الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالــي والبحــث العلمــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire de MILA

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Contrôlabilité de l'équation de la chaleur

Préparé par: Boukedjani Sarra

Leknouche Selma

Devant le jury

Benaouicha Lobna	(M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Présidente
Labed Boudjema	(M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
Meskin Habiba	(M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examinateur

Année Universitaire : 2016/2017

Remerciements

Au terme de ce travail, nous commençons par remercier DIEU pour nous avoir donné la volonté et le courage pour terminer ce modeste travail.
Nous tenons à remercier vivement notre encadreur de ce travail le professeur **Labed Boudjema** qui a accepté de diriger notre travail.
Sa confiance en nous, ses conseils et ses suggestions nous donnaient plus de force et de courage pour aller plus loin, sa compétence scientifique ainsi que ses discussions.
Nous exprimons également notre gratitude à tous les enseignants et professeurs de département de Mathématiques et Informatique du centre universitaire de Mila à notre formation depuis notre premier cycle d'étude jusqu'à la fin de notre cycle universitaire, et on remercie nos familles et nos amis pour leurs grand soutien.
Nos remerciement les plus vifs s'adressent aussi aux messieurs le président et les membres de jury d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer notre travail.

Table des matières

Notations générales

On note par :

$\|.\|, N$: un norme.

E : espace vectoriel.

$(E, \|.\|)$: espace vectoriel normé.

F : sous-espace vectoriel.

$L(E, F)$: ensemble des applications linéaires.

$\bar{B}(0, 1)$: la boule fermé unité.

H : espace de Hilbert.

X : espace de Banach.

Ω : domaine borné (ouvert) de $\mathbb{R}^n$.

$\langle ., . \rangle$: produit scalaire.

f : fonction.

L^p : espace de Lebesgue.

$C_c(\Omega)$: l'espace des fonctions continues à support compact.

$C_c^\infty(\Omega)$: l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact.

$L^1(\Omega)$: l'espace des classes des fonctions intégrables.

$\hat{f}$: la transforme de Fourier de f.

$\mathsf{D}(\Omega)$: la distribution.

$C^m(\Omega)$: les espace de fonction de classe m.

$\Gamma = \partial(\Omega)$: le frontière.

$D(A)$: domaine de définition de A.

$B(H)$: l'ensemble des opérateurs linéaire borné.

A : désigne un opérateur.

A^* : désignera l'opérateur adjoint de A.

$[0, T]$: interval de temps, $T > 0$.

$L^p(0, T; X)$: l'espace des fonctions f fortement mesurables sur $]0, T[$ à valeurs dans X.

∂_t : désigne $\dfrac{\partial}{\partial_t}$.

$(S(t))_{t \geq 0}$: semi-groupe fortement continu.

$R(T, u_0)$: l'espace des états atteignables au temps T en partant de u_0.

Introduction Générale

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

Le développement de ces sciences nécessite résolution ces équations et souvent numériquement afin d'obtenir des propriétés quantitatives des solutions. La phase de la modélisation de ces phénomènes passe en partie en meilleure compréhension les propriétés des solutions et des équations, elle consiste à représenter le phénomène à étudier par des systèmes des équations Mathématiques et à préciser aguerrissement le cadre fonctionnel où l'on travail prenant en compte toutes les données connues concernant le phénomène.
L'osque ces systèmes faite apparaitre un variable d'espace s'appellent systèmes distribués.

La notion de la contrôlabilité a été inventée dans les années 60 par **Kalman, Bertram**, et **Bellman** à propos des systèmes linéaires contiennent un variable d'espace de contrôle, l'état de système dépend du variable de cet espace et d'un variable caractérisant l'espace géométrique sur lequel le système est défini.

Pour les systèmes de contrôle linéaires, un système de contrôle est dit contrôlable si on est capable de l'amener d'un point initial arbitraire vers un point final souhaité.

Le but de ce travail est d'étudier la contrôlabilité de l'équation de la chaleur.

Organisation du mémoire

Ce mémoire est organisé en trois chapitres qui sont présenté comme suit :

Le 1^{er} **chapitre**, nous rappelons quelques notions d'espaces et d'inégalités principales, nous parlerons aussi de l'opérateur maximal monotone et la théorie des semi-groupes sa définition et ses propriétés.

