الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Régularisation de l'équation de la chaleur

Préparé par : Ayoub Nassira
Ben Amira Marwa

Devant le jury

Mme LAOUIRA Wided	(M.A.A)	C.U.Abd Elhafid B.MILA	Président
Mme AHMED Yahia Rakia	(M.A.A)	C.U.Abd Elhafid B.MILA	Rapporteur
Mme BENAHBILES Hanane	(M.A.A)	C.U.Abd Elhafid B.MILA	Examinateur

Année Universitaire : 2016/2017

Remerciements

Nous tenons à remercier en premier lieu Dieu "ALLAH" qui nous a donné la volonté, la confiance et le courage pour faire ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre gratitude à toutes les personnes qui nous on apporté leur soutien, leur compréhension et leur aide, pour la réalisation de ce travail de recherche.

D'abord, nous tenons tout particulièrement à remercier notre encadreure de mémoire Mme "Ahmed Yahia Rakia" pour sa disponibilité, pour avoir su nous guider tout au long de cette année dans la réalisation de notre mémoire de fin d'études.

Nous remercions aussi les jurys : Mme LAOUIRA Wided, Mme BENAHBILES Hanane et tous les enseignements qui nous ont enseigné et tous les amis (Minouchet, bila, sikou, ibra, lhou) qui ont été très importants pour nous pendant ces années de travail.

Merci

Table des matières

Notation

- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
- $\partial\Omega$ bord du domaine Ω
- $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ espace de Lebesgue des fonctions dont la puissance pieme est intégrable sur Ω.
- $C^n(\Omega)$, $n \in [1, \infty]$, espace des fonctions n fois continument dérivables.
- $Supp(f)$, support de la fonction f .
- Pour une fonction réelle de la variable réelle : f' dérivée première de f , f'' dérivée seconde, $f^{(j)}$ dérivée $j - ème$.
- $f \times g$, produit de convolution
- $\langle g, h \rangle = g(h) \in R$, crochet de dualité avec $h \in E$ et $g \in E'$.
- $(g, h)_E$ produit scalaire avec $g \in E$ et $h \in E$.
- Gradient spatial d'une fonction scalaire $\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$
- Divergence spatiale d'un champ de vecteur $\text{div}\,\overrightarrow{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$
- Laplacien d'un champ scalaire $\Delta T = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(T)) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

Introduction

Un certain nombre d'articles ou la dépendance continue dans les études de modélisation pour les problèmes bien posés et mal posés des équations différentielles ont apparu récemment dans la littérature. L'intention de ces derniers est de montrer comment les problèmes peuvent être regulariser, face aux erreurs qui surviennent lorsque on formule les modèles mathématiques que utiliser pour décrire de divers processus physiques.

Dans nos tentatives de modeler mathématiquement la nature, des erreurs sont souvent introduites en dérivant les équations de gouvernance. Au lieu d'équations qui prédisent réellement le comportement du processus, nous employons des équations différentielles perturbées pour décrire la physique. Par la suite, des questions se posent pour savoir l'exactitude de la dépendance de la solution par rapport aux données.

Nous allons voir que l'équation de la chaleur porte sur la variation de température dans le temps et l'espace et non sur une quantité un peu floue nommée "chaleur". Il est bien plus précis de parler d'équation de diffusion thermique, terme qui est d'ailleurs utilisé maintenant à la place de l'équation de la chaleur. De même, on ne parle plus de chaleur, mais d'énergie thermique. L'équation de diffusion thermique est historiquement liée à Joseph Fourier. Ce dernier naquit en 1768 à Auxerre, où il étudie dans une école militaire. Fin1794, il est élève à l'école normale Supérieur et en $1795-1796$. Il enseigne la physique à l'école normale supérieur et il débute ses travaux sur la chaleur en 1802 lorsqu'il est nommé préfet de l'Isère par Napoléon : douce vie de fonctionnaire. Il publie sa théorie sur la chaleur (et l'analyse de Fourier) en 1822. Il est élu à l'Académie française en 1826 et décède à Paris en 1830. Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude du problème de récupérer la température de la chaleur à un moment plus tôt sachant la température finale. Ce problème est aussi impliqué dans la situation d'une particule se déplaçant dans un milieu avec un coefficient de diffusion constant (Voir [9]) lorsque l'on demande de déterminer l'historique de la position des particules à partir de son emplacement actuel. L'intérêt des équations de la chaleur rétrograde vient aussi des mathématiques financières où le célèbre modèle de BlackScholes [2] pour l'option d'appel, peut être transformé en une équation parabolique rétrograde dont la forme est étroitement liée aux équations de la chaleur rétrograde. Dans la littérature mathématique, diverses méthodes ont été proposées pour résoudre le problème de la chaleur rétrograde. On peut notamment citer la méthode de quasi-solution de Tikhonov [33], la méthode de quasi-réversibilité de Lattes et Lions [19, 23, 26], la méthode de convexité logarithmique [6, 4, 12, 20, 21, 24], la méthode des quasi-limite [7, 32, 40].

Ce mémoire comporte trois chapitres :

• Le premier chapitre est consacré à la présentation des concepts de base nécessaires à l'étude proposée comme la classification et les familles des (EDP) et l'équation de la chaleur en général.

• Le deuxième chapitre est le problème de Cauchy rétrograde associé à un opérateur de spectre continu introduit et régularisé d'après Nguyen Huy Tuan, Dang Duc Trong et Pham Hoang Quan.

• Le troisième chapitre présente la stabilité et la régularisation de l'équation de la chaleur 2D par une méthode de Fourier tronquée de Nguyen Huy Tuan.

Chapitre 1

Rappels et notations générales de l'équation de la chaleur

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail.

1.1 Généralités

Une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) est une équation impliquant une fonction inconnue de deux ou plusieurs variables et certaines de ses dérivées partielles.

On peut écrire les EDP sous la forme suivante, on suppose que $k \geq 1$ un nombre entier et soit U un sous ensembles ouvert de $\mathbb{R}^n$

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), ..., Du(x), u(x), x\right) = 0 \qquad \text{pour } x \in U \tag{1}$$

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est le plus haut degré de dérivation présent dans l'équation. Cette équation est donc d'ordre k tel que :

$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times ... \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$

une fonction donnée et $u : U \to \mathbb{R}$ est inconnue. Résoudre l'EDP consiste donc à déterminer toutes les fonctions u satisfaisant (1).

• On dit que l'équation aux dérivées partielles (1) est linéaire si elle a cette forme **:**

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

f, $a_\alpha$des fonction données. si $f = 0$ on dit que l'équation (1) est homogène

• L'EDP (1) est semi-linéaire si il a cette forme **:**

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)D^\alpha u + a_0(D^k u, D^{k-1}u, ..., Du, u, x) = 0$$

• L'EDP (1) est quasi-linéaire si il a cette forme **:**

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, ..., Du, u, x)D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, ..., Du, u, x) = 0$$

• On dit que (1) est non linéaire si dépend de manière non linéaire sur le plus degré de dérivation de cette équation.

On la forme suivantes :[2]

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x), ..., Du(x), u(x), x\right) = 0$$

Et

$$\mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times ... \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}^m \quad \text{une fonction donnée}$$

Et

$$u : U \to \mathbb{R}^m \qquad u = (u^1, ..., u^m) \qquad \text{est inconnue}$$

Ici on suppose que le system comprend le même nombre m des équations scalaires $(u^1, ..., u^m)$

Example 1 ***équations linéaires***

• **L'équation de laplace**

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0$$

• **L'équation de transport**

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$$

• **L'équations de la chaleur**

$$u_t - \Delta u = 0$$

1.1.1 Classification des EDP

Cette classification est illustrée dans le cas d'équations du second ordre.

• On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **linéaire** si la dépendance par rapport à la fonction inconnue et ses dérivées partielles est linéaire :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x,y)u+g(x,y)=0$$

L'équation est dite **homogène** si la fonction g est identiquement nulle sur Ω.

• On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **semi-linéaire** si la dépendance par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé est linéaire :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(u,x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

Où a, b et c désignent des fonctions des variables x et y, et F une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

• On dit qu'une équation aux dérivées partielles est **quasi-linéaire** si elle est de la forme :

$$a\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},x,y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},x,y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},x,y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(u,x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

Où a, b et c et F sont des fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

• On dit qu'une équation aux dérivées partielles est complètement non linéaire si elle dépend non linéairement de ses termes d'ordre le plus élevé.

1.1.2 Classification des conditions aux limites

• On appelle **condition de Dirichlet** une condition où on impose la valeur de la fonction recherchée sur le bord $\partial\omega$. Un **problème du premier type** est un problème où tout le bord est soumis a des conditions de Dirichlet.

• On appelle **condition de Neumann** une condition où on impose la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée sur le bord $\partial\omega$. Un **problème du deuxième type** est un problème où tout le bord est soumis à des conditions de Neumann.

• On appelle condition de Fourier-Robin une condition où on impose une relation entre la valeur de la dérivée normale de la fonction recherchée et sa valeur sur le bord $\partial\omega$.

• On appelle **problème du troisième type** un problème où les conditions sont de types différents sur des portions du bord.

1.1.3 Familles d'EDP

Les EDP sont classées selon la même classification que les coniques. Cette classification basée sur un critère purement mathématique, correspond à des comportements qualitatifs de solutions radicalement différents.

Considérons l'équation algébrique formée par les coefficients des dérivées secondes $ay^2 + 2by + c = 0$. En fonction de la valeur du discriminant $b^2 - ac$ de cette équation, il existe trois familles d'EDP :

- $b^2 - ac > 0$: la famille des EDP hyperboliques
- $b^2 - ac < 0$: la famille des EDP elliptiques
- $b^2 - ac = 0$: la famille des EDP paraboliques

1.2 L'équation de la chaleur

Désignons par $\overrightarrow{q}$ et T les fonctions « flux de chaleur » et « température », des variables spatiales (x, y), et du temps t. D'après le premier principe de la thermodynamique, une équation d'état et la loi de Fourier, on a :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \overrightarrow{q} = -c\frac{\partial T}{\partial t} \\ \overrightarrow{q} = -k\overrightarrow{\operatorname{grad}}T \end{cases}$$

Où $c > 0$ désigne la chaleur spécifique, et $k > 0$ le coefficient de conductivité thermique. On pose $a = \frac{k}{c}$ Par combinaison, on a :

$$-\frac{\partial T}{\partial t} + a\Delta T = 0$$

L'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue est appelée équation de la chaleur. Elle gouverne tous les phénomènes diffusifs (c'est donc aussi l'équation de la diffusion). Reprenons l'équation en une dimension d'espace :

$$-\frac{\partial T}{\partial t} + a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

1.3 Rappels

1.3.1 Espace de sobolev

Espace $L^2(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. On définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables de carré intégrable dans Ω. Muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u(x) |^2 \, dx\right)^{1/2}$$

Espace $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par
$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall i \in \{1.....n\} \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\right\}$
On a

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega (u(x)\, v(x) + \nabla u(x) . \nabla v(x))\, dx$$

Et de la norme

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u(x) |^2 + | \nabla u(x) |^2 \, dx\right)^{1/2}$$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Espace $H_0^1(\Omega)$

$H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace de H^1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ alors la semi-norme

$$| u |_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega | \nabla u(x) |^2 \, dx\right)^{1/2}$$

Est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $H^1(\Omega)$

$$| u |_{H_0^1(\Omega)} \leq \| u \|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u(x) |^2 + | \nabla u(x) |^2 \, dx\right)^{1/2}$$

1.3.2 Problème bien posé - mal posé

Un problème bien posé au sens de Hadamard, a les propriétés suivantes :

• Une solution existe.

• Elle est unique.

• Elle dépend de façon continue des données.

Un problème qui n'est pas bien-posé au sens de la définition précédente est dit mal-posé. Le probléme est mal posé si l'une de ces propriétés n'est pas satisfaite.

