})$

- Si quand $j \rightarrow \infty$, $\alpha_j^{(0)}(k, \theta_0) = O(r^j)$ avec $0 \leq r < 1$ et $\psi_j = O(\rho^j)$ avec $0 \leq \rho < 1$, alors il existe un $C > 0$ tel que $\sum_{k=1}^j \alpha_k^{(0)}(k, \theta_0) |\psi_{j-k}| \leq C \sum_{k=1}^j r^{-k} \rho^{j-k} = O(j \max(r, \rho)^j)$ et donc $\alpha_j^{(0)}(\tilde{k}, \tilde{\theta}_0)$ sont SED.

Également, on peut effectuer le même type de calcul pour $(\alpha_j^i)(\tilde{k}, \tilde{\theta}_0)_j$ en appliquant la démarche de preuve ci dessus aux premières et deuxièmes dérivées de $\Lambda_{\beta_0}^{-1}$ par rapport à β , d'où on conclut que $\tilde{\theta}$ sont SED.

Lemme 5 Supposons que $\theta_0 \in \Theta(r)$ pour $r \geq 1$ et que X est la solution causal et stationnaire de 1.1.1. Si $(A_0(\Psi, \Theta))$ est satisfaite, alors $\Psi_\theta^t \in L^r(\mathcal{C}(\Theta, \mathbb{R}^m))$ et il existe une constante $C > 0$ indépendante de t tel que :

$$E[(\hat{\Psi}_\theta^t - \Psi_\theta^t)_\Theta]^r \leq CE[(X_0)^r] \left(\sum_{j \geq t} \alpha_j(\Psi) \right)^r \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{N}^*. \quad (3.2.3)$$

3.3 Hypothèses nécessaires pour la convergence d'EQMV-Laplace

L'EQMV Laplace pourrait converger et être asymptotiquement Gaussien mais cela nécessite quelques hypothèses supplémentaires sur Θ et la fonction σ_θ :

- **Hypothèse H1 (Compacité) :** Θ est un ensemble compact.
- **Hypothèse H2 (Borne inférieure de la variance conditionnelle) :** il

existe une constante $\underline{\sigma} > 0$ tel que $\forall \theta \in \Theta$ alors $\sigma_\theta(x) > \underline{\sigma}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

- **Hypothèse H3 (Identifiabilité) :** La fonction σ_θ est telle que : pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, alors $\sigma_{\theta_1} = \sigma_{\theta_2}$ implique que $\theta_1 = \theta_2$.

3.4 Consistance forte

Nous allons d'abord prouver la forte consistance d'une suite de l'EQMV Laplace pour une solution de 1.1.1.

Théorème 3 *supposons que les hypothèse H_1, H_2 et H_3 sont satisfaites et que $\theta_0 \in \Theta(r) \cap \Theta$ avec $r \geq 1$. Soit X une solution stationnaire de 1.1.1. Si $A_0(\sigma, \theta)$ demeurent avec :*

$$\alpha_j^0(\sigma, \Theta) = \mathcal{O}(j^{-l}), \text{ pour Certain } l > \frac{2}{\min(r, 2)} \quad (3.4.1)$$

alors :

la suite d'EQMV-Laplace $(\hat{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement, c-à-d : $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \theta_0$.

Les conditions requises pour cette forte consistance d'EQMV-Laplace sont presque les mêmes que celles requises pour la forte consistance d'une suite d'EQMV-Gaussien sauf que $r \in [1, 2)$ est avérée possible dans le théorème 3 et non dans le cas d'EQMV-Gaussien (voir Bardet et Wintenberger, 2009)[2]. En outre, si $r = 2$, la condition 3.4.1 sur les coefficients Lipshitzienne est plus faible pour l'EQMV-Laplace que pour l'EQMV-Gaussien. Comme nous

le verrons ci-dessous, de nombreuses séries chronologiques satisfont les hypothèses du théorème 3 ; par exemple, un processus $AR(\infty)$ peut être définie pour satisfaire la forte consistance de l'EQMV-Laplace tandis que les conditions indiquées dans Bardet et Wintenberger (2009) [2] ne garantissent pas la forte consistance d'EQMV-Gaussien.

Preuve de Théorème 1 La preuve de théorème se fait en deux étapes et suit la même procédure que dans Bardet et Wintenberger (2009) [2], Dans la première étape, une forte Loi uniforme (tout les valeurs pris par la Variable aléatoire sont équiprobable) des grands nombres (sur θ) satisfaite par $\frac{1}{n}\hat{L}_n(\theta)$ qui converge vers

$L(\theta) = -E[Q_0(\theta)]$ est établi, Dans le deuxième , on prouve que $L(\theta)$ admet un maximum unique en θ_0 (Jeantheau, 1998) [13]

1'er étape De la même façon et pour les mêmes raisons de la preuve du théorème 3 de Bardet et Wintenberger (2009) [2], la loi uniforme forte des grands nombres satisfaite par la moyenne d'échantillon $(\hat{q}_t)_t \in \mathbb{R}^*$ (défini dans 2.5.3) est obtenu en prouvant que $E[|q_t(\theta)|_{\Theta}] < \infty$. Du lemme 5, pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
q_t(\theta) &= \log(\sigma_\theta^t) + (\sigma_\theta^t)^{-1} X_t \\
&\leq \frac{X_t}{\underline{\sigma}} + \log(\underline{\sigma}) + \sigma_\theta^t \\
\text{Donc : } \sup_{\theta \in \Theta} q_t(\theta) &\leq \frac{1}{\underline{\sigma}} X_t + \log(\underline{\sigma}) + \|\sigma_\theta^t\|_\Theta
\end{aligned}$$

avec $r \geq 1$, on a :

- De la proposition 5 pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $E[|X_t|] < \infty$.
- Du lemme 5 $E[\|\sigma_\theta^t\|_\Theta^r] < \infty$, ce qui implique que $E[\|\sigma_\theta^t\|_\Theta] < \infty$.

