C vx

الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
**République Algérienne Démocratique et Populaire**
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**N° Réf :...............**


**Centre Universitaire**
**Abd Elhafid Boussouf Mila**

**Institut des Sciences et Technologie** **Département de Mathématiques et Informatique**


# Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

**En: Mathématiques**

**Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées**

# Synchronisation Projective Entre Deux Systèmes Chaotiques et Hyper Chaotiques


**Préparé par :** ***Belkessour Sara***
***Bounaas Chaib Noorelhouda***


**Devant le jury**

| | | |
|---|---|---|
| *Bouden Rabeh*….. *M.A.A* | **C.U.Abd Elhafid Boussouf** | **Président** |
| *Kaouche Isamil* ……*M.A.A* | **C.U.Abd Elhafid Boussouf** | **Rapporteur** |
| *Mehazem Allal* …. .*M.A.A* | **C.U.Abd Elhafid Boussouf** | **Examinateur** |

**Année Universitaire : 2016/2017**

# *Remerciements*

*Chaque fois qu'on achève une étape importante dans notre vie, on fait une pose pour regarder en arrière et se rappeler toutes ces personnes qui ont partagé avec nous tous les bons moments de notre existence, mais surtout les mauvais.*

*Avant tout, nos remerciements s'adressent en premier lieu à Allah le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il nous a donné durant la réalisation de ce modeste mémoire, ainsi que le long de notre cursus d'étude.*

*Ainsi, nous tenons également à exprimer nos profondes gratitudes à notre encadreur Monsieur KAOUCHE ISMAIL, dont on a profité de son expérience et de son savoir dans la science de système dynamique et d'analyse. Il nous a consacré tout le temps qu'on lui avait demandé et assurer d'avoir voulu proposes la direction de ce mémoire sa disponibilité, son soutien ses encouragement et ses précieux. On a tellement appris de son dévouement exemplaire et son point positif face à tout obstacle.*

*Nos remerciements vont aussi à tous nos enseignants qui ont contribué à notre formation et à tous les membres du jury qui ont accepté de juger notre modeste travail, à tous responsables, ingénieurs et techniciens de l'institut des sciences et de technologie et de l'univers*

*Enfin, nous tenons à exprimer notre sincère salutation à tous nos collègues et amis pour le soutien moral.*

# TABLE DES MATIÈRES

# TABLE DES FIGURES

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La synchronisation du chaos a attiré beaucoup d'attention au cours des deux dernières décennies [1]. En raison de ses applications potentielles dans de vastes domaines de la physique et des sciences de l'ingénieur. La synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques a suscité un intérêt considérable chez les scientifiques dans divers domaines. Les résultats de la synchronisation du chaos sont utilisés dans les sciences biologiques, les réactions chimiques, la communication sécurisée et la cryptographie, la synchronisation des oscillations non linéaires, etc. [4]. Jusqu'à présent, différents types de synchronisation du chaos ont été étudiés, tels que la Contrôle adaptatif [5], contrôle de rétroaction linéaire et non linéaire [6], contrôle actif [7] synchronisation complète [8] et synchronisation projective [9]. Récemment, une généralisation de la synchronisation, appelée synchronisation généralisée (GS), a été proposée lorsque deux systèmes seraient synchronisés s'il existe une relation fonctionnelle entre les états des deux systèmes. Ce type de synchronisation dans un sens général conduit à une dynamique plus riche que la synchronisation complète. La principale caractéristique de la synchronisation projective est que l'ordre du système esclave est supérieur à celui du système maître. Il est de plus en plus intéressant d'étudier la synchronisation chaotique avec différentes structures et différentes commandes en raison de ses vastes applications en sciences biologiques et sociales. Par exemple, l'ordre des neurones thalamiques peut être différent des neurones de l'hippocampe. Une autre instance est la synchronisation qui se produit entre le cœur et les poumons, où l'on peut observer que les systèmes circulatoire et respiratoire se synchronisent en dépit du fait qu'ils ont des structures et des ordres dynamiques différents. Par conséquent, l'étude de la synchronisation des différents systèmes chaotiques, même s'ils sont d'ordres différents, est très importants du point de vue de la théorie pratique de l'application et du contrôle. Les systèmes hyper chaotiques possédant au moins deux exposants positifs de Lyapunov ont un comportement plus complexe et une dynamique abondante que les systèmes chaotiques et conviennent à certaines applications d'ingénierie telle que la communication sécurisée.

Notre travail est présenté en trois chapitres. Il est structuré de la manière suivante : Le premier chapitre est consacré à l'introduction des éléments fondamentaux associés aux systèmes dynamiques. Nous définissons les systèmes dynamiques en temps continu, le théorème fondamentale d'existence et d'unicité pour le système autonome non linéaire et les quelques notions de la stabilité d'un système dynamique non linéaire notamment la méthode indirecte qui basée sur la linéarisation et la méthode directe qui basée sur l'utilisation d'une fonction appelée fonction de Lyapunov. Pour plus de détails sur ces informations on peut citer le travail de [09].

Nous présentons dans le deuxième chapitre quelques propriétés d'analyse des systèmes dynamiques chaotiques qui permirent d'analyser qualitativement les points marquants de ces systèmes chaotiques, notamment la non linéarité de ces système, le déterminisme, la sensibilité aux conditions initiales,l'espace de phase,l'espace de phase, l'attracteurs chaotiques et les exposants de Lyapunov qui permirent de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ. Tandis que dans le dernier chapitre on propose une synchronisation projective entre deux différents systèmes chaotiques et hyper chaotiques, en utilisant la méthode du contrôle continue qui sera étendue aux systèmes dynamiques. Pour garantir la stabilité du système erreur nous aurons basé sur le critère de stabilité des systèmes linéaires.

A la fin de ce mémoire, nous donnerons une conclusion générale et quelques perspectives.

# CHAPITRE 1

# INTRODUCTION AU SYSTÈMES DYNAMIQUES

## 1.1 Généralités

Considérons le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

tel que $f : E \to \mathbb{R}^n$ et $E$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Nous allons montrer que pour certaines conditions sur la fonction $f$ le système (1.1) admet une solution unique passant par le point $x_0 \in E$ définie dans un intervalle maximale d'existence $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. En général il est impossible de résoudre explicitement le système non-linéaire (1.1) par suite nous donnons un grand intérêt à l'étude qualitative locale, en particulier nous allons introduire le théorème de Hartman-Grobman [10] qui montre que topologiquement le comportement local du système non-linéaire (1.1) au voisinage d'un point d'équilibre $x_0$ est typiquement déterminer par le comportement du système linéaire $\dot{x} = Ax$ au voisinage de l'origine avec $A = Df(x_0)$ la dérivée de $f$ à $x_0$.

Le système (1.1) est dit autonome, lorsque la fonction $f$ dépend explicitement de $t$

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1.2}$$

Le système est dit non-autonome, en revanche tout système non-autonome (1.2), avec $x \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire sous forme d'un système autonome (1.1), avec $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ en effet on pose $x_{n+1} = t$ alors $\dot{x}_{n+1} = 1$, et la théorie fondamentale de (1.1) et (1.2) ne se différa plus significativement.

## 1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans cette section nous allons présenter le théorème fondamentale d'existence et unicité pour le système autonome non-linéaire :

$$\dot{x} \;=\; f(x). \tag{1.3}$$

Pour la preuve de ce théorème nous allons utiliser la méthode des approximations successives qui vas servir en même temps à montrer la continuité et la différentiabilité des solutions par rapport au conditions initiales et au paramètres.

**Définition 1.2.1.** *Soit $E$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la fonction $f : E \to \mathbb{R}^n$ est dite Lipschitzienne sur $E$*

$$\exists K \in \mathbb{R}^*, \forall x, y \in E : \mid f(x) - f(y) \mid \leqslant K \mid x - y \mid .$$

*La fonction $f$ est dite localement Lipschitzienne sur $E$ si pour chaque point $x_0 \in E$ il existe un $\epsilon$ voisinage de $x_0$, $N_\epsilon(x_0) \subset E$ et un constant $K_0 > 0$, tq*

$$\forall x, y \in N_\epsilon(x_0) : \mid f(x) - f(y) \mid \leqslant K_0 \mid x - y \mid .$$

**lemme 1.2.1.** *Soit $E$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : E \to \mathbb{R}^n$. Si $f \in C^1(E)$ alors $f$ est localement Lipschitzienne sur $E$.*

**Démonstration :** Comme $E$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors pour un $x_0 \in E$ donné il existe un $\epsilon > 0$ tel que $N_\epsilon(x_0) \subset E$.
Soit $K = \sup_{|x-x_0|<\epsilon} \parallel (Df(x)) \parallel$ (i.e $K$ est le maximum de $Df(x)$ sur le compact $\mid x - x_0 \mid < \epsilon$).
Pour $x, y \in N_\epsilon(x_0)$, on pose $u = y - x$.
Alors $x + su \in N_\epsilon(x_0)$, pour tout $0 \leqslant s \leqslant 1$ (car $N_\epsilon(x_0)$ est un ensemble convexe).