Le $2^{ème}$ **chapitre**, nous présenterons la contrôlabilité et caractérisation de contrôlabilité.

Le $3^{ème}$ **chapitre**, nous présenterons la contrôlabilité de l'équation de la chaleur.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Les normes

Définition 1.1. *On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que :*

1. $\forall x \in E,\ \ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ *(séparation).*
2. $\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{k},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *(homogénéité).*
3. $\forall (x, y) \in E \times E,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire).*

1.1.1 Notation et vocabulaire

On note : $N(x) = \|x\|_E$ ou $N(x) = \|x\|$. On appelle espace vectoriel normé tout couple $(E, \|.\|)$ où $\|.\|$ est une norme sur E.

Remarque 1.1. *D'après 2 avec $\lambda = 0$, il vient $N(0) = 0$.*
La condition $\forall x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ serait superflue dans la définition : d'après 3 et ce qui précède on a :

$$\forall x \in E : 0 \leqslant N(0) \leqslant N(x - x) \leqslant N(x) + N(-x) \leqslant N(x) + \mid -1 \mid N(x) \leqslant 2N(x),$$

d'ou $N(x) \geq 0$.
Si la propriété (séparation), n'est pas vérifiée, on dit que N est une semi-norme.

Contrairement aux espaces euclidiens, deux vecteurs non liés peuvent réaliser l'égalité triangulaire.
Considérer dans $\mathbb{R}^n$, $x = (1, 1, 0, \cdots, 0)$ *et* $y = (1, 0, \cdots, 0)$ *avec la norme*

$$\| x \| = \sup_{i \in \{1; \cdots; n\}} |x_i|.$$

On a alors $\|x\| = \|y\| = 1, \|x + y\| = 2,$ *donc* $\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$ *et pourtant* x *et* y *ne sont pas (positivement) liés.*

1.1.2 Une propriété utile :

Inégalité triangulaire renversée

$$\forall (x, y) \in E \times E; \ | \ \|x\| - \|y\| \ | \leq \|x - y\|.$$

Cette propriété est importante elle permettra d'affirmer que toute norme N est continue sur E.
(Pour démontrer la propriété, on écrit $x = (x - y) + y$ et $y = (y - x) + x$ puis on utilise l'inégalité triangulaire).

1.1.3 Norme sur un sous-espace vectoriel :

Si F est un sous-espace vectoriel de E la restriction de N a F est évidemment une norme sur F appelée norme induite.

1.1.4 Distance associée à une norme :

A partir de toute norme N sur E, on peut construire une distance d par :

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longmapsto \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto N(x - y). \end{aligned}$$

Ainsi tout espace vectoriel normé est un espace métrique et la norme N engendre une topologie sur E.

Noter qu'il existe des distances ne découlant pas d'une norme, comme par exemple, la distance discrète :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y. \end{cases}$$

En effet, l'application N obtenue en posant $N(x) = d(x,0)$ ne vérifie pas l'axiome d'homogénéité.

1.1.5 Normes usuelles :

1. $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$x \longmapsto |x|.$$

2. $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$:

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, p \in [0; +\infty[: x \longmapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{P}}$$

(sur tout pour $p = 1$ ou 2).

3. $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$:

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x \longmapsto \|x\|_\infty = \sup_{i \in \{1, \cdots, n\}} |x_i|.$$

4. Norme d'un application linéaire continue $u \in L(E,F)$ où $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés de dimension finie :

$$u \longmapsto \|u\| = \sup_{x \in \bar{B}(0,1)} \|u(x)\|_F$$

où $\bar{B}(0,1)$ désigne la boule fermée unité :

$$\bar{B}(0,1) = \{x \in E \text{ tels que } \|x\|_E \leq 1\}.$$

Note : une application linéaire $u \in L(E,F)$ est continue si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E$:

$$\|u(x)\|_F \leq M \|x\|_E.$$

5. $E = R_n[x]$:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R_n[x] : p \longmapsto \|p\| = \sup_{i \in \{0,\cdots,n\}} |a_i|.$$