1.3.3 Lemme de Gronwall

Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$ à valeurs positives et vérifiant l'inégalité :

$$\forall t \in [a, b] \qquad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

Alors :

$$\forall t \in [a, b] \qquad y(t) \leq \varphi(s)\psi(s) + \exp(\int_s^t \psi(u)du)ds$$

1.3.4 Séries de fourier

On définit la série de Fourier de la fonction $S \in L_p^2(0, T)$:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

Telle que :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\, dt$$

Et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

1.3.5 Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans C, de classe C^1 par morceaux. Alors, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la régularisée $\tilde{f}$ de f, ainsi, sous ces hypothèses, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t} \right) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Où :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Le théorème de Dirichlet nous dit exactement en quels points la fonction S est égale à sa série de Fourier.

1.3.6 Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy le problème suivant :
Étant donnés :

- Un intervalle $I_0 \subset \mathbb{R}$
- Une fonction f définie et continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

$$f : I_0 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

$$(t, u) \mapsto f(t, u)$$

Trouver une fonction $u \in C^1(I_0)$ telle que :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \forall t \in I_0, \forall u \in \mathbb{R}^n \\ u(t_0) = u_0, t_0 \in I_0 \qquad \text{Condition initiale} \end{cases} \tag{1}$$

On appelle solution locale du problème de Cauchy (1) la donnée d'un couple (I, u) où I et un intervalle de $\mathbb{R}^n$ qui est voisinage de t_0 dans I_0 et où u est une fonction de classe C^1 sur I telle que :

$$u(t_0) = u_0, \forall t \in I, u'(t) = f(t, u(t))$$

Théorème 2 ***Cauchy-Peano***

On suppose que f est continue dans un voisinage du point $(t_0, u_0) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$, alors il existe un intervalle J_0 voisinage de t_0 et une fonction $u \in C^1(J_0)$ tels que :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)).\forall t \in J_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy-Piano donne donc un résultat d'une solution locale (J_0, u)

Théorème 3 ***Cauchy-Lipschitz***

On suppose que la fonction f est continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$ et qu'il existe un réel L tel que :

$$\forall (t, u) \text{ et } (t; z) \in I_0 \times \mathbb{R}^n, \|f(t, u) - f(t, z)\| \leq L \|u - z\|$$

Alors le problème de Cauchy (1) admet une solution et une seule.

1.4 Quelques résultats de base

- $\{E_\lambda\ ,\ \lambda > 0\}$ c'est la résolution spectrale de l'identité associée à l'opérateur$A$
- $S(t) = e^{-tA} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t\lambda} dE_\lambda \in L(H)\ ,\ t > 0$ est le C_0-semi groupe engendré par $-A$
- $\| S(t) \| \leq 1$ pour tous $t \geq 0$
- La fonction $t \mapsto S(t)\ ,\ t \geq 0$ est analytique
- Pour chaque réel $r \geq 0$ et $t > 0$ l'opérateur $S(t) \in L(H, D(A^r))$
- Pour chaque nombre entier $k \geq 0$ et $t > 0$, $\| S^k(t) \| = \| A^k S(t) \| \leq C(k)\, t^{-k}$

$\forall x \in D(A^r)\ ,\ r \geq 0$ on a $S(t) A^r x = A^r S(t) x$

Certaines définitions de base sont répertoriées dans la théorème suivant.

Théorème 4 *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert H sur K . Alors, il existe exactement une famille spectrale $\{E_\lambda\}$ telle que*

$$Au = \int_0^{+\infty} \lambda dE_\lambda u \qquad \textit{pour chaque } u \in D(A) \tag{5}$$

Dans ce cas $u \in D(A)$ si et seulement si l'intégrale (5) existe, ie :

$$\int_0^{+\infty} \lambda^2 d \| E_\lambda u \|^2 < \infty$$

Chapitre 2

Régularisation spectrale de l'équation de la chaleur

On va régulariser un problème de cauchy rétrograde associé à un opérateur de spectre continu.

Récemment en 2008, dans [39] on a considéré le problème parabolique non linéaire

$$u_t + Au = f(u(t)) \quad 0 < t < T \tag{1}$$

$$u(T) = \varphi, \tag{2}$$

Où A est un opérateur auto-adjoint, ayant un spectre discret dans l'espace de Hilbert H Avec le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et les normes $\|, \|$ tel que $-A$ génère un semi groupe de contraction compact sur H ce probleme est connu pour être sévèrement mal posé et une méthode de régularisation de ce problème est requise, on établie sous l'hypothèse que f est une fonction Lipstchitzienne globale de H à H l'existence d'une solution unique pour le problème approché :

$$u_t^\epsilon + f_\epsilon(A)u^\epsilon = f(u_t^\epsilon), \quad 0 < t < T \tag{3}$$

$$u^\epsilon(T) = \varphi \tag{4}$$

Où $0 < \epsilon < 1$ et $f_\epsilon(A)$ seront choisis de meilleurs conditions. On suppose que (1), (2) ont une solution unique et lisse $u(t)$ selon cette hypothèse, on obtient une estimation d'erreur de la régularité de u, généralisant un travail précédent de [26] Cette erreur est donnée de type Hölder :

$$\|u(t) - u^\epsilon(t)\| \leq M\beta(\epsilon)^{\frac{t}{T}}$$

Cette régularisation à été prouvé par Nguyen Huy Tuan, Dang Duc Trong et Pham Hoang Quan en 2010 [41]. On note que les estimations de stabilité de type Hölder pour l'équation de la chaleur non linéaire rétrograde ont été établies dans certains papiers récents, tels que [1, 37, 39]. Ces résultats ne donnent aucune information sur la dépendance continue de la Solution sur les données à $t = 0$. Et donc la convergence de la solution approchée est très lente lorsque t est proche de 0. Rappelons, le cas où l'opérateur A a un spectre discret a été traité dans de nombreux articles récents, tels que [7, 15]. Une fois de plus, on note qu'il existe de nombreux travaux sur le cas homogène linéaire du problème rétrograde de Cauchy mais la littérature sur le cas non linéaire du problème est assez rare. Donc, il n'est pas facile de régulariser le problème non-linéaire. Récemment, Hetrict a examiné le problème non homogène et non linéaire dans l'espace de Banach et Hughes [17, 16] Comme nous le savons, l'opérateur de position a habituellement un spectre continu, tout comme l'opérateur du moment dans un espace infini mais le moment dans un espace compact, le moment angulaire et l'Hamiltonien de divers systèmes physiques, en particulier les états liés, ont tendance à avoir un spectre discret (quantifié), c'est de là que le nom de mécanique quantique vient. La théorie formelle de diffusion a un fort chevauchement avec la théorie du spectre continu. Dans ce chapitre, on utilisera de nouvelles méthodes pour étendre les résultats de dépendance continue de [3, 8] à des problèmes non linéaire plus général on améliore également certains résultats connexes donnés dans [7, 8, 37, 39] avec deux objectifs. Tout d'abord, le présent travail est un premier pas dans le problème non linéaire rétrograde de Cauchy, dans lequel l'opérateur A a un spectre continu. Ainsi, pour certaines questions sur les équations paraboliques homogènes rétrogrades, comme dans le cas où A a un spectre continu, on renvoie le lecteur à [3, 8]. Pour autant que nous le sachions, il y a peu de problèmes rétrograde non linéaires de Cauchy jusqu'à maintenant. Deuxièmement, on donne certaines nouvelles estimations d'erreur, qui ne sont pas du type Hölder. L'objet principal de ce chapitre est de fournir un système assez simple et une nouvelle méthode de régularisation pratique. en même temps, des estimations d'erreur de convergence plus rapides sont données. En particulier la convergence de la solution approchée à $t = 0$ est également prouvée.

Définition 5 *Soient $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert H sur K et*

$f,\ g : \mathbb{R} \to K$ des fonctions continues par morceaux.

$$D(f(A)) = \left\{ u \in H : \int_0^{+\infty} \mid f(\lambda) \mid^2 d \parallel E_\lambda u \parallel^2 < \infty \right\}$$

On définit l'opérateur linéaire $f(A) : D(A) \subset H \to H$ par la formule :

$$f(A)\,u = \int_0^{+\infty} f(\lambda)\,dE_\lambda u \qquad \textit{pour chaque } u \in D(f(A)\ )$$

2.1 Les résultats principaux

Pour $0 \le t \le s \le T$ on a :

$$R_\alpha(\lambda, t) = e^{-\lambda t}\left(\alpha\lambda + e^{-\lambda T}\right)^{-1}$$

Cela signifie également que :

$$R_\alpha(\lambda, T + t - s) = e^{\lambda(s-t-T)}\left(\alpha\lambda + e^{-\lambda T}\right)^{-1}$$

Si le problème (1) et (2) admet une solution u, alors cette solution peut être représentée par :

$$u(t) = \int_0^\infty e^{\lambda(T-t)} dE_\lambda \varphi - \int_t^T \int_0^\infty e^{\lambda(s-t)} dE_\lambda f(u(s))\,ds \tag{*}$$

Puisque $t < T$ et d'après $(*)$ nous savons que les termes $e^{-(t-T)\lambda}$ et $e^{-(t-s)\lambda}$ sont les sources d'instabilité.

Donc, en les remplace par des expressions approximatives telles que :

$$\lim R_\alpha(\lambda, t) = e^{-(t-T)\lambda}$$

Et

$$\lim R_\alpha(\lambda, T + t - s) = e^{-(t-s)\lambda}$$

Par conséquent, le problème mal posé (3) et (4) peut être approché par :

$$u_\alpha(t) = \int_0^\infty R_\alpha(\lambda, t)\,dE_\lambda \varphi - \int_t^T \int_0^\infty R_\alpha(\lambda, T + t - s)\,dE_\lambda f(u(s))\,ds \tag{6}$$

On note que si $f = 0$, (6) est également le problème (2.2) donnée à la page 2 dans [8]

2.1.1 Unicité de la solution approchée

Théorème 6 *Soit* $0 < \alpha < Te$, $\varphi \in H$.

Et $f : H \to H$ un opérateur continu satisfaisant :

$$\| f(w) - f(v) \| \leq K \| w - v \|$$

Pour $K > 0$ indépendant de $w, v \in H$, $t \in R$, alors le problème (6) a une solution unique $u_\alpha \in C([0,T]; H)$.

Preuve. D'abord, considére la fonction suivante pour $\lambda > 0$

$$R_\alpha(\lambda, 0) = \left(\alpha\lambda + e^{-\lambda T}\right)^{-1}$$

Il est facile de prouver que pour $0 < \alpha < eT$ alors :

$$R_\alpha(\lambda, 0) \leq R_\alpha\left(\frac{\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)}{T}, 0\right) = T\alpha^{-1}\left(\ln\left(Te\alpha^{-1}\right)\right)^{-1} \tag{7}$$

Pour $0 \leq t \leq s \leq T$ on trouve :

$$\begin{aligned} R_\alpha(\lambda, T + t - s) &= \exp\left((s - t - T)\lambda\right)\left(\alpha\lambda + e^{-\lambda T}\right)^{\frac{t-s}{T}}\left(\alpha\lambda + e^{-\lambda T}\right)^{\frac{s-t-T}{T}} \\ &\leq \exp\left((s - t - T)\lambda\right)\left(\alpha\lambda + e^{-\lambda T}\right)^{\frac{t-s}{T}}\left(e^{-\lambda T}\right)^{\frac{s-t-T}{T}} \\ &\leq \left(R_\alpha(\lambda, 0)\right)^{\frac{s-t}{T}} \\ &\leq \alpha^{\frac{t-s}{T}}\left(T^{-1}\ln\left(Te\alpha^{-1}\right)\right)^{\frac{t-s}{T}} \\ &= M(\alpha, t)\, M^{-1}(\alpha, s) \qquad (8) \end{aligned}$$

Avec

$$M(\alpha, t) = \alpha^{\frac{t}{T}}\left(T^{-1}\ln\left(Te\alpha^{-1}\right)\right)^{\frac{t}{T}-1} \quad , t \in [0, T]$$

Pour $w \in C([0,T]; H)$ on définit l'opérateur F par :

$$f(w)(t) = \int_0^\infty R_\alpha(\lambda, t)\, dE_\lambda \varphi - \int_0^\infty \int_t^T R_\alpha(\lambda, T + t - s)\, dE_\lambda f(w(s))\, ds \tag{9}$$