On considère la fonction $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$F(s) = f(x + su).$$

Alors $F^{'} = Df(x+su)u$ et donc

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= F(1) - F(0) \\ &= \int_0^1 F^{'}(s)ds = \int_0^1 Df(x+su)uds. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mid f(y) - f(x) \mid &\leqslant \int_0^1 \mid Df(x+su)u \mid ds \\ &\leqslant \int_0^1 \parallel Df(x+su) \parallel \mid u \mid ds \\ &\leqslant K \mid u \mid = K \mid y - x \mid, \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration

**Théorème 1.2.1.** *(Théorème fondamentale d'existence et unicité) Soit $E$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $x_0$, et supposons que $f \in C^1(E)$, alors il existe $a > 0$ tel que le problème :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.4}$$

*de Cauchy admet une solution unique sur l'intervalle $[-a, a]$.*

**Démonstration :** Comme $f \in C^1$ alors d'après le lemme (1.2.1), $f$ est localement lipschitzienne sur $E$ (i.e pour chaque $x_0 \in E$), il existe un $\epsilon$ voisinage $N_\epsilon(x_0) \subset E$ et un constante $K > 0$ telque pour tout $x, y \in N_\epsilon(x_0)$ on a $\mid f(x) - f(y) \mid \leqslant K \mid x - y \mid$.
Soit $b = \frac{\epsilon}{2}$ alors la fonction continue $f(x)$ est bornées dans le compact

$$N_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / \mid x - x_0 \mid \leqslant b\}.$$

Soit $M = \max\limits_{N_0} \mid f(x) \mid$ et soit $u_k(t)$ la suite définie par

$$\begin{cases} U_0(t) = x_0 = x(0) \\ U_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(U_k(s))ds, k = 0, 1, \cdots \end{cases} \tag{1.5}$$

Supposons que $u_k(t)$ est définie et continue sur $[-a, a]$, pour tout $a > 0$ et satisfaisant

$$\max_{t\in[-a,a]} \mid u_k(t) - x_0 \mid \leqslant b. \tag{1.6}$$

Il s'ensuit que $f(u_k(t))$ est définie et continue sur $[-a, a]$. De plus
$u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_k)(s)ds$ est définie et continue sur $[-a, a]$ et satisfaisant

$$\mid u_{k+1}(t) - x_0 \mid \leqslant \int_0^t \mid f(u_k)(s) \mid ds \leqslant Ma.$$

Soit $t \in [-a, a]$ tel que $0 < a \leqslant \frac{b}{M}$.
Il en resulte par récurrence que $u_k(t)$ est définie et continue et satisfaisant (1.6) pour tout $t \in [-a, a]$ et $k = 0, 1, 2, \cdots$. Donc $u_k(t) \in N_0$.
On va montrer par récurrence que pour tout $j \geqslant 1$ :

$$\mid u_{j+1}(t) - u_j(t) \mid \leqslant (Ka)^j b. \tag{1.7}$$

Pour $j = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\mid u_2(t) - u_1(t) \mid &\leqslant \int_0^t \mid f(u_1(s)) - f(u_0(s)) \mid ds \\
&\leqslant K \int_0^t \mid u_1(s) - x_0 \mid ds \\
&\leqslant Kab.
\end{aligned}$$

Supposons que l'égalité (1.7) est vérifiée pour certain $j \geqslant 1$ et on montre qu'elle est verifiée pour $j+1$

$$\begin{aligned}
\mid u_{j+2}(t) - u_{j+1}(t) \mid &\leqslant \int_0^t \mid f(u_{j+1}(s)) - f(u_j(s)) \mid ds \\
&\leqslant K \int_0^t \mid u_{j+1}(s) - u_j(s) \mid ds \\
&\leqslant K(Ka)^j b \mid \int_0^t ds \mid \\
&\leqslant K(Ka)^j ba = (Ka)^{j+1} b.
\end{aligned}$$

Alors (1.7) est vérifié pour $j \geqslant 1$.
On pose $\alpha = Ka$, et choisissons $a$ tel que $0 < a < \frac{1}{K}$.
Soit $m > m^{'} > N$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mid u_m(t) - u_{m^{'}}(t) \mid &= \mid u_m(t) - u_{m-1}(t) + u_{m-1}(t) - u_{m-2}(t) + u_{m-2}(t) \cdots u_{m^{'}+1}(t) - u_{m'}(t) \mid \\
&\leqslant \mid u_m(t) - u_{m-1}(t) \mid + \mid u_{m-1}(t) - u_{m-2}(t) \mid + \cdots + \mid u_{m^{'}+1}(t) - u_{m'}(t) \mid \\
&= \sum_{j=m'}^{m-1} \mid u_{j+1}(t) - u_j(t) \mid \\
&\leqslant \sum_{j=N}^{\infty} \mid u_{j+1}(t) - u_j(t) \mid .
\end{aligned}$$

En utilisant (1.7) on obtient

$$| u_m(t) - u_{m'}(t) \leqslant \sum_{j=N}^{\infty} \alpha^j b = \frac{b\alpha^N}{1-\alpha}. \tag{1.8}$$

Donc $| u_m(t) - u_{m'}(t) | \longrightarrow 0$ lorsque $N \to +\infty$. C'est-à-dire
$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geqslant 1$ tel que $m, m^{'} > N; \| u_m(t) - u_{m'}(t) \| = \max_{t\in[-a,a]} | u_m(t) - u_{m'}(t) | < \epsilon$.
Donc $u_k(t)$ est une suite de Cauchy dans l'espace $C([-a,a])$ qui est un espace complet donc $u_k(t)$ converge uniformément vers une limite $u(t) \in C([-a,a])$.
Passant a la limite dans la relation (1.5), quand $t$ tend vers l'infini, on obtient :

$$\lim_{k\to+\infty} u_{k+1}(t) = x_0 + \lim_{k\to+\infty} \int_0^t f(u_k(s))ds.$$

Par suite

$$u(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s))ds. \tag{1.9}$$

Comme $u$ continue sur $[-a,a]$ et $f$ de classe $C^1(E)$, alors (1.9) est différentiable et on à $u^{'}(t) = f(u(t))$.
De plus $u_0 = x_0 + \int f(u(s))ds = x_0$. Donc la limite $u(t)$ est solution du problème de Cauchy (1.6) sur l'intervalle $[-a,a]$.
Il reste à montrer l'unicité de la solution. On suppose que le problème (1.4) admet deux solutions $u$ et $v$ sur l'intervalle $[-a,a]$. La fonction continue $w(t) =| u(t) - v(t) |$ atteint son maximum en un certain $t^* \in [-a,a]$. Donc

$$
\begin{aligned}
\| u - v \| &= \max_{t\in[-a,a]} | u(t) - v(t) | \\
&\leqslant | \int_0^{t^*} (f(u(s)) - f(v(s)))ds | \\
&\leqslant \int_0^{|t^*|} | f(u(s)) - f(v(s)) | ds \\
&\leqslant K \int_0^{|t^*|} | u(s) - v(s) | ds \\
&\leqslant Ka \| u - v \| \leqslant \| u - v \|,
\end{aligned}
$$

(car $Ka < 1$ ). Donc $u = v$.
D'où l'unicité de la solution.

## 1.3 Dépendance au conditions initiales et au paramètres

Dans cette section nous allons étudier la dépendance de la solution du problème de Cauchy (1.10) au condition initiale $y$ et aux paramètres $\mu \in \mathbb{R}^n$ ( i.e étudier la différentiabilité de la solution $u(t, x_0, \mu)$ par rapport à $y$ et à $\mu$ ).

$$
\begin{cases} \dot{x} = f(x, \mu) \\ x(0) = y \end{cases} \tag{1.10}
$$

**lemme 1.3.1.** *(Gronwall) Supposons que $g(t)$ est une fonction continue positive et satisfaisant*

$$
g(t) \leqslant C + K \int_0^t g(s)ds,
$$

*pour tout $t \in [0, a]$, tel que $C$ et $K$ sont des constants positifs.*
*Alors pour tout $t \in [0, a]$, on a*

$$g(t) \leqslant C\mathrm{e}^{Kt}.$$

**Démonstration :**
On pose :

$$G(t) = C + K \int_0^t g(s)ds,$$

On a $g(t) \geqslant 0 \Rightarrow G(t) \geqslant 0, \forall t \in [0, a]$.
Donc

$$G^{'}(t) = K.g(t) \leqslant K.G(t)$$

Ce qui implique :

$$G(t) \leqslant c\mathrm{e}^{Kt}$$

Par suite

$$g(t) \leqslant G(t) \leqslant c\mathrm{e}^{Kt}, \forall t \in [0, a]$$

**Théorème 1.3.1.** *(Dépendance au conditions initiales)*
*Soit $E$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $x_0$. Supposons que $f \in C^1(E)$. Alors il existe $a > 0$ et*

$\delta > 0$ *tel que pour tout* $y \in N_\delta(x_0)$ *le problème à condition initiale :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = y \end{cases} \tag{1.11}$$

*admet une solution unique* $u(t, y)$*, avec* $u \in C^1(G)$ *et* $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
*De plus pour chaque* $y \in N_\delta(x_0), u(t, y)$ *est deux fois continument différentiable par rapport à* $t \in [-a, a]$.

**Démonstration :**

- **La différentiabilité par rapport à** $t$

  Soit $u(t, y)$ la solution du problème (1.11),
  Alors

$$\dot{u}(t, y) = f(u(t, y)).$$

  Comme $u(., y)$ est $f$ sont différentiable alors $\dot{u}(t, y)$ est différentiable et on a

$$\ddot{u} = Df(u(t, y)).\dot{u}(t, y),$$

  qui est clairement continue car $u(., y), \dot{u}(., y), Df$ sont continue. Donc la solution $u(., y)$ est deux fois continument différentiable.

- **La différentiabilité par rapport à** $y$

  Fixons $y_0 \in N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ et choisissons $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $| h |< \frac{\delta}{2}$.
  Donc $y_0 + h \in N_\delta(x_0)$.
  Considérons $u(t, y_0)$ et $u(t, y_0 + h)$ les deux solutions du problème (1.11) à conditions initiales $y = y_0$ et $y = y_0 + h$ respectivement.
  On a

$$
\begin{aligned}
\mid u(t,y_0+h)-u(t,y_0)\mid &\leqslant \mid h\mid+\int_0^t \mid f(u(s,y_0+h))-f(u(s,y_0))\mid ds\\
&\leqslant \mid h\mid+K\int_0^t \mid u(s,y_0+h)-u(s,y_0)\mid ds,
\end{aligned}
$$

pour tout $t\in[-a,a]$. Alors d'après le lemme de Gronwall

$$
\mid u(s,y_0+h)-u(s,y_0)\mid<\mid h\mid e^{K|t|}, \tag{1.12}
$$

pour tout $t\in[-a,a]$.

Notons $\Phi(t,y_0)$ la matrice fondamentale des solutions du problème

$$
\begin{cases}
\dot{\Phi}=A(t,y_0)\Phi\\
\Phi(0)=I
\end{cases} \tag{1.13}
$$

avec $A(t,y_0)=Df(u(t,y_0))$ et $I$ la matrice d'identité.

Il est claire que $\Phi(t,y_0)$ est unique et continue sur un intervalle $[-a,a]$ comme solution du problème (1.13).

