الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Une procédure améliorante d'une méthode projective en programmation linéaire

Préparé par : Bourourou Loubna
Kassa Raihane

Devant le jury

Benaouicha Loubna….. M.A.B	**C.U.Abd Elhafid Boussouf**	**Président**
Baiche Kenzia……..M.A.B	**C.U.Abd Elhafid Boussouf**	**Rapporteur**
Fadel Wahida…….....M.A.A	**C.U.Abd Elhafid Boussouf**	**Examinateur**

Année Universitaire : 2016/2017

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciement

Avant et après tout nous remercions le bon dieu tout puissant, de nous avoir donné le courage et la volonté pour pouvoir terminer notre formation.

Un remerciement particulier à notre encadreur Mme Baiche Kanzia. pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils qui nous ont assistes pour l'accomplissement de notre projet .

Nous tenons à exprimer nos sincéres remerciements à tout le personnel de l'institut des sciences et de la théchnologie surtout les enseignants qui nous ont formé durant touts nos années d'étude

Nous remercions nos parents, pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis Pour nous permettre de suivre nos études dans les meilleures conditions et de nous avoir en couragé tout au long de ces années.

MERCI A TOUS

LOUBNA ET RAIHANE

ملخص

نقترح من خلال هذا البحث خوارزمية كارماركر للبرمجة الخطية التي تساعد على إيجاد الحل المثالي وذلك بتغيير الخطوة، هذا الطرح معزز بمختلف التجارب العددية الهامة المنجزة.

الكلمات المفتاحية : البرمجة الخطية و طريقة كارماركر .

Abstract :

In this research, we propose karmarkar alghorithme of linear programming on wich studies have been completed to help find the perfect solution by changing of step. this proposal is reinforced by various numerical expriments.

Key words :

Linear programming , karmarkar's method.

Résumé :

Dans cette recherche , nous vous proposons l'algorithme de karmarkar de la programmation linéaire sur laquelle des études ont été réalisées pour aider à trouver la solution et change l'itération est renforcée par diverses expériences numérique.

Mots clés :

Programmation linear, méthode de karmarkar.

Table des matières

Introduction Générale **iii**

1 Analyse convexe et optimisation **1**

1.1 Ensemble Convexe : 1

1.1.1 Opération sur l'ensemble convexe : 2

1.1.2 Polyèdre Convexe Fermé : 2

1.2 Fonction Convexe : 3

1.3 Optimisation 6

1.3.1 Problème d'optimisation : 6

1.3.2 Optimisation Sans Contrainte : 6

1.3.3 Optimisation Avec Contrainte : 9

1.4 Programmation linéaire 12

1.4.1 La forme canonique d'un programmation linéaire : 12

1.4.2 La forme standard d'un programmation linéaire : 13

1.4.3 La dualité en programmation linéaire : 13

2 Méthode De Karmarkar **16**

2.1 Préliminaires 16

2.1.1 Minimisation d'une fonction linéaire sur un ellipsoïde 16

2.1.2 L'idée générale de l'algorithme : 18

2.2 Description De La Méthode : 19

2.2.1 La valeur optimal de (LP)est connue : 20

2.2.2 Transformation de (LP) en une forme canonique de Karmarkar : 20
2.2.3 Résolution du problème auxiliaire (PCK) : 22
2.2.4 Convergence polynomiale de l'algorithme : 26
2.3 calcule d'une solution initiale strictement réalisable : 35

3 Teste Numérique **37**
3.1 Quelque Exemple Numérique 37
3.2 Conclusion 41

bibliographie **41**

Introduction Générale

La programmation linéaire est la branche des mathématiques qui étudie la résolution optimale de certaines problèmes de minimisation ou maximisation d'une fonction linéaire, qui a le sens économique d'un coût ou d'un profit, sous des contraintes linéaires d'égalité et/ou d'inégalité.

Les méthodes le plus connue pour résoudre dés programmes linéaire en nombre réels est les méthodes de point intérieur, Le principe de cette méthode consiste alors à faire évoluer de façon itérative ce point vers une solution optimal du problème toute en restant à l'intérieure strict P avec $P = \{x/Ax = b, x \geq 0\}, x \in P$ du polyèdre admissible en d'autre terme on construit une suite détirés intérieur convergent vers une solution, de puis parmi les critère couramment utilisées pour différentier les méthodes mentionnons : espace itérés : une méthode est dite primale-dual lorsque ses itérés appartiennent respectivement à l'espace de variables primales-duales ou le produit cartésien de ces deux espaces, et type itérés, le type d'algorithme et type de pas.

En 1984 Narendra karmarkar se basée sur les méthodes de points intérieurs et découvre un algorithme en temps polynomial. son travail donne un véritable élan à la recherche d'algorithme pour la programmation linéaire. c'est alors qu'est née toute une famille d'algorithmes dits de points intérieurs. ce type d'algorithmes permet de résoudre des problèmes d'optimisation linéaire et non-linéaire. les méthodes de points intérieurs s'intéressent à l'intérieur des domaines réalisables. en partant d'une région (suffisamment grande) contenant l'ensemble des solution.
il sagit de rétrécir ce domaine pour cibler ia solution. Ainsi, pas après pas, le domaine réalisable se restreint jusqu'à se réduire à un voisinage arbitrairement petit de la solution.

Le mémoire est organisé comme suite :

Dans **le premier chapitre**, nous présentons des notions de base sur l'analyse convexe, et l'optimisation avec contrainte et sans contrainte ainsi la programmation linéaire.

Le deuxième chapitre, on donne une description des méthodes de point intérieur, la méthode originale de karmarkar.

Le troisième chapitre, nous présentons une étude numérique de l'algorithme de karmarkar, qui impliqué une réduction du nombre d'itération et du temps de calcule.

Chapitre 1

Analyse convexe et optimisation

Dans cette partie, nous allons rappeler les plus important résultat d'analyse convexe nécessaire pour le développement de ce travail.

1.1 Ensemble Convexe :

Soit x_1 et x_2 deux vecteurs de R^n, le segment de droite joignant l'extrémité de ces vecteurs est l'ensemble des points :

$$\text{D}=\{x \in R^n; x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, \alpha \in [0,1]\}$$

Définition 1-1 :

Un ensemble C de R^n set dit convexe si : $\forall\ x_1, x_2 \in C, \alpha \in [0,1]$, on a :

$$(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \in C$$

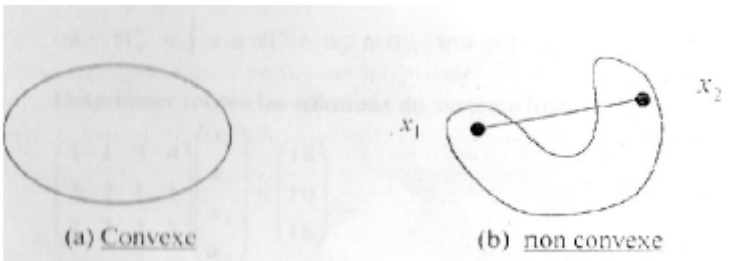

FIGURE 1.1 – Ensemble convexe et non convexe

Exemple 1-1 :

1. Un intervalle $[a, b]$ est convexe dans R.
2. Une réunion disjoint d'intervalles de R n'est pas convexe.

1.1.1 Opération sur l'ensemble convexe :

Stabilité de la convexité par certaines opérations sur les ensembles :

1. Si C_1 et C_2 sont des convexes de R^n, il en est de même de $C_1 \oplus C_2$.
2. Si C_1 est un convexe de R^p, C_2 un convexe de R^q, alors $C_1 \otimes C_2$ est un convexe de $R^P \times R^q$.
3. $(C_i)_{i\in I}$ est une collection de convexes, $\cap_{i\in I} C_i$ est encore convexe.

Définition 1-2 (**Combinaison convexe**) :

On appelle combinaison convexe de m-vecteur de R^n $x_1, ..., x_m$, le point

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m, ou : \alpha_i \geq 0$$

Définition 1-3 :

Soit C un convexe non vide de R^n et $x \in C$; le point x est un extrême (point sommet) si et seulement si : $\forall\ x_1, x_2 \in C; \forall\ \alpha \in]0, 1[$

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \Rightarrow x = x_1 = x_2.$$

Définition 1-4 (**Sous-Espace Affine**) :

Un sous-ensemble non vide $Y \subset X$ set un sous espace affine de X dirigé par F si :

1. F est un sous espace vectoriel de E.
2. Pour tout point A et B dans Y, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ appartient à F.
3. Pour tout point A dans Y et tout vecteurs $\overrightarrow{u}$ dans F, le point $A + \overrightarrow{u}$ appartient à Y.

1.1.2 Polyèdre Convexe Fermé :

Un ensemble convexe de la forme :

$$P = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}/A \in R^{m\times n}, b \in R^m$$

est appelé polyèdre convexe.

1.2 Fonction Convexe :

Définition 1-5 :

Une fonction $f : S \subset R^n \longrightarrow R$ défini sur un ensemble convexe S est dite convexe si et seulement :

$$\forall\ (x, y) \in S^2 : \forall\ \lambda \in [0, 1]$$
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Définition 1-6 (**Domaine D'une Fonction Convexe**) :

Soit $f : S \subset R^n \longrightarrow R$ on appelle domaine de f l'ensemble :

$$domf = \{x \in R^n\,;\, f(x) < +\infty\}$$

cet ensemble est convexe lorsque le domaine de f est non vide, f est dite propre.