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

$$E[\|q_t(\theta)\|_\Theta] < \infty.$$

ainsi, de la loi forte uniforme des grands nombres pour $(q_t(\theta))$ on déduit que :

$$\left\| \frac{L_n(\theta)}{n} - L(\theta) \right\|_\Theta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0 \quad (3.4.2)$$

Nous allons montrer maintenant que $\frac{1}{n} \|\hat{L}_n(\theta) - L(\theta)\|_\Theta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0$. En effet, pour tout $\theta \in \Theta$ et $t \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\hat{q}_t(\theta) - q_t(\theta) &\leq \log(\hat{\sigma}_\theta^t) - \log(\sigma_\theta^t) + (\hat{\sigma}_\theta^t)^{-1}X_t - (\sigma_\theta^t)^{-1}X_t \\
&\leq \log(\hat{\sigma}_\theta^t) - \log(\sigma_\theta^t) + ((\hat{\sigma}_\theta^t)^{-1} - (\sigma_\theta^t)^{-1})X_t \\
&\leq (\hat{\sigma}_\theta^t - \sigma_\theta^t)\underline{\sigma}^{-1} + (\hat{\sigma}_\theta^t - \sigma_\theta^t)(\underline{\sigma}^{-2}X_t \\
&\leq C(1 + X_t)(\hat{\sigma}_\theta^t - \sigma_\theta^t)
\end{aligned}$$

avec $C > 0$. Par conséquent, on a :

$$\|\hat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)\|_\Theta \leq C(1 + X_t)(\|\hat{\sigma}_\theta^t - \sigma_\theta^t\|_\Theta).$$

par le corollaire 1 de Kounias et Weng(1969) [14], la preuve est obtenue s'il existe un $s \in (0, 1]$ tel que :

$$\sum_{t \geq 1} \frac{1}{t^s} E[\|q_t(\theta) - \hat{q}_t(\Theta)\|_\Theta^s] < \infty. \quad (3.4.3)$$

Prouvons 3.4.3 avec $s = r/2$ quand $r \in [1, 2]$. De l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les hypothèse $A_0(\sigma, \Theta)$

$$E[\|\hat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)\|_\Theta^{r/2}] \leq C(E[(1 + X_t)^r])^{\frac{1}{2}} \times (E[(\|\hat{\sigma}_\theta^t - \sigma_\theta^t\|_\Theta)^r])^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant le lemme 5 et les précédents résultats prouvés impliquant

$E[(X_t)^r] < \infty$ et $E[\|\sigma_\theta^t\|_\Theta^r] < \infty$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E[\|\hat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)\|_\Theta^{r/2}] &\leq C(\sum_{j>t} \alpha_j^0(\sigma, \Theta))^{\frac{r}{2}} \\ &\leq Ct^{-\frac{(l-1)r}{2}} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenu de la condition 3.4.1 du théorème 3. Nous avons donc :

$$\sum_{t \geq 1} \frac{1}{t^{r/2}} E[(\hat{q}_t(\theta) - q_t(\theta))_\Theta^{r/2}] \leq A \sum_{t \geq 1} t^{-rl/2}.$$

qui est fini quand $rl > 2$. Quand $r \geq 2$, il suffit de considérer le cas $r = 2$.

En conséquence, nous obtenons :

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \|\hat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)\|_\Theta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0 \quad \frac{1}{n} \|\hat{L}_n(\theta) - L(\theta)\|_\Theta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0 \quad (3.4.4)$$

d'où, en utilisant 3.4.2 nous aurons :

$$\frac{1}{n} \|\hat{L}_n(\theta) - L(\theta)\|_\Theta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0. \quad (3.4.5)$$

2^eme étape pour $\theta \in \Theta$, nous étudions :

$$L(\theta) = -E[q_0(\theta)]$$

qui peut être considérée comme une divergence de KULLBACK-LEIBLER.

Nous avons :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= -E[\log(\sigma_\theta^t) + (\sigma_\theta^t)^{-1} X_t] \\ &= -E[\log(\sigma_\theta^t) + \frac{\sigma_{\theta_0}^t}{\sigma_\theta^t} |\zeta_t|] \end{aligned}$$

Par conséquent, utilisant $E[|\zeta_t|] = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} L(\theta_0) - L(\theta) &= E[-\log(\sigma_{\theta_0}^t) + \log(\sigma_\theta^t) + \frac{\sigma_{\theta_0}^t}{\sigma_\theta^t} |\zeta_t| - 1] \\ &= E[\log(\frac{\sigma_\theta^t}{\sigma_{\theta_0}^t}) - 1 + \frac{\sigma_{\theta_0}^t}{(\sigma_\theta^t)^t} E[|\zeta_t|]] \end{aligned}$$

Mais pour un ζ_t suivant une distribution de probabilité symétrique, nous avons pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, $E[|\zeta_t|] = 1$. d'où, pour $\theta \neq \theta_0$

$$\begin{aligned} L(\theta_0) - L(\theta) &> E[-\log(\sigma_{\theta_0}^t) + \log(\sigma_\theta^t) - 1 + \frac{\sigma_{\theta_0}^t}{\sigma_\theta^t}] \\ &> h(\frac{\sigma_\theta^t}{\sigma_{\theta_0}^t}) \end{aligned}$$

avec $h(x) = \log(x) - 1 + x$. Mais pour tout $X \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, $h(X) > 0$ et $h(1) = 0$, par conséquent si $\sigma_\theta^t \neq \sigma_{\theta_0}^t$, on a : $h(\frac{\sigma_\theta^t}{\sigma_{\theta_0}^t}) > 0$ ($>$ est remplacé par $= 0$ si $\sigma_\theta = \sigma_{\theta_0}$). Cela implique, de l'hypothèse H_3 (identifiabilité), que $L(\theta_0) - L(\theta) > 0$ presque sûrement pour tout $\theta \in \Theta$, $\theta \neq \theta_0$. D'où une borne supérieure de $L(\theta)$ est atteinte seulement pour $\theta = \theta_0$ qui est un maximum

unique.