Le développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction $f$ au voisinage de $u_0$ donne

$$
f(u)-f(u_0)=Df(u_0)(u-u_0)+R(u-u_0),
$$

avec $\frac{|R(u-u_0)|}{|(u-u_0)|}\to 0$ lorsque $\mid(u-u_0)\mid\to 0$. Donc

$$
\begin{aligned}
\mid u(t,y_0+h)-u(t,y_0)-\Phi(t,y_0)h\mid &\leqslant \int_0^t \mid f(u(s,y_0+h))-f(u(s,y_0))-Df(u(s,y_0))\Phi(t,y_0)h\mid ds\\
&\leqslant \int_0^t \| Df(u(s,y_0))\| \mid u(s,y_0+h)-u(s,y_0)-\Phi(t,y_0)h\mid ds\\
&+ \int_0^t \mid R(u(s,y_0+h))-u(s,y_0)\mid ds.
\end{aligned} \tag{1.14}
$$

Comme $\frac{|R(u-u_0)|}{|u-u_0|}\to 0$ lorsque $\mid(u-u_0)\mid\to 0$ et $u(s,y)$ continue sur $G$, alors pour tout $t\in[-a,a]$, on a

$\forall \epsilon_0 > 0\ \exists \delta_0 > 0$ telque $\delta_0 > 0 \Rightarrow \mid R(u(s, y_0 + h) - u(s, y_0)) \mid < \epsilon_0 \mid u(s, y_0 + h) - u(s, y_0) \mid, .$
Posons

$$g(t) = \mid u(s, y_0 + h) - u(s, y_0) - \Phi(t, y_0)h \mid .$$

Alors d'après (1.12) et (1.14) : On a

$$g(t) \leqslant M_1 \int_0^t g(s)ds + \epsilon_0 \mid h \mid e^{Ka},$$

Pour tout $t \in [-a, a], y_0 \in N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$ et $\mid h \mid < \min(\frac{\delta}{2}, \delta_0)$.
avec

$$M_1 = \sup_{x \in N_{\frac{\delta}{2}}} \parallel Df(x) \parallel .$$

Alors d'après le lemme de Gronwall, pour tout $\epsilon_0 > 0$, on a

$$g(t) \leqslant \epsilon_0 \mid h \mid e^{aK} e^{aM_1} = \epsilon_0 \mid h \mid e^{a(K+M_1)},$$

pour tout $t \in [-a, a]$ et $\mid h \mid < \min(\frac{\delta}{2}, \delta_0)$. Donc

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{\mid u(s, y_0 + h) - u(s, y_0) - \Phi(t, y_0)h \mid}{\mid h \mid} = 0,$$

uniformément pour tout $t \in [-a, a]$. Alors d'après la définition de la dérivée de $u$ par rapport à $y$ on a

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0) = \Phi(t, y_0), \tag{1.15}$$

pour tout $t \in [-a, a]$, et comme $\Phi(t, y_0)$ est continue sur $[-a, a] \times N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$. Alors $u$ est continument différentiable par rapport à $y$ sur $[-a, a] \times N_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$.

**Corollaire 1.3.1.** *Sous les mêmes hypothèses du théorème précédent :*

$$\Phi(t, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(t, y),$$

*si et seulement si $\Phi(t, y)$ est la matrice fondamentale des solutions du problème, on a*

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = Df(u(t, y))\Phi \\ \Phi(0) = I \end{cases} \tag{1.16}$$

*pour tout $t \in [-a, a]$ et $y \in N_\delta(x_0)$.*

**Remarque 1.1.** *Similairement si $f \in C^k(E)$, alors la solution $u(t, y)$ du problème* (1.10) *est de classe $C^K(G)$. Et si $f$ est une fonction analytique pour $x \in E$ alors $u(t, y)$ est analytique à l'intèrieur de $G$.*

**Théorème 1.3.2.** *(Dépendance au paramètres) Soit $E$ un ouvert de $\mathbb{R}^{n+m}$ contenant $(x_0, \mu_0)$. Supposons que $f \in C^1(E)$ . Alors il existe $a > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in N_\delta(x_0)$ et $\mu \in N_\delta(\mu_0)$ le problème à condition initiale*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \mu) \\ x(0) = y \end{cases} \tag{1.17}$$

*admet une solution unique $u(t, y, \mu)$ avec $u \in C^1(G)$ et $G = [-a, a] \times N_\delta(x_0) \times N_\delta(\mu_0)$.*

Ce théorème ressort directement du théorème précédant en remplaçant les vecteurs $x_0, x, \dot{x}$ et $y$ par $(x_0, \mu_0)$, $(x, \mu)$ , $(\dot{x}, 0)$ et $(y, \mu)$ respectivement.

## Systèmes différentiels linéaires

De nombreux phénomènes naturels peuvent se modéliser en première approximation par des systèmes différentiels linéaires. D'autre part on sait résoudre complètement les systèmes linéaires à coefficients constants. Ceci a donné une grande importance pratique au tel systèmes.

## 1.4 Généralités

Un système différentiel linéaire du premier ordre dans $\mathbb{R}^n$ est une équation de la forme

$$\dot{x} = A(t)x + B(t), \tag{1.18}$$

où $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est la fonction inconnue

et $A(t) = (a_{i,j}(t)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}) \in M_n(\mathbb{R})$.

$B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues données.

**Théorème 1.4.1.** *Si la fonction matricielle $A$ et la fonction vectorielle $B$ sont continues sur un intervalle $\mathbb{I}$ alors le problème à conditions initiales*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.19}$$

*avec $t_0 \in \mathbb{I}$ et $x_0$ est un vecteur constant, admet une solution unique sur tout l'intervalle $\mathbb{I}$.*

**Preuve 1.1.** *Pour la démonstration, il suffit de voir que la fonction* $f(t,x) = A(t)x+B(t)$ *est continue sur* $\mathbb{I}$ *est lipschitzienne de rapport* $k = \| A \| = \sup\limits_{|x|=1} | Ax |$.
*Pour résoudre le système non homogène* (1.19) *on a besoin d'abord de résoudre le système homogène associé.*

### 1.4.1 Cas d'un système homogène $\dot{x} = A(t)x$

Considérons le système homogène associé au système (1.18)

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.20}$$

Soit $S$ l'ensemble des solutions maximales. Alors $\forall x, y \in S$ et tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
on a $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in S$.
Donc $S$ est un sous espace vectoriel.

**Corollaire 1.4.1.** *L'ensemble* $S$ *des solutions maximales est un espace vectoriel de dimension* $n$ *sur* $\mathbb{R}$.

### 1.4.2 Cas d'un système non-homogène $\dot{x} = A(t)x + B(t)$

Revenons au système plus générale (1.19), il existe au moins une solution maximale $y$. Si $x$ est une solution quelconque, alors $z = x - y$ satisfait l'équation homogène (1.20) et réciproquement. Par conséquent, l'ensemble des solutions maximales donnée par

$$y + S = \{y + z; z \in S\},$$

où $S$ est l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène (1.19) associé, l'ensemble $y+S$ des solutions maximales de (1.20) est un translate de $S$, c'est donc un espace affine de dimension $n$ sur $\mathbb{R}$, admettant $S$ comme direction vectorielle.

## 1.5 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

### 1.5.1 Le cas homogène

Considérons le système homogène à coefficients constants

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.21}$$

En utilisant les itérations de picard $(1,5)$ on obtient

$$\begin{array}{rcl} x_0(t) & = & x_0 \\ x_1(t) & = & x_0 + \int_{t_0}^{t} Ax_0(s)ds = x_0 + Ax_0 \int_{t_0}^{t} ds = x_0 + tAx_0 \\ x_2(t) & = & x_0 + \int_{t_0}^{t} Ax_1(s)ds = x_0 + Ax_0 \int_{t_0}^{t} ds + A^2x_0 \int_{t_0}^{t} sds \\ & = & x_0 + tAx_0 + \frac{t^2}{2}A^2x_0. \end{array} \tag{1.22}$$

Par récurrence

$$x_m(t) = \sum_{i=0}^{m} \frac{t^i}{i!} A^i x_0.$$

En passant à la limite quand $m$ tend vers l'infini, on obtient

$$\lim_{m \to +\infty} x_m(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} A^i x_0.$$

Dans le cas unidimensionnel $(n = 1)$, cette série n'est autre que la fonction exponentielle. Donc nous écrivons

$$x(t) = \exp(tA)x_0,$$

et on définit la matrice exponentielle

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i.$$

**lemme 1.5.1.** *Soit $A$ une matrice carrée, alors*

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}.$$

**Démonstration :** Comme $A$ commute avec lui même, alors on a

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}e^{At} & = & \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)}-e^{At}}{h} \\ & = & \lim\limits_{h\to 0} e^{At} \frac{e^{Ah}-I}{h} \\ & = & e^{At} \lim\limits_{h\to 0} \lim\limits_{k\to+\infty} (A + \frac{A^2h}{2!} + \cdots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!}) \\ & = & e^{At} \lim\limits_{k\to+\infty} \lim\limits_{h\to 0} (A + \frac{A^2h}{2!} + \cdots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!}) \\ & = & Ae^{At}. \end{array} \tag{1.23}$$

**Théorème 1.5.1.** *Soit $A$ une matrice carrée. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné, le problème a conditions initiales* (1.21) *admet une solution unique définie par*

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

**Démonstration :**

L'existence et l'unicité est garanté par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Il ne reste qu'a démontrer que $x(t) = e^{At}x_0$ est une solution de problème (1.21), d'aprés le lemme (1.5.1) on a

$$x^{'}(t) = Ae^{At}x_0 = Ax(t).$$

D'autre part :

$$x(0) = e^0 x_0 = I.x_0 = x_0.$$

Donc $x(t)$ est solution de (1.21).

**Exemple 1.5.1.** *Résoudre le probléme :*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{1.24}$$

*avec* $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

**Solution 1.1.** *D'après le théorème* (1.5.1)

*la solution est* $x(t) = e^{At}.x_0$

*On a :*

$$x(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$x(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

### 1.5.2 Le cas non-homogène

Considérons le système non-homogène à coefficients constantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \tag{1.25}$$

avec $A$ une matrice $(n \times n)$ et $B(t)$ une fonction vectorielle continue.