1.1.6 Normes équivalentes :

Définition 1.2. *Deux normes N_1, N_2 sur E sont dit équivalents si :*
$\exists (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ *tels que :*

$$\forall x \in E : \lambda N_1(x) \leq N_2(x) \leq \mu N_1(x).$$

On note alors $N_1 \sim N_2$ sur E, la relation ainsi définie est bien une relation d'équivalence :

- *On a $N_1 \sim N_1$ en choisissant $\lambda = \mu = 1$ d'ou la réflexivité.*
- *Si $\lambda N_1(x) \leq N_2(x) \leq \mu N_1(x)$ alors :*

$$\frac{1}{\mu} N_2(x) \leq N_1(x) \leq \frac{1}{\lambda} N_2(x)$$

d'ou la symétrie.

- *Si $\lambda N_1(x) \leq N_2(x) \leq \mu N_1(x)$ et $\lambda N_2(x) \leq N_3(x) \leq \mu N_2(x)$ alors :*

$$\lambda \lambda N_1(x) \leq N_3(x) \leq \mu \mu N_1(x)$$

d'ou la transitivité.

Remarque 1.2. *Deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si et seulement si l'application*

$$Id : (E, N_1) \longmapsto (E, N_2)$$

est bicontinue (ou encor "si l'identité est un homéomorphisme").
Deux norme N_1 et N_2 sont non équivalentes si et seulement si il existe une suite (x_n) d'éléments de E telle que : la suite $\left(\dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \right)$ ne soit pas bornée.

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.3. *Soit H un espace vectoriel réel ou complexe. Un produit scalaire est une application $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ si H un espace vectoriel complexe et $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ si H un espace vectoriel réel, vérifiant :*

i) $\forall y \in H : x \mapsto \langle x, y \rangle$ et linéaire.

ii) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$.

iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ et si $\langle x, x \rangle = 0$ alors $x = 0$.

Par conséquent $y \to \langle x, y \rangle$ est anti-linéaire (en y) si H un espace vectoriel complexe.

Définition 1.4. *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel (réel ou complexe) mini du produit scalaire.*

Lemme 1.1. *Soit H un espace préhilbertien. Alors pour tous $x, y \in H$ on a :*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

Preuve

On a

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2Re\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Proposition 1.1. *(Inégalité de Cauchy Schwarz)*
Soit H un espace préhilbertien. Alors pour tous $x, y \in H$ on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Preuve

Soient $x, y \in H$ et soit $\lambda \in K$, $|\lambda| = 1$ tel que

$$\lambda\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|.$$

On a $\forall \mu \in R; \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y\rangle \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y\rangle &= \lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle + \lambda\bar{\mu}\langle x, y\rangle + \mu\bar{\lambda}\langle y, x\rangle + \mu\bar{\mu}\langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + 2Re\lambda\bar{\mu}\langle x, y\rangle + |\mu|^2\langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + 2\mu\langle x, y\rangle + |\mu|^2\langle y, y\rangle \\
&= \mu^2\langle y, y\rangle + 2|\langle x, y\rangle|\mu + \langle x, x\rangle \geq 0, \forall \mu \in R.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Delta \leq 0 &\iff |\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0 \\
&\implies |\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle.\langle y, y\rangle.
\end{aligned}$$

Alors

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Corollaire 1.1. *Soit H un espace préhilbertien. Alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ défini une norme.*

Définition 1.5. *On dit que deux vecteurs x, y d'un espace vectoriel complexe sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle ., .\rangle$ si $\langle x, y\rangle = 0$.*

Définition 1.6. *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire.*

Définition 1.7. *Soit H un espace de Hilbert et H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels.*

On dit que H est la somme direct orthogonale de H_1 et H_2, notée $H = H_1 \oplus^{\perp} H_2$ si $H = H_1 + H_2$, $H_1 \cap H_2 = 0$ et $\forall x_1 \in H_1$, $\forall x_2 \in H_2$; $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.