3.5 La normalité asymptotique

Une extension de théorème 3 prouvé dans Davis et Dunsmuir(1997)[6] sera donnée ci -après et consistera une étape essentielle pour la preuve de la normalité asymptotique de l'estimateur.

Théorème 4 *Soit $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une suite de (VAIID) telle que $\text{Var}(Z_0) = \sigma^2 < \infty$, avec la fonction de distribution commune qui est symétrique ($F(-x) = 1 - F(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$) et continûment différentiable dans un voisinage de 0 avec une dérivée $f(0)$ en 0. Notons $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_t, Z_{t-1}, \dots)$ pour $t \in \mathbb{Z}$ et soit $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(V_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ deux processus stationnaires adaptés à $(\mathcal{F}_t)_t$ et comme $E[Y_0^2 V_0^2] < \infty$. Alors*

$$\sum_{t=1}^n V_{t-1}(|Z_t - n^{-1/2} Y_{t-1}| - |Z_t|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(f(0)E[V_0 Y_0^2], E[Y_0^2 V_0^2]). \quad (3.5.1)$$

La normalité asymptotique de l'EQMV-Laplace peut être établie utilisant des hypothèses supplémentaires.

Preuve de Théorème 2 *Nous suivons le même schéma de preuve que Da-*

vis et Dunsmuir(1997) [6]. Donc, désignons par :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{t=1}^n V_{t-1}(|Z_t - n^{-1/2}Y_{t-1}| - |Z_t|) \\
&= -n^{-1/2} \sum_{t=1}^n V_{t-1}Y_{t-1} \operatorname{sgn}(Z_t) \\
&+ 2 \sum_{t=1}^n V_{t-1}(n^{-1/2}Y_{t-1} - Z_t)(1_{0 < Z_t < n^{-1/2}Y_{t-1}} - 1_{n^{-1/2}Y_{t-1} < Z_t < 0}) \\
&= A_n + B_n.
\end{aligned}$$

Dés que $E[V_{t-1}Y_{t-1}\operatorname{sgn}(Z_t)/\mathcal{F}_{t-1}] = E[\operatorname{sgn}(Z_t)]E[V_{t-1}Y_{t-1}] = 0$ et $E[V_0^2Y_0^2] < \infty$, on peut appliquer le théorème central limite pour la suite de différences de martingales stationnaire (voir Billingsley, 1968 [3]) et :

$$A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, E[V_0^2Y_0^2]). \quad (3.5.2)$$

Considérons B_n et définissant $W_{nt} = V_{t-1}(n^{-1/2}Y_{t-1} - Z_t)1_{0 < Z_t < n^{-1/2}Y_{t-1}}$.

Utilisant les mêmes arguments que Davis et Dunsmuir(1997) [6], nous obtenons également :

$$\begin{aligned}
&- \lim_{n \rightarrow \infty} \sup n E[W_{nt}^2] = 0. \\
&- E[W_{nt}/\mathcal{F}_{t-1}] \simeq \frac{1}{2n} f(0) V_{t-1} Y_{t-1}^2 \text{ pour } |n^{-1/2}Y_{t-1}| < \varepsilon. \\
&- \sum_{t=1}^n W_{nt} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} \frac{1}{2} f(0) E[V_0 Y_0^2 1_{Y_0 > 0}].
\end{aligned}$$

Donc, nous déduisons que :

$$B_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} f(0) E[V_0 Y_0^2]. \quad (3.5.3)$$

La preuve est achevé de 3.5.2 et 3.5.3. Soit $\mathcal{D}^{(2)}(\Theta)$ l'espace de Banach de fonctions deux fois continuellement différentiable sur Θ muni de la norme uniforme.

Lemme 6 Soit $\theta_0 \in \Theta(r)$ ($r \geq 1$) et supposons que pour $i = 0, 1, 2$, $(A_i(\sigma, \Theta))$ demeurent vérifier, alors $(\sigma_\theta^t \in \mathbb{L}^r(\mathcal{D}^{(2)}(\Theta)))$.

Théorème 5 : Supposons que $\theta_0 \in \mathring{\Theta} \cap \Theta(r)$ où $r \geq 2$ et $\mathring{\Theta}$ désigne l'intérieur de Θ . Soit X la solution stationnaire de l'équation 1.1.1. Supposons que les hypothèses de théorème 3 demeurent vérifier et pour $i = 1, 2$, supposons que $(A_i(\sigma, \Theta))$ est vérifiée. Alors, si la fonction de probabilité cumulative de ζ_0 est continûment différentiable dans un voisinage de 0 avec une dérivée $g(0)$ en 0 et si la matrice Γ_F ou Γ_σ , défini dans 3.5.12, sont des matrices symétriques définies positives, alors :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}_d(0, Q((\sigma_\zeta^2 - 1)\Gamma_\sigma + \Gamma_F)Q), \quad (3.5.4)$$

où $Q = (\Gamma_\sigma + 2g(0)\Gamma_F)^{-1}$.

Preuve de Théorème 3 Soit $v = \sqrt{n}(\theta - \theta_0) \in \mathbb{R}^d$. Nous allons prouver en 2/ que la maximisation de $\hat{L}_n(\theta)$ est équivalente à la maximisation de

$L_n(\theta)$ qui est équivalente à la maximisation de :

$$W_n(v) = - \sum_{t=1}^n (q_t(\theta_0 + n^{-1/2}v) - q_t(\theta_0)) \quad (3.5.5)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{t=1}^n \log\left(\frac{(\sigma_{\theta_0+n^{-1/2}v}^t)^{-1}}{(\sigma_{\theta_0}^t)^{-1}} + (\sigma_{\theta_0}^t)^{-1} X_t\right. \\ &\quad \left. - \sum_{t=1}^n (\sigma_{\theta_0+n^{-1/2}v}^t)^{-1} X_t\right) \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Par rapport à v . Par conséquent, il existe une suite $(\hat{v}_n)_n$ où $\hat{v}_n$ est un maximisateur de $W_n(v)$ tel que $\hat{v}_n = \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0)$. En 1/ nous allons fournir un théorème limite satisfait par $W_n(v)$. Ensuite, nous allons prouver en 3/ $(W_n(.))_n$ que converge comme étant un processus de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ (espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ vers un processus limite W . Ainsi $(\hat{v}_n)_n$ converge vers le maximiseur de W .