**Définition 1.5.1.** *Soit le système homogène associé à* (1.25)

$$\dot{x} = Ax. \tag{1.26}$$

*Toute fonction matricielle* $(n \times n)$ *non-singulière* $\Phi(t)$, *qui satisfaite* $\Phi^{'}(t) = A\Phi(t)$, *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *est appelée matrice fondamentale des solutions du système homogène* (1.26).

**Remarque 1.2.** *La fonction* $\Phi(t) = e^{At}$ *est une matrice fondamentale de* (1.26) *qui satisfaite* $\Phi(0) = I$.
*De plus, toute matrice fondamentale* $\Phi(t)$ *de* (1.26) *est donnée par :*

$$\Phi(t) = e^{At}C,$$

*avec* $C$ *une matrice non-singulière.*

**Théorème 1.5.2.** *Si* $\Phi(t)$ *est une matrice fondamentale de* (1.26), *alors l'unique solution du système linéaire non-homogène* (1.25) *est donnée par :*

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)B(s)ds. \tag{1.27}$$

**Démonstration :** Supposons que $x(t)$ soit donnée par (1.27), alors

$$x^{'}(t) = \Phi^{'}(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)B(t) + \int_0^t \Phi^{'}(t)\Phi^{-1}(s)B(s)ds.$$

Et comme $\Phi(t)$ est une matrice fondamentale de (1.26) , il en résulte que $\Phi^{'}(t) = A\Phi(t)$. D'où :

$$\begin{aligned} x^{'}(t) &= A[\Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)B(s)ds] + B(t) \\ &= Ax(t) + B(t). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} x(0) &= \Phi(0)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^0 \Phi(0)\Phi^{-1}(s)B(s)ds \\ &= x_0 \end{aligned}$$

Donc $x(t)$ est solution de (1.25).

**Remarque 1.3.** *Si* $\Phi(t) = e^{At}$ *la solution du système linéaire non-homogène* (1.25) *est donnée par :*

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds. \tag{1.28}$$

**Exemple 1.5.2.** *Résoudre le problème de l'oscillateur harmonique forcé :*

$$\ddot{x} + x = f(t). \tag{1.29}$$

*Cette équation se ramène au système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 + f(t), \end{cases} \tag{1.30}$$

*qui s'écrit sous forme matricielle :*

$$\dot{x} = Ax(t) + B(t),$$

*avec :* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

*et*

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

*On a :*

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

*Donc la solution du système avec la condition initiale* $x(0) = x_0$ *est :*

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)ds \\ &= e^{At}x_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} \sin(t-s)f(s) \\ \cos(t-s)f(s) \end{pmatrix} ds \end{aligned} \tag{1.31}$$

## 1.6 Systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Dans cette section nous rappelons les différents portraits de phase possibles dans le plans $\mathbb{R}^2$ pour le système linéaire plan.

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.32}$$

avec $x \in \mathbb{R}^2$ et $A$ une matrice carré $(2 \times 2)$. Pour cela on s'intéresse dans un premier temps au système.

$$\dot{y} = By, \tag{1.33}$$

avec $B = P^{-1}AP$ ($B$ a l'une des formes).
$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Le portrait de phase de (1.32) est alors obtenu à partir du portrait de phase de (1.33) en utilisant la transformation linéaire des coordonnées $x = Py$.

## Cas 1 :Valeurs propres réels de signes opposés

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda < 0 < \mu$.
Dans ce cas la solution de (1.33) avec la condition initiale :
$y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} y_0. \tag{1.34}$$

Alors $y_1(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ et $y_2(t) \to 0$ lorsque $t \to -\infty$. L'origine est appelé point selle (col).

En éliminant $t$ de $y_1$ et $y_2$ on obtient $y_2 = \frac{c}{|y_1|^\alpha}$ avec $c = c_2| \ c_1 \ |^\alpha$ et $\alpha = -\frac{\mu}{\lambda} > 0$.

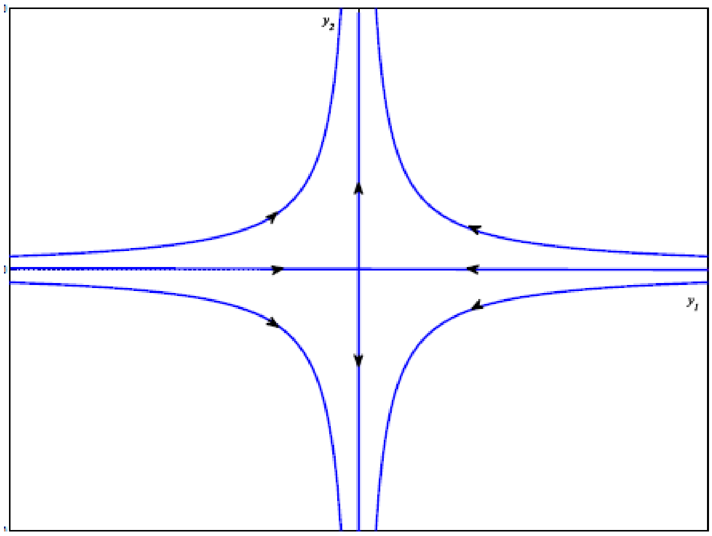


FIGURE 1.1 – Point selle (col)

La figure (1.1) illustre ce portrait de phase (si $\mu < 0 < \lambda$ les flèches seront inversés).

Le portrait de phase de (1.32) est linéairement équivalent au portrait de phase de (1.33).

## Cas 2 : Différentes valeurs propres réelles de mêmes signes

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu < \lambda < 0$.

La solution de (1.33) est donnée par (1.34).

Alors :$y(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. L'origine est appelé noeud stable.

En éliminant $t$ de $y_1$ et $y_2$ on obtient $y_2 = \frac{c}{|y_1|^\alpha}$ avec $c = \frac{c_2}{|c_1|^\alpha}$ et $\alpha = \frac{\mu}{\lambda} > 1$.

La figure (1.2) illustre ce portrait de phase (si $\lambda < \mu < 0$ les axes seront permutés).

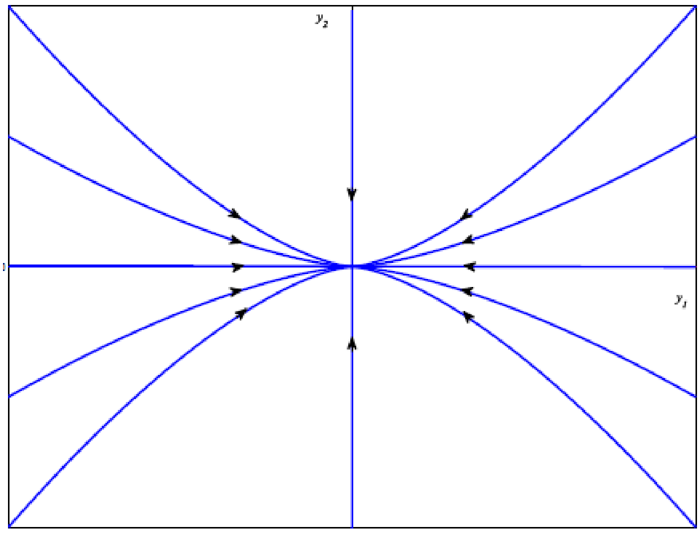


FIGURE 1.2 – Noeud stable $\mu < \lambda < 0$

Si $\mu, \lambda > 0$ les flèches seront inversés, dans ce cas l'origine est appelé noeud instable.

Le portrait de phase de (1.32) est linéairement équivalent au portrait de phase de (1.33).

## Cas 3 : Valeurs propres réelles égaux

On distinct deux possibilités :

a) **Deux vecteurs propres indépendants**

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda = \mu < 0$.

La solution de (1.33) avec la condition initiale :

$y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} y_0. \tag{1.35}$$

Alors $y(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ l'origine est appelé noeud propre stable.

En éliminant $t$ de $y_1$ et $y_2$ on obtient $y_2 = c \mid y_1 \mid$ avec $c = \frac{c_2}{|c_1|}$

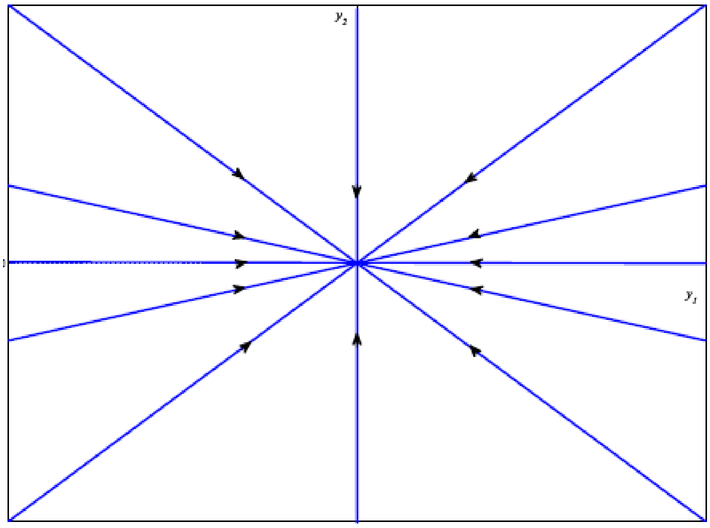


FIGURE 1.3 – Noeud propre stable $\mu = \lambda < 0$. avec deux vecteurs propres indépendants

La figure (1.3) illustre ce portrait de phase si $\lambda = \mu > 0$ les flèches seront inversés, dans ce cas l'origine est appelé noeud propre instable.

Le portrait de phase de (1.32) est linéairement équivalent au portrait de phase de (1.33).

b) **Un seul vecteur propre indépendant**

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu = \lambda < 0$.

La solution de (1.33) avec la condition initiale :

$y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} y_0. \tag{1.36}$$

Alors $y(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ l'origine est appelé noeud impropre stable. La figure (1.4) illustre ce portrait de phase (si $\lambda = \mu > 0$ les flèches seront inversés. Dans ce cas l'origine est appelé noeud impropre instable. Le portrait de phase de (1.32) est linéairement équivalent au portrait de phase de (1.33).