Le complémentaire orthogonale d'un sous-espace $F \in H$ est défini par :

$$F^{\perp} = \{x \in H, \forall y \in F : \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Théorème 1.1. *Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous espace fermé.*
$\forall x \in H$; alors
i) Il existe un unique $y \in F$ qui satisfait :

$$\|x - y\| = d(x, F) = \inf\{\|x - z\|, z \in F\}.$$

On note $y = P_F(x)$. Ceci définit alors une application $P_F : H \to H$.
ii) $P_F(x)$ est l'unique vecteur dans F qui satisfait $(x - P_F(x)) \perp F$.
iii) $\forall x \in H : \|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|P_{F^\perp}(x)\|^2$.
iv) L'application $P_F : H \to H$ est linéaire et continue. C'est la projection sur F le long $F^\perp$.
v) Le complémentaire orthogonal $F^\perp$ est un sous espace fermé de H et $H = F \oplus F^\perp$.

Preuve :

Pour i) :

pour $\varepsilon > 0$; prenons $y, z \in F$ et supposons que :

$$d(x,y)^2 \leq d(x,F)^2 + \varepsilon \text{ et } d(x,z)^2 \leq d(x,F)^2 + \varepsilon.$$

Posons $\omega = \frac{y+z}{2}, u = \frac{y-z}{2}$ de telle façon que $\omega \in F, y = \omega + u, z = \omega - u$. D'après l'identité du parallélogramme on a :

$$\begin{array}{rcl} \|(x-\omega)+u\|^2 + \|(x-\omega)-u\|^2 & = & 2(\|x-\omega\|^2 + \|u\|^2) \\ \dfrac{\|x-z\|^2 + \|x-y\|^2}{2} & = & d(x,\omega)^2 + \dfrac{1}{4}d(y,z)^2 \\ d(x,F)^2 + \varepsilon & > & d(x,F)^2 + \dfrac{1}{4}d(y,z)^2 \\ d(y,z) & < & 2\sqrt{\varepsilon}. \end{array}$$

Soit maintenant $(y_n) \in F$ une suite telle que $d(x, y_n) \to d(x, F)$. Alors d'après notre calcul c'est une suite de Cauchy qui doit donc converger vers un $y \in F$ (puisque H est complet et F est ferme).

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \lim_{n\to+\infty} d(x,y_n) \\ &= d(x,F). \end{aligned}$$

Pour unicité supposons que $z \in F$ vérifier lui aussi $d(x,z) = d(x,F)$.

Alors encore d'après le calcule précédent $d(y,z) < 2\sqrt{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui donne $d(y,z) = 0$ alors $y = z$. Ceci montre le premier point et donc l'existence de l'application P_F.

Pour ii) :

supposons que $x - P_F(x)$ n'est pas orthogonale de F.
Il existe donc $z \in F$ tel que $\langle x - P_F(x), z\rangle = s \neq 0$, nous pouvons supposer que

$$\langle x - P_F(x), z\rangle = 1.$$

Soit encore t une variable réelle. Alors $P_F(x) + tz \in F$ et on a :

$$\begin{aligned} d(x, P_F(x) + tz)^2 &= \|x - P_F(x) - tz\|^2 \\ &= t^2\|z^2\| - 2t + \|x - P_F(x)\|^2. \end{aligned}$$

Ce polynôme en t atteint son minimum ailleurs qu'à $t = 0$, donc

$$d(x,F) < d(x, P_F(x)),$$

une contradiction au choix de $P_F(x)$.
Nous avons donc

$$x - P_F(x) \perp F.$$

Pour l'unicité, supposons que $x - y \perp F$ et $x - z \perp F$, où $y, z \in F$ (par exemple, on pourrait avoir $y = P_F(x)$) alors

$$y - z \in F,$$

d'où

$$\langle x-y, y-z\rangle = \langle x-z, y-z\rangle = 0,$$

une soustraction donne $\langle y-z, y-z\rangle = 0 \Rightarrow y-z=0 \Rightarrow y=z$.

Pour iii) :

le troisième point découle du deuxième, alors $x - P_F(x) \perp P_F(x)$.

Pour iv) :

on vérifier aisément que :

$$(x+\lambda y) - (P_F(x) + \lambda P_F(y)) = (x - P_F(x)) + \lambda(y - P_F(y)) \in F^\perp$$

d'où

$$P_F(x) + \lambda P_F(y) = P_F(x+\lambda y).$$

D'après (i), P_F est linéaire. Et d'après (iii) nous avons $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ donc P_F est continue (de norme ≤ 1).