1/ Tout d'abord, nous allons étudier le comportement asymptotique de $W_n(v)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} W_n(v) &= \sum_{t=1}^n \log\left(\frac{(\sigma_{\theta_0+n^{-1/2}v}^t)^{-1}}{(\sigma_{\theta_0}^t)^{-1}}\right) + X_t(\sigma_{\theta_0}^t)^{-1} - ((\sigma_{\theta_0+n^{-1/2}v}^t)^{-1}) \\ &= I_1(v). \end{aligned}$$

Nous avons :

$$I_1(v) = - \sum_{t=1}^n \log\left(\frac{\sigma_{\theta_0+n^{-1/2}v}^t}{\sigma_{\theta_0}^t}\right) + |\zeta_t| \left(1 - \frac{\sigma_{\theta_0}^t}{\sigma_{\theta_0+n^{-1/2}v}^t}\right)$$

Utilisation du développement de Taylor, on déduit par que pour chaque

$t \in \{1, \dots, n\}$, il existe un $\bar{\theta}_1^t$ et un $\bar{\theta}_2^t$ dans le segment $[\theta_0, \theta_0 + n^{-1/2}v]$

tel que :

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\sigma_{\theta_0+n^{-1/2}v}^t}{\sigma_{\theta_0}^t}\right) &= n^{-1/2}(\sigma_{\theta_0}^t)^{-1}v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^t}{\partial\theta}\right)_{\theta_0} \\ &+ \frac{1}{2}n^{-1}\left\{v'\left(\frac{\partial^2\sigma_{\theta}^t}{\partial\theta^2}\right)_{\bar{\theta}_1^t} - (\sigma_{\theta_0}^t)^{-2}\left(v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^t}{\partial\theta}\right)_{\bar{\theta}_1^t}\right)^2\right\} \\ \frac{\sigma_{\theta_0}^t}{\sigma_{\theta_0+n^{-1/2}v}^t} &= 1 - n^{-1/2}(\sigma_{\theta_0}^t)^{-1}v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^t}{\partial\theta}\right)_{\theta_0} \\ &+ \frac{1}{2}n^{-1}\left\{2(\sigma_{\theta_0}^t)^{-2}\left(v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^t}{\partial\theta}\right)_{\bar{\theta}_2^t}\right)^2 - v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^t}{\partial\theta^2}\right)_{\bar{\theta}_2^t}\right\} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} I_1(v) &= n^{-1/2} \sum_{t=1}^n (\sigma_{\theta_0}^t)^{-1} v' \left(\frac{\partial \sigma_{\theta}^t}{\partial \theta} \right)_{\theta_0} (|\zeta_t| - 1) \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{t=1}^n (\sigma_{\theta_0}^t)^{-1} \left\{ v' \left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta}^t}{\partial \theta^2} \right)_{\bar{\theta}_2^t} v |\zeta_t| - v' \left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta}^t}{\partial \theta^2} \right)_{\bar{\theta}_1^t} v \right\} \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{t=1}^n (\sigma_{\theta_0}^t)^{-2} \left\{ \left(v' \left(\frac{\partial \sigma_{\theta}^t}{\partial \theta} \right)_{\bar{\theta}_1^t} \right)^2 - 2 \left(v' \left(\frac{\partial \sigma_{\theta}^t}{\partial \theta} \right)_{\bar{\theta}_2^t} \right) |\zeta_t| \right\} \\ &= I_1^{(1)}(v) + I_1^{(2)}(v) + I_1^{(3)}(v). \end{aligned}$$

Utilisant le théorème central limite pour les différences de martingale

(voir [3]), comme $E[(\sigma_{\theta_0}^t)^{-1}v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^t}{\partial\theta}\right)_{\theta_0}(|\zeta_t|-1) \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ et

$E[\|(\sigma_{\theta_0}^t)^{-1}v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^t}{\partial\theta}\right)_{\theta_0}\|_{\Theta}^2] < \infty$ (de lemme 6), on a :

$$I_1^{(1)}(v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, E\left[(\sigma_{\theta_0}^0)^{-2}\left(v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^0}{\partial\theta}\right)_{\theta_0}\right)^2\right](\sigma_{\zeta}^2 - 1)\right). \quad (3.5.7)$$

Sachant que $\theta \in \Theta \mapsto \frac{\partial \sigma_\theta^t}{\partial \theta}$ et $\theta \mapsto \frac{\partial^2 \sigma_\theta^t}{\partial \theta^2}$ sont des fonctions continues, $\bar{\theta}_1^t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \theta_0$ et $\bar{\theta}_2^t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \theta_0$, nous affirmons que $I_1^{(2)}(v)$ a la même distribution limite que $\frac{1}{2n} \sum_{t=1}^n (\sigma_{\theta_0}^t)^{-1} v' \left(\frac{\partial^2 \sigma_\theta^t}{\partial \theta^2} \right)_{\theta_0} v(|\zeta_t| - 1)$. Notons que $E[(\sigma_{\theta_0}^t)^{-1} v' \left(\frac{\partial^2 \sigma_\theta^t}{\partial \theta^2} \right)_{\theta_0} v(|\zeta_t| - 1) \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ et que $E\left[\left\| (\sigma_{\theta_0}^t)^{-1} v' \left(\frac{\partial^2 \sigma_\theta^t}{\partial \theta^2} \right)_{\theta_0} v \right\| \right] < \infty$ (du lemme 6). D'où, par la loi forte des grands nombres pour les différences de martingales (voir [3]), nous obtenons :

$$\frac{1}{2n} \sum_{t=1}^n (\sigma_{\theta_0}^t)^{-1} v' \left(\frac{\partial^2 \sigma_\theta^t}{\partial \theta^2} \right)_{\theta_0} v(|\zeta_t| - 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0$$

et cela implique :

$$I_1^{(2)}(v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} 0. \quad (3.5.8)$$