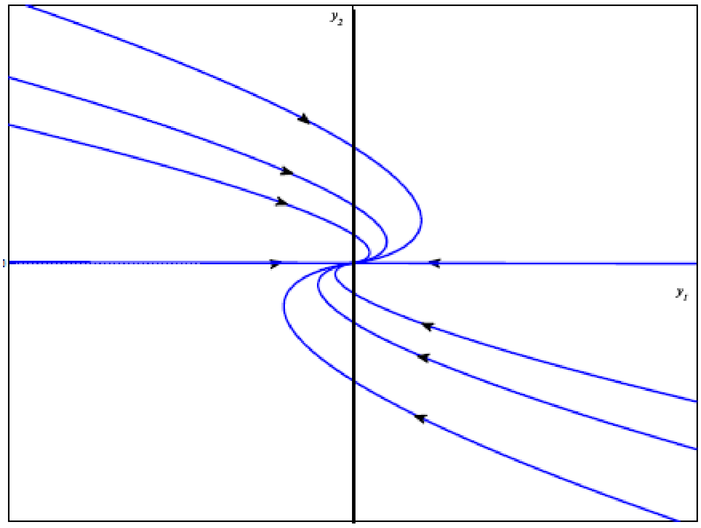


Figure 1.4 – Noeud impropre stable $\mu = \lambda < 0$. avec un seul vecteur propre indépendant

## Cas 4 :Valeurs propres complexes

Soit $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a < 0$.

Introduisant les coordonnés polaires $r, \theta$ définis par : $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ et $\tan\theta = \frac{y_2}{y_1}$ et dérivant ces équations on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} = ar \\ \dot{\theta} = b \end{cases} \tag{1.37}$$

D'où la solution :

$$\begin{cases} r = r_0 e^{at} \\ \theta = bt + \theta_0 \end{cases} \tag{1.38}$$

Alors $r(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ et $\theta$ augmente si $b > 0$ et diminuer lorsque $t$ augmente si $b < 0$.

Donc les trajectoires sont approchent vers l'origine en spirale, dans ce cas l'origine est appelé foyer stable.

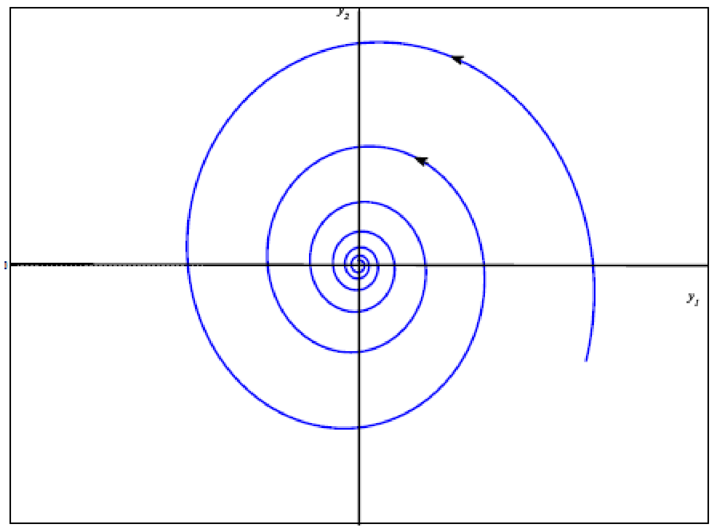

FIGURE 1.5 – Foyer stable, $a < 0.$ et $b > 0$.

Le figure (1.5) illustre ce portrait de phase (si $a > 0$ ? les flèches seront inversés, dans ce cas l'origine est appelé foyer instable).
Le portrait de phase de (1.32) est linéairement équivalent au portrait de phase de (1.33).

## Cas 5 :Valeurs propres purement imaginaires

Dans ce cas on suppose que $a = 0$ et on procède de la même manière comme dans le cas 4.
Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$.
Introduisant les coordonnés polaires $r$, $\theta$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = b \end{cases} \tag{1.39}$$

D'où la solution

$$\begin{cases} r = r_0 \\ \theta = bt + \theta_0 \end{cases} \tag{1.40}$$

Alors $r(t)$ = constant et $\theta$ augmente lorsque $t$ augmente si $b > 0$ et diminuer lorsque $t$ augmente si $b < 0$ .

Donc les trajectoires sont des cercles centrés à l'origine, dans ce cas l'origine est appelé centre.

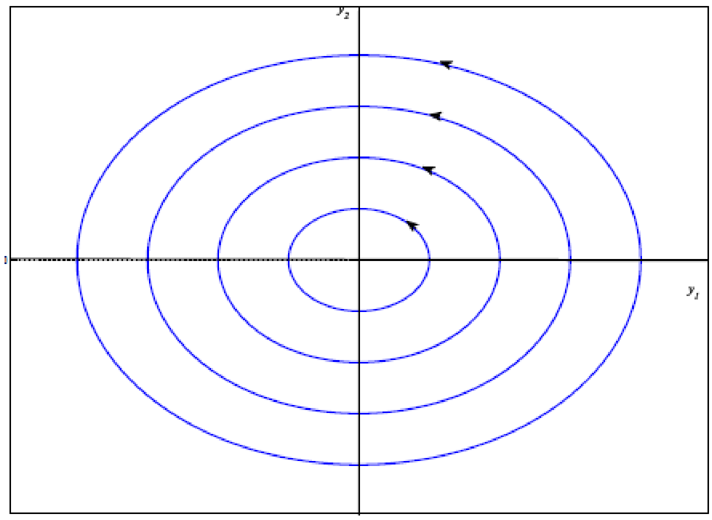

FIGURE 1.6 – Centre à l'origine, $b > 0$.

La figure (1.6) illustre ce portrait de phase. Le portrait de phase de (1.32) est linéairement équivalent au portrait de phase de (1.33).

**Exemple 1.6.1.** *(Système linéaire avec un centre à l'origine)*

*Considérons le système* (1.32) *avec* $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

*Les valeurs propres de* $A$ *sont* $\lambda_{1,2} = \pm 2i$,

*avec les vecteurs propres* $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

*Donc* $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

*et* $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

*D'où* $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

*La solution est :*

$$\begin{aligned} x(t) &= P\begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} P^{-1}.x_0 \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \frac{1}{2}sin(2t)c_1 & \cos(2t) \end{pmatrix}.x_0. \end{aligned}$$

*Donc*

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1\cos(2t) - 2c_2\sin(2t) \\ x_2(t) = \frac{1}{2}c_1\sin(2t) + c_2\cos(2t) \end{cases}$$

*La solution vérifiée* $x_1^2(t) + 4x_2^2(t) = c_1^2 + 4c_2^2$ *, pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

*Alors les trajectoires résident dans des ellipses.*

## Notions de stabilité

La question de la stabilité se pose de la façons suivante : Si l'on écarte le système de sa position d'équilibre $y$ reviendra t-il ? ou bien une petite perturbation, qui éloigne le système légèrement de son régime stationnaire peut avoir des conséquences importantes et ètre amplifiée au cours du temps ?

Considérons le système autonome suivant :

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.41}$$

ou $f \in C^1(E)$ et $E$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ .

Un point $a$ dans $E$ vérifiant $f(a) = 0$ est appelé point d'équilibre ou point critique du système (1.41).

Nous utilisons la notion $\phi(t, x_0)$ pour noter l'unique solution $x(t)$ de (1.41) qui satisfait $x(0) = x_0$.

L'application paramétré $\phi_t = \phi(t, .) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est appelée flot du système (1.41).

**Définition 1.6.1.** *(Stabilité locale)*

- *Un point d'équilibre a de* (1.41) *est stable au sens de Lyapunov si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $r > 0$ *tel que pour tout* $x \in E$ *vérifiant* $\| x - a \| \leqslant r$, *on a :*

$$\| \phi_t(x) - a \| \leqslant \epsilon, t \geqslant 0.$$

- *Un point d'équilibre a de* (1.41) *est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il est stable au sens de Lyapunov et de plus pour tout x suffisant proche de a avec :*

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t, x) = a.$$

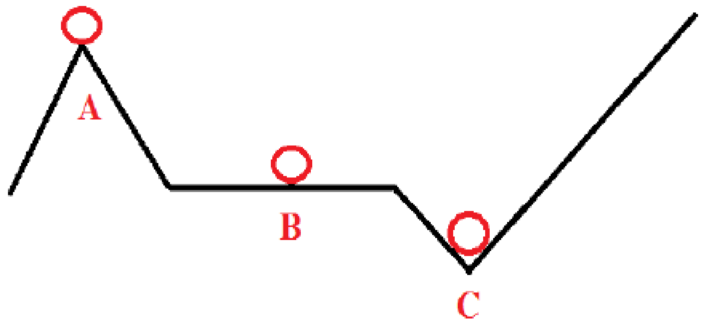


FIGURE 1.7 – A) Instable B) localement stable C) Asymptotiquement stable.

Maintenant nous présentons deux méthodes pour étudier la stabilité d'un système non-linéaire

- Méthode indirecte basée sur la linéarisation.
- Méthode directe basée sur l'utilisation d'une fonction appelée fonction de Lyapunov.

## 1.7 Méthode indirecte (Linéarisation)

Le point critique de (1.41) se ramène à l'origine ($f(0) = 0$) par le changement de variable $X = x - a$ et le développement de Taylor de $f$ au point $x = 0$ est donné par :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2 f(0)(x, x) + \cdots$$

Lorsque $x$ est très proche de 0, les termes non-linéaires devient négligeables devant le terme linéaire et la méthode indirecte de Lyapunov pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre 0, consiste à étudier le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.42}$$

avec :

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0) \end{pmatrix}$$

est la matrice Jacobienne de $f$ en 0. Le système (1.42) s'appelle le linéarisé du système non-linéaire (1.41) au point d'équilibre 0.