Pour v) :

pour tout $x \in H$ nous avons $x = (x - P_F(x)) + P_F(x)$, où $x - P_F(x) \in F^\perp$ et $P_F(x) \in F$, ce qui donne bien $F \oplus F^\perp = H$.

Corollaire 1.2. *Pour tout sous-espace vectoriel fermé $F \subset H$ on a $(F^\perp)^\perp = F$.*

En particulier l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel non fermé est fermé.

En autre F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Corollaire 1.3. *(Théorème de représentation de Riesz)*
Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $y \in H$ tel que pour tout x ; $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$.

En autre, nous avons $\|\varphi\| = \|y\|$ où

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)|, |x| \leq 1\}.$$

Corollaire 1.4. *Un espace de Hilbert H est séparable s'il possédé une suite de points qui est dense dans H.*

Définition 1.8. *Soit H un espace de Hilbert séparable. On appelle base orthonormale de H tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie :*

i) $\|e_n\| = 1$ et $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ si $n \neq m$; $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

ii) Le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans H.

Théorème 1.2. *(Existence des bases orthonormales)*
Tout espace de Hilbert séparable possédé une base orthonormale.

Théorème 1.3. *Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale.*

i) Pour tout $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda_n e_n$ converge dans H et sa somme $x = \sum\limits_{n\geq 0} \lambda_n e_n$ vérifie :

$$\langle x, e_n\rangle = \lambda_n; \quad \|x\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\lambda_n|^2.$$

ii) Pour tout $x \in H$ la série $\sum\limits_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2$ converge et

$$x = \sum_{n\geq 0} \langle x, e_n\rangle e_n; \quad \|x\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

Définition 1.9. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert.*

Une isométrie entre H_1 et H_2 est une application linéaire $U : H_1 \to H_2$ qui satisfait :

$$\forall x \in H_1, \ \|U(x)\| = \|x\|.$$

H_1 et H_2 sont d'isomorphes s'il existe une isométrie bijective entre eux.

Proposition 1.2. *Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach. Soit $F \subset X_1$ un sous espace vectoriel dense (non nécessairement complet).*

Soit $u : F \to X_2$ une application linéaire, et supposons en autre qu'elle est continue (ce qui revient à l'existence d'une constante c telle que pour tout $x \in F$: $\|u(x)\| \leq c\|x\|$).

Alors u admet un unique prolongement en une application linéaire continue

$$\tilde{u} : X_1 \to X_2.$$

1.3 Espace $L^p(\Omega)$:

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les fonctions f seront considérées de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.10. *Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose :*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R},\ tq :\ \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

On vérifie que :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\ \textstyle\int_\Omega |f(x)|^p dx\ \Big)^{\frac{1}{P}} \tag{1.1}$$

défini un norme dans $L^p(\Omega)$.

Définition 1.11. *Pour $p = \infty$, l'espace de Banach $L^\infty(\Omega)$ tel que :*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R},\ tq : \exists c \in \mathbb{R} : |f| \leq c,\ p.p.\ sur\ \Omega\}.$$

est muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c \in \mathbb{R},\ tq : |f| \leq c,\ p.p.\ sur\ \Omega\}.$$

Définition 1.12. *On dit que p et $p^{'}$ sont deux exposants conjugués pour tout $p, p^{'} \in [1; \infty]$ ssi $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^{'}} = 1$. On notera dans toute la suite $p^{'}$ le conjugué de p.*

Proposition 1.3.
1) $\forall p \in [1, +\infty]$ alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach (i.e norme complet).
2) $\forall p \in [1, +\infty[$ alors $L^p(\Omega)$ est séparable $\Longleftrightarrow$ il existe ensemble dénombrable dense dans $L^p(\Omega)$.

Proposition 1.4. *L'espace $L^P(\Omega)$ $(1 < P < \infty)$ muni de la norme (1.1) est complet.*

Proposition 1.5. *Les propriétés suivantes sont classiques :*
i) $L^p(0, 1)$ est réflexif et séparable.
ii) Le dual de $L^p(0, 1)$ est identifié a $L^q(0, 1)$ avec $q = \dfrac{p}{p-1} \in [1, +\infty]$.