Des arguments similaires aux précédentes induisent que $I_1^{(3)}(v)$ a la même distribution limite que $\frac{1}{2n} \sum_{t=1}^n (\sigma_{\theta_0}^t)^{-2} \left(v' \left(\frac{\partial \sigma_\theta^t}{\partial \theta} \right)_{\theta_0} \right)^2 (1 - 2|\zeta_t|)$. De la loi forte des grands nombres pour les différences de martingales (voir [3]), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \sum_{t=1}^n (\sigma_{\theta_0}^t)^{-2} \left(v' \left(\frac{\partial \sigma_\theta^t}{\partial \theta} \right)_{\theta_0} \right)^2 (1 - 2|\zeta_t|) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \frac{1}{2} E \left[(\sigma_{\theta_0}^0)^{-2} \left(v' \left(\frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial \theta} \right)_{\theta_0} \right)^2 (1 - 2|\zeta_0|) \right] \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} -\frac{1}{2} E \left[(\sigma_{\theta_0}^0)^{-2} \left(v' \left(\frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial \theta} \right)_{\theta_0} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

et cela implique que :

$$I_1^{(3)}(v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} -\frac{1}{2} E \left[(\sigma_{\theta_0}^0)^{-2} \left(v' \left(\frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial \theta} \right)_{\theta_0} \right)^2 \right]. \quad (3.5.9)$$

Enfin, de 3.5.7, 3.5.8, 3.5.9 et nous avons :

$$I_1(v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}E\left[(\sigma_{\theta_0}^0)^{-2}\left(v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^0}{\partial\theta}\right)_{\theta_0}\right)^2\right], E\left[(\sigma_{\theta_0}^0)^{-2}\left(v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^0}{\partial\theta}\right)_{\theta_0}\right)^2\right](\sigma_{\zeta}^2-1)\right) \quad (3.5.10)$$

Enfin, de 3.5.10 nous obtenons le comportement de $W_n(v)$ défini dans 3.5.6. Cependant, nous devons préciser la relation de dépendance asymptotique entre $I_1^{(1)}$ et $I_2^{(1)}$. En effet, ces deux termes convergent vers une loi Gaussienne. Cela implique la considération de comportement asymptotique de la somme de ces deux termes qui pourraient être réduits au comportement asymptotique de :

$$n^{-1/2} \sum_{t=1}^n (\sigma_{\theta_0}^t)^{-1} v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^t}{\partial\theta}\right)_{\theta_0} (|\zeta_t| - 1) + n^{-1/2} \sum_{t=1}^n (\sigma_{\theta_0}^t)^{-1} v'(0) \operatorname{sgn}(\zeta_t)$$

à partir de la preuve de théorème 4 et en utilisant à nouveau le théorème central limite pour les différences de martingales, nous obtenons comme variance asymptotique :

$$\begin{aligned} & E\left[(\sigma_{\theta_0}^t)^{-2}\left(v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^t}{\partial\theta}\right)_{\theta_0} (|\zeta_t| - 1) + v'(0) \operatorname{sgn}(\zeta_t)\right)^2\right] \\ &= E\left[(\sigma_{\theta_0}^0)^{-2}\left(v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^0}{\partial\theta}\right)_{\theta_0}\right)^2\right](\sigma_{\zeta}^2 - 1) \\ &+ 2E\left[(\sigma_{\theta_0}^0)^{-2}v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^t}{\partial\theta}\right)_{\theta_0} v'(0)\right]E[(|\zeta_t| - 1) \operatorname{sgn}(\zeta_t)] \\ &+ E\left[(\sigma_{\theta_0}^0)^{-2}\left(v'(0)\right)^2\right] \\ &= E\left[(\sigma_{\theta_0}^0)^{-2}\{(\sigma_{\zeta}^2 - 1)\left(v'\left(\frac{\partial\sigma_{\theta}^0}{\partial\theta}\right)_{\theta_0}\right)^2 + (v'(0))^2\}\right] \end{aligned}$$

comme $(\zeta_t)_t$ admet une distribution de probabilité symétrique avec une médiane et espérance nulle. Alors, il n'y a pas de terme de covariance et finalement nous obtenons :

$$W_n(v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W(v) = v'(-\frac{1}{2}\Gamma_\sigma - g(0)\Gamma_F)v + v'N \quad (3.5.11)$$

avec :

$$\begin{cases} N \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, ((\sigma_\zeta^2 - 1)\Gamma_\sigma + \Gamma_F)) \\ \Gamma_\sigma = \left(E\left[\left(\frac{\partial \log(\sigma_\theta^0)}{\partial \theta_i}\right)_{\theta_0} \left(\frac{\partial \log(\sigma_\theta^0)}{\partial \theta_j}\right)_{\theta_0}\right] \right)_{1 \leq i, j \leq d} \end{cases} \quad (3.5.12)$$

2/ considérons maintenant l'approximation $\widehat{W}_n(v)$ de $W_n(v)$ définie par :

$$\widehat{W}_n = - \sum_{t=1}^n (\widehat{q}_t(\theta_0 + n^{-1/2}v) - \widehat{q}_t(\theta_0)) \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^d$$