**Définition 1.7.1.** *Un point d'équilibre $a$ de* (1.41) *est dit point hyperbolique si aucune valeur propre de la matrice $A = Df(a)$ n'admet pas la partie réelle nulle.*

**Définition 1.7.2.** *Un point d'équilibre $a$ de* (1.41) *est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(a)$ ont les parties réelles négatives, il est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(a)$ ont les parties réelles positives et il est appelé point selle (col) si au moins une valeur propre de la matrice $A = Df(a)$ a la partie réelle positive et au moins une valeur propre a la partie réelle négative.*

**Définition 1.7.3.** *Deux systèmes autonomes sont dits topologiquement équivalent, dans un voisinage de l'origine (ou bien ont la même structure), s'il y a un homéomorphisme $H$ appliquant l'ouvert $\mathbb{U}$ contient l'origine à l'ouvert $\mathbb{V}$ contenant l'origine qui transforme les trajectoires du premier système dans $\mathbb{U}$ vers les trajectoires du deuxième système dans $\mathbb{V}$ et préserve la direction du temps.*

**Exemple 1.7.1.** *Considérons les deux systèmes linéaires :*

$$\dot{x} = Ax \tag{1.43}$$

$$\dot{y} = By \tag{1.44}$$

*avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

*Soit* $H(x) = Rx$

*avec*

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*et*

$$R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*On a* $B = RAR^{-1}$.

*Soit* $y = H(x) = Rx$ *ou* $x = R^{-1}y$

*alors*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= R\dot{x} \\ &= RAx \\ &= RAR^{-1}y \\ &= By. \end{aligned}$$

**Théorème 1.7.1.** *(Hartman-Grobman) :*
*Soient* $\mathbb{U}$,$\mathbb{V}$ *deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *contenant l'origine et soient* $f \in C^1(\mathbb{U})$ *et* $\phi_t$ *le flot du système non linéaire* (1.41). *Supposons que l'origine est un point d'équilibre hyperbolique. Alors il existe un homéomorphisme* $H$ *de l'ouvert* $\mathbb{U}$ *contenant l'origine vert l'ouvert* $\mathbb{V}$ *contenant l'origine tel que pour chaque* $x_0 \in \mathbb{U}$, *il y a un intervalle ouvert* $\mathbb{I}_0 \subset \mathbb{R}$ *contenant 0 et pour tout* $t \in \mathbb{I}_0$.

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0).$$

*i.e :H applique les trajectoires du système non-linéaire* (1.41) *vers les trajectoires de son linéarisé* (1.42) *et préserve la direction du temps.*

**Théorème 1.7.2.** *Considérons le système* (1.41) *avec son linéarisé* (1.42). *Si toutes les*

*valeurs propres de $A$ ont leurs parties réelles négatives alors $a$ est localement asymptotiquement stable.*
*S'il existe en moins une valeur propre de $A$ a partie réelle positive, alors $a$ est instable.*

**Exemple 1.7.2.** *Considérons le système de pendule avec frottement :*

$$\begin{cases} \dot{x} &= & y \\ \dot{y} &= & -ry - \frac{g}{l}\sin(x) \end{cases} \tag{1.45}$$

*Avec les points d'équilibres $(n\pi, 0)$ pour tout entier $n$, la matrice jacobienne au point $(n\pi, 0)$ est :* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l}(L)^{n+1} & r \end{pmatrix}$,
*et les valeurs propres sont :*

$$\lambda_{1,2} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + (1)^{n+1} - \frac{4g}{L}}}{2}.$$

*Si $n$ est pair alors les deux valeurs propres sont a partie réelle négative. D'où le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable.*
*Si $n$ est impair alors les deux valeurs propre sont réelles de signe opposés :*

$$\lambda_1 = \frac{r - \sqrt{r^2 + \frac{4g}{L}}}{2} < 0 < \lambda_2 = \frac{r + \sqrt{r^2 + \frac{4g}{L}}}{2}.$$

*D'où le point d'équilibre est un point selle (instable).*

*La figure* (1.8) *illustre le portrait de phase correspondant.*

## 1.8 Méthode direct (fonction de Lyapunov)

La stabilité d'un point d'équilibre hyperbolique $a$ de (1.41) est bien déterminé par les signes des parties réelles des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(a)$. La stabilité

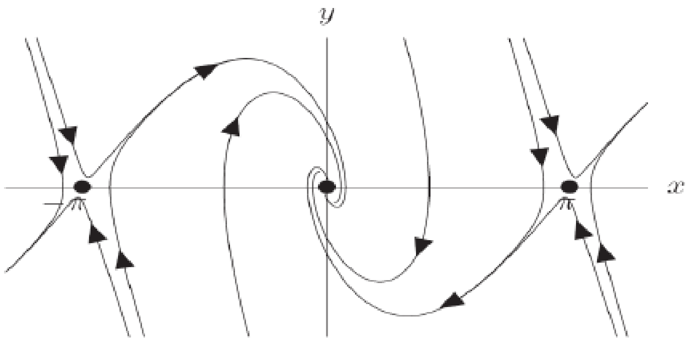


FIGURE 1.8 – Portrait de phase du pendule avec frottement

d'un point d'équilibre non-hyperbolique est typiquement plus difficile $a$ déterminer. Dans cette section nous présentons la seconde méthode de Lyapunov qui est très utile pour déterminer la stabilité d'un tel point d'équilibre.

**Définition 1.8.1.** *Si* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *admet des dérivées partiales par rapport à chaque composant de* $x$*, alors nous définissons le gradient de* $V$ *comme étant la fonction vectorielle.*

$$grad(V(x)) = [\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \frac{\partial\ V}{\partial x_2}(x), \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)].$$

**Définition 1.8.2.** *Soit* $a$ *un point d'équilibre de*(1.41)*. La fonction continument différentiable sur l'ouvert* $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ *contenant* $a$ *est appelée fonction de Lyapunov pour le système* (1.41) *sur* $\mathbb{U}$ *si :*

1. $V(a) = 0$.

2. $V(x) > 0$ *pour* $x \in \mathbb{U} - \{a\}$.

3.

$$grad(V(x)).f(x) \leqslant 0 \tag{1.46}$$

*Pour* $x \in \mathbb{U}$.

*Si l'inégalité* (1.46) *est stricte pour* $x \in \mathbb{U} - \{a\}$, *alors* $V$ *est appelée fonction de Lyapunov stricte pour le système* (1.41) *sur* $\mathbb{U}$.

*Notons que* (1.46) *implique que si* $x \in \mathbb{U}$, *alors :*

$$\frac{d}{dt}V(\phi(t,x)) = grad(V\phi(t,x))f(\phi(t,x)) \leqslant 0.$$

*Le long du trajectoire* $\phi(t,x)$ *dans* $\mathbb{U}$. *Alors* $V$ *diminuer le long des orbites résidant dans* $\mathbb{U}$.

**Théorème 1.8.1.** *Si* $V$ *est une fonction de Lyapunov pour le système* (1.41) *dans l'ouvert* $\mathbb{U}$ *contenant le point d'équilibre* $a$, *alors* $a$ *est stable.*

*Si* $V$ *est une fonction de Lyapunov stricte, alors* $a$ *est asymptotiquement stable.*

**Exemple 1.8.1.** *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = & -x + x.y^2 \\ \dot{y} = & -y + 3x^2y \end{cases} \tag{1.47}$$

*L'origine est un point d'équilibre pour ce système.*

*Soit la fonction* $V$ *définie par* $V(x,y) = ax^2 + by^2$, *avec* $a$ *et* $b$ *deux réels positifs à déterminer.*

*On a* $V(0,0) = 0$ *et* $V(x,y) > 0$ *pour tout* $(x,y) \neq (0,0)$.

*Et*

$$grad(V(x)).f(x) = -2ax^2 - 2ax^2y^2 - 2by^2 + 6bx^2y^2.$$

*Choisissons* $a = 3, b = 1$ *pour éliminer deux termes. Dans ce cas :*

$$grad(V(x)).f(x) = -6x^2 - 2y^2 < 0, si(x, y) \neq (0, 0).$$

*Par conséquent le point d'équilibre* $(0, 0)$ *est asymptotiquement stable.*

# CHAPITRE 2

# SYSTÈMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES ET HYPER CHAOTIQUES

En général il n y a pas de définition rigoureuse du chaos, car ce phénomène est plus une notion philosophique qu'une notion scientifique. On peut observer le phénomène du chaos dans plusieurs domaines, mais comment le formaliser ?. La réponse est négative car jusqu'à l'heure actuelle, il n'existe pas une théorie générale qui donne une explication ou une caractérisation finale de ce phénomène. Tout ce qu'il est possible de dire est qu'il existe plusieurs critères physiques qui permettent de confirmer qu'un système est chaotique.
On appelle donc un système dynamique chaotique, un système qui dépend d'un ou de plusieurs paramètres et qui est caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Il n'est pas déterminé ou modélisé par des systèmes d'équations linéaires ni par les lois de la mécanique classique.

## 2.1 Propriétés du chaos

Les définitions et les propriétés suivantes permettent d'analyse qualitativement les points marquants des système chaotique.

### 2.1.1 La non-linéarité :

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire par contre un système linéaire ne peut pas être chaotique.
La notion de système dynamique est relative a tous les système dont l'évolution dépend du temps. En général, pour prévoir des phénomènes réels générés par ces systèmes, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire.
Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause.

### 2.1.2 Le déterminisme :

Un système chaotique a des règle fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes. Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire(de calculer), son évolution au cours du temps : la connaissance exacte de l'état du système à un instant donné, (l'instant initiale) permet le calcule précis de l'etat de systéme à n'importe quel autre moment.

### 2.1.3 La Sensibilité aux conditions initiales :

Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les

prédications exactes sont impossible.
Une autre propriété des phénomènes chaotiques est qu'ils sont très sensibles aux perturbations. L'un des premiers chercheurs à s'en être aperçu fut Edward Lorenz [] qui s'intéressait à la météorologie et par conséquent aux mouvement turbulents d'un fluide comme l'atmosphère. Lorenz venait de découvrir que dans des systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des trajectoires totalement différentes. Il illustré ce fait par l'effet papillon. Il est clair que la moindre erreur ou imprécision sur la condition initiale ne permit pas de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et en conséquence de faire une prédiction sur l'évolution à long terme du système, une des propriétés essentielles du chaos est donc bien cette sensibilité aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant des taux de divergence des trajectoires. En effet deux orbites chaotiques initiées avec des conditions initiales très voisines vont diverger et s'écarter l'une de l'autre très rapidement. La vitesse de divergence de deux orbites initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapunov afin de caractériser la nature du chaos observé.