Proposition 1.6. *(Inégalité de Minkowski)*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Théorème 1.4. *L^p est un espace vectoriel ; $\forall p \in [1;\infty], \|\ .\ \|_p$ est une norme.*

Théorème 1.5. *(de convergence dominée de Lebesgue pour les espaces L^p).*
On suppose $p \neq \infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que $f_n(x) \to f(x)$ p.p ; si $\exists g \in L^P$; $\forall (x,n) \mid f_n(x) \mid \leq g(x)$. Alors $f \in L^p$ et $f_n \to f$ en norme L^p.

Théorème 1.6. *Les fonctions en escaliers forment un sous-espace vectoriel dense de L^p pour $p \in [1,\infty[$.*

Théorème 1.7. *(de densité)*
L'espace $C^c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^P(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Théorème 1.8. *L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonction infiniment dérivables à support compact est dense dans $L^P(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Proposition 1.7. *L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans le sous espace de L^∞ des fonctions bornées qui tendent vers 0 à l'infini.*

Définition 1.13. *Un espace séparable s'il contient une partie dénombrable dense.*

Proposition 1.8. *$L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Théorème 1.9. *(Représentation de Riesz)*
Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $\phi \in (L^p)'$. Alors $\exists! u \in L^{p'}$ tel que :

$$< \phi, f >= \int uf, \quad \forall f \in L^p.$$

De plus on a $\| u \|_{L^{p'}} = \| \phi \|_{(L^p)'}$. Ce théorème permet d'identifier le dual de L^p à $L^{p'}$.

Définition 1.14. *On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions intégrables sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$ ($\int_\Omega |f| < +\infty$). On pose :*

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)| dx.$$

Définition 1.15. *Soit $J : E \to F$ tel que $J(x) = f \to < f, x >$ un espace E est dit réflexif si J est bijective de E dans F.*

Théorème 1.10. *L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Proposition 1.9. *L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs.*

Exemple : (de la non réflexivité de L^1)

Considérons $0 \in \Omega$ et la suite $f_n = \alpha_n(1)_{B\left(0, \frac{1}{n}\right)}$; avec n assez grand pour que $B(0,n) \subset \Omega$ et α_n tel que $\| f \|_{L^1} = 1$ si L^1 était réflexif, on pourrait avoir à la fois f (limite faible d'une sous suite de f_n) égale a 0 presque partout et $\int f = 1$, ce qui serait absurde.

Théorème 1.11. *(Réciproque du théorème de Lebesgue)*
Soit (f_n) une suite de L^p et $f \in L^p$ telle que $\| f_n - f \|_p \to 0$. Alors il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) telle que :
1) $f_{n_k} \to f(x)$ p.p sur Ω.
2) $\forall k \in N, | f_{n_k} | \leq h(x)$ p.p sur Ω, avec $h \in L^p$.

Remarque 1.3. *On peut souvent utiliser une convergence faible pour démontrer une convergence forte.*

Exemple

Soit $p > 1$ et $(f_n)_{n \in N}$ une suite dans L^p qui converge faiblement vers $f \in L^p$ et telle que $\| f_n \|_p \to \| f \|_p$. Alors f_n converge fortement vers f pour la norme L^p.

Définition 1.16. *Le produit de deux fonctions de L^2 est intégrable.*

Proposition 1.10. *Dans le cas particulier $p = 2$ la relation*

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx;\ \forall f, g \in L^2(\Omega) \tag{1.2}$$

définie un produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, dont la norme associée n'est autre que la norme $\|.\|_{L^2(\Omega)}$ définis dans (1.1) et l'on a :

Proposition 1.11. *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire (1.2) est un espace de Hilbert.*

Remarque 1.4. *Les propriétés de cet espace ont énormément d'application aux séries de Fourier.*

Exemple :Théorème de Plancherel.

A chaque fonction f de L^2, on peut associer une fonction $\hat{f}$ de L^2 de sorte que les propriétés suivantes soient satisfaites :

1) Lorsque $f \in L^1 \cap L^2$, $\hat{f}$ est la transformieé de Fourier de f.

2) $\forall f \in L^2$, on a $\| \hat{f} \|_2 = \| f \|_2$.

3) L'application $f \to \hat{f}$ est un isomorphisme d'espace de Hilbert de L^2 sur L^2.