À partir des hypothèses de théorème 3 et 3.4.4 on a $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)\|_\Theta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0$. Alors on a $\widehat{W}_n(v) = W_n(v) + R_n(v)$ avec $[\sup_{v \in \mathbb{R}^d} |R_n(v)|] \leq 2 \sum_{t=1}^n [\|\widehat{q}_t(\theta) - q_t(\theta)\|_\Theta] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0$. et donc :

$$\widehat{W}_n(v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} W_n(v) \quad (3.5.13)$$

avec W définie dans 3.5.11

3/ De 3.5.13, la preuve du théorème 4 et les mêmes arguments que ceux de la précédente preuve du théorème 4 de Davis et Dunsmuir(1997)[6],

nous déduisons que les distributions

définies $(\widehat{W}_n(v_1), \dots, \widehat{W}_n(v_k))$ converge vers $(W(v_1), \dots, W(v_k))$ pour tout $(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^d)^K$ Par conséquent, le maximum $\widehat{v}$ de $\widehat{W}_n(v)$ satisfait :

$$\widehat{v} = (\Gamma_\sigma + 2g(0)\Gamma_F)^{-1}N,$$

et cela implique 3.5.4

Chapitre 4

Application numérique

Dans ce chapitre, nous allons étudier numériquement, la modélisation des processus GARCH à base d'erreur Laplace. Pour cela

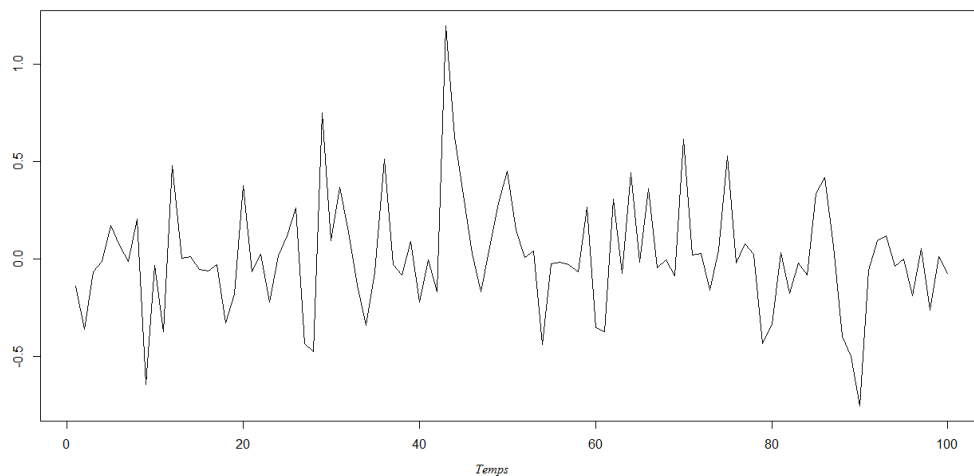
- Dans la première section, nous modélisons deux séries chronologiques simulées APARCH(1,0) de paramètres $\omega = 0.5, \alpha = 0.2, \delta = 0.8, \gamma = 0.4$ et APARCH(1,1) de paramètres $\omega = 0.3, \alpha = 0.4, \gamma = 0.2, \beta = 0.2, \delta = 0.6$.
- Dans la deuxième section, nous présentons une étude comparative entre l'EQMV-Laplace et l'EQMV-Gauss en exposons les résultats des expériences de Monte-Carlo sur le modèle APARCH(1,1).

4.1 Estimation des paramètres d'un modèle APARCH

L'estimation d'un APRCH se fait par la méthode du maximum de vraisemblance. Cette méthode nécessite de préciser la loi du bruit blanc ε_t . Nous avons supposé que $\varepsilon_t \sim \mathcal{L}(0, 1)$ un bruit blanc Laplace. Nous illustrons la méthode en estimant les paramètres de deux modèles de séries chronologiques simulée.

Exemple 4.1.1 (Modèle APARCH(1,0))

Soit x_t la série chronologique APARCH(1,0) simulée de taille $n = 100$, présentée dans le tableau 4.1 Nous représentons graphiquement la série come fonction du temps



La série chronologique APARCH(1,0).

Time t x_t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	-0.14	-0.361	-0.066	-0.009	0.172	0.071	-0.011	0.207	-0.643	-0.032
Time t x_t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	-0.373	0.481	0.005	0.013	-0.052	-0.06	-0.028	-0.328	-0.177	0.379
Time t x_t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	-0.064	0.027	-0.219	0.019	0.119	0.264	-0.433	-0.475	0.749	0.095
Time t x_t	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	0.368	0.142	-0.132	-0.34	-0.064	0.513	-0.028	-0.083	0.091	-0.219
Time t x_t	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	-0.003	-0.167	1.197	0.63	0.328	0.029	-0.167	0.061	0.286	0.453
Time t x_t	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	0.149	0.009	0.04	-0.436	-0.025	-0.016	-0.029	-0.063	0.269	-0.351
Time t x_t	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
	-0.374	0.307	-0.073	0.443	-0.015	0.363	-0.043	-0.002	-0.084	0.615
Time t x_t	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
	0.021	0.031	-0.159	0.046	0.53	-0.019	0.078	0.025	-0.431	-0.333
Time t x_t	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
	0.034	-0.175	-0.02	-0.083	0.335	0.417	0.067	-0.396	-0.499	-0.751
Time t x_t	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
	-0.056	0.094	0.121	-0.034	0.001	-0.189	0.054	-0.263	0.015	-0.072

TABLE 4.1 – Série APARCH(1,0) de paramètres $\omega = 0.5, \alpha = 0.2, \delta = 0.8, \gamma = 0.4$.

La fonction de vraisemblance pour le modèle $APARCH(1,0)$ est donnée par

$$L_n(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left[\log \left(\omega + \alpha(|X_{t-1}| - \gamma X_{t-1})^{\frac{1}{\delta}} + \left(\omega + \alpha(|X_{t-1}| - \gamma X_{t-1})^{\frac{1}{\delta}} \right)^{-\frac{1}{\delta}} |X_t| \right) \right]. \quad (4.1.1)$$

Pour obtenir $\hat{L}_n$, nous remplaçons $(X_{-i}), i \geq 0$ par zéro.