Maintenant, on prouve cela pour tous $w, v \in C([0,T]; H)$ l'inégalité suivante est réalisés

$$\| F^m(w)(t) - F^m(v)(t) \| \leq \frac{\left(KT\alpha^{-1}C\right)^m}{m!} ||| w - v ||| \tag{10}$$

Avec $C = \max\{T, 1\}$ et $|||\ .\ |||$est la norme de sup sur $C([0,T];H)$. En fait, pour $m = 1$, en utilisant (8), la propriété de Lipschitz de f et en notant que :

$$R_\alpha(\lambda, T+t-s) \leq \alpha^{\frac{t-s}{T}} \left(T^{-1}\ln\left(Te\alpha^{-1}\right)\right)^{\frac{t-s}{T}} \leq \frac{1}{\alpha}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\| F(w)(t) - F(v)(t) \|^2 &= \| \int_t^T \int_0^\infty R_\alpha(\lambda, T+t-s)\, dE_\lambda\left(f(w(s)) - f(v(s))\right) ds \|^2 \\
&\leq \int_0^\infty \int_t^T \left(R_\alpha(\lambda, T+t-s)\right)^2 ds \int_t^T d \| E_\lambda\left(f(w(s)) - f(v(s))\right) \|^2 ds \\
&\leq \left(\tfrac{T-t}{\alpha}\right)^2 \int_t^T \int_0^\infty d \| E_\lambda\left(f(w(s)) - f(v(s))\right) \|^2 ds \\
&= \left(\tfrac{T-t}{\alpha}\right)^2 \int_t^T \| f(w(s)) - f(v(s)) \|^2 ds \\
&\leq \left(\tfrac{(T-t)K}{\alpha}\right)^2 \| w(s) - v(s) \|^2 \\
&\leq (KTC)^2 \alpha^{-2} \| w - v \| \qquad (11)
\end{aligned}$$

On suppose que (11) est vérifie pour $m = j$, et on montre qu'elle est vérifié puor $m = j+1$, on a :

$$\begin{aligned}
\| F^{j+1}(w)(t) - F^{j+1}(v)(t) \|^2 &= \| \int_t^T \int_0^\infty R_\alpha(\lambda, T+t-s)\, dE_\lambda(f(F^j w)(s) - f(F^j v)(s)) ds \|^2 \\
&\leq \left(\tfrac{(T-t)K}{\alpha}\right)^2 \| F^j(w)(s) - F^j(v)(s) \|^2 ds \\
&\leq \tfrac{\left(KT\alpha^{-1}C\right)^{2j+2}}{(j+1)!} ||| w - v |||^2
\end{aligned}$$

Donc, d'après le principe de l'induction, on a (10) pour chaque $w, v \in C([0,T];H)$. On considère $F : C([0,T];H) \to C([0,T];H)$. Où $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\left(KT\alpha^{-1}C\right)^m}{m!} = 0$, il existe un nombre entier positif m_0 tel que F^{m_0} est une contraction, il s'ensuit que l'équation $F^{m_0}(w) = w$ a une solution unique $u_\alpha \in C([0,T];H)$. On met $F(u_\alpha) = u_\alpha$.

En fait on a $F(F^{m_0}(u_\alpha)) = F(u_\alpha)$. Par conséquent $F^{m_0}(F(u_\alpha)) = F(u_\alpha)$, par l'unicité du Point fixe de F^{m_0}. On a $F(w) = w$ a une solution unique $u_\alpha \in C([0,T];H)$. ■

Maintenant, on a le théorème suivant dans lequel, ou montre que l'ampleur de stabilité de la méthode est inférieure à celle des autres méthodes.

2.1.2 Dépendance de la solution approchée à la donnée finale

Théorème 7 *On prend le même α du théorème 6. Ensuite, l'unique solution du problème* (1) *et* (2) *dépend continûment (en $C([0,T];H)$) sur φ, cela signifie que si u et v sont deux solutions de problème* (6) *correspondant à la valeur finale φ et ω respectivement alors :*

$$\| u(t) - v(t) \| \leq \sqrt{2} e^{K^2(T-t)^2} \alpha^{\frac{t-T}{T}} \left(T^{-1}\ln\left(Te\alpha^{-1}\right)\right)^{\frac{t}{T}-1} \| \varphi - \omega \|$$

Preuve. Il est bien connu que, pour tous $t \in [0,T]$

$$u(t)-v(t) = \int_0^\infty R_\alpha(\lambda,t)\, dE_\lambda(\varphi-\omega) - \int_0^\infty \int_t^T R_\alpha(\lambda, T+t-s)\, dE_\lambda f(u(s) - f(v(s)))\, ds$$

Alors :

$$\| u(t)-v(t) \|^2 \leq 2\alpha^{-2} M^2(\alpha,t) \int_0^\infty d \| E_\lambda(\varphi-\omega) \|^2$$

$$+2\int_0^\infty \int_t^T (R_\alpha(\lambda, T+t-s))^2 ds \int_t^T d \| E_\lambda(f(w(s)) - f(v(s))) \|^2 \, ds$$

$$\leq 2\alpha^{-2} M^2(\alpha,t) \| \varphi-\omega \| + 2K^2(T-t) \int_t^T M^2(\alpha,t)\, M^{-2}(\alpha,s) \| (u(s)-v(s)) \|^2 \, ds$$

Par conséquent :

$$M^{-2}(\alpha,t) \| u(t)-v(t) \|^2 \leq 2\alpha^{-2} \| \varphi-\omega \| + 2K^2(T-t) \int_t^T M^{-2}(\alpha,s) \| (u(s)-v(s)) \|^2 \, ds$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on a :

$$M^{-2}(\alpha,t) \| u(t)-v(t) \|^2 \leq 2e^{2K^2(T-t)^2} \alpha^{-2} \| \varphi-\omega \|^2$$

On trouve :

$$\| u(t)-v(t) \| \leq \sqrt{2} e^{K^2(T-t)^2} \alpha^{\frac{t-T}{T}} \left(T^{-1} \ln\left(Te\alpha^{-1}\right)\right)^{\frac{t}{T}-1} \| \varphi-\omega \|$$

Cette inégalité suit la solution du problème (6) qui dépend continûment de φ, et le théorème 7 est prouvé. ■

Remarque 8

- Dans [37] (voir p. 238), et dans [39], les auteurs donnent de meilleures estimations de stabilité que la dernière méthodes discutée, ils montrent que l'estimation de la stabilité est d'ordre $\epsilon^{\frac{t}{T}-1}$ Dans [8] (voir Théorème 2.2 page 2), les auteurs donnent une autre limite de stabilité ayant la forme :

$$\frac{T}{\alpha\left(1+\ln\frac{T}{\alpha}\right)}$$

- Dans ce chapitre, on donne une meilleure estimation de l'ordre de stabilité, qui est :

$$C\alpha^{\frac{t}{T}-1}\left(T^{-1}\ln\left(Te\alpha^{-1}\right)\right)^{\frac{t}{T}-1}$$

En comparant ce résultat aux précédents résultats, on trouve que l'ordre de l'erreur, introduit par de petit changement dans la valeur finale φ est inférieure à l'ordre donné dans [6, 7, 8, 37, 39]. C'est l'un des meilleurs avantages de cette méthode.

2.1.3 Estimation de l'erreur

Théorème 9 *Soit* $u \in C([0,T];H)$ *une solution du problème* (1) *et* (2). *Supposons que la fonction propre de* u *admet l'extension :*

$$u(t) = \int_0^\infty dE_\lambda u(t)$$

Satisfaisant :

$$\int_0^\infty \lambda^2 e^{2t\lambda} d \parallel E_\lambda u(t) \parallel^2 < \infty \tag{12}$$

Pour tous $t \in [0,T]$*Alors, pour chaque* $\alpha \in (0, Te)$

$$\parallel u(t) - u_\alpha(t) \parallel \leq N \exp\left(\frac{K^2 T^2}{2}\right) \alpha^{\frac{t}{T}} \left(T^{-1} \ln\left(Te\alpha^{-1}\right)\right)^{\frac{t}{T}-1} \ , \forall t \in (0,T] \tag{13}$$

Où

$$N = \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{2\int_0^\infty \lambda^2 e^{2t\lambda} d \parallel E_\lambda u(t) \parallel^2}$$

Et u_α *est la solution unique du problème* (6).

Preuve. La fonction $u(t)$, $u_\alpha(t)$ a l'extension

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^\infty e^{-\lambda(t-T)} dE_\lambda \varphi + \int_t^T \int_0^\infty e^{-\lambda(s-t)} dE_\lambda f(u(s))\, ds \\ u_\alpha(t) &= \int_0^\infty R_\alpha(\lambda,t)\, dE_\lambda \varphi + \int_t^T \int_0^\infty R_\alpha(\lambda, T+t-s)\, dE_\lambda f(u_\alpha(s))\, ds \end{aligned}$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned} u(t) - u_\alpha(t) &= \int_0^\infty (e^{T\lambda} - \frac{1}{\alpha\lambda + e^{-\lambda T}}) \left(e^{-\lambda t} dE_\lambda \varphi - \int_t^T \int_0^\infty e^{\lambda(s-t-T)} dE_\lambda f(u(s))\, ds\right) \\ &\quad + \int_t^T \int_0^\infty R_\alpha(\lambda, T+t-s)\, dE_\lambda \left(f(u_\alpha(s)) - f(u(s))\right) ds \\ &= \int_0^\infty \alpha\lambda R_\alpha(\lambda,t) \left(e^{T\lambda} dE_\lambda \varphi - \int_t^T \int_0^\infty e^{s\lambda} dE_\lambda f(u(s))\, ds\right) \\ &\quad + \int_t^T \int_0^\infty R_\alpha(\lambda, T+t-s)\, dE_\lambda \left(f(u_\alpha(s)) - f(u(s))\right) ds \\ &= \int_0^\infty \alpha R_\alpha(\lambda,t)\, \lambda e^{t\lambda} dE_\lambda u(t) + \int_t^T \int_0^\infty \alpha\lambda R_\alpha(\lambda, T+t-s)\, dE_\lambda \left(f(u_\alpha(s)) - f(u(s))\right) ds \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \| u(t) - u_\alpha(t) \|^2 &\leq 2M^2(\alpha,t) \int_0^\infty \lambda^2 e^{2t\lambda} d \| E_\lambda u(t) \|^2 \\ &+ (T-t) M^2(\alpha,t) \int_t^T M^{-2}(\alpha,s) \int_0^\infty d \| E_\lambda (f(w(s)) - f(v(s))) \|^2 ds \\ &\leq 2M^2(\alpha,t) \int_0^\infty \lambda^2 e^{2t\lambda} d \| E_\lambda u(t) \|^{2+(T-t)M^2(\alpha,t)} \\ &\times \int_t^T M^{-2}(\alpha,s) \| (f(w(s)) - f(v(s))) \|^2 ds \end{aligned}$$

Donc :

$$M^{-2}(\alpha,t) \| u(t) - u_\alpha(t) \|^2 \leq N + K^2(T-t) \int_0^T M^{-2}(\alpha,s) \| u(s) - u_\alpha(s) \| ds$$

En utilisant l'inégalité de Gronwall, alors :

$$\| u(t) - u_\alpha(t) \|^2 \leq N^2 e^{K^2T^2} \alpha^{\frac{2t}{T}} \left(T^{-1} \ln\left(Te\alpha^{-1}\right)\right)^{\frac{2t}{T}-2}$$

■

Remarque 10

• L'avantage de cette méthode est qu'il existe une estimation d'erreur au temps d'origine $t = 0$ qui n'est pas donné dans de nombreux résultats récemment connus dans [37, 39]. On a l'estimation suivante :

$$\| u(0) - u_\alpha(0) \| \leq NTe^{KT} \left(1 + \ln\left(\frac{T}{\alpha}\right)\right)^{-1}$$

Cette erreur est similaire au théorème (2.6), page 5 dans [8].

• Si $f(u) = 0$, on a :$u(0) = \int_0^\infty e^{t\lambda} dE_\lambda u(t)$

Prenant la dérivée de u, alors :

$$u'(0) = -\int_0^\infty \lambda e^{-t\lambda} dE_\lambda u(t)$$

Ensuite, on a :

$$\| u'(0) \|^2 = \| Au(0) \|^2 = \int_0^\infty \lambda^2 e^{2t\lambda} d \| E_\lambda u(t) \|^2$$

Par conséquent, la condition (12) est naturelle et acceptable.