4) Entre f et $\hat{f}$ existent les relations symétriques suivantes :

en posant

$$\phi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixt} dx \quad \text{et} \quad \psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(x) e^{ixt} dx.$$

On a

$$\lim_{A \to \infty} \| \phi_A - f \|_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{A \to \infty} \| \psi_A - \hat{f} \|_2 = 0.$$

1.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels, des fonctions qui appartiennent à $L^p(\Omega)$ telles que leurs dérivées (au sens faible i.e. au sens des distribution) appartiennent à $L^p(\Omega)$.

1.4.1 Définition ($W^{m,p}(\Omega)$)

Soient $m \in \mathbb{N}$ un entier et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ on définit :

$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega)$ tq $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $\mid \alpha \mid \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega)$ vérifiant :

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha(x) \varphi(x) dx, \forall \varphi \in \mathsf{D}(\Omega)\}.$$

On pose $D^\alpha f = g_\alpha$.

On définit sur $W^{m,p}(\Omega)$ la norme

$$\| f \|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha f \|_{L^p(\Omega)} .$$

Cas particulier :
1) $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.
2) $p = 2 : W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Proposition 1.12. *$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert de produit scalaire donnée par :*

$$\forall f, g \in H^m : \langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 1.5. *$C^m(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ mais l'inverse n'est pas vrai.*

Proposition 1.13. *$\mathsf{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 1.6. *En général $\mathsf{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.*

1.4.2 Définition $(H_0^m(\Omega))$

On définit $H_0^m(\Omega) = \overline{\mathsf{D}(\Omega)}$ (par rapport à la norme de $H^m(\Omega)$) ; c'est-à-dire :

$H_0^m(\Omega) = \{f \in H^m(\Omega);\ \exists(\varphi_k) \in \mathsf{D}(\Omega)$ vérifient : $\| \varphi_k - f \|_{H^m(\Omega)} \rightarrow 0$ tand $k \rightarrow +\infty\}$.

De même $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathsf{D}(\Omega)}$ par rapport à la norme de $W^{m,p}(\Omega)$.

1.4.3 Définition (Dérivée normale)

On définit la dérivée normale d'une fonction f, notée par $\dfrac{\partial f}{\partial v}$, comme étant $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} v_i(x)$ pour tout $x \in \Gamma$.

On pose

$$\begin{array}{rcl}\gamma : \mathsf{D}(\bar{\Omega}) & \to & L^2(\Gamma) \\ \varphi & \to & \gamma(\varphi) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}/\Gamma; \\ \gamma_0 : \mathsf{D}(\bar{\Omega}) & \to & L^2(\Gamma) \\ \varphi & \to & \gamma_0(\varphi) = \varphi/\Gamma. \end{array}$$

L'application γ_0 se prolonge par continuité à $H^1(\Omega)$

$$\begin{array}{rcl}\gamma_0 : H^1(\Omega) & \to & L^2(\Gamma) \\ f & \to & \gamma_0(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n/\Gamma \end{array}$$

(γ_0 est dit l'application de trace).

Théorème 1.12. *Si Γ est de classe C^2 alors γ se prolonge sur $H^2(\Omega)$*

$$\begin{array}{rcl}\gamma : H^2(\Omega) & \to & L^2(\Omega) \\ f & \to & \gamma(f) = \dfrac{\partial f}{\partial v}/\Gamma. \end{array}$$

Définition 1.17. *On appelle espace de sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace :*

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n\}.$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$(f,g)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(fg + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx = (f,g) + (\nabla f, \nabla g) \tag{1.3}$$

et on note :

$$\| f \|_{H^1(\Omega)} = (f,f)^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(f^2 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} = (\| f \|^2_{L^2} + \| \nabla f \|^2_{L^2})^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Proposition 1.14. *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit sca-*

laire (1.3) *désignons par* $D(\Omega)$ *l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables sur* Ω *à support compact dans* Ω.

Définition 1.18. *On définit* $H_0^1(\Omega)$ *comme étant la fermeture de* $D(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$, *c-à-d :*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}.$$

Proposition 1.15. $H_0^1(\Omega)$ *muni de la norme induite par* $H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

1.4.4 Théorème de trace :

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, il existe un