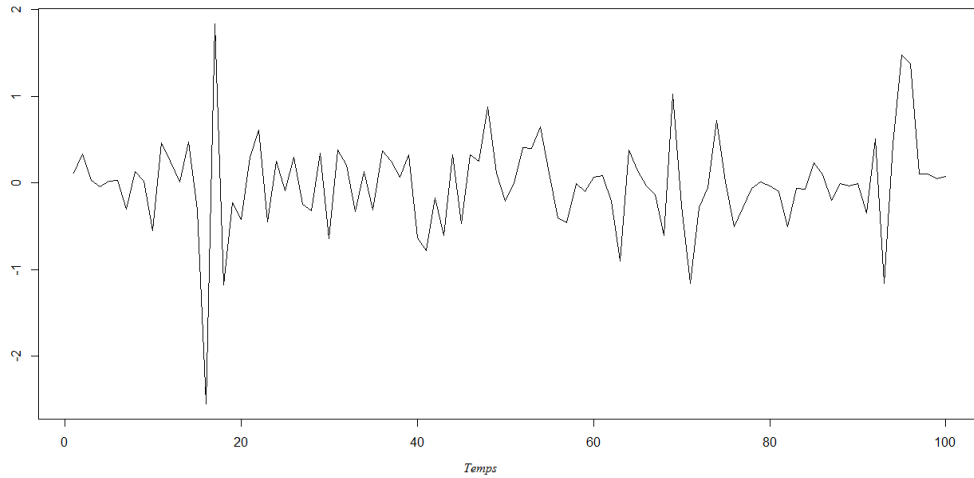
Les valeurs de ω, α_1 qui munimisent (4.1.1) sont :

$$(\hat{\omega}, \hat{\alpha}_1, \hat{\gamma}, \hat{\delta}) = \arg \max_{\theta} \ln L(\theta, x_1, \dots, x_n) = (0.52, 0.18, 0.78, 0.42)$$

Exemple 4.1.2 (Modèle $APARCH(1,1)$)

Soit y_t la série chronologique $APARCH(1,1)$ simulée de taille $n = 100$, présentée dans le tableau 4.2

Nous représentons graphiquement la série come fonction du temps



La série chronologique $APARCH(1,1)$.

Time t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	0.111	0.333	0.025	-0.043	0.024	0.026	-0.301	0.13	0.022	-0.554
Time t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_t	0.461	0.247	0.01	0.468	-0.31	-2.55	1.835	-1.177	-0.227	-0.422
Time t	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_t	0.3	0.613	-0.455	0.246	-0.089	0.294	-0.246	-0.319	0.339	-0.644
Time t	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_t	0.376	0.2	-0.331	0.13	-0.31	0.371	0.255	0.067	0.326	-0.632
Time t	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_t	-0.783	-0.17	-0.609	0.32	-0.469	0.32	0.254	0.876	0.113	-0.209
Time t	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
x_t	-0.006	0.409	0.396	0.647	0.115	-0.401	-0.458	-0.009	-0.097	0.07
Time t	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
x_t	0.081	-0.211	-0.907	0.38	0.137	-0.036	-0.135	-0.61	1.021	-0.268
Time t	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
x_t	-1.158	-0.282	-0.058	0.719	0.011	-0.508	-0.283	-0.067	0.013	-0.035
Time t	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
x_t	-0.102	-0.505	-0.059	-0.075	0.23	0.098	-0.199	-0.013	-0.038	-0.006
Time t	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
x_t	-0.347	0.51	-1.163	0.442	1.474	1.377	0.1	0.099	0.051	0.075

TABLE 4.2 – Série APARCH(1,1) de paramètres $\omega = 0.3, \alpha = 0.4, \gamma = 0.2, \beta = 0.2, \delta = 0.6$.

La fonction de vraisemblance pour le modèle APARCH(1,1) est donnée par

$$L_n(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left[\log \left(\omega + \alpha(|X_{t-1}| - \gamma X_{t-1} + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta) \right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\omega + \alpha(|X_{t-1}| - \gamma X_{t-1} + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta) \right)^{\frac{-1}{\delta}} |X_t| \right]. \quad (4.1.2)$$

Pour obtenir $\hat{L}_n$, nous remplaçons $(X_{-i}), i \geq 0$ par zéro.

Les valeurs de ω, α_1 qui munimisent (4.1.2) sont :

$$(\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\beta}, \hat{\delta}) = \arg \max_{\theta} \ln L(\theta, x_1, \dots, x_n) = (0.32, 0.43, 0.2, 0.21, 0.61)$$

4.2 Etude comparative

Pour illustrer les résultats asymptotiques énoncés, nous réalisons des expériences de Monte-Carlo sur le comportement d'EQMV-Laplace (noté $\hat{\theta}_n^{LQL}$) une séries chronologiques type APARCH(1,1), pour plusieurs tailles d'échantillons et distributions de probabilités (après la normalisation de sorte que $E|\varepsilon_t| = 1$). Nous proposons également une comparaison avec les résultats obtenus par l'EQMV Gaussien noté $\hat{\theta}_n^{GQL}$ (après une normalisation de sorte que $E|\varepsilon_t|^2 = 1$).

Plus précisément, les distributions de probabilités considérées de (ε_t) sont :

- Distribution Gaussienne centrée notée $\mathcal{N}$;
- Distribution de Laplace Centrée notée $\mathcal{L}$;
- Distribution Uniforme Centrée notée $\mathcal{U}$;
- Distribution de Student Centrée avec degré de liberté 3, notée t_3 ;

- Mélange Gaussien centré et normalisé avec une distribution de probabilité $0.05 * \mathcal{N}(-2, 0.16) + \mathcal{N}(0, 1) + 0.05 * \mathcal{N}(2, 0.16)$ et notée $\mathcal{M}$.