Définition 1-7 :

On dit que la fonction $f : S \subset R^n \longrightarrow R$ est strictement convexe si S est convexe et si :

$$\forall\ (x, y) \in S^2 \text{ avec } x \neq y\,;\, \forall\ \lambda \in [0, 1]$$
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Exemple 1-2 :

*$f(x) = \|x\|$ est strictement convexe.

*toute application affine c'est a-dire de la forme :

$$f(x) = (b, x) + B$$

ou b et x sont des éléments de R^n et $B \in R$ est convexe.

Remarque 1-1 :

Une fonction $f : S \subset R^n \longrightarrow R$ défini sur un ensemble convexe S est dite concave si et seulement si : $(-f)$ est convexe.

Proposition 1-1 :

Une fonction $f : S \subset R^n \longrightarrow R$ est convexe si son épigraphe $épi(f)$ est un ensemble convexe de R^{n+1} c'est-a-dire :

f est convexe $\Leftrightarrow épi(f) = \{(x, \alpha) \in R^n \times R/\ f(x) \leq \alpha\} \subseteq R^{n+1}$ est convexe.

Remarque 1-2 :

Si f est fonction affine $(f(x) = c^t x + b/c \in R^n; b \in R)$ alors :

f est a la fois convexe et concave

Définition 1-8 (**Gradient**) :

Soit $f : R^n \to R$ une fonction continue. la fonction notée $\nabla f(x) : R^n \to R$ est appelée le gradient de f est définie par :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$ Elle ne peut pas exister pour certains $x \in R^n$.

Définition 1-9 (**Dérivée directionnelle**) :

Soit $f : R^n \to R$ une fonction continue. soit $x \in R^n$ et $d \in R^n$ la dérivée directionnelle de f en x dans la direction d est donnée par :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha}$$

Définition 1-10 (**Fonction différentiable**) :

Soit $f : R^n \to R$ une fonction continue si pour tout $d \in R^n$, la dérivée directionnelle de f dans la direction d existe, alors la fonction f est dite différentiable.

Théorème 1-1 :

Soit f différentiable sur un ouvert O de R^n et s un convexe de O alors :

1) f est convexe sur s si et seulement si :

$f(x) \geq f(\bar{x}) + < \nabla f(x), x - \bar{x} >$ pour tout $(x, \bar{x}) \in c \times c$....$(*)$.

2) f est strictement convexe sur s si et seulement si l'inégalité $(*)$ est strict des que $\bar{x} \neq x$

3)f est fortement convexe sur s de module s si et seulement si :

$f(x) \geq f(\bar{x}) + < \nabla f(x), x - \bar{x} > + \frac{1}{2} s\|x - \bar{x}\|$; pour tout $(x, \bar{x}) \in c \times c$.

Définition 1-11 (**hessienne**) :

Soit $f : R^n \to R$ une fonction deux fois différentiable. la fonction notée :

$\nabla^2 f(x) : R^n \to R^{n \times n}$ est appelée matrice hessienne ou hessien de f est définie par :

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Théorème 1-2 :

Soit f deux fois différentiable sur un ouvert O alors :

1. f est convexe sur O si est seulement si $\nabla^2 f(x)$ est semi définie positive pour $x \in$ O.
2. si $\nabla^2 f(x)$ est définie positive pour tout $x \in$ O, alors f est strictement convexe sur O.
3. f est fortement convexe sur O de module c si et seulement si la plus petit valeurs propre de $\nabla^2 f(x)$ est minorée sur O par c soit encore :

$$\langle \nabla^2 f(x) d, d \rangle \geq c\|d\|^2, \text{ pour tout } x \in \text{O et tout } d \in R^n.$$

Définition 1-12 (**Direction de descente**) :

Soit $f : R^n \longrightarrow R$ une fonction. Soit $x, d \in R^n$, la direction d est une direction de descente en x si :

$$d^t \nabla f(x) < 0$$

Définition 1-13 (**Espace de Hilbert**) :

Un espace de Hilbert $(H, \langle ., . \rangle)$ sur K est K-espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $(H, \langle ., . \rangle)$ tel que l'espace vectoriel normé $(H, \langle ., . \rangle) = \sqrt{\langle ., . \rangle}$ soit complet. Le rôle de la complétude dans la définition d'un espace de Hilbert est en premier lieu de garantir l'existante d'une projection orthogonale sur les sous-espaces vectoriels de H.

1.3 Optimisation

1.3.1 Problème d'optimisation :

On définit un problème d'optimisation avec contraintes comme suit :

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases}$$

Ou $f : R^n \longrightarrow R$ continue.

$C \subseteq R^n$ ensemble des contraintes.

Si $C = R^n$. (P) est appelé problème d'optimisation sans contraintes.

Solution Réalisable :

Un point $x^* \in C$ (c'est-a-dire vérifiant les contraintes de (P)) est appelé solution réalisable de (P).

Solution optimale globale :

Solution réalisable qui minimise f sur C est appelé solution globale de (P) notons x^*.

Solution optimale locale :

Un point $x^* \in C$ est solution optimale de (P) s'il existe un voisinage v de x^* tel que :

$$f(x^*) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in v$$

1.3.2 Optimisation Sans Contrainte :

Soit le programme non linéaire et non contrainte (PNC)

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in R^n \end{cases}$$

ou la fonction $f(x)$ est au moins deux fois continument différentiables.

1. **Résultat d'existence et unicité :**

   Définition 1-14 :

   On dit que $f : R^n \longrightarrow R$ est coercive si :

   $$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

   Théorème 1-3 (**Existence**) :

   Soit $f : R^n \longrightarrow R \cup \{+\infty\}$ propre, continue et coercive alors (P) admet au moins une solution.

   Théorème 1-4 (**unicité**) :

   Soit $f : R^n \longrightarrow R \cup \{+\infty\}$ strictement convexe alors le problème (P) admet au plus une solution.

2. **Condition D'optimalité :**

   Théorème 1-5 (**Condition Nécessaire d'optimalité du premier ordre**) :

   Soit R^n un espace de Hilbert réel et $f : R^n \longrightarrow R$ une fonction différentiable sur R^n Si x^* réalise un minimum (globale ou locale) de f sur R^n alors :

   $$\nabla f(x^*) = 0$$

   Théorème 1-6 (**Condition Nécessaire Suffisante du premier ordre dans le cas convexe**) :

   Soit $f : R^n \longrightarrow R$ une fonction différentiable et convexe sur R^n, un point x^* réalise un minimum global de f sur R^n si et seulement si :

   $$\nabla f(x^*) = 0$$

Théorème 1-7 (**Condition Nécessaire du second ordre**) :

On suppose que x^* est un minimum (locale) de f et que f est deux fois dérivable sur R^n alors

(a) $\nabla f(x^*) = 0$

(b) $\forall\ x \in R^n \qquad (\nabla^2 f(x^*), x) \geq 0$

Théorème 1-8 (**Condition Suffisante du seconde ordre**) :

Soit f deux fois dérivable sur R^n vérifiant $\nabla f(x^*) = 0$ et $\exists\ \alpha > 0$;

tel que $\forall\ x \in R^n \qquad (\nabla^2 f(x^*)x, x) \geq \alpha(\|x\|)^2$

Alors la fonction f admet un minimum local strict en x^*.

Exemple 1-3 :

Soit la fonction :

$$f(x_1, x_2) = 50x_1^2 - x_2^3$$

illustré le point $(0,0)^t$ vérifie les conditions nécessaires d'optimalité. En effet

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 100x_1 \\ -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

est bien nul en $(0,0)^t$. de plus

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & -6x_2 \end{pmatrix}$$

est semi-défini positif en $(0,0)^t$. Cependant, il ne s'agit pas d'un minimum local. Pour le montre, considérons la direction $d = (0,1)^t$ et avançons d'un pas $\alpha > 0$ quelconque à partir du point $(0,0)^t$

Nous avons

$$0 = f(0,0) > f(0,\alpha) = -\alpha^3$$

et $(0,0)^t$ n'est pas un minimum local. Par contre, si l'on considère la direction $d = (0,-1)^t$, on obtient

$$0 = f(0,0) < f(0,\alpha) = \alpha^3$$

Donc $(0,0)^t$ n'est pas un maximum local non plus. D'un point de vue géométrique la fonction n'est convexe ni concave en $(0,0)^t$.

1.3.3 Optimisation Avec Contrainte :

Le problème avec contrainte et de la forme :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases}$$

1)-**Résultat d'existence et d'unicité :**

Théorème 1-9 (**Existence**) :

Supposons que f est continue, et que C un sous-ensemble fermé non vide de R^n et que l'une des conditions suivantes est réalisée :

(a) Soit C est borné.

(b) Soit f est coersive.

Alors le problème (P) admet au moins un solution.

Théorème 1-10 (**Unicité**) :

Sous les hypothèse du théorème d'existence, si f est strictement convexe et si C est convexe, alors le problème (P) admet une solution unique.