• Dans [37] (voir page 241), et dans [39], les estimations d'erreur entre la solution exacte et la solution approchée sont du même ordre $U(\alpha,t) = C\alpha^{\frac{t}{T}}$. Et dans ce travail, le taux de convergence est sous une forme légèrement différente de celle donnée dans [6, 7, 8, 39] défini par : $V(\alpha,t) = D\alpha^{\frac{t}{T}}\left(T^{-1}\ln\left(Te\alpha^{-1}\right)\right)^{\frac{t}{T}-1}$, on remarque que $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{U(\alpha,t)}{V(\alpha,t)} = 0$. De plus, on a également $\lim\limits_{\alpha\to 0}(\lim\limits_{t\to 0} U(\alpha,t)) = C$.

Et $\lim\limits_{\alpha\to 0}(\lim\limits_{t\to 0} V(\alpha,t)) = \lim\limits_{\alpha\to 0}(D\left(T^{-1}\ln\left(Te\alpha^{-1}\right)\right)^{-1}) = 0$, Donc il est facile de voir que si le temps t est proche du temps d'origine $t = 0$, la convergence de la solution approchée est très lente. Cela implique que les méthodes telles que quasi-valeurs aux limites et quasi-réversibilité stabilisée qui ont été étudiées dans [37, 39], ne sont pas utiles pour établir les estimations d'erreur dans le cas où t est dans le voisinage de zéro. Cela prouve également que cette méthode donne une meilleure approximation que le cas précédent que nous connaissons. Comparant (13) avec les résultats obtenus dans [7, 8, 37, 39], on se rend compte que (13) est l'estimation précise la plus connue. Il s'agit d'une généralisation de beaucoup de résultats précédents.

Chapitre 3

Régularisation de l'équation de la chaleur par la méthode de fourier tronquée

Ici on va traiter le cas bidimensionnel

Soit $T > 0$ et $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Considérons le problème de détermination de $u(x, y, 0)$ à partir du système (1) :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} = f(x, y, t) \\ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0 \\ u(x, y, T) = g(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

Où $(x, y, t) \in \Omega \times\ [0, T]$, les fonctions $f \in L^2\left(0, T, L^2(\Omega)\right)$ et $g \in L^2(\Omega)$ peuvent être données inexactement.

La condition initiale $u(x, y, T) = g(x, y)$ c'est la répartition de température a un instant T, et les conditions aux limites sur la frontiére d'un matériau sont :

$$\begin{cases} u(0, y, t) = 0 \\ u(\pi, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0 \\ u(x, \pi, t) = 0 \end{cases}$$

On propose de résoudre le problème de la chaleur rétrograde ou le problème de la valeur finale par **une méthode de Fourier tronquée**, à travers laquelle on obtient une solution d'un problème bien posé. Le problème régularisé proposée et la propriété de convergence de la solution régularisée vers la solution exacte sont également à prouver, certaines estimations de l'erreur sont données pour montrer l'efficacité de cette méthode qui à été prouvé par Nguyen Huy Tuan en 2015 [28]. On a trouvé quelques articles sur le cas non homogène. En particulier, le cas bidimensionnel de celui-ci est rarement étudié. Pour les cas non homogènes et non linéaires, on renvoie le lecteur à des documents récents de Feng Xiao-Li [10], D.D. Trong et son groupe [38, 37, 34, 35, 41, 27]. Citons ici quelques approches de nombreux ouvrages antérieurs et leurs difficultés techniques. Physiquement, g peut seulement être mesurée, il y aura des erreurs de mesure, et nous aurions effectivement une certaine fonction de données g, pour laquelle $\|g^{\varepsilon} - g\|_{L_2} \leq \varepsilon$

tel que $\varepsilon > 0$ représente une limite à l'erreur de mesure. u et v^{ε} sont respectivement la solution exacte et la solution approchée du problème de la chaleur rétrograde donné. Dans [34, 35], les erreurs sont d'ordre $\frac{1}{T+\ln\frac{T}{\varepsilon}}$ les estimations d'erreur dans [37] sont $\epsilon^{\frac{t}{T}}$ pour $t > 0$ et $\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{-1}{4}}$ pour $t = 0$. Feng Xiao-Li et co-authors [10], donne les estimations d'erreur d'ordre $\left(\frac{4T}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}}$ pour $p > 0$, récemment [35], Trong et Tuan améliorent les résultats de stabilité précédent avec l'ordre $\varepsilon^{\frac{t}{T}}\left(\frac{T}{1+\ln\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)}\right)^{1-\frac{t}{T}}$ a partir des erreurs discutées, alors les estimations d'erreur de la plus part des méthodes de régularisation dans les littératures sont de type Hölder, c'est-à-dire :

$$\left\|u\left(.,.,t\right) - v^{\varepsilon}\left(.,.,t\right)_{L_2\ (\Omega)}\right\| \leq C\ \varepsilon^{q} \tag{2}$$

Où C est la constante dépendant de u, $0 < q < 1$ est un nombre réel qui ne dépend pas de t. u et ε est le niveau de bruit des données finales $u(x, y, T)$. L'objet principal du ce travail est de fournir une méthode de régularisation à troncature pour établir les estimations Hölder Tel que (2). Par le théorème 1, la solution du Problème (1) est donnée par la formule (3)

$$u\left(x,y,t\right) = \sum_{m,n=1}^{\infty}\left(e^{(T-t)\left(m^2+n^2\right)}g_{mn} - \int_0^T e^{(s-t)\left(m^2+n^2\right)}f_{mn}\left(s\right)ds\right)\times\sin\left(mx\right)\sin\left(ny\right) \tag{3}$$

Où

$$g\left(x,y\right) = \sum_{m,n=1}^{\infty} g_{mn}\sin\left(mx\right)\sin\left(ny\right)$$

$$f\left(x,y,t\right) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}\left(t\right)\sin\left(mx\right)\sin\left(ny\right)$$

Sont les développements de g et f respectivement.

Comme $t < T$ on a (3) que lorsque $m^2 + n^2$ devient grand, $\exp\left\{(T-t)\left(m^2+n^2\right)\right\}$ augmente très rapidement. Par conséquent le terme $e^{(T-t)\left(m^2+n^2\right)}$ est la cause de l'instabilité. Donc, le but de ce travail est la récupération de la stabilité du problème (3) en filtrant les hautes fréquences avec une méthode appropriée, l'essence de cette méthode de régularisation est juste d'éliminer toutes les hautes fréquences de la solution, on considère plutôt (3) seulement pour $m^2 + n^2 \leq M_\varepsilon$, où M_ε est une constante positive appropriée satisfaisant $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon = \infty$. La technique impliquée dans la méthode de troncature est appliquée pour le problème de chaleur dans un domaine arbitraire ouvert et borné Ω avec limite lisse dans $\mathbb{R}^2$. En fait, on présente quelques propriétés des valeurs propres de l'opérateur $-\Delta$ sur un domaine ouvert et borné avec une condition de frontière nulle de Dirichlet. On peut aussi se référer au chapitre 6 et 5 dans [9].

3.1 Théorème concernant les valeurs propres de l'opérateur de Laplace

1. Chaque valeur propre de $-\Delta$ est bien réelle, la famille de valeurs propres $\{\lambda_p\}_{p=1}^{\infty}$ satisfait $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$, et $\lambda_p \to \infty$ pour $p \to \infty$.
2. Il existe une base orthonormée $\{X_p\}_{p=1}^{\infty}$ de $L^2(\Omega)$, où $X_p \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction propre correspondant à λ :

$$\begin{cases} \Delta X_p(x) = -\lambda_p X_p(x), x \in \Omega \\ X_p(x) = 0 \qquad , x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

Pour $p = 1, 2, ...$ en pratique, pour un Ω de domaine arbitraire, les valeurs propres λ_p définis à (4) pourraient être calculées par des méthodes numériques et il peut avoir les erreurs numériques. Par conséquent, la solution régularisée dans ce cas est difficile à calculer. On choisit comme domaine Ω, un carré dans $\mathbb{R}^2$ afin d'obtenir les valeurs propres exactes, comme $\lambda_{mn} = m^2 + n^2$. Le travail est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, nous allons construire le problème régularisé et montrer que cela fonctionne même avec une condition très faible sur la solution exacte. Dans la section 3, les estimations d'erreur sont dérivées.

3.2 Le problème rétrograde mal posé de la chaleur

Commençons par clarifier c'est quoi une solution faible d'un problème (1).

Soit $u \in C\left([0,T]\ ;\ H^1(\Omega)\right) \cap C^1\left((0,T)\,; L^2(\Omega)\right)$ est une solution faible pour le problème (1) si :

$$\frac{d}{dt}\left\langle u(.,.,t)\,,W\right\rangle_{L_2(\Omega)} - \left\langle u(.,.,t)\,,\Delta W\right\rangle_{L_2(\Omega)} = \left\langle f(.,.,t)\,,\Delta W\right\rangle_{L_2(\Omega)} \tag{5}$$

Et

$$\left\langle u(.,.,T)\,,W\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle g(.,.)\,,W\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Pour n'importe quelle fonction $W \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

En effet, il suffit de choisir W dans la base orthogonale $\left\{\frac{2}{\pi}\sin(mx)\sin(ny)\right\}_{n,m\geq 1}$ et la formule (5) se réduit à :

$$u_{mn}(t) = e^{(T-t)\left(m^2+n^2\right)}g_{mn} - \int_t^T e^{(s-t)\left(m^2+n^2\right)}f_{mn}(s)\,ds, \quad \forall\ m;n \geq 1 \tag{6}$$

$$u_{mn}(t) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi u(x,y,t)\sin(mx)\sin(ny)\,dxdy$$

$$f_{mn}(s) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi f(x,y,s)\sin(mx)\sin(ny)\,dxdy$$

$$g_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi g(x,y)\sin(mx)\sin(ny)\,dxdy$$

La solution au problème (1) peut aussi être écrite comme :

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty}\left(e^{-(t-T)\left(n^2+m^2\right)}g_{mn} - \int_t^T e^{-(t-s)\left(n^2+m^2\right)}f_{mn}(s)\,ds\right)\sin(mx)\sin(ny) \tag{7}$$

On note que si la solution exacte u est lisse alors les données exactes (f,g) sont lisses aussi. De tout façon, les données obtenues qui viennent des mesure pratiques, sont souvent discre et non-lisse.

Il faut donc toujours suppose que $f \in L^2\left((0,T)\,; L^2(\Omega)\right)$ et $g \in L^2(\Omega)$ et l'erreur des données est donnée sur L^2 seulement. On note aussi que l'expression (7) est la solution du problème (1) s'il existe.

Dans les théorèmes suivants on présente une condition de son existence.