Toutes ces distributions de probabilité sont normalisées de sorte que $E[|\zeta_t|] = 1$, requis pour l'EQMV- Laplace. Pour utiliser l'EQMV Gaussien nécessitant $E[|\zeta_t|] = 1$, il est nécessaire de considérer le modèle avec $M'_\theta = \frac{E[|\zeta_t|]}{\sqrt{\text{Var}(\zeta_0)}} M_\theta$ au lieu de M_θ .

Exemple 4.2.1 Dans le tableau 4.3, nous exposons les expériences de Monte-Carlo pour le processus $APARCH(1, 1)$ définie par $X_t = \sigma_t \zeta_t$ où $\varepsilon_t = \left(\alpha_0 + \alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1} \right)^\delta + \beta \zeta_{t-1}^\delta \right)^{1/\delta} \zeta_t$ avec $\alpha_1 = 0.4$, $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.1$ et $\delta = 1.4$.

n	$\mathcal{L}$		$\mathcal{N}$		t_3		$\mathcal{U}$		$\mathcal{M}$	
	$\hat{\theta}_n^{GQL}$	$\hat{\theta}_n^{LQL}$	$\hat{\theta}_n^{GQL}$	$\hat{\theta}_n^{LQL}$	$\hat{\theta}_n^{GQL}$	$\hat{\theta}_n^{LQL}$	$\hat{\theta}_n^{GQL}$	$\hat{\theta}_n^{LQL}$	$\hat{\theta}_n^{GQL}$	$\hat{\theta}_n^{LQL}$
ω	100	0.215	0.213	0.186	0.244	0.194	0.168	0.119	0.261	0.286
	1000	0.070	0.061	0.052	0.108	0.068	0.041	0.022	0.192	0.191
	5000	0.030	0.027	0.022	0.065	0.041	0.017	0.013	0.194	0.19
α	100	0.264	0.257	0.161	0.229	0.206	0.130	0.097	0.346	0.339
	1000	0.062	0.058	0.041	0.119	0.090	0.030	0.027	0.341	0.342
	5000	0.027	0.024	0.019	0.075	0.065	0.012	0.022	0.372	0.372
γ	100	0.510	0.496	0.313	0.469	0.438	0.246	0.181	0.691	0.733
	1000	0.093	0.086	0.068	0.195	0.105	0.054	0.026	0.341	0.344
	5000	0.040	0.036	0.030	0.105	0.045	0.024	0.011	0.288	0.313
β	100	0.425	0.381	0.237	0.370	0.285	0.165	0.115	0.622	0.541
	1000	0.067	0.062	0.053	0.158	0.071	0.039	0.021	0.266	0.266
	5000	0.032	0.029	0.023	0.107	0.033	0.018	0.009	0.200	0.218
δ	100	0.879	0.825	0.781	0.895	0.797	0.681	0.553	0.989	0.989
	1000	0.399	0.372	0.309	0.540	0.382	0.240	0.129	0.633	0.656
	5000	0.189	0.169	0.137	0.379	0.204	0.103	0.057	0.587	0.587

TABLE 4.3 – Racine d'erreur moyenne quadratique $\hat{\theta}_n^{LQL}$ et $\hat{\theta}_n^{GQL}$ pour le processus APARCH (1, 1).

Bibliographie

- [1] Barnarda, W. Trindade, A.A. Wickramasingheb, R.I.P (2014), Autoregressive Moving Average Models Under Exponential Power Distributions, ProbStat Forum, 7, 65-77.

- [2] Bardet, J.M. and Wintenberger, O. (2009), Asymptotic normality of the Quasi-Maximum likelihood estimator for multidimensional causal process, The Annals of Statistics, 37, 2730-2759.

- [3] Billingsley, P. (1968), Convergence of Probability Measures. Wiley, New York.

- [4] Box, G.E.P. Jenkins, G.M. (1970), Time Series Analysis; Forecasting and Control, San Francisco : Holden-Day.

- [5] Bollerslev, T. (1986), Generalised autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- [6] Davis, R. and Dunsmuir, W. (1997), Least Absolute Deviation Estimation for Regression with ARMA Errors. *Journal of Theoretical Probability*, 10, 481-497.
- [7] Ding, Z., Granger C.W.J., Engle R.F. (1993), A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model, *Journal of Empirical Finance* 1, 83-106.
- [8] Doukhan, P. and Wintenberger, O. (2007), Weakly dependent chains with infinite memory. *Stochastic Process. Appl.*, 118, 1997-2013.
- [9] Engle, R.F. (1982), Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation, *Econometrica* 50, 987-1008.
- [10] Engle, R.F. (1983), Estimates of the Variance of U. S. Inflation Based upon the ARCH Model. *Journal of Money, Credit and Banking*, 15(3), 286-301.

- [11] Engle, R.F. and D. Kraft, (1983), Multiperiod forecast error variances of in ation estimated from ARCH models, A. ZeUner, ed., Applied time series analysis of economic data (Bureau of the Census, Washington,DC) 293-302.

- [12] Francq, C., Lepage, G. and Zakoian, J-M. (2011), Two-stage non Gaussian QML estimation of GARCH models and testing the ekciency of the Gaussian EQMV. Journal of Econometrics, 165, 246-257.

- [13] Jeantheau, T. (1998), Strong consistency of estimators for multivariate arch models. Econometric Theory ,14, 70-86.

- [14] Kounias, E.G. and Weng, T.-S. (1969), An inequality and almost sure convergence. Annals of Mathematical Statistics, 40, 1091-1093.

- [15] Li,W.K. McLeod, A.I. (1988), ARMA modeling with non-Gaussian in novations, J. Time Ser., 9, 2, 155-168.

- [16] SHEPHARD, N. PITT, M.K. (1997), Likelihood analysis of non

Gaussian measurement time series, *Biometrika*. 84, 3 : 653-667.

- [17] Weiss, A.A. (1984), ARMA models with ARCH errors. *J. Time Ser. Anal.*, 5, 2, 129-143.