2)-**Condition d'optimalité :**

(a) **Condition D'optimalité du premier ordre :**

Théorème 1-11 (**condition nécessaire du premier ordre**) :

Si f est une fonction différentiable et si C est un convexe fermé, alors toute solution x^* de (P) vérifier la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre :

$$\forall\, x \in C \qquad (\nabla f(x^*), x - x^*) \geq 0$$

Théorème 1-12 (**condition nécessaire et suffisante du premier ordre dans le cas convexe**) :

Supposons f convexe différentiable et C convexe fermé, soit x^* un élément de C la condition précédant est nécessaire et suffisante pour que x^* soit la solution de (P) elle caractérisé donc les minima de f sur C.

i. **Contrainte en égalité :**

Le problème (P) se réduit à :

$$\min f(x), x \in R^n, h(x) = 0$$

avec $h(x) = (h_1(x), ..., h_p(x))$ et h est continue de R^n dans R^p.

Théorème 1-13 (**condition du premier ordre-contrainte égalité**) :

On suppose que :

*f et h sont de classe C^1 sur R^n.

*le problème (P) a une solution x^*.

*les p vecteurs de $R^n : \nabla h_1(x^*, ..., \nabla h_p(x^*))$ sont linéairement indépendant (et donc $p \leq n$) ;

alors il existe p réels $(\lambda_1^*, ..., \lambda_p^*)$ tels que :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* h_j(x^*) = 0$$

ii. **Contrainte en égalité et inégalité** :

Le problème (P) est de la forme :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases}$$

ou $C = \{x \in R^n / h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$.

Définition 1-15 (**Fonction lagrangienne**) :

Soit le problème d'optimisation $\min f(x)$ sous contrainte $h(x) = 0$ et $g(x) \leq 0$ et soient les vecteurs $\lambda \in R^m$ et $\mu \in R^p$. la fonction $L : R^{n+m+p} \longrightarrow R$ définie par :

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \lambda^t h(x) + \mu^t g(x) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(x). \end{aligned}$$

Théorème 1-14 (**Karush-Kuhn-Tucker**) :

Soit x^* un minimum locale du problème $\min_{x\in R^n} f(x)$ sous contrainte $h(x) = 0$ et $g(x) \leq 0$ avec $f : R^n \longrightarrow R$, $h : R^n \longrightarrow R^m$ et $g : R^n \longrightarrow R^p$ continument différentiables si les contraintes sont linéairement indépendantes en x^*, alors il existe un vecteur unique $\lambda^* \in R^m$ et un vecteur unique $\mu^* \in R^p$ tel que :

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$
$$\mu_j^* \geq 0 \qquad j = 1, ..., p.$$
$$\mu_j^*(x^*) = 0 \qquad j = 1, ..., p.$$

ou L est la fonction lagrangienne si f, h, g sont deux fois différentiables alors :

$$y^t \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y \geq 0.$$
$$y^t \nabla h_i(x^*) = 0, \qquad i = 1, ..., m.$$
$$y^t \nabla g_i(x^*) = 0, \qquad i = 1, ..., m. \text{ tel que } g_i(x^*) = 0.$$

(b) **Condition D'optimalité Nécessaire du deuxième ordre** :

Théorème 1-15 :

On suppose que f, h et g sont de classe C^2, que x^* est un minimum locale de f sur C et que la condition de la définition est vérifier.

Alors il existe $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_p^*) \in R^p$ et $\mu^* = (\mu_1^*, ..., \mu_p^*) \in R^q$ tels que :

les relation de kkt sont satisfait et pour tout direction $d \in R^n$ vérifiant :

$$(\nabla h_i(x^*), d) = 0 \qquad \text{pour } i = 1, ..., p.$$
$$(\nabla g_j(x^*), d) = 0 \qquad \text{pour } j \in I^+(x^*).$$
$$(\nabla g_j(x^*), d) \leq 0 \qquad \text{pour } j \in I(x^*)/I^+(x^*).$$

Ou :

$$I^+(x^*) = \{1 \leq j \leq q / g_i(x^*) = 0 \text{ et } \mu_j^* > 0\}$$

On a :

$$(\nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d, d) \geq 0$$

$\nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ désignant la dérivées seconde de L au point (x, λ, μ).

Exemple1-4 :

$$\begin{cases} \min f(x) = x^2 \\ g(x) = 2x + 5 \leq 0 \end{cases}$$

$L(x, \lambda) = x^2 + \lambda(2x + 5)$

L convexe en (x).

Donc minimum atteint lorsque $\nabla_x L(\lambda, x) = 0$

$\nabla_x L(\lambda, x) = 2x + 2\lambda = 0 \Longleftrightarrow x = -\lambda$

$2x + 5 = -2\lambda + 5 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \dfrac{5}{2}$ donc $x = -\lambda = -\dfrac{5}{2}$

$\lambda = \dfrac{5}{2} \geq 0$

$2x + 5 = 0 \Longleftrightarrow (2x + 5)\lambda = 0$

1.4 Programmation linéaire

La programmation linéaire peut se définir comme une technique mathématique permettant de résoudre les problèmes de décisions, particulièrement, ceux où le décideur cherche la meilleur utilisation de ressources pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts. Elle est utilisée en particulier, dans l'industrie et dans la planification économique ...etc.

1.4.1 La forme canonique d'un programmation linéaire :

Notons par A une matrice $(m \times n)$ des $a_{ij}, b \in R_m, c$ et $x \in R^n$

$$\begin{cases} \max Z & = & \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_j, & \forall i = 1, ..., m \\ x_j & \geq & 0, & \forall, j = 1, ..., n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max Z & = & c^t x \\ Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{cases}$$

1.4.2 La forme standard d'un programmation linéaire :

$$\begin{cases} \max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \forall i = 1, ..., n \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j, & \forall i = 1, ..., m \\ x_j \geq 0, & \forall, j = 1, ..., n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \max Z = c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Ou : $x \in R^n, b \in R^m, c \in R^n \backslash \{0\}, A(m \times n)$ matrice réelle

Remarque 1-3 :

1. On peut vérifiée facilement l'équivalence entre les deux formes précédentes. En effet, toute inégalité peut être transformé en une égalité par une addition d'une variable positive, dit variable d'écart comme suit :

$$a_i^t x \leq b_i \Longrightarrow a_i^t x + e_i = b_i \qquad e_i \geq 0$$

Et tout égalité équivaux deux inégalité comme suit :

$$a_i^t x = b_i \Longleftrightarrow \begin{cases} -a_i^t x \leq b_i \\ a_i^t x \leq -b_i \end{cases}$$

2. Pour trouver une solution optimale x^* d'un problème de minimisation, il suffit de multiplier la fonction objectif Z par (-1), prendre $\max z = -\min(z)$ et la valeur optimal s'obtient par : $\max z(x^*) = -\min(z(x^*))$.

1.4.3 La dualité en programmation linéaire :

A chaque programme linéaire est associé un autre programme linéaire appelé dual. le dual (D) du programme linéaire (P) est :

$$\begin{cases} \max b^t y \\ A^t y \leq c \end{cases}$$

A partir de la relation primale-dual définie pour la forme standard, il est possible de retrouver le programme linéaire non formulés sous cette forme par exemple le duale du programme suivante :

$$(\mathrm{P}) = \begin{cases} \min c^t x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow (\mathrm{D}) = \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Les solutions des programmes primal et dual sont liée par les proposition de la dualité faible et forte.

Proposition 1-2 (**Dualité faible**) :

Si x est primal réalisable et y est dual réalisable alors :

$$b^t y \leq c^t x$$

Proposition 1-3 (**Dualité forte**) :

Si x est primal pour le programme primal, alors le programme dual a une solution optimal tell que :

$$b^t y = c^t x$$

Exemple 1-6 (**Le dual du programme linéaire**) :

Soit le problème d'optimisation linéaire :

$$\min x_1 + 2x_2 + 3x_3.$$

sous contraintes :

$$\begin{gathered} -x_1 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_3 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \leq 0 \\ x_3 \in R \end{gathered}$$

le problème dual est :

$$\max 5y_1 + 6y_2 + 4y_3$$

sous contraintes :

$$y_1 \in R$$
$$y_2 \geq 0$$
$$y_3 \leq 0$$
$$-y_1 + 2y_2 \leq 1$$
$$3y_1 - y_2 \geq 2$$
$$3y_2 + y_3 = 3$$

c'est également un problème linéaire écrivons le comme un problème de minimisation et reconomons les variables x.

$$\min -5x_1 - 6x_2 - 4x_3$$

sous contraintes :

$$x_1 \in R$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \leq 0$$
$$x_1 - 2x_2 \leq -1$$
$$-x_1 + x_2 \geq -2$$
$$-3x_2 - x_3 = -3$$

on peut calculer sont dual :

$$\max -y_1 - 2y_2 - 3y_3.$$

sous contraintes :

$$y_1 - 3y_3 = -5$$
$$-2y_1 + y_2 - 3y_3 \geq -6$$
$$-y_3 \leq -4$$
$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \leq 0$$
$$y_3 \in R$$

il est triviale de vérifier que ce problème est équivalent au problème de départ.