### 2.1.4 Espace de phases

**Définition 2.1.1.** *L'espace des phases est l'ensemble des états possibles d'un système dynamique, on peut également le définir comme un espace abstrait dont chaque variable représente une dimension nécessaire à la description du système à moment donné, le degré de liberté caractérise l'espace des phases. Il représente l'ordre qui est égal à la dimension de l'espace d'état.*

### 2.1.5 Attracteurs chaotiques

L'attracteur chaotique (ou étrange) est une forme géométrique complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.

**Définition 2.1.2.** *Soit $A$ un ensemble de $R^n$ ; $A$ est un attracteur, alors $A$ est appelé* *attracteur étrange si il est chaotique (l'attracteur vérifié la notion de sensibilité aux conditions initiales), Un lecteur intéressé pourra consulter.*

**Définition 2.1.3.** *Un sous-ensemble borné $A$ de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation $T$ de l'espace s'il existe un voisinage $V$ de $A$ ; c'est à dire que pour tout point de $A$ il existe une boule contenant ce point et contenue dans $V$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Attraction : $V$ est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par $T$ dont le point initial est dans $V$, est entièrement contenue dans $V$. De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de $A$ que l'on veut.*

2. *Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. sa dimension est fractale( non entière).*

3. *Presque toute trajectoire sur l'attracteur à la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point, chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.*

4. *Deux trajectoires proches à l'instant $t$ voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).*

### 2.1.6 Exposants de Lyapunov

Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité est appelée " exposant de Lyapunov " qui est souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$. On définit un exposant de Lyapunov $\lambda$ comme suit :

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \mid f^{'}(x_{i-1}) \mid .$$

Soit un système dynamique d'ordre quatre et soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $\lambda_4$ les exposants de Lyapunov, satisfaisant $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$.
Alors ce système comporte de la manière suivante :

- Si $\lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Il s'agit d'un point d'équilibre asymptotiquement stable.

- Si $\lambda_1 = 0, \lambda_4 < \lambda_3 < \lambda_2$. Il s'agit d'un cycle limite stable.

- Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < \lambda_4 < 0$ et $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i < 0$. Il s'agit d'un système chaotique.

- Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$ et $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i < 0$. Il s' agit d' un système hyper chaotique.

**Exemple 2.1.1.** ***L'attracteur de Lorenz***
*On considère l'exemple célèbre le système de Lorenz3 ( [12]). Le dynamique de ce système est donne par :*

$$\begin{cases} \dot{x} &=& \sigma(y-x), \\ \dot{y} &=& (r-z)x-y, \\ \dot{z} &=& xy-bz, \end{cases} \tag{2.1}$$

*Avec les paramètres $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28,$*

*les attracteurs de ce système sont présentés dans le figure* (2.1).

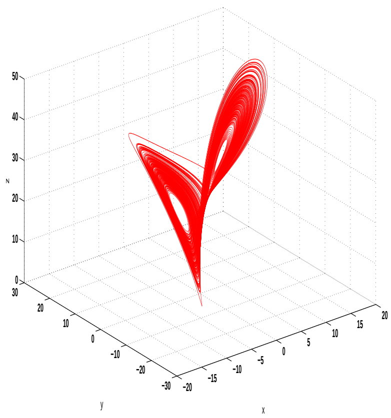

FIGURE 2.1 – L'attracteur de Lorenz3

### Dissipation et existence de l'attracteur

*La divergence du système est donnée par :*

$$div f = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$$

*Ce qui donne :*

$$div f = -\sigma - 1 - b < 0$$

*Par conséquent ce système est dissipatif*

## Points d'équilibre

*Les points fixes sont les solutions de système :*

$$\begin{cases} \sigma(y - x) & = & 0 \\ (r - z)x - y & = & 0 \\ xy - bz = 0ee & & \end{cases}$$

*Après un calcule simple, on trouve que :*

$P_0 = (0, 0, 0)$

$P_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$

$P_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1).$

*Les exposants de Lyapunov de ce système est présente dans le figure* (2.2)

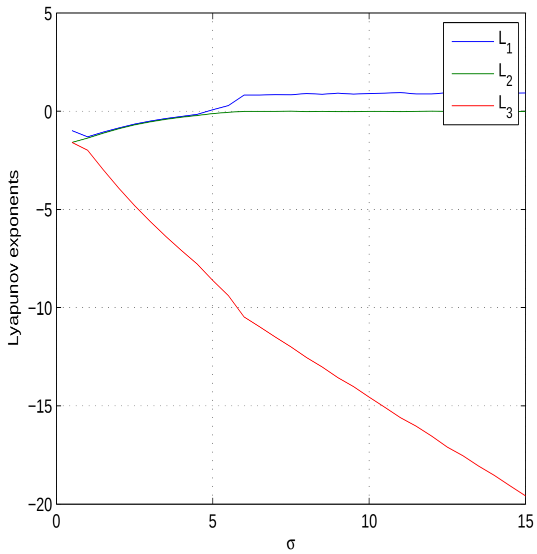


FIGURE 2.2 – Les Exposants de Lyapunov de système de Lorenz

*D'après la figure* (2.2), *si* $\sigma = 10$,

*on a ;* $L_1 = 0,9018$,

$L_2 = 0$,

$L_3 = -14,56$,

*ce qui assure que le système de Lorentz avec les paramètres donnés* $\sigma = 10$,
$b = 8/3, r = 28$ *est bien chaotique.*

# CHAPITRE 3

# SYNCHRONISATION PROJECTIVE

L'origine du mot synchronisation est une racine grecque ($\sigma\gamma\grave{u}\chi\rho\bar{o}\nu\varsigma$ qui signifie "partager le temps commun"). Le sens original de synchronisation a été maintenu jusqu'à présent dans l'usage familier de ce mot, comme un accord ou corrélation dans le temps des différents processus.

Dans la littérature ils existent plusieurs types de synchronisation, citons parmi eux : Synchronisation identique (complète) et synchronisation généralisée. la synchronisation complète a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnel des systèmes dynamiques. Elle peut être détectée non seulement dans les systèmes autonomes, mais aussi dans les systèmes non autonomes, et elle est basée sur les propriétés d'accouplement de deux systèmes ou plus, si ces systèmes sont identiques, on parle de la synchronisation identique, et s'ils sont différents on parle de la synchronisation généralisée.

Dans ce travail, on s'intéresse seulement à la synchronisation projective (SP). Pour définir (SP) par un schéma de couplage unidirectionnel, considérons le système couplé suivant :

$$\dot{x} = Ax + f(x) \tag{3.1}$$

$$\dot{y} = By + g(y), \tag{3.2}$$

où $x$ est le vecteur d'état du système maître de dimension $n$, $y$ est le vecteur d'état du système esclave de dimension $m$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sont des parties non linéaires des systèmes (3.1) et (3.2) respectivement et $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sont des parties linéaires des systèmes (3.1) et (3.2) respectivement. Nous supposons que les deux systèmes sont chaotiques.

Les trajectoires chaotiques des deux systèmes (3.1) et (3.2) sont dits synchronisées dans un sens (SP) s'il existe une transformation $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, (m > n)$ qui est capable d'appliquer asymptotiquement des trajectoires de l'attracteur du système émetteur dans celles de l'attracteur du système récepteur $y(t) = \varphi(x(t))$, indépendamment des conditions initiales dans le bassin de la tubulure de synchronisation $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n\times m}, y = \varphi(x)\}$. C'est-à-dire

$$\lim_{t\to\infty} \parallel y - \varphi(x) \parallel = 0. \tag{3.3}$$

La synchronisation par la méthode du contrôle continu consiste à choisir le système (3.1) comme système émetteur (maître), et on choisit le système (3.2) comme système récepteur (esclave) qu'on réécrit sous la forme :

$$\dot{y} = By + g(y) + u(y, x), \tag{3.4}$$

où $u(y, x) = u(u_1, u_2, \cdots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$ est un paramètre de contrôle désiré de sorte que ces deux systèmes chaotiques peuvent être synchronisés.

Soit :

$$e = y - \varphi(x).$$

Alors :

$$\dot{e} = \dot{y} - D_{\varphi}(x)\dot{x},$$

i.e

$$\begin{aligned} \dot{e} &= By + g(y) + u - D_{\varphi}(x)f(x) \\ &= Be(t) + H + u, \end{aligned}$$

telle que

$$H = -Be(t) + By + g(y) - D_{\varphi}(x)f(x), \tag{3.5}$$

et $D_{\varphi}(x)$ est la matrice jacobienne de $\varphi$ définie par :

$$D_{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Pour éliminer les termes non linéaires dans l'équation (3.5), choisissons $u$ tq :
$u = -H + Qe(t)$, avec $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nouvelle matrice choisis de telle sorte que le systéme

$$\dot{e}(t) = (B + Q)e(t) \tag{3.7}$$

devient stable.

## 3.1 Simulation numérique

### 3.1.1 Simulation des systèmes $3D$ et $4D$

Supposons comme système émetteur, le système de Lü [13] suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -a_1x_1 + a_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= c_1x_1 - a_1x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - b_1x_3, \end{cases} \tag{3.8}$$

où $a_1, b_1, c_1$ sont des paramètres réels, avec $a_1 = 2.0, b_1 = 1, c_1 = 9$.
Les attracteurs du système (3.8) sont présentés dans la figure (3.1).

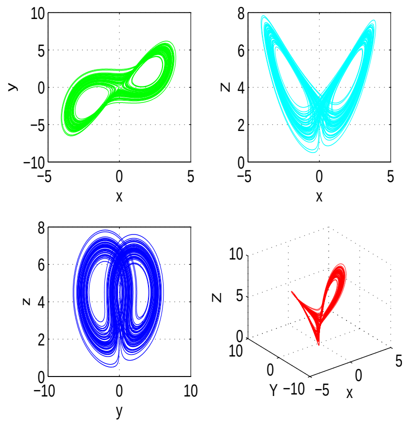


FIGURE 3.1 – Les attracteurs de Lü

Supposons aussi comme système récepteur le système de Lorenz de l'ordre quatre [12] (avec un contrôle ajouté) suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= a_2(y_2 - y_1) + y_4 + u_1, \\ \dot{y}_2 &= -y_1y_3 + r_2y_1 - y_2 + u2, \\ \dot{y}_3 &= y_1y_2 - b_2y_3 + u_3, \\ \dot{y}_4 &= -y_2y_3 + d_2y_4 + u_4, \end{cases} \tag{3.9}$$

où $a_2 = 10$, $b_2 = 8/3$, $r_2 = 28$ et $d_2 = -1$.