Théorème 11 *Le problème* (1) *a une solution unique* u *si et seulement si :*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(e^{T\left(n^2+m^2\right)}g_{mn}-\int_0^T e^{s\left(n^2+m^2\right)}f_{mn}\left(s\right)ds\right)\quad<\infty \tag{8}$$

Preuve. On suppose que le problème (1) a une solution $u\in C\left([0,T]\,;H_0^1\left(\Omega\right)\right)\cap C^1\left((0,T)\,;L^2\left(\Omega\right)\right)$

Alors u peut être donné en (7). Cela implique que :

$$u_{mn}\left(0\right)=e^{T\left(m^2+n^2\right)}g_{mn}-\int_0^T e^{s\left(m^2+n^2\right)}f_{mn}\left(s\right)ds \tag{9}$$

Alors :

$$\left\|u\left(.,.,0\right)\right\|_{L_2(\Omega)}^2=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(e^{T\left(n^2+m^2\right)}g_{mn}-\int_0^T e^{s\left(n^2+m^2\right)}f_{mn}\left(s\right)ds\right)^2\quad<\infty$$

Si (8) est verifié alors on a la fonction $v\left(x,y\right)$ telle que :

$$v\left(x,y\right)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(e^{T\left(n^2+m^2\right)}g_{mn}-\int_0^T e^{s\left(n^2+m^2\right)}f_{mn}\left(s\right)ds\right)\sin\left(mx\right)\sin\left(ny\right)\quad\in L^2\left(\Omega\right)$$

On considére le problème :

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}-u_{yy}=f\left(x,y,t\right) \\ u\left(0,y,t\right)=u\left(\pi,y,t\right)=u\left(x,0,t\right)=u\left(x,\pi,t\right)=0 \qquad t\in\left(0,t\right) \\ u\left(x,y,0\right)=v\left(x,y\right), \quad \left(x,y\right)\quad\in\left[0,\pi\right]\times\left[0,\pi\right] \end{cases} \tag{10}$$

Le problème (10) a une solution unique u (voir [9]). On a :

$$v\left(x,y\right)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(e^{-t\left(n^2+m^2\right)}\left\langle v\left(x,y\right),\sin\left(mx\right)\sin\left(ny\right)\right\rangle\right.$$
$$\left.+\int_0^t e^{(s-t)\left(n^2+m^2\right)}f_{mn}\left(s\right)ds\right)\times\sin\left(mx\right)\sin\left(ny\right) \tag{11}$$

Soit $t=T$ dans (11) alors :

$$u(x,y,T) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(e^{-T\left(n^2+m^2\right)} \left(e^{-T\left(n^2+m^2\right)} e^{T\left(n^2+m^2\right)} g_{mn} - \int_0^T e^{s\left(n^2+m^2\right)} f_{mn}(s)\,ds \right) \right.$$

$$\left. + \int_0^T e^{(s-t)\left(n^2+m^2\right)} f_{mn}(s)\,ds \right) \times \sin(mx)\sin(ny)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} g_{mn} \sin(mx)\sin(ny) = g(x,y)$$

Donc, u c'est la solution unique de (1) ■

Théorème 12 *Le problème* (1) *a au plus une solution dans* $C\left([0,T]\,;H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left((0,T)\,;H^2(\Omega)\right)$

Preuve. la preuve peut etre trouvée dans [9]. ■

En dépit de l'unicité, le problème (1) reste mal posé et une régularisation est nécessaire. A la section suivante on stabilise l'approximation pour le problème.

3.3 Régularisation et estimation de l'erreur

Dans cette section, on présente un problème de régularisation, et on étudie l'estimation d'erreur entre la solution de régularisation et la solution exacte. On suppose que f_ε et g_ε sont des donnée smesurées satisfaisant :

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \le \varepsilon \quad , \quad \|g_\varepsilon - g\|_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon$$

On va définir la solution de régularisation d'un problème pour des données bruyantes g_ε comme suit :

$$u^\varepsilon(x,y,t) = \sum_{m,n\ge 1}^{m^2+n^2\le M_\varepsilon} u_{mn}^\varepsilon(t)\sin(mx)\sin(ny) \tag{12}$$

Où

$$u_{mn}^\varepsilon(t) = e^{(T-t)\left(m^2+n^2\right)} (g_\varepsilon)_{mn} - \int_t^T e^{(s-t)\left(m^2+n^2\right)} (f_\varepsilon)_{mn}(s)\,ds$$

Et

$$(g_\varepsilon)_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \left\langle g_\varepsilon (x;y), \sin(mx)\sin(ny) \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$(f_\varepsilon)_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \left\langle f_\varepsilon (x;y,t), \sin(mx)\sin(ny) \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Théorème 13 *La solution du problème* (12) *depend continûement de*

$$(g_\varepsilon, f_\varepsilon) \in L^2(\Omega) \times L^2\left(0, T, L^2(\Omega)\right)$$

Preuve. Soit u et v deux solution de(12) correspondant aux valeurs $\left(g_\varepsilon^1, f_\varepsilon^1\right)$ et $\left(g_\varepsilon^2, f_\varepsilon^2\right)$ on a :

$$u(x,y,T) = \sum_{m,n\geq 1}^{m^2+n^2 \leq M_\varepsilon} \left(e^{(T-t)\left(m^2+n^2\right)} \left(g_\varepsilon^1\right)_{mn} - \int_t^T e^{(s-t)\left(m^2+n^2\right)} \left(f_\varepsilon^1\right)_{mn}(s)\, ds \right) \sin(mx)\sin(ny)$$

Et

$$v(x,y,T) = \sum_{m,n\geq 1}^{m^2+n^2 \leq M_\varepsilon} \left(e^{(T-t)\left(m^2+n^2\right)} \left(g_\varepsilon^2\right)_{mn} - \int_t^T e^{(s-t)\left(m^2+n^2\right)} \left(f_\varepsilon^2\right)_{mn}(s)\, ds \right) \sin(mx)\sin(ny)$$

En utilisant l'inégalité $(a-b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right)$, on a :

$$\|u(.,.,t) - v(.,.,t)\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$\frac{\pi^2}{4} \sum_{m,n\geq 1, m^2+n^2 \leq M_\varepsilon} \left| e^{(T-t)\left(m^2+n^2\right)} \left(\left(g_\varepsilon^1\right)_{mn} - \left(g_\varepsilon^2\right)_{mn}\right) - \int_t^T e^{(s-t)\left(m^2+n^2\right)} \left(f_\varepsilon^1 - f_\varepsilon^2\right)_{mn}(s)\, ds \right|^2$$

$$\leq \frac{\pi^2}{2} \sum_{m,n\geq 1, m^2+n^2 \leq M_\varepsilon} \left| e^{(T-t)M_\varepsilon} \left(\left(g_\varepsilon^1\right)_{mn} - \left(g_\varepsilon^2\right)_{mn}\right)\right|^2 + \int_t^T \left| e^{(s-t)M_\varepsilon} \left(f_\varepsilon^1 - f_\varepsilon^2\right)_{mn}(s)\, ds \right|^2 ds$$

$$\leq \frac{\pi^2}{2} e^{2(T-t)M_\varepsilon} \sum_{m,n\geq 1}^{\infty} \left(\left|\left(g_\varepsilon^1\right)_{mn} - \left(g_\varepsilon^2\right)_{mn}\right|^2 + \int_t^T \left|\left(f_\varepsilon^1 - f_\varepsilon^2\right)_{mn}(s)\right|^2 ds \right)$$

Alors :

$$\|u(.,.,t) - v(.,.,t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq e^{2(T-t)M_\varepsilon} \left(\left\|g_\varepsilon^1 - g_\varepsilon^2\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\|f_\varepsilon^1 - f_\varepsilon^2\right\|_{L_2(0,T,L_2(\Omega))}^2 \right).$$

■

Remarque 14

Si :

$$M_{\varepsilon} = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{T}{\varepsilon + \varepsilon \ln \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)} \right)$$

Alors la grandeur de stabilité de la méthode est d'ordre :

$$U_1 (\varepsilon) = e^{TM_{\varepsilon}} = \varepsilon^{-1} \left(\frac{1 + \ln \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)}{T} \right)^{-1}$$

La grandeur de stabilité des méthodes données dans [6, 37] est :

$$U_2 (\varepsilon) = D \ \varepsilon^{-1}$$

Et dans [7, 36] est :

$$U_3 (\varepsilon) = \frac{T}{\varepsilon + \varepsilon \ln \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)}$$

On a $U_1 \ (\varepsilon) < U_2 (\varepsilon)$ et $U_1 \ (\varepsilon) < U_3 (\varepsilon)$ pour tout $t \in [0, T]$. Par conséquent, l'ampleur de la stabilité de ce problème bien posé est beaucoup mieux, lorsque $t = 0$ que les grandeurs de stabilité données

par la méthode de la quasi-réversibilité et méthode de la valeur quasi-limite.

Théorème 15 *Pour chaque $h \in L_2 (\Omega)$ on pose :*

$$h_{mn} = \frac{4}{\pi^2} \int_{\Omega} h (x, y) \sin (mx) \sin (ny) \, dxdy$$

$$\Gamma_M (h) (x, y) = \sum_{m,n \geq 1}^{m^2 + n^2 \leq M_{\varepsilon}} h_{mn} \sin (mx) \sin (ny)$$

Ensuite on a :

(i) Si $h \in L_2 (\Omega)$ alors $\lim\limits_{M \to +\infty} \|\Gamma_M (h) - h\|^2_{L_2(\Omega)} = 0$

(ii) Si $h \in H^1_0 (\Omega)$ alors $\lim\limits_{M \to +\infty} \|\Gamma_M (h) - h\|^2_{H^1_0(\Omega)} = 0$ et

$$\|\Gamma_M (h) - h\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{4}{\pi^2 \sqrt{M}} \|h\|_{H^1_0(\Omega)}$$

(iii) Si $h \in H_0^1(\Omega)$et $\Delta h \in L_2(\Omega)$ alors $\lim\limits_{M \to +\infty} \|\Delta \Gamma_M(h) - \Delta h\|^2_{L_2(\Omega)} = 0$
Et

$$\|\Gamma_M(h) - h\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{4}{\pi^2 M} \|\Delta h\|_{L_2(\Omega)}$$

$$\|\Gamma_M(h) - h\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{4}{\pi^2 \sqrt{M}} \|\Delta h\|_{L_2(\Omega)}$$

Preuve. (i) D'aprés l'égalité de parseval on a :

$$\sum_{m,n \geq 1} |h_{mn}|^2 = \frac{4}{\pi^2} \|h\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\|\Gamma_M(h) - h\|^2_{L_2(\Omega)} = \left\| \sum_{m,n \geq 1; m^2+n^2 > M} h_{mn} \sin(mx) \sin(ny) \right\|^2_{L_2(\Omega)} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{m,n \geq 1; m^2+n^2 > M} |h_{mn}|^2$$

Et cela implique que $\lim\limits_{M \to +\infty} \|\Gamma_M(h) - h\|^2_{L_2(\Omega)} = 0$

(ii) On suppose que $h \in H_0^1(\Omega)$, en utilisant l'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h(x,y) \sin(mx) \sin(ny)\, dxdy &= -\frac{1}{m} h(x,y) \sin(ny) \sin(mx) \Big|_{\partial\Omega} \\
&\quad + \frac{1}{m} \int_\Omega h_x(x,y) \cos(mx) \sin(ny)\, dxdy \\
&= \frac{1}{m} \int_\Omega h_x(x,y) \cos(mx) \sin(ny)\, dxdy
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h(x,y) \sin(mx) \sin(ny)\, dxdy &= -\frac{1}{n} h(x,y) \sin(mx) \cos(ny) \Big|_{\partial\Omega} \\
&\quad + \frac{1}{n} \int_\Omega h_y(x,y) \sin(mx) \cos(ny)\, dxdy \\
&= \frac{1}{n} \int_\Omega h_y(x,y) \sin(mx) \cos(ny)\, dxdy
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
h_{mn} &= \frac{4}{\pi^2 m} \int_\Omega h_x(x,y) \cos(mx) \sin(ny)\, dxdy \\
&= \frac{4}{\pi^2 n} \int_\Omega h_y(x,y) \sin(mx) \cos(ny)\, dxdy
\end{aligned}$$

Alors :

$$\left(m^2+n^2\right)|h_{mn}|^2=\frac{16}{\pi^2}\left(h_x\left(x,y\right)\cos\left(mx\right)\sin\left(ny\right)dxdy\right)^2+\left(h_y\left(x,y\right)\sin\left(mx\right)\cos\left(ny\right)dxdy\right)^2$$

Donc :

$$\sum_{m,n\geq 1}\left(m^2+n^2\right)|h_{mn}|^2\leq\frac{64}{\pi^6}\|h_x\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{64}{\pi^6}\|h_y\|^2_{L_2(\Omega)}=\frac{64}{\pi^6}\|hy\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

On voit que :

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_M-h\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \left\|\frac{\partial h_M}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial h_M}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial y}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\\
&= \left\|\sum_{m,n\geq 1;m^2+n^2\geq M} mh_{mn}\cos\left(mx\right)\sin\left(ny\right)\right\|^2_{L_2(\Omega)}\\
&= \left\|\sum_{m,n\geq 1;m^2+n^2\geq M} nh_{mn}\sin\left(mx\right)\cos\left(ny\right)\right\|^2_{L_2(\Omega)}\\
&= \frac{\pi^2}{4}\sum_{m,n\geq 1;m^2+n^2\geq M}\left(m^2+n^2\right)|h_{mn}|^2
\end{aligned}$$

Et cela imlpique que $\lim\limits_{M\to+\infty}\|h_M-h\|^2_{H_0^1(\Omega)}=0$, en plus, on a :

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_M\left(h\right)-h\|^2_{L_2(\Omega)} &= \frac{\pi^2}{4}\sum_{m,n\geq 1;m^2+n^2\geq M}\left(m^2+n^2\right)|h_{mn}|^2\\
&\leq \frac{\pi^2}{4M}\sum_{m,n\geq 1;m^2+n^2\geq M}\left(m^2+n^2\right)|h_{mn}|^2\\
&\leq \frac{16}{\pi^4 M}\|h\|^2_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

(iii) On Suppose que $h\in H_0^1\left(\Omega\right)$ et $\Delta h\in L_2\left(\Omega\right)$ d'une maniére similare on a :

$$\begin{aligned}
h_{mn} &= \frac{4}{\pi^2 m^2}\int_\Omega h_{xx}\left(x,y\right)\sin\left(mx\right)\sin\left(ny\right)dxdy\\
&= \frac{4}{\pi^2 n^2}\int_\Omega h_{yy}\left(x,y\right)\sin\left(mx\right)\sin\left(ny\right)dxdy
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\left(m^2+n^2\right)h_{mn}=\frac{4}{\pi^2}\left(\Delta h\right)_{mn}$$

Donc :

$$\sum_{m,n\geq 1} \left|\left(m^2+n^2\right)h_{mn}\right|^2 = \frac{64}{\pi^6}\left\|\Delta h\right\|^2_{L_{2(\Omega)}}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta\Gamma_M(h)-\Delta h\right\|^2_{L_2(\Omega)} &= \left\|\sum_{m,n\geq 1; m^2+n^2\geq M}\left(m^2+n^2\right)h_{mn}\sin(mx)\sin(ny)\right\| \\
&= \frac{\pi^2}{4}\sum_{m,n\geq 1}\left|\left(m^2+n^2\right)h_{mn}\right|^2
\end{aligned}$$

Et cela imlpique que $\lim\limits_{M\to+\infty}\left\|\Delta h_M-\Delta h\right\|^2_{L_2(\Omega)}=0$, par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\left\|T_M(h)-h\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right\| &= \tfrac{4}{\pi^2}\sum_{m,n\geq 1; m^2+n^2\geq M}\left|h_{mn}\right|^2 \\
&\leq \tfrac{\pi^2}{4M^2}\sum_{m,n\geq 1; m^2+n^2\geq M}\left|\left(m^2+n^2\right)h_{mn}\right|^2 \\
&\leq \tfrac{16}{\pi^2M^2}\left\|\Delta h\right\|^2_{L_{2(\Omega)}}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\|\ \Gamma_M(h)-h\ \|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \tfrac{\pi^2}{4}\sum_{m,n>1; m^2+n^2>M}\left(m^2+n^2\right)\mid h_{mn}\mid^2 \\
&\leq \tfrac{\pi^2}{4M}\sum_{m,n>1; m^2+n^2>M}\mid\left(m^2+n^2\right)h_{mn}\mid^2\leq \tfrac{16}{\pi^4M}\ \|\ \Delta h\ \|^2_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}$$

D'ou, la preuve est terminée. ■

Théorème 16 *Soit $f\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ et $g\in L_2(\Omega)$ tel que le système (1) a une solution (unique)*

$$u\in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left((0,T);L_2(\Omega)\right)$$

On pose :

$$M_\varepsilon = \frac{\ln\left(\varepsilon^{-1}\right)}{2T}$$

Alors :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ \|\ u^\varepsilon(.,.,0)-u(.,.,0)\ \|_{H_0^1(\Omega)}=0$$

Et

$$\| u^{\varepsilon}(.,.,0) - u(.,.,0) \|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi T} \sqrt[4]{\varepsilon} \| u(.,.,0) \|_{H_0^1(\Omega)} \frac{1}{\sqrt{\ln(\varepsilon^{-1})}}$$

De plus, si $\Delta u(.,.,0) \in L_2(\Omega)$ *alors :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \| \Delta u^{\varepsilon}(.,.,0) - \Delta u(.,.,0) \|_{L_2(\Omega)} = 0$$

Et

$$\| u^{\varepsilon}(.,.,0) - u(.,.,0) \|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{4}{\pi\sqrt{T}} \sqrt[4]{\varepsilon} + \frac{8T}{\pi^2} \| \Delta u(.,.,0) \|_{L_2(\Omega)} \frac{1}{\sqrt{\ln(\varepsilon^{-1})}}$$

$$\| u^{\varepsilon}(.,.,0) - u(.,.,0) \|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi T} \sqrt[4]{\varepsilon} + \frac{4\sqrt{2T}}{\pi^2} \| \Delta u(.,.,0) \|_{H_0^1(\Omega)} \frac{1}{\sqrt{\ln(\varepsilon^{-1})}}$$

Preuve. On pose $u_{\varepsilon} = u^{\varepsilon}(x,y,0)$ et

$$(u_{\varepsilon})_{mn} = \langle u^{\varepsilon}(x,y,0), \sin(mx)\sin(nx) \rangle.$$

Par le théoréme 15 on peut rapprocher $u(.,.,0)$ par $\Gamma_{M_{\varepsilon}}(u(.,.,0))$.

Et maintenant, on avons juste besoin d'estimer l'erreur entre u_{ε} et $\Gamma_{M_{\varepsilon}}(u(.,.,0))$.

étape 1 :

Estimation $|\ (u_{\varepsilon})_{mn}$ -$(\Gamma_{M_{\varepsilon}}(u(.,.,0)))_{mn}\ |$.L'erreur disparaît lorsque $m^2+n^2 > M_{\varepsilon}$. Dans le cas $m^2+n^2 \leq M_{\varepsilon}$ on a :

$$\begin{aligned}
& |\ (u_{\varepsilon})_{mn} - (\Gamma_{M_{\varepsilon}}(u(.,.,0)))_{mn}\ | = |\ u_{\varepsilon,m,n} - (u(x,y,0))_{mn}\ | \\
= & \ |\ e^{(m^2+n^2)T}(g_{\varepsilon}-g)_{mn} - \int_0^T e^{(m^2+n^2)t}(f_{\varepsilon}(x,y,t) - f(x,y,t))_{mn}\,dt\ | \\
\leq & \ e^{(m^2+n^2)T}\ |\ (g_{\varepsilon}-g)_{mn}\ | + \int_0^T e^{(m^2+n^2)t}(f_{\varepsilon}(x,y,t) - f(x,y,t))_{mn}\,dt \\
\leq & \ \frac{4}{\pi^2}e^{(m^2+n^2)T}\ |\ (g_{\varepsilon}-g)_{L^1(\Omega)}\ | + \frac{4}{\pi^2}e^{(m^2+n^2)T}\int_0^T (f_{\varepsilon}(x,y,t) - f(x,y,t))_{L^1(\Omega)}\,dt \\
\leq & \ \frac{8}{\pi^2}e^{(m^2+n^2)T}\varepsilon \ \leq \frac{8}{\pi^2}e^{M_{\varepsilon}T}\varepsilon = \frac{8}{\pi^2}\sqrt{\varepsilon}
\end{aligned}$$

étape 2 :

Estimation des erreurs entre u_{ε} et $\Gamma_{M_{\varepsilon}}(u(.,.,0))$.

Notons que $\varepsilon^{-1/2} = e^{M_\varepsilon T} > (M_\varepsilon T)^k/k!$ pour $k = 2, 3, 4$ on a :

$$\begin{aligned}\| u_\varepsilon \quad - \Gamma_{M_\varepsilon} (u(.,.,0))_{mn} \ \|^2_{L_2(\Omega)} &= \| \sum_{m,n\geq 1; m^2+n^2 \leq M_\varepsilon} ((u_\varepsilon)_{mn} - (u(.,.,0))_{mn}) \sin(mx) \sin(ny)) \|^2_{L_2(\Omega)} \\ &= \tfrac{\pi^2}{4} \sum_{m,n\geq 1; m^2+n^2 \leq M_\varepsilon} | (u_\varepsilon)_{mn} - (u(.,.,0))_{mn} |^2\end{aligned}$$

De plus, depuis l'étape 1, si $m^2 + n^2 \leq M_\varepsilon$ est satisfaite, alors :

$$| (u)_{mn} - (u(.,.,0))_{mn} |^2 \leq (\frac{8}{\pi^2}\sqrt{\varepsilon})^2 = \frac{64}{\pi^4}\varepsilon$$

Par conséquent :

$$\sum_{m,n\geq 1; m^2+n^2 \leq M_\varepsilon} | (u_\varepsilon)_{mn} - (u(.,.,0))_{mn} |^2 \leq \left(m^2 + n^2\right) \ \frac{64}{\pi^4} \ \varepsilon \leq \quad M_\varepsilon \ \frac{64}{\pi^4}\varepsilon \tag{14}$$

Combinant (13) et (14) et $M_\varepsilon T \leq e^{M_\varepsilon T} = e^{-1/2}$ alors :

$$\| u_\varepsilon \quad - \Gamma_{M_\varepsilon} (u(.,.,0))_{mn} \ \|^2_{L_2(\Omega)} \leq \frac{\pi^2}{4} M_\varepsilon \frac{64}{\pi^4} = \frac{16}{\pi^2} M_\varepsilon \varepsilon \leq \frac{16}{\pi^2 T}\sqrt{\varepsilon}$$

Par une méthode similaire et en utilisant (14) alors :

$$\| u_\varepsilon \ - \Gamma_{M_\varepsilon} (u(.,.,0))_{mn} \ \|^2_{H^1_0(\Omega)} = \| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\Gamma_{M_\varepsilon} (u(.,.,0)) \|^2_{L_2(\Omega)} + \| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\Gamma_{M_\varepsilon} (u(.,.,0)) \|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$= \| \sum_{m,n\geq 1; m^2+n^2 \leq M_\varepsilon} n\left(((u_\varepsilon)_{mn}) - (u(.,.,0))_{mn}\right) \cos(mx) \sin(ny) \|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \sum_{m,n\geq 1; m^2+n^2 \leq M_\varepsilon} \left(m^2 + n^2\right) | (u_\varepsilon)_{mn} - (u(.,.,0))_{mn} |^2$$

$$\leq \frac{\pi^2}{4} M_\varepsilon \sum_{m,n\geq 1; m^2+n^2 \leq M_\varepsilon} | (u_\varepsilon)_{mn} - (u(.,.,0))_{mn} |^2$$

$$\leq \frac{\pi^2}{4} M_\varepsilon M_\varepsilon \frac{64}{\pi^4}\varepsilon \quad = \frac{16}{\pi^2} M_\varepsilon^2 \varepsilon$$

Utilisant l'inégalité $e^{-1/2} = e^{M_\varepsilon T} > (M_\varepsilon T)^2/2$, alors :

$$\| u_\varepsilon \quad - \Gamma_{M_\varepsilon} (u(.,.,0))_{mn} \ \|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{32}{\pi^2 T^2}\sqrt{\varepsilon} \tag{15}$$

Et

$$\begin{aligned}
&\| \quad \Delta u_\varepsilon \quad - \Delta\Gamma_{M_\varepsilon}\left(u\left(.,.,0\right)\right)_{mn} \quad \|^2_{L_2(\Omega)} = \\
&= \quad \| \sum_{m,n\geq 1; m^2+n^2\leq M_\varepsilon} \left(m^2+n^2\right)\left(\left(u_\varepsilon\right)_{mn} - \left(u\left(.,.,0\right)\right)_{mn}\right)\sin\left(mx\right)\sin\left(ny\right) \|^2_{L_2(\Omega)} \\
&= \quad \frac{\pi^2}{4} \sum_{m,n\geq 1; m^2+n^2\leq M_\varepsilon} \left(m^2+n^2\right)^2 \mid \left(u_\varepsilon\right)_{mn} - \left(u\left(.,.,0\right)\right)_{mn} \mid^2 \\
&\leq \quad \frac{16}{\pi^2} M_\varepsilon^3 \varepsilon \\
&\leq \quad \frac{96}{\pi^2 T^3}\sqrt{\varepsilon}
\end{aligned}$$

étape 3 :

Estimation des erreurs entre u_ε et u.