Chapitre 2

Méthode De Karmarkar

Introduction :

En 1984, l'algorithme de Karmarkar a été annoncé comme la première méthode de programmation linéaire dont la complexité est polynomiale. Cette méthode utilise uniquement le domaine primal sans faire référence au problème dual ni aux variables duales.
A chaque itération, l'algorithme exécute une transformation projective de l'espace admissible qui fait que l'itéré courant $\bar{x}$ le centre de l'ensemble projeté dans lequel une direction de descente est ensuite calculée.

2.1 Préliminaires

2.1.1 Minimisation d'une fonction linéaire sur un ellipsoïde

Considérons le problème suivant :

$$(0) \begin{cases} \min c^t x \\ x \in E \end{cases}$$

Ou $x, c \in R^n$ et E un ellipsoïde défini par son centre a^0, par r et la matrice symétrique définie positive A.

Algébriquement : $E = \{x \in R^n : (x - a^0)^t A(x - a^0) \leq r^2\}$

Lemme 2-1 :

La solution du problème (0) est donnée par :

$$x^* = a^0 - \frac{A^{-1}cr}{\sqrt{< c, A^{-1}c >}}$$

Preuve :

En posant $y = x - a^0$, le problème revient à résoudre :

$$(0') \begin{cases} \min c^t y \\ y^t A y \leq r^2 \end{cases}$$

En écrivant les condition d'optimisation en programmation convexe, y^* est solution de $(0')$ si et seulement si, il existe un réel $\lambda^* \geq 0$ tel que :

$$\begin{cases} c + \lambda^* A y^* & = & 0 \\ \lambda^* (y^{*^t} A y^* - r^2) & = & 0 \end{cases}$$

On en déduit : $\lambda^* > 0, \qquad y^* = (\frac{-1}{\lambda^*}) A^{-1}c, \qquad y^{*^t} A y^* = r^2 \qquad$ et donc $\frac{1}{\lambda^{*^2}} c^t A^{-1} c = r^2$

$$\text{puis } y^* = -\frac{A^{-1}cr}{\sqrt{c^t A^{-1} c}} \Rightarrow x^* = a^0 - \frac{A^{-1}cr}{\sqrt{c^t A^{-1} c}}$$

Cas particulier du lemme 2-1 :

Si l'ellipsoïde E est réduit à une sphère $(A = I)$alors la solution de (0) est :

$x^* = a^0 - \frac{c}{\|c\|} r$

Autrement dit il suffit de se déplacer (figure 2-1) à partir du centre a^0 dans la direction opposée du vecteur cout (i.e : -c) d'une distance égale au rayon r de la sphère .

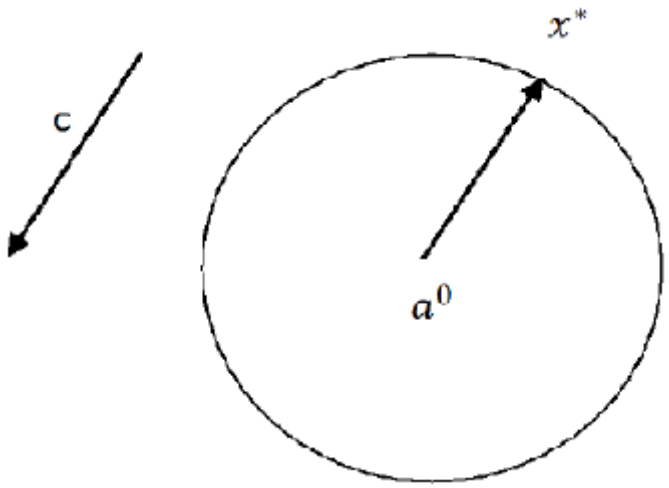

FIGURE 2.1 –

2.1.2 L'idée générale de l'algorithme :

Soit A un élément de $R^{m\times n}, b \in R^m$ et $c \in R^n$ et posons par définition :

$\Omega = \{x \in R^n : Ax = b\}$

$P = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\} = \Omega \cap R^n_+$, ou R^n_+ désigne l'orthant positif .

Considérons alors le programme linéaire général :

$$(\text{p.l.g}) \begin{cases} \min c^t x \\ x \in P \end{cases}$$

Si l'on remplace R^n_+ par une sphère (ou un ellipsoïde) $E_1 \subset R^n_+$ on obtient le problème :

$$(1) \begin{cases} \min c^t x \\ x \in \Omega \cap E_1 \end{cases}$$

Or, l'intersection d'une sphère et d'une espace affine est une sphère de dimension plus petite dans cet espace affine, donc $(\Omega \cap E_1 = E_2)$. le problème devient :

$$(2) \begin{cases} \min c'^t x \\ x \in E_2 \end{cases}$$

c' désigne la projection orthogonale de c sur Ω

D'après ce qui précède, le problème (2) est trivial : il suffit de se déplacer à partir du centre de E_2 dans la direction $(-c')$ d'une distance égal au rayon de E_2.

Finalement, tout revient à remplacer P par un ellipsoïde (ou une sphère) E de centre a^0

$(a^0 \in P : a_i^0 > 0, i = 1, ..., n)$ et minimiser $c^t x$ sur E au lieu de P. la question est donc de savoir quelle sera qualité de la solution obtenue comparée à la solution réelle du problème. Pour donner une réponse à la question on construit un deuxième ellipsoïde E' contenant P de même centre que E et de rayon égal à μ fois le rayon de E $(E \subset P \subset E'), \mu$ étant un réel strictement plus grand que 1

Notons par $f_E = f(a^1), f_P = f(x_P)$ et $f_{E'} = f(x_{E'})$ les minima de $f(x) = c^t x$ sur E, P et E' respectivement.

On a alors le résultat suivant :

Lemme 2-2 :

$$0 \leq \frac{f_E - f_P}{f(a^0) - f_P} \leq 1 - \frac{1}{\mu}$$

Preuve :

On a évidemment $f_{E'} \leq f_P \leq f_E \Rightarrow f(a^0) - f_E \leq f(a^0) - f_P \leq f(a^0) - f_{E'}$

Comme f est linéaire f_E et $f_{E'}$ sont colinéaires et on a en particulier :

$f(a^0) - f_{E'} = \mu[f(a^0) - f_E]$ d'où

$$f(a^0) - f_P \leq \mu[f(a^0) - f_E] \Rightarrow \frac{f(a^0) - f_E}{f(a^0) - f_P} \geq \frac{1}{\mu} \Rightarrow 0 \leq \frac{f_E - f_P}{f(a^0) - f_P} \leq 1 - \frac{1}{\mu}.$$

2.2 Description De La Méthode :

Nous nous intéressons présentement le problème linéaire sous la forme standards suivante :

$$(\text{LP}) \begin{cases} \min c^t x = z^* \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Avec $A \in R^{n \times m}, b \in R^m, c \in R^n$.

Pour résoudre (LP) en utilisant une méthode projective.

Les méthodes projectives comme dans **Karmarkar**, s'appliquent essentiellement à des problème mis sous une forme assez particulière du type :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ x \in \Omega_n \cap \Delta_n. \end{cases}$$

ou Ω_n est un sous-espace vectoriel de R^n, $c, x \in R^n$ et Δ_n le simplexe standard de R^n
On a :

$$\Delta_n = \{x \in R^n, e^t x = n, x \geq 0\}$$

on considère donc la définition suivante :

Définition 2-1 :
Nous dirons qu'un problème linéaire à variable dans R^n est sous forme canonique de **Karmarkar** si l'ensemble des solutions réalisables est l'intersection d'un sous-espace vectoriel et du simplexe standard dans R^n.
considérons

$$\Omega_n = \{x \in R^n / Ax = 0\}$$

Dans un premier temps. supposons que la valeur optimale z^* est connue.
c'est d'ailleurs dans ce contexte que **Karmarkar** a construit le premier algorithme projectif qui est à la base de cette classe d'algorithmes.

2.2.1 La valeur optimal de (LP)est connue :

Dans ce cadre nous supposer que :

1. $\bar{P} = \{x \in R^n / Ax = b, x > 0\} \neq \emptyset$, c'est-à-dire :
   $\exists\ a^0 > 0$ tel que $Aa^0 = b$.
2. La valeur optimale z^* est connue.

L'application d'un algorithme projective à (LP) nécessite sa transformation en un problème sous forme canonique de **Karmarkar**. Le terme projective attribué à cette classe d'algorithme provient du fait qu'il utilisent à chaque itération une transformation projective. Pour transformer le problème linéaire (LP) en un problème sous la forme canonique de **Karmarkar**, on peut utiliser la méthode suivant :

2.2.2 Transformation de (LP) en une forme canonique de Karmarkar :

Considérons donc le problème (LP). D'après l'hypothèse (1) il existe un point a^0 dans $\bar{P}$.

Posons :

$$D = diag(a_i^0), \qquad i = 1, ..., n.$$

Considérons le simplexe standard de R^{n+1} suivant :

$$\Delta_{n+1} = \{\bar{x} \in R^{n+1} / e^t \bar{x} = n + 1, \bar{x} \geq 0\}$$

Puisque $a_i^0 > 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$. alors la matrice D est inversible et on peut définir la transformation suivante :

$$\begin{array}{rcl} T : R_{++}^n & \longrightarrow & \Delta_{n+1} \\ x & \longmapsto & \bar{x} = T(x) \end{array}$$

tels que :

$$\bar{x}[n] = \frac{(n+1)D^{-1}x}{1 + e^t D^{-1} x} \qquad et \qquad \bar{x}_{n+1} = \frac{n+1}{1 + e^t D^{-1} x} \tag{2.1}$$

ou $\bar{x}[n]$ est un vecteur de R^{n+1} constitué des n premières composantes de $\bar{x}$.