Les attracteurs de ce système pour les valeurs données sont présentés dans la figure (3.2).

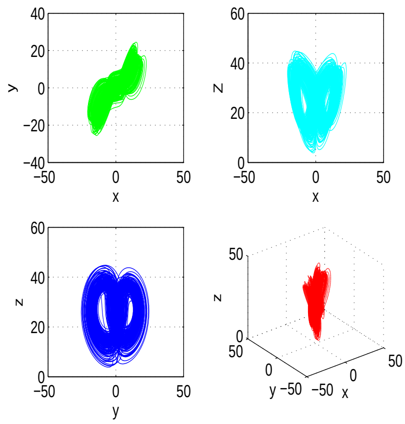


FIGURE 3.2 – Attracteurs de Lorenz4

La partie linéaire de (3.9) est

$$B = \begin{pmatrix} -a_2 & a_2 & 0 & 1 \\ r_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

Notre objectif est de trouver un contrôle $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ de tel sorte que les trajectoires du système récepteur (3.9) s'approche au système d'émetteur (3.8).

Pour cela, on définie le système erreur comme suit :

$$e = y - \varphi(x).$$

Ici, choisissons :

$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x))^T = (4x_2, 100(x_1 + x_3), 3x_1 - x_2, 3x_3)^T$

et

$$Q = \begin{pmatrix} a_2 - 1 & -a_2 & 0 & -1 \\ -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_2 - 1 \end{pmatrix}$$

le système d'erreur (3.7) devient

$$\dot{e}_i = -e_i, \forall i = 1, 2, 3, 4. \tag{3.10}$$

Par suite, toutes les valeurs propres des systèmes (3.10) sont négatives, ce qui implique d'après le critère de la stabilité des systèmes dynamiques, que ce système est stable, et la synchronisation entre les systèmes (3.8), (3.9) soit achevée.

Figure (3.3) montre la synchronisation entre les systèmes (3.8) et (3.9)

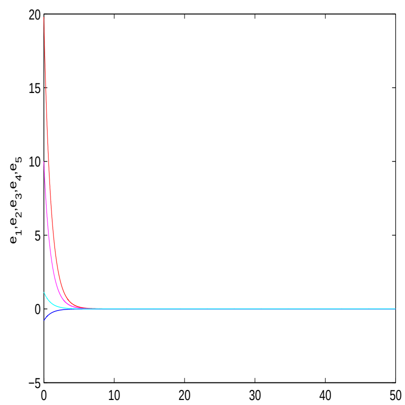


FIGURE 3.3 – evolution erreur de (3.10)

### 3.1.2 Simulation des systèmes $4D$ et $5D$

Dans cette partie, supposons que le système de Lorenz de l'ordre quatre comme système émetteur. Supposons aussi comme système récepteur le système de Lorenz de l'ordre cinq [12] (avec un contrôle ajouté) suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{y}_1 & = & -\sigma y_1 + \sigma y_2 + y_4 + u_1, \\ \dot{y}_2 & = & r_1 y_1 - y_2 - y_1 y_3 - y_5 + u_2, \\ \dot{y}_3 & = & -\beta y_3 + y_1 y_2 + u_3, \\ \dot{y}_4 & = & -y_1 y_3 + k_1 y_4 + u_4, \\ \dot{y}_5 & = & k_2 y_2 + u_5, \end{array}\right. \tag{3.11}$$

Si $\sigma = 10, \beta = 8/3, r_1 = 28, k_1 = 2$, et $k_2 = 3$, Les attracteurs de ce système sont présentés par la figure (3.4).

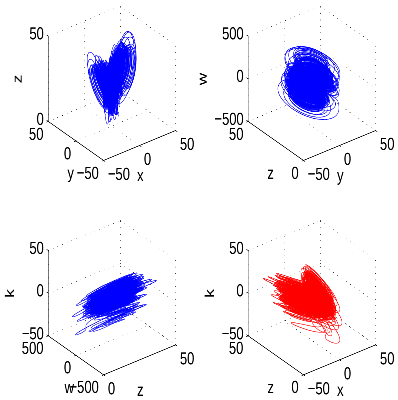

FIGURE 3.4 – Attracteur de Lorenz5

La partie linéaire de (3.11) est :

$$C = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & 1 & 0 \\ r_1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système se comporte hyper chaotiquement avec trois exposants de Lyapunov positifs. Notre objectif est de trouver un contrôle $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ de tel sorte que les trajectoires du système récepteur (3.11) s'approche au système d'émetteur (3.9). Pour cela, on définie le système erreur comme suit :

$$e = y - \varphi(x).$$

Ici, choisissons :
$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x), \varphi_5(x))^T = (x_2, 1/2x_1, 2x_4 - x_1, 3(x_3 - x_4), 3x_3)^T$

et

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma - 1 & -\sigma & 0 & -1 & 0 \\ -r_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_1 - 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système d'erreur (3.7) devient

$$\dot{e}_i = -e_i, \forall i = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{3.12}$$

Par suite, toutes les valeurs propres des systèmes (3.12) sont négatives, ce qui implique d'après le critère de la stabilité des systèmes dynamiques, que ce système est stable, et la synchronisation entre les systèmes $(3.9), (3.11)$ soit achevée.
Figure (3.5) montre la synchronisation entre les systèmes (3.9) et (3.11).

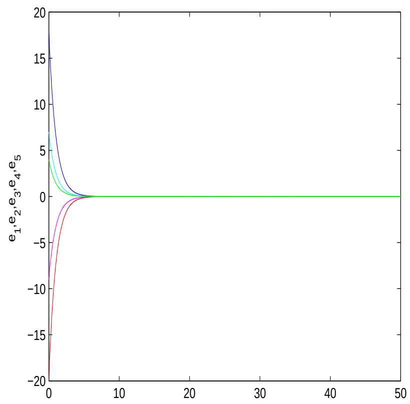


FIGURE 3.5 – evolution erreur de (3.12)

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire, nous avons présenté une étude sur la synchronisation projective des systèmes dynamiques chaotiques et hyper chaotiques. Pour atteindre l'objectif de cette étude nous avons divisé notre mémoire en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des notions de base sur les systèmes dynamiques tels que : la définissons des systèmes dynamiques en temps continu, le théorème fondamentale d'existence et d'unicité pour le système autonome non linéaire et quelques notions de la stabilité d'un système dynamique non linéaire, notamment la méthode indirecte qui basée sur la linéarisation et la méthode directe qui basée sur l'utilisation d'une fonction appelée fonction de Lyapunov.

Le deuxième chapitre est dédié à la théorie de chaos où nous avons discuté les définitions du chaos et ses caractéristiques. Ensuite, nous sommes passés par les moyens de détection du chaos, notamment la sensibilité aux conditions initiales, l'attracteurs chaotiques et les exposants de Lyapunov.

Dans le troisième chapitre nous avons proposé une méthode simple de synchronisation projective de deux différents systèmes chaotiques et hyper chaotiques. Cette méthode est basée sur le critère de stabilité des systèmes linéaires, pour garantir la stabilité du système erreur. Pour cela, nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes pour achever la synchronisation.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] **Li, C.D, Liao, X.F, Wong, K.W.** *Lag synchronization of hyper chaos with application to communications.* Chaos Solitons Fractals 23(1), 183-193 (2005).

[4] **G. Chen, X. Dong** *From Chaos to Order*, World Scientific, Singapore, (1989).

[5] **Y. Sun, J. Cao** *Adaptive synchronization between two different noise-perturbed chaotic systems with fully unknown parameters.* Phys. A 376, 253-265, (2007).

[6] **J. Lu, J. Lu.** *Controlling uncertain Lu system using linear feedback.* Chaos Solitons Fractals 17, 127-133, (2003).

[7] **E. Bai, K. Lonngen.** *Synchronization of two Lorenz systems using active control.* Chaos Solitons Fractals 8, 51-58, (1997).

[8] **J. Cao, Z. Wang, Y. Sun.** *Synchronization in an array of linearly stochastically coupled networks with time delays.* Phys. A 385. 718-728, (2007).

[9] **L. Zhenbo, Z. Xiaoshan.** *Generalized function projective synchronization of two different hyper chaotic systems with unknown parameters, Nonlinear Anal.* Real World Appl. 12, 2607-2615, (2011).

[09] **M. S. Abdelouahab** *Cours Systèmes dynamiques I*, Centre universitaire de Mila, (2013-2014).

[10] **L. Perko.** *equations and dynamical systems Texts in applied mathematics.* Springer, New York, (2006).

[12] **K. S. Ojo et al.** *Increased-order generalized synchronization of chaotic and hyperchaotic systems.* Pramana – J. Phys, Vol. (84), 33-45, (2015).

[13] **A. Chen et all.** *Generating hyperchaotic Lü via state feedback control.* Physica A (364), 103-110, (2006).377.

# *Résumé*

L'objet de ce travail se concentre sur le problème de la synchronisation projective entre deux systèmes chaotiques et hyper chaotiques dans différentes dimensions, en utilisant la théorie de la stabilité du système linéaire. Le contrôleur est conçu pour assurer la synchronisation entre ces systèmes. Les exemples numériques et les simulations informatiques sont utilisés pour valider numériquement les schémas de synchronisation proposes.

**Mots-clés :**
Systèmes chaotiques, Systèmes hyper chaotiques, Accouplement unidirectionnel ; Synchronisation projective.

# *Abstract*

The purpose of this work centers on projective synchronization problem between two chaotic and hyper chaotic systems in different dimensions, by utilizing the stability theory of lineair system. The controller is designed to ensure that the synchronization between these systems is achieved. Numerical examples and computer simulations are used to validate, numerically, the proposed synchronization shemes.

**key words :**
chaotic systems, hyper chaotic systems ; Coupling unidirectional, Synchronization projective.