Soit :

$$\begin{aligned}
\| u_\varepsilon - u\left(.,.,0\right) \|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \quad \| u_\varepsilon \quad - \Gamma_{M_\varepsilon}(u\left(.,.,0\right)) \quad \|_{H_0^1(\Omega)} + \quad \| \Gamma_{M_\varepsilon}\left(u\left(.,.,0\right)\right) - u\left(.,.,0\right) \quad \|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \quad \tfrac{4\sqrt{2}}{\pi T}\sqrt[4]{\varepsilon} + \quad \| \Gamma_{M_\varepsilon}\left(u\left(.,.,0\right)\right) - u\left(.,.,0\right) \quad \|_{H_0^1(\Omega)} \to 0
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\| u_\varepsilon \quad - u\left(.,.,0\right) \quad \|_{L_2(\Omega)} &\leq \quad \| u_\varepsilon \quad - \Gamma_{M_\varepsilon}(u\left(.,.,0\right)) \quad \|_{L_2(\Omega)} + \quad \| \Gamma_{M_\varepsilon}\left(u\left(.,.,0\right)\right) - u\left(.,.,0\right) \quad \|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \quad \tfrac{4}{\pi\sqrt{T}}\sqrt[4]{\varepsilon} + \tfrac{4}{\pi^2\sqrt{M_\varepsilon}} \| u\left(.,.,0\right) \|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Maintenant, on suppose que $\Delta u\left(.,.,.0\right) \in L_2\left(\Omega\right)$, alors :

$$\begin{aligned}
\| \Delta u_\varepsilon \quad - \Delta u\left(.,.,0\right) \quad \|_{L_2(\Omega)} &\leq \| \Delta u_\varepsilon - \Delta\Gamma_{M_\varepsilon}(u\left(.,.,0\right)) \quad \|_{L_2(\Omega)} + \| \Delta\Gamma_{M_\varepsilon}\left(u\left(.,.,0\right)\right) - \Delta u\left(.,.,0\right) \quad \|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \tfrac{4\sqrt{2}}{\pi T}\sqrt[4]{\varepsilon} + \| \Delta\Gamma_{M_\varepsilon}\left(u\left(.,.,0\right)\right) - \Delta u\left(.,.,0\right) \quad \|_{L_2(\Omega)} \to 0
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\| u_\varepsilon \quad - u\left(.,.,0\right) \quad \|_{L_2(\Omega)} &\leq \quad \| u_\varepsilon \quad - \Gamma_{M_\varepsilon}(u\left(.,.,0\right)) \quad \|_{L_2(\Omega)} + \| \Gamma_{M_\varepsilon}\left(u\left(.,.,0\right)\right) - u\left(.,.,0\right) \quad \|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \quad \tfrac{4}{\pi\sqrt{T}}\sqrt[4]{\varepsilon} + \tfrac{4}{\pi^2 M_\varepsilon} \| \Delta u\left(.,.,0\right) \|_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\| u_\varepsilon \quad - u\left(.,.,0\right) \quad \|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \quad \| u_\varepsilon \quad - \Gamma_{M_\varepsilon}(u\left(.,.,0\right)) \quad \|_{H_0^1(\Omega)} + \quad \| \Gamma_{M_\varepsilon}\left(u\left(.,.,0\right)\right) - u\left(.,.,0\right) \quad \|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \quad \tfrac{4\sqrt{2}}{\pi T}\sqrt[4]{\varepsilon} + \tfrac{4}{\pi^2\sqrt{M_\varepsilon}} \| \Delta u\left(.,.,0\right) \|_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

Remarque 17

L'erreur $\| u_\varepsilon(.,.,0) - u(.,.,0) \|_{L_2(\Omega)}$n'est pas donné dans [37], et dans [6, 7, 12, 26, 38, 36] l'erreur $\| u_\varepsilon(.,.,0) - u(.,.,0) \|_{H_0^1(\Omega)}$n'est pas donné aussi.

Dans ce cas, l'erreur $\| u_\varepsilon(.,.,0) - u(.,.,0) \|_{H_0^1(\Omega)}$est établie, ceci est un point fort dans cette méthode.

Théorème 18 *Le problème* (1) *a une solution (unique)* $u \in C\left([0,T];\ H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left((0,T);\ L_2(\Omega)\right)$ *satisfaisant la condition*

$$\frac{\pi^2}{4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(n^2+m^2\right)^k u_{mn}^2 < A_1^2$$

Pour $k > 0$ *est un nombre positif si :*

$$M_\varepsilon = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{T\left(\ln\frac{T}{\varepsilon}\right)^r}{\varepsilon + \varepsilon\left(\ln\frac{T}{\varepsilon}\right)} \right) \quad ,(r>0)$$

Alors l'estimation suivante est vérifiée :

$$\| u^\varepsilon(.,.,t) - u(.,.,t) \|_{L_2(\Omega)} \le \sqrt{6\varepsilon^{\frac{2t}{T}} \left(\frac{1+\ln(T\varepsilon^{-1})}{T}\right)^{\frac{2t}{T}-2} + \left(\ln\frac{T}{\varepsilon}\right)^{2r\left(\frac{t}{T}-1\right)} \left[T\ln\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon\ln\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)}{T\ln\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^r}\right)\right]^k A_1^2}$$

Preuve. On a :

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)\sin(mx)\sin(ny)$$

$$u^\varepsilon(x,y,t) = \sum_{m,n\ge 1}^{m^2+n^2\le M_\varepsilon} u_{mn}^\varepsilon(t)\sin(mx)\sin(ny) \tag{17}$$

Où :

$$\begin{aligned} u_{mn}^\varepsilon(t) &= e^{(T-t)\left(m^2+n^2\right)} (g_\varepsilon)_{mn} - \int_t^T e^{(s-t)\left(m^2+n^2\right)} \left(f_\varepsilon(x,y,s)\right)_{mn} ds \\ u_{mn}(t) &= e^{(T-t)\left(m^2+n^2\right)} (g)_{mn} - \int_t^T e^{(s-t)\left(m^2+n^2\right)} f_{mn}(s)\, ds \end{aligned}$$

Par transformation directe, on a :

$$
\begin{aligned}
\| u^{\varepsilon}(.,.,t) \quad - u(.,.,t) \ \|^2_{L_2(\Omega)} \ \le \quad & 3\tfrac{\pi^2}{4} \sum_{m^2+n^2 \le M_\varepsilon}^{m,n\ge 1} e^{2(s-t)\left(m^2+n^2\right)} ((g_\varepsilon)_{mn} - g_{mn})^2 \\
+ \quad & 3\tfrac{\pi^2}{4} \sum_{m^2+n^2 \le M_\varepsilon}^{m,n\ge 1} (\int_t^T e^{(s-t)\left(m^2+n^2\right)} ((f_\varepsilon(x,y,s))_{mn} - f_{mn}(s) ds)^2 \\
+ \quad & 3\tfrac{\pi^2}{4} \sum_{m^2+n^2 \le M_\varepsilon}^{m,n\ge 1} u^2_{mn}(t)
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que :

$$
\begin{aligned}
\| u^{\varepsilon}(.,.,t) \quad - u(.,.,t) \ \|^2_{L_2(\Omega)} \ \le \ & 3e^{2(T-t)M_\varepsilon} \| g_\varepsilon - g \|^2_{L_2(\Omega)} \\
+ \ & 3e^{2(T-t)M_\varepsilon} \| f_\varepsilon - f \|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \\
+ \ & 3\tfrac{\pi^2}{4} \sum_{m^2+n^2 \le M_\varepsilon}^{m,n\ge 1} \left(n^2+m^2\right)^{-k} \left(m^2+n^2\right)^k u^2_{mn}(t)
\end{aligned}
$$

Par conséquent, on a :

$$
\begin{aligned}
\| u^{\varepsilon}(.,.,t) \quad - u(.,.,t) \ \|^2_{L_2(\Omega)} \ \le \ & 6e^{(T-t)M_\varepsilon}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{M_\varepsilon^k} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(m^2+n^2\right)^k u^2_{mn} \\
\le \ & 6\varepsilon^{\frac{2t}{T}} \left(\tfrac{1+\ln\left(T\varepsilon^{-1}\right)}{T} \right)^{\frac{2t}{T}-2} (\ln \tfrac{T}{\varepsilon})^{2r\left(\frac{t}{T}-1\right)} \\
\times \ & \left[T \ln \left(\tfrac{\varepsilon + \varepsilon \ln\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)}{T \ln\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^r} \right) \right]^k \tfrac{\pi^2}{4} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(m^2+n^2\right)^k u^2_{mn}(t)
\end{aligned}
$$

■

Théorème 19 *On suppose qu'il existe les nombres positifs β, A_2 tels que :*

$$
\frac{\pi^2}{4} \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{2\beta\left(m^2+n^2\right)} u^2_{mn}(t) < A_2^2 \tag{18}
$$

On va choisir :

$$
M_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{T+\beta} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}
$$

Alors la convergence de l'estimation suivante est vérifieé :

$$
\| u^{\varepsilon}(.,.,t) \quad - u(.,.,t) \ \|^2_{L_2(\Omega)} \le \left(A_2 + 2\varepsilon^{\frac{t}{T+\beta}} \right) \varepsilon^{\frac{\beta}{T+\beta}} \tag{19}
$$

Preuve. pour chaque $t \in [0, T]$, v^{ε} c'est la fonction définie par :

$$v^{\varepsilon}(x, y, t) = \sum_{m,n \geq 1}^{m^2+n^2 \leq M_{\varepsilon}} v^{\varepsilon}_{mn}(t) \sin(mx) \sin(ny). \tag{20}$$

Où :

$$v^{\varepsilon}_{mn}(t) = e^{(T-t)\left(m^2+n^2\right)} g_{mn} - \int_t^T e^{(s-t)\left(m^2+n^2\right)} \left(f_{\varepsilon}(x, y, s)\right)_{mn} ds.$$

Depuis (20), on a :

$$\begin{aligned} u(x,y,t) - v^{\varepsilon}(x,y,t) = & \sum_{m+n>M_{\varepsilon}}^{\infty} \left(e^{-(t-T)\left(m^2+n^2\right)} g_{mn} \right. \\ & \left. - \int_t^T e^{-(t-s)\left(m^2+n^2\right)} f_{mn}(s)\, ds \right) \times \sin(mx) \sin(ny) \\ = & \sum_{m+n>M_{\varepsilon}}^{\infty} \langle u(x,y,t), \sin(mx)\sin(ny) \rangle \sin(mx) \sin(ny) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \| u(.,.,t) - v^{\varepsilon}(.,.,t) \|^2_{L_2(\Omega)} = & \frac{\pi^2}{4} \sum_{m+n>M_{\varepsilon}}^{\infty} e^{-2\beta\left(m^2+n^2\right)} e^{2\beta\left(m^2+n^2\right)} u^2_{mn}(t) \\ \leq & \frac{\pi^2}{4} e^{-2\beta M_{\varepsilon}} \sum_{m+n>M_{\varepsilon}}^{\infty} e^{2\beta\left(m^2+n^2\right)} u^2_{mn}(t) \\ \leq & e^{-2\beta M_{\varepsilon}} \frac{\pi^2}{4} \sum_{m+n>M_{\varepsilon}}^{\infty} e^{2\beta\left(m^2+n^2\right)} u^2_{mn}(t) \qquad (21) \\ \leq & e^{-2\beta M} A_2^2 \qquad (22) \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \| u^{\varepsilon}(.,.,t) - u(.,.,t) \|^2_{L_2(\Omega)} = & \sum_{m+n>M_{\varepsilon}}^{\infty} |^{\left(m^2+n^2\right)(T-t)} (g_{\varepsilon} - g)_{mn} \\ & - \int_t^T e^{\left(m^2+n^2\right)(s-t)} \left(f_{\varepsilon}(x,y,s) - f(x,y,s)\right)_{mn} ds \\ \leq & \; 2e^{2(T-t)M_{\varepsilon}} \left(\| u \| g_{\varepsilon} - g^2_{L^1(\Omega)} + \| f_{\varepsilon}(.,.,t) - f(.,.,t) \|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \right) \\ \leq & \; 4e^{2(T-t)M_{\varepsilon}} \varepsilon^2 \qquad (23) \end{aligned}$$

Combinaison (22) et (23) alors :

$$\| u^{\varepsilon}(.,.,t) - u(.,.,t) \|_{L_2(\Omega)} \leq \| u^{\varepsilon}(.,.,t) - v^{\varepsilon}(.,.,t) \|_{L_2(\Omega)} + \| v^{\varepsilon}(.,.,t) - u(.,.,t) \|_{L_2(\Omega)}$$
$$\leq e^{-\beta M_{\varepsilon}^2} A_2 + 2e^{(T-t)M_{\varepsilon}}\varepsilon$$

D'aprés :

$$M_{\varepsilon} = \frac{1}{T+\beta}\ln(\frac{1}{\varepsilon}).$$

La convergence de l'estimation est vérifié :

$$\begin{aligned} \| u^{\varepsilon}(.,.,t) - u(.,.,t) \|_{L_2(\Omega)} &\leq \varepsilon^{\frac{\beta}{T+\varepsilon}} A_2 + 2\varepsilon^{\frac{t+\beta}{T+\beta}} \\ &= \varepsilon^{\frac{\beta}{T+\varepsilon}} (A_2 + 2\varepsilon^{\frac{t}{T+\beta}}) \end{aligned}$$

■

Remarque 20

• La condition (18) n'est pas vérifiable, on peut le vérifier en remplaçant les conditions de f et g, on a :

$$\sum_{m+n>M_{\varepsilon}}^{\infty} e^{2\beta\left(m^2+n^2\right)} u_{mn}^2(t) =$$
$$= \sum_{m+n>M_{\varepsilon}}^{\infty} \left(e^{2\beta\left(m^2+n^2\right)} e^{-(t-T)\left(m^2+n^2\right)} g_{mn} - \int_t^T e^{-(t-s)\left(m^2+n^2\right)} f_{mn}(s)\, ds \right)^2$$

On peut donc remplacer (18) par les différentes conditions

$$\sum_{m+n>M_{\varepsilon}}^{\infty} e^{2(T+\beta)\left(m^2+n^2\right)} g_{mn} < \infty$$

$$\sum_{m+n>M_{\varepsilon}}^{\infty} \int_t^T e^{2(s+\beta)\left(m^2+n^2\right)} f_{mn}^2(s)\, ds < \infty$$

• On remarque que l'estimation d'erreur (19) ($\beta > 0$) est de type Hölder pour tout $t \in [0, T]$. Il est facile de voir que le taux de convergence ε^p $(0 < p)$ est plus rapide que l'ordre logarithmique

$\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{-q}$ $(q > 0)$ avec $\varepsilon \to 0$. En comparant l'erreur (19) avec les résultats de [6, 7, 12, 26, 38, 41],

on voit que cette méthode est très efficace.

Conclusion

Dans ce travail, on remarque que les deux méthodes de régularisation et les estimations des erreurs de l'équation de la chaleur rétrograde qui ont été introduites par HUY TUAN NGUYEN sont très efficaces après comparaison avec les autres résultats précédents. L'estimation d'erreur de la première méthode est de type logarithmique par contre la deuxième méthode est de type Hölder.

De plus, les deux méthodes ont un avantage : qu'il existe une estimation d'erreur au temps d'origine $t = 0$ qui n'est pas donné dans de nombreux résultats récemment connus.

Bibliographie

[1] K.A. Ames and R.J. Hughes, Structural stability for ill-posed problems in Banach space.Semigroup Forum, 70 (2005), 1, 127-145.

[2] F. Black and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities. J. Polit. Econ.81(3) (1973), 637-654.

[3] N. Boussetila, F. Rebbani, Optimal regularization method for ill-posed Cauchy problems, Electron. J. Differential Equations 147 (2006) 115.

[4] A.S. Carraso, Logarithmic convexity and the \slow evolution" constraint in ill-posed initial value problems. SIAM J. Math. Anal. 30 (1999), 3, 479-496.

[5] Chu-Li Fu, Zhi Qian and Rui Shi, A modified method for a backward heat conduction problems. Appl. Math. Comput. 185 (2007), 564-573.

[6] G.W. Clark and S.F. Oppenheimer, Quasireversibility methods for non-well posed problems. Electron. J. Differ. Equ. 1994 (1994), 8, 1-9.

[7] M. Denche and K. Bessila, A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems. J. Math. Anal. Appl. 301 (2005), 419-426.

[8] M. Denche, S. Djezzar, A modified quasi-boundary value method for a class of abstract parabolic ill-posed problems, Bound. Value Probl. 2006 (2006) Article ID 37524, 18 pages

[9] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equation. American Mathematical Society 19(1997), Providence, Rhode Island.

[10] X.L. Feng, Z. Qian and C.L. Fu, Numerical approximation of solution of nonhomogeneous backward heat conduction problem in bounded region. Math. Comput. Simulation 79(2008), 2, 177-188.

[11] C.L-Fu, X.T. Xiong and Z. Qian, Fourier regularization for a backward heat equation.J. Math. Anal. Appl. 331 (2007), 1, 472-480.

[12] H. Gajewski and K. Zaccharias, Zur regularisierung einer klass nichtkorrekter probleme bei evolution gleichungen. J. Math. Anal. Appl. 38 (1972), 784-789.

[13] J. Hadamard, Lecture note on Cauchy's problèm in linéar partial differential équations.Yale Uni Press, New Haven, 1923.

[14] D.N. Hao, A mollification method for ill-posed problems. Numer. Math. 68 (1994),469-506.

[15] D.N. Hao, N.V. Duc, H. Sahli, A non-local boundary value problem method for parabolic équations backward in time, J. Math. Anal. Appl. 345 (2008)805-815.

[16] B.M.C. Hetrick, J.R. Hughes, Continuous dependence on modeling for nonlinear ill-posed problems, J. Math. Anal. Appl. 349 (1) (2009) 420-435.

[17] B.M.C. Hetrick, J.R. Hughes, Continuous dependence results for inhomogeneous ill-posed problems in Banach space, J. Math. Anal. Appl. 331 (1) (2007) 342-357

[18] Y. Huang and Q. Zhneg, Regularization for a class of ill-posed Cauchy problems. Proc.Amer. Math. Soc. 133 (2005), 3005-3012.

[19] Y. Huang and Q. Zhneg, Regularization for ill-posed Cauchy problems associated with generators of analytic semigroups. J. Diff.Equ 203 (2004), 1, 38-54.

[20] V.K. Ivanov, I.V. Mel'nikova and F.M. Filinkov, Differential-Operator Equations and Ill-Posed problems. Nauka, Moscow, 1995 (Russian).

[21] F. John, Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound. Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 551-585.

[22] S.M. Kirkup and M.Wadsworth, Solution of inverse di usion problems by operator-splitting methods. Appl. Math. Modell. 26 (2002), 1003-1018.

[23] R. Latt es and J.-L. Lions, Méthode de Quasi-réversibilit e et Applications. Dunod, Paris,1967.

[24] I.V. Mel'nikova and S.V. Bochkareva, C-semi groups and regularization of an ill-posed Cauchy problem. Dok. Akad. Nauk. 329 (1993), 270-273.

[25] I.V. Mel'nikova, Q. Zheng, J. Zheng, Regularization of weakly ill-posed Cauchy problem, J. Inverse Ill-Posed Probl. 10 (5) (2002) 385-393

[26] K. Miller, Stabilized quasi-reversibility and other nearly-best-possible methods for non-well posed problems. Symposium on Non-Well Posed Problems and Logarithmic Con-vexity, Lecture Notes in Mathematics 316 (1973), Springer-Verlag, Berlin 161-176.

[27] P.T. Nam, D.D. Trong and N.H. Tuan, The truncation method for a two-dimensional nonhomogeneous backward heat problem. Appl. Math. Comput. 216 (2010), 12, 3423-3432.

[28] H.T. NGUYEN, Stability and regularization for 2D backward heat conduction equation, MATH. REPORTS 17(67), 1 (2015), 1–23

[29] L.E. Payne, Some general remarks on improperly posed problems for partial differentiale quations. Symposium on Non-Well Posed Problems and Logarithmic Convexity, Lecture Notes in

Mathematics 316 (1973), Springer-Verlag, Berlin, 1-30.

[30] T. Schrsoter and U. Tautenhahn, On optimal regularization methods for the backward heat equation. Z. Anal. Anwed. 15 (1996), 475-493.

[31] R.E. Showalter, Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations. In Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis, Elsevier 1983.

[32] R.E. Showalter, The final value problem for evolution equations. J. Math. Anal. Appl.47 (1974), 563-572.

[33] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, Solutions of Ill-Posed Problems. Winston,Washington, 1977.

[34] D.D. Trong and N.H. Tuan, A non homogeneous backward heat problem : regularization and error estimates. E. J. D. Equ., 2008 , 33, 1-14..

[35] D.D. Trong and N.H. Tuan, Regularization and error estimate for the nonlinear backward heat problem using a method of integral equation. Nonlinear Anal., 71 (2009), 9,4167-4176.

[36] D.D. Trong and T.N. Lien.(2007), Regularization of a discrete backward problem using coeffcients of truncated Lagrange polynomials. Electron. J. D. Equ., 2007 (2007),51, 1-14.

[37] D.D. Trong, P.H. Quan, T.V. Khanh and N.H. Tuan, A nonlinear case of the 1-D backward heat problem : regularization and error estimate. Zeitschrift Analysis und ihreAnwendungen 26 (2007), 2,231-245.

[38] D.D. Trong and N.H. Tuan, Regularization and error estimates for nonhomogeneous backward heat problems. E.J. D.E. 2006 (2006), 04, 1-10.

[39] D.D. Trong, N.H. Tuan, Stabilized quasi-reversibility method for a class of non linear ill-posed problems, Electron. J. Differential Equations (84) (2008) 1- 12

[40] D.D. Trong, P.H. Quan, T.V. Khanh and N.H. Tuan, A nonlinear case of the 1-D backward heat problem : regularization and error estimate. Zeitschrift Analysis und ihreAnwendungen 26 (2007), 2,231-245.

[41] N. H. Tuan, D.D Trong et P.H. Quan,On a backward Cauchy problem associated with continuous spectr umoperator, Nonlinear Analysis73 (2010)1966–1972

[42] N.H. Tuan and D.D. Trong, A new regularized method for two dimensional non homogeneous backward heat problem. Appl. Math. Comput. 215 (2009), 3, 873-880

[43] B. Yildiz and M. Ozdemir, Stability of the solution of backward heat equation on a weak conpactum. Appl. Math. Comput. 111 (2000), 1-6.

[44] B. Yildiz, H. Yetis and A.Sever, A stability estimate on the regularized solution of the backward heat problem. Appl. Math. Comput. 135 (2003), 561-567.

Résumé

Dans ce travail :

Nous commençons par les définitions des EDP et l'équation de la chaleur, suivies de quelques notations et résultats nécessaires à ce travail, ensuite on donne les deux méthodes de Huy Tuan Nguyen pour régulariser l'équation de la chaleur. Dans la première méthode un problème de Cauchy rétrograde associé à un opérateur de spectre continu est régularisé, par la suite on présente la deuxième méthode de Fourier tronquée pour traiter le cas bidimensionnel.

Abstract

In This Work :

We start with the definitions of the PDE, of the backward heat equations, followed by some notations and results necessary in this work, then we give the two methods of Huy Tuan Nguyen to regularize the backward heat equation. In the first method a Cauchy problem associated with a continuous spectrum operator is regularized, after the truncated Fourier method is presented, to handle the two-dimensional case.

الملخص

في هذا العمل :

بدأنا بتعريف المعادلات التفاضلية الجزئية و معادلة الحرارة، بالاضافة الى ببعض الملاحظات و النتائج الأساسية لهذا العمل، ثم تطرقنا الى طريقتين لـ هوي توان نجوين (Huy Tuan Nguyen) من اجل تسوية معادلة الحرارة. في الطريقة الأولى اعتمدنا على مشكلة كوشي المرتبطة بمؤثر ذو طيف مستمر، تليها طريقة فورييه المقتطعة للتعامل مع حالة ثنائي الأبعاد