Les égalités (2.1) donnent :

$$x = \frac{D\bar{x}[n]}{\bar{x}_{n+1}} \tag{2.2}$$

Par conséquent l'équation $Ax = b$ peut s'écrire :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i a_i^0 \bar{x}_i}{\bar{x}_{n+1}} = b$$

Soit :

$$\sum_{i=1}^{n} A_i a_i^0 \bar{x}_i - b\bar{x}_{n+1} = 0 \tag{2.3}$$

avec A_i désignant le $i^{ème}$ vecteur colonne la matrice A.

En posant :

$$\bar{A}_i = a_i^0 A_i; i = 1, ..., n, \qquad et \qquad \bar{A}_{n+1} = -b. \tag{2.4}$$

Autrement dit $\bar{A} = (AD, -b)$ alors (2.3) s'écrit $\bar{A}\bar{x} = 0$, en plus on a $e^t\bar{x} = n + 1$. comme z^* est la valeur optimale de (LP) alors :

$$\forall\ x \in P = \{x \in R^n / Ax = b, x \geq 0\} \text{ on a : } c^t x \geq z^*$$

qu'on peut encore écrire en fonction de $\bar{x}$:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i a_i^0 \bar{x}_i}{\bar{x}_{n+1}} \geq z^*$$

Autrement dit

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i \bar{x}_i \geq 0$$

avec :

$$\bar{c}_i = a_i^0 c_i; i = 1, ..., n \qquad et \qquad \bar{c}_{n+1} = -z^* \tag{2.5}$$

ou encore

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} Dc \\ -z^* \end{pmatrix}$$

Ainsi le problème (LP) est transformer en (PCK) ci-dessous qui est sous la forme canonique de **Karmarkar**.

$$(\text{PCK}) \begin{cases} \min \bar{c}^t \bar{x} = 0 \\ \bar{A}\bar{x} = 0, e^t\bar{x} = n + 1 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

avec $\bar{A} \in R^{m\times(n+1)}$ et e, $\bar{c} \in R^{n+1}$.

Il est important de signaler que le point e est réalisable pour le problème auxiliaire (PCK). On a donc un point initial évident.

Remarque 2-1 :

La résolution de (PCK) implique celle de (LP) car si $\bar{x}^*$ est solution optimale de (PCK) avec $\bar{x}^*_{n+1} > 0$, le point $x^* = \dfrac{D\bar{x}^*[n]}{\bar{x}^*_{n+1}}$ est une solution optimale de (LP).

Nous nous intéressons à présent à la résolution du problème (PCK).

2.2.3 Résolution du problème auxiliaire (PCK) :

Considérons donc le problème (PCK). Pour le résoudre, on génère une suite de points $\bar{x}^k$ en démarrant d'un point initial donné. Étant donné que le point e est réalisable, il est naturel de le prendre comme point de départ.

Pour construire la suite $\bar{x}^k$ les méthodes projectives procèdent de la façon suivante :

1. **Description d'une itération des méthodes projectives :**

   Le point $\bar{x}^k$ étant donné. à l'itération $(k+1)$ on considéré la transformation projective :

$$\begin{aligned} T_k : R_+^{n+1} &\longrightarrow \Delta_{n+1} \\ \bar{x} &\longmapsto y = T_k(\bar{x}) \end{aligned}$$

   tels que :

$$y = \frac{(n+1)D_k^{-1}\bar{x}}{e^t D_k^{-1}\bar{x}} \tag{2.6}$$

   Avec

$$D_k = diag(\bar{x}_i^k)\,; \qquad i = 1, ..., n+1$$

   qui est évidemment inversible puisque $\bar{x}^k$ est strictement positif. On peut aussi définir l'application inverse de T_k par :

$$T_k^{-1}(y) = \bar{x} = \frac{(n+1)D_k y}{e^t D_k y} \tag{2.7}$$

   On remarque que $T_k(\bar{x}) = e$.

   Le transformé de (PCK) par T_k est un problème fractionnaire équivalent au problème linéaire suivant :

$$(\text{PL1}) \begin{cases} \min \bar{c}^t y \\ \bar{A}_k y = 0, e^t y = n+1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

   ou $\bar{A}_k = \bar{A}D_k \in R^{m\times(n+1)}$, $\bar{c}^k = D_k\bar{c} \in R^{n+1}$.

La résolution de ce problème est aussi difficile que le problème initiale lui même, ainsi pour simplifier la tache on considère un sous problème dont la résolution est immédiate et qui consiste à se restreindre à une sphère de centre e et de rayon $\beta > 0$ contenue dans le domaine réalisable de (PL1). Ce qui nous conduit à prendre $\beta < r = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$.

Car on montre facilement que la plus grande sphère de centre e contenue dans le simplexe standard Δ_{n+1} a pour rayon $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$.

On considère donc un problème auxiliaire du type :

$$(\text{Paux}) \begin{cases} \min \bar{c}^t D_k y \\ \bar{A}_k y = 0, e^t y = n+1 \\ \parallel e - y \parallel \leq \beta \end{cases}$$

On notera que $e^t y = n+1$ et $\parallel e - y \parallel \leq \beta$ impliquent que $y \geq 0$.

Les conditions nécessaire et suffisantes permettent d'obtenir la solution $y(\beta)$ de (Paux).

On a :

$$y(\beta) = e - \beta \frac{\bar{d}^k}{\parallel \bar{d}^k \parallel} \tag{2.8}$$

Avec :

$$\bar{d}^k = P_{B_k} \bar{c}^k, \text{ ou } B_k = \begin{pmatrix} \bar{A}_k \\ e^t \end{pmatrix}$$

La matrice P_{B_k} désigne la projection orthogonale sur le noyau de B_k.

Comme nous avons supposé que la matrice A est de rang maximal, il en est de même pour $\bar{A}$ et $\bar{A}_k$. Étant donné que $\bar{A}_k e = 0$, alors B_k aussi est de rang maximal.

On obtient par conséquent la formule :

$$P_{B_k} = I - B_k^t (B_k B_k^t)^{-1} B_k = P_{\bar{A}_k} - \frac{1}{n+1} e e^t \tag{2.9}$$

On note que $\parallel e - y(\beta) \parallel = \beta < r$, et donc $y(\beta) > 0$.

Étant donné donc $y(\beta)$, on considère son image par la transformation inverse de T_k et on obtient $\bar{x}^{k+1}$:

$$\bar{x}^{k+1} = \frac{(n+1) D_k y(\beta)}{e^t D_k y(\beta)} \tag{2.10}$$

Et ainsi de suite jusqu'à la vérification du critère d'arrêt considéré. On peut alors écrire l'algorithme suivant :

2. **Algorithme projective : Karmarkar**

Début

$\beta > 0$ donné, $\bar{x}^0 = e$

$k = 0$

Tant que $\bar{c}^t \bar{x}^k > \varepsilon$ **faire**

Etape 1

$$D_k = diag(\bar{x}_i^k), \qquad i = 1, ..., n+1$$

$$\bar{A}_k = \bar{A} D_k \bar{c}^k = D_k \bar{c}$$

$$B_k = \begin{pmatrix} \bar{A}_k \\ e^t \end{pmatrix}$$

Etape 2 Direction de déplacement

$$\bar{d}^k = P_{B_k} \bar{c}^k \text{ avec}$$

$$P_{B_k} = I - B_k^t (B_k B_k^t)^{-1} B_k.$$

Etape 3 calcul de l'itéré suivant

$$y(\beta) = e - \beta \frac{\bar{d}^k}{\| \bar{d}^k \|}$$

$$\bar{x}^{k+1} = \frac{(n+1) D_k y(\beta)}{e^t D_k y(\beta)}$$

$$k = k + 1$$

Fin tant que

Fin.

La polynomialité de cet algorithme a été montrée pour la première fois par **Karmarkar** pour des valeurs de β petites. Il a considéré $\beta = \alpha\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ avec constant tel que $\alpha \in]0;1[$. Nous donnons ici un aperçu très succinct de la façon dont cette polynomiale a été montrée.

2.2.4 Convergence polynomiale de l'algorithme :

pour montrer la convergence polynomiale de cet algorithme, on considère la fonction potentielle ci-dessous introduite pour la première fois dans **Karmarkar**

$$g_{n+1}(\bar{x}) = (n+1)\ln \bar{c}^t\bar{x} - \sum_{i=1}^{n+1} \ln \bar{x}_i$$

Remarque 2-2 :
La direction de déplacement utilisée dans l'algorithme est colinéaire à celle du gradient projetée sur le noyau de B_k de la fonction $\bar{g}_{n+1}$ définie par :

$$\bar{g}_{n+1}(y) = (n+1)\ln \bar{c}^t D_k y - \sum_{i=1}^{n+1} \ln y_i$$

déduit de la fonction potentielle g_{n+1} à l'aide d'une transformation affine.
En effet on a :

$$\nabla \bar{g}_{n+1}(e) = \frac{n+1}{\bar{c}^{k^t} e}\bar{c}^k - e$$

Comme la matrice A est de rang maximal, il en est de même pour $\bar{A}_k$. En plus on a : $\bar{A}_k e = 0$ donc B_k est aussi de rang maximal.
On a $P_{B_k} = P_{e^t} \circ P_{\bar{A}_k} = P_{\bar{A}_k} \circ P_{e^t}$, $P_{B_k} e = 0$. Ainsi on obtient :

$$P_{B_k}\nabla \bar{g}_{n+1}(e) = \frac{n+1}{\bar{c}^{k^t} e} P_{B_k}\bar{c}^k$$

Propriétés de la fonction potentielle :

1. g_{n+1} est positivement homogène de degré zéro c'est-à-dire :

$$g_{n+1}(\lambda\bar{x}) = \lambda g_{n+1}(\bar{x}) \qquad \forall\ \bar{x} \in \Omega_{n+1} \cap \Delta_{n+1} \text{ et } \forall\ \lambda > 0$$

2. Soient $a^0 > 0 \in R^{n+1}$, $D = diag(a_i^0)$, $i = 1, ..., n+1$ et $y = \frac{(n+1)D^{-1}\bar{x}}{e^t D^{-1}\bar{x}}$ pour $\bar{x} \in \Omega_{n+1} \cap \Delta_{n+1}$

Alors la fonction

$$\bar{g}_{n+1}(y) = (n+1)\ln \bar{c}^t D y - \sum_{i=1}^{n+1} \ln y_i$$

est telle que $\bar{g}_{n+1}(y) = g_{n+1}(\bar{x}) + \ln detD$.

3. Une conséquence directe de la deuxième propriété est que toute réduction la fonction $\bar{g}_{n+1}$ dans l'espace transformé par T_k entraine la même réduction de g_{n+1} dans l'espace original et réciproquement.

   Autrement dit on a :

$$\forall\ \delta > 0 \text{ si } y = T_k(\bar{x}) \text{ et } y^k = T_k(\bar{x}^k),$$

   alors

$$\bar{g}_{n+1}(y) \leq g_{n+1}(y^k) - \delta \Leftrightarrow g_{n+1}(\bar{x}) \leq g_{n+1}(\bar{x}^k) - \delta.$$

Lemme 2-3 :

Soient $0 < \beta < 1$ et $y \in R^{n+1}$ tels que $\| y - e \| = \beta < 1$ et $e^t y = n+1$.

Alors

$$-\sum_{i=1}^{n+1} \ln y_i \leq \frac{\beta^2}{2(1-\beta)^2}$$

Démonstration :

Soit donc $y \in R^{n+1}$ tels que $\| y - e \| = \beta < 1$ et $e^t y = n+1$ on a $y > 0$ et :

$$\begin{aligned} \ln y_i = \ln(1 + y_i - 1) &= (y_i - 1) - \frac{(y_i-1)^2}{2} + \frac{(y_i-1)^3}{3} - \frac{(y_i-1)^4}{4} + ... \\ &\geq (y_i - 1) - \frac{(y_i-1)^2}{2}[1 + \mid y_i - 1 \mid + \mid y_i - 1 \mid^2 + ...] \\ &= (y_i - 1) - \frac{(y_i-1)^2}{2} \times \frac{1}{1 - \mid y_i - 1 \mid}. \end{aligned}$$

En faisant la somme pour $i = 1, ..., n+1$ on obtient :

$$-\sum_{i=1}^{n+1} \ln y_i \leq (e^t y - (n+1)) + \frac{\| y - e \|^2}{2(1-\beta)}$$

et donc :

$$-\sum_{i=1}^{n+1} \ln y_i \leq (e^t y - (n+1)) + \frac{\beta^2}{2(1-\beta)^2}$$

Puisque $e^t y = n+1$ on a le résultat .

Lemme 2-4 :

$\exists\ i_0 \in \{1, ..., n+1\}$ tel que $(P_{\bar{A}_k}\bar{c}^k)_{i_0} \leq 0$.

Démonstration :

Soit $\bar{x}^*$ la solution optimale de (PCK).

On sait que $\bar{x}^* \geq 0$ et $\bar{c}^t\bar{x}^* = 0$

Donc

$$c^t D_k D_k^{-1}\bar{x}^* = 0$$

En posant

$$y^* = D_k^{-1}\bar{x^*}$$

on a $y^* \geq 0$, $\bar{c}^{k^t} y^* = 0$ et $\bar{A}_k y^* = 0$.

Donc

$$\bar{c}^{k^t} y^* = \bar{c}^{k^t} P_{\bar{A}_k} y^*.$$

Ce qui implique que

$$\bar{c}^{k^t} P_{\bar{A}_k} y^* = 0.$$

Et puisque $y^* \geq 0$ on ne peut pas avoir $P_{\bar{A}_k}\bar{c}^k > 0$ et donc il existe nécessairement un i_0 dans $\{1, ..., n+1\}$ tel que $(P_{\bar{A}_k}\bar{c}^k)i_0 \leq 0$.

Proposition 2-1 :

Si $y(\beta)$ est la solution optimale du problème (PL1), on a :

$$\bar{g}_{n+1}(y(\beta)) \leq \bar{g}_{n+1}(e) - \delta(\beta).$$

Et donc

$$\forall\ \text{k}\ g_{n+1}(\bar{x}^{k+1}) \leq g_{n+1}(\bar{x}^k) - \delta(\beta)$$

avec $\delta(\beta) = \beta - \dfrac{\beta^2}{2(1-\beta)}$.

En autre $\delta(\beta) > 0$ si $0 < \beta < \frac{2}{3}$. la plus grande valeur de δ est obtenue pour $\beta_{opt} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ et on a $\delta(\beta_{opt}) = 0.268$.

Démonstration

D'après le lemme (2-4) nous avons qu'il existe un indice i_0 tel que $(P_{\bar{A}_k}\bar{c}^k)_{i_0} \leq 0$.

On a $P_{B_k} = P_{\bar{A}_k} \circ P_{e^t}$ et donc $P_{B_k}\bar{c}^k = P_{\bar{A}_k}\bar{c}^k - \dfrac{\bar{c}^{k^t}e}{n+1}e$

Comme $\|P_{B_k}\bar{c}^k\| \geq |\ (P_{B_k}\bar{c}^k)_{i_0}\ | = |\ (P_{A_k}\bar{c}^k)_{i_0} - \dfrac{\bar{c}^{k^t}e}{n+1}\ |$

alors $\|P_{B_k}\bar{c}^k\| \geq \dfrac{\bar{c}^{k^t}e}{n+1}$ Et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\bar{c}^{k^t}y(\beta) &= \bar{c}^{k^t}e - \beta\frac{P_{B_{k^t}}\bar{c}^{k^t}\bar{c}^k}{\|P_{B_k}\bar{c}^k\|} \\
&= \bar{c}^{k^t}e - \beta\|P_{B_k}\bar{c}^k\| \\
&\leq (1 - \frac{\beta}{n+1})\bar{c}^{k^t}e \\
\bar{g}_{n+1}(y(\beta)) - \bar{g}_{n+1}(e) &= (n+1)\ln\bar{c}^{k^t}y(\beta) - \sum_{i=1}^{n+1}\ln y_i(\beta) - (n+1)\ln\bar{c}^{k^t}e \\
&= (n+1)\ln\frac{\bar{c}^{k^t}y(\beta)}{\bar{c}^{k^t}e} - \sum_{i=1}^{n+1}\ln y_i(\beta) \\
&\leq (n+1)\ln(1 - \frac{\beta}{n+1}) - \sum_{i=1}^{n+1}\ln y_i(\beta) \\
&\leq -\beta - \sum_{i=1}^{n+1}\ln y_i(\beta)
\end{aligned}$$

Le lemme (2-3) nous permet d'écrire :

$$\bar{g}_{n+1}(y(\beta)) - \bar{g}_{n+1}(e) \leq -\beta + \frac{\beta^2}{2(1-\beta)}$$

Ou encore .

$$\bar{g}_{n+1}(y(\beta)) \leq \bar{g}_{n+1}(e) - (\beta + \frac{\beta^2}{2(1-\beta)})$$

En étudiant la fonction $\xi(t) = t - \dfrac{t^2}{2(1-t)}$ définie sur $]0:1[$, on a les autres résultat .
De la propriété (3) on déduit que :

$$\forall \text{ k } g_{n+1}(\bar{x}^{k+1}) \leq g_{n+1}(\bar{x}^k) - \delta(\beta) \qquad \text{avec} \qquad \delta(\beta) = \beta - \frac{\beta^2}{2(1-\beta)} \qquad (*)$$

On peut essayer d'améliorer ces résultats en cherchant une meilleure majoration de la quantité $-\sum_{i=1}^{n+1} \ln y_i$ pour cela, on est amené à considérer le problème ci - dessous :

$$(Q)\begin{cases} \theta(\beta) &= \sup_y -\sum_{i=1}^{n} \ln(1-y_i) \\ e^t y &= 0, \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 \leq \beta^2 \end{cases}$$

Avec β vérifiant $0 < \beta < \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$
Le problème (Q) s'écrit :

$$(Q')\begin{cases} -\theta(\beta) &= \inf_y -\sum_{i=1}^{n+1} \ln(1-y_i) \\ e^t y &= 0, \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 \leq \beta^2 \end{cases}$$

Proposition 2-2 :

pour $0 < \beta < \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ on a :

$$-\theta(\beta) = \min_{P\in\{1,2,\ldots,n\}} \left[P \ln\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{n+1}{P} - 1}\right) \right.$$

$$\left. +(n+1-P)\ln\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{n+1}{n+1-P} - 1}\right)\right]$$

Démonstration

Considérons le problème (Q'). Les conditions

$$\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 \leq \beta^2 < \frac{n+1}{n} \qquad \text{et} \qquad e^t y = 0.$$

Impliquent qu'il exit $\bar{\gamma} > 0$ tel que $1 - y_i \geq \bar{\gamma}$ pour tout i (car le vecteur $e - y$ est strictement compris dans le simplexe Δ_{n+1}), la fonction objectif est donc bien définie. On a un problème de minimisation d'une fonction concave sur un convexe compact. Il admet alors des solution optimales qui sont sur la fonction relative du domaine réalisable.

Ce qui implique que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \bar{y}_i^2 = \beta^2$$

Si $\bar{y}$ est une solution optimale. Donc les solution de (Q') sont celles du problème ci-dessous

$$(Q_{aux}) \begin{cases} -\theta(\beta) &= \inf_y - \sum_{i=1}^{n+1} \ln(1-y_i) \\ e^t y &= 0, \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = \beta^2 \end{cases}$$

Si $\bar{y}$ est une solution optimale de (Q_{aux}), d'après les conditions nécessaires d'optimalité, il existe μ et λ deux réels tels que :

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{1-\bar{y}_i} + \mu + \lambda \bar{y}_i = 0 \qquad i = 1, ..., n+1 & (1) \\ e^t \bar{y} = 0 & (2) \\ \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = \beta^2 & (3) \end{cases}$$

L'équation (1) implique que :

$$\lambda \bar{y_i^2} - (\lambda - \mu)\bar{y}_i + 1 - \mu = 0, \qquad i = 1, ..., = n+1 \tag{4}$$

Supposons $\lambda = 0$, Alors nécessairement $\mu \neq 0$. Ainsi l'équation (4) nous donne

$$\bar{y}_i = \frac{\mu - 1}{\mu}, \qquad i = 1, ..., n+1$$

Comme $\sum_{i=1}^{n+1} \bar{y}_i = 0$. On obtient $\mu = 1$ et donc $\bar{y}_i = 0, \qquad i = 1, ..., n+1$.
Dans ce cas, $\theta(\beta) = 0$ qui n'est bien sur pas la valeur minimale de $-\theta(\beta)$ sur le domaine considéré dans (Q_{aux}) : et donc on a $\lambda \neq 0$. En conséquence, on a :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \bar{y}_i = \beta^2 \tag{5}$$

L'équation du second degré en $\bar{y}_i(4)$ admet alors deux racines r_1 et r_2. Ainsi pour tout $i \in \{1, ..., n+1\}, \bar{y}_i$ est égal soit à r_1 soit à r_2.
Alors d'après les équations (2) et (5) on a :

$$\begin{cases} Pr_1 + (n+1-P)r_2 = 0 & (6) \\ Pr_1^2 + (n+1-P)r_2^2 = \beta^2 & (7) \end{cases}$$

ou P est le nombre des $\bar{y}_i$ égaux à r_1

On ne peut pas avoir $P = 0$ ou $P = n + 1$, car dans les deux cas on aurait $\bar{y} = 0$ comme précédemment.

De ce système, on tire facilement les solution suivantes :

$$r_1 = -\frac{\beta}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{n+1}{P} - 1} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{\beta}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{n+1}{n+1-P} - 1}$$

Alors l'optimum de (Q_{aux}) et donc de (Q') est tel que :

$$-\theta(\beta) = \min_{P\in\{1,2,\ldots,n\}}[P\ln(1-r_1) + (n+1-P)\ln(1-r_2)]$$

Ce qui prouve la proposition $(*)$

De cette proposition, on déduit que :

$$-\sum_{i=1}^{n+1}\ln y_i \leq \theta(\beta) \qquad \forall\beta : 0 < \beta < \sqrt{\frac{n+1}{n}} \tag{2.11}$$

Proposition 2-3 :

si $y(\beta)$ est la solution optimale du problème (PL1)

Alors on a :

$$\bar{g}_{n+1}(y(\beta)) \leq \bar{g}_{n+1}(e) - \bar{\delta}(\beta)$$

$$\forall \text{ k} \qquad g_{n+1}(\bar{x}^{k+1}) \leq \bar{g}_{n+1}(\bar{x}^k) - \bar{\delta}(\beta)$$

Ou

$$\bar{\delta}(\beta) = \beta + \min_{P\in\{1,2,\ldots,n\}}\left[P\ln\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{n+1}{P} - 1}\right) + (n+1-P)\ln\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{n+1}{n+1-P} - 1}\right)\right]$$

Démonstration :

De façon analogue que dans la preuve de la propriété (2-1), on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\bar{g}_{n+1}(y(\beta)) - \bar{g}_{n+1}(e) &= (n+1)\ln \bar{c}^{k^t} y(\beta) - \sum_{i=1}^{n+1} \ln y_i(\beta) - (n+1)\ln \bar{c}^{k^t} e \\ &= (n+1)\ln \frac{\bar{c}^{k^t} y(\beta)}{\bar{c}^{k^t} e} - \sum_{i=1}^{n+1} \ln y_i(\beta) \\ &\leq -\beta - \sum_{i=1}^{n+1} \ln y_i(\beta)\end{aligned}$$

Et donc d'après (2.11), on a :

$$\bar{g}_{n+1}(y(\beta)) - \bar{g}_{n+1}(e) \leq -(\beta - \theta(\beta)) = -\bar{\delta}(\beta)$$

Il est intéressant de connaitre le β qui donne la valeur de $\bar{\delta}(\beta)$ la plus grande possible. Malheureusement, l'expression de $\bar{\delta}(\beta)$ dans la proposition (2-2) est complexe et nous n'avons pas pu déterminer de façon analytique la valeur de P donnant le minimum de l'expression ci-dessous :

$$\theta(\beta) = -\min_{P\in\{1,2,....,n\}} \left[P\ln\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{n+1}{P} - 1}\right) \right.$$
$$\left. +(n+1-P)\ln\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{n+1}{n+1-P} - 1}\right)\right]$$

Pour β et n donné, nous l'obtenons par des calculs fait sur ordinateur, en comparent les différentes valeurs prises pour $P \in \{1, 2, ..., n\}$. Pour obtenir β_{opt} la valeur donnant la plus grande valeur possible de $\bar{\delta}$, nous avons procédé par balayage sur le segment $\left]0; \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right[$ en faisant $\beta_i = i10^{-4}$ avec $i \in N$ de sort que $i10^{-4}$ soit dans $\left]0; \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right[$.
Étant donné donc β_{opt} on calcule $\bar{\delta}_{opt}$ à partir de la relation $\bar{\delta}(\beta) = \beta - \theta(\beta)$.
On a le termes :

$$\theta(\beta) = -\ln\left(1 - \beta\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) + n\ln\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$$

Dans ce cas on obtient facilement β_{opt} qui maximise la fonction suivante $\bar{\delta}(\beta)$ sur l'intervalle $\left]0; \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right[$.

On a

$$\beta_{opt} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \sqrt{n(n+1)} - n - 1) + \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - (\sqrt{n(n+1)} - n - 1)^2 + 4(n+1)\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Ainsi, on vérifie facilement que β_{opt} tend vers 0.5 lorsque n tend vers $+\infty$ pour $\beta = 0.5$ on a :

$$\bar{\delta}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \ln\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) + n\ln\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n(n+1)}}\right).$$

qui tend vers $1 - \ln 2 \approx 0.306$ par valeurs supérieures quand on fait tendre n vers l'infini.
Situons les résultat obtenues ci-dessus par rapport aux résultat antérieurs dans Karmarkar a montré que si on choisit $\beta = \alpha\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ avec $\alpha \in]0;1[$, on a :

$$\forall \text{ k } g_{n+1}(\bar{x}^{k+1}) \leq g_{n+1}(\bar{x}^k) - \mu(\beta)$$

Avec

$$\mu(\beta) = \mu(\alpha\sqrt{\frac{n+1}{n}}) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2 n^2}{n(n+1)\left[1 - \alpha\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right]}$$

On vérifie que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mu(\alpha\sqrt{\frac{n+1}{n}}) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$

Il préconisait de prendre $\alpha = \frac{1}{4}$ pour lequel $\mu(\alpha\sqrt{\frac{n+1}{n}})$ tend vers 0.135 par valeur supérieures.

En utilisant la proposition (2-1), on a pour $0 < \beta < \frac{2}{3}$

$$\forall \text{ k } g_{n+1}(\bar{x}^{k+1}) \leq g_{n+1}(\bar{x}^k) - \delta(\beta)$$

Avec $\delta(\beta) = \beta - \frac{\beta^2}{2(1-\beta)}$.

Ainsi, pour $\beta = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $\delta(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 0.268$.

Donc dans ce cas on a une meilleur diminution de la fonction potentielle que précédemment.

Enfin, la proposition (2-3) nous permet d'écrire que pour $\beta \in \left]0; \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right[$.

$$\forall \text{ k } g_{n+1}(\bar{x}^{k+1}) \leq g_{n+1}(\bar{x}^k) - \bar{\delta}(\beta)$$

Avec

$$\bar{\delta}(\beta) = \beta + \min_{P\in\{1,2,....,n\}} \left[P \ln \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{P} - 1} \right) \right.$$

$$\left. + (n+1-P) \ln \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} \sqrt{\frac{n+1}{n+1-P} - 1} \right) \right]$$

A partir de la nous avons vérifier numériquement que pour $\beta = \frac{1}{2}, \bar{\delta}(\frac{1}{2})$ est au mois égal à 0.306.

2.3 calcule d'une solution initiale strictement réalisable :

Un point strictement réalisable de (PL) est une solution du problème :

$$\text{(R)} \qquad \{Ax = b, x > 0\}$$

En utilisant la technique de la variable, le problème (R) est équivalent au problème suivant :

$$\text{(P1)} \begin{cases} \min \lambda \\ Ax + \lambda(b - Aa) = b \\ x > 0, \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Tel que $a > 0$ est choisi arbitrairement dans l'orthant positif et λ une variable artificielle. Posons $y = (x, \lambda)$, $(P1)$ est équivalent au programme

$$\text{(P2)} \begin{cases} \min c^t y = z^* = 0 \\ \bar{A}y = b \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ou $c = (0, ...0, 1)^t \in R^{n+1}, \bar{A} = (A, b - Aa) \in R^{m\times(n+1)}$.

(P2) vérifie les hypothèses de Karmarkar :

1. $z^* = 0$
2. $y = (a, 1)$ solution strictement réalisable de (P1)
3. La matrice $\bar{A}$ est de plein rang $rg(\bar{A}) = m < n + 1$.

la solution de (R) se ramène à celle de (P2). Plus précisément Karmarkar démontre le théorème suivant :

théorème 2-3 :

$\exists\ \varepsilon_0 > 0$ telles que : les deux proposition suivantes sont équivalentes :

1. x solution strictement réalisable de (R).
2. (P2) admet une solution optimale (x, λ) telle que $\lambda \leq \varepsilon_0$.

Chapitre 3

Teste Numérique

3.1 Quelque Exemple Numérique

Nous présentons à titre indicatif quelques exemples numériques sur la méthode de Karmarkar :

Exemple 1 :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } c = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}^t$$

La solution réalisable exacte est : $x^0 = \begin{bmatrix} 0.27 & 1.27 & 0.46 \end{bmatrix}^t$

La solution optimale exacte est : $x^* = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 & 0 \end{bmatrix}^t$

La valeur optimale est : z^* = -7

Tableau Comparatif :

pas	x^*	z^*	k	*temps*
0.5	$\begin{bmatrix} 0.4999 & 1.5000 & 0 \end{bmatrix}^t$	-7.0000	24	0 : 00 : 00 : 05
0.25	$\begin{bmatrix} 0.4999 & 1.5000 & 0 \end{bmatrix}^t$	-7.0000	49	00 : 00 : 00 : 05

Exemple 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$$

La solution réalisable exacte est : $x^0 = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.33 & 0.33 \end{bmatrix}^t$

La solution optimale exacte est : $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$

La valeur optimale est $z^* = 0$

Tableau Comparatif :

pas	x^*	z^*	k	*temps*
0.5	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.9999 \end{bmatrix}^t$	0.0000	30	00 : 00 : 00 : 03
0.25	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.9999 \end{bmatrix}^t$	0.0000	60	00 : 00 : 00 : 04

Exemple 3 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } c = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$$

La solution réalisable exacte est : $x^0 = \begin{bmatrix} 0.73 & 0.33 & 0.83 \end{bmatrix}^t$

La solution optimale exacte est : $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0.33 & 0.83 \end{bmatrix}^t$

La valeur optimale est $z^* = 0.3333$

Tableau Comparatif :

pas	x^*	z^*	k	*temps*
0.5	$\begin{bmatrix} 0 & 0.3333 & 0.8333 \end{bmatrix}^t$	0.3333	21	00 : 00 : 00 : 05
0.25	$\begin{bmatrix} 0 & 0.3333 & 0.8333 \end{bmatrix}^t$	0.3333	49	00 : 00 : 00 : 05

Exemple 4 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } c = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^t$$

La solution réalisable exacte est : $x^0 = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.22 & 0.44 & 0.25 \end{bmatrix}^t$

La solution optimale exacte est : $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0.66 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$

La valeur optimale est : z^*=0.67

Tableau Comparatif :

pas	x^*	z^*	k	*temps*
0.5	$\begin{bmatrix} 0 & 0.6566 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$	0.6666	13	00 : 00 : 00 : 06
0.25	$\begin{bmatrix} 0.0001 & 0.6566 & 0.0061 & 0.0118 \end{bmatrix}^t$	0.6666	26	00 : 00 : 00 : 05

Exemple 5 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ et } c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^t$$

La solution réalisable exacte est : $x^0 = \begin{bmatrix} 0.73 & 0.5 & 0.47 & 0.13 \end{bmatrix}^t$

La solution optimale exacte est : $x^* = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}^t$

La valeur optimale est : z^*=0

Tableau Comparatif :

pas	x^*	z^*	k	*temps*
0.5	$\begin{bmatrix} 1.4999 & 0 & 0 & 0.2499 \end{bmatrix}^t$	0	33	0 : 00 : 00 : 04
0.25	$\begin{bmatrix} 1.4999 & 0 & 0 & 0.2499 \end{bmatrix}^t$	0	68	0 : 00 : 00 : 04

Exemple 6 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ et } c = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^t$$

La solution réalisable exacte est : $x^0 = \begin{bmatrix} 1.37 & 0.52 & 1.19 & 0.96 \end{bmatrix}^t$

La solution optimale exacte est : $x^* = \begin{bmatrix} 0.34 & 0 & 0.67 & 2 \end{bmatrix}^t$

La valeur optimale est : z^*=7.67

Tableau Comparatif :

pas	x^*	z^*	k	*temps*
0.5	$\begin{bmatrix} 0.3350 & 0 & 0.6765 & 1.9982 \end{bmatrix}^t$	7.6692	9	0 : 00 : 00 : 04
0.25	$\begin{bmatrix} 0.3349 & 0 & 0.6674 & 1.9983 \end{bmatrix}^t$	7.6692	20	0 : 00 : 00 : 05

Exemple 7 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ et } c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}^t$$

La solution réalisable exacte est : $x^0 = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.07 & 0.33 & 0.60 & 0.06 \end{bmatrix}^t$

La solution optimale exacte est : $x^* = \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & 0.33 & 0.22 & 0 \end{bmatrix}^t$

La valeur optimale est : z^*=2.44

Tableau Comparatif :

pas	x^*	z^*	k	*temps*
0.5	$\begin{bmatrix} 0.3333 & 0 & 0.3333 & 0.2222 & 0.1110 \end{bmatrix}^t$	2.4444	48	0 : 00 : 00 : 07
0.25	$\begin{bmatrix} 0.3333 & 0 & 0.3333 & 0.2222 & 0 \end{bmatrix}^t$	2.4444	71	0 : 00 : 00 : 04

Exemple 8 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } c = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$$

La solution réalisable exacte est : $x^0 = \begin{bmatrix} 0.09 & 0.12 & 0.13 & 0.30 & 0.13 & 0.25 \end{bmatrix}^t$

solution optimale exacte est : $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0.50 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$

La valeur optimale est z^* = -0.5

Tableau Comparatif :

pas	x^*	z^*	k	*temps*
0.5	$\begin{bmatrix} 0 & 0.4999 & 0 & 0.4999 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$	-0.5	43	00 : 00 : 00 : 07
0.25	$\begin{bmatrix} 0 & 0.4999 & 0 & 0.4999 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$	-0.5	84	00 : 00 : 00 : 05

3.2 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présente une étude générale de méthode de **Karmarkar** qui produit une suite des solutions réalisables convergent vers une solution optimale du problème traité.et nous présentons quelques test numérique sur cette méthode.

ces testes montrons clairement l'impact de modification de pas sur le comportement numérique de l'algorithme exprimé par la réduction du nombre d'itération et du temps de calcule.

En fin en remarquons le pas 0.5 c'est plus mieux que le pas 0.25.

Bibliographie

[1] Abdelkrim Keraghel, 'Étude Adaptive et comparative des principale variantes dans l'algorithme de Karmarkar', Université Joseph Fourier Grenoble France, 1989.

[2] Jean Baptiste,'Optimisation et Analyse convexe : exercice et problème corrigés, avec rappelle de cours'.

[3] Gilles Savard, 'Introduction aux méthodes de points intérieur', école polytechnique de Montréal, Février 2011.

[4] L.Abla, 'Programmation Linéaire', centre universitaire de mila, 2014,2015.

[5] Maitine Bergounioun, 'Optimisation et contrôle des systèmes linéaire : cour et exercice avec solution', $2^{ème}$ cycle. école D'ingénieurs.

[6] Michel Bierlaire, 'Introduction à l'optimisation différentiable'.

[7] Nassima Souilah, 'Méthode Adaptée pour la résolution d'un programme linéaire', centre universitaire mila, 2012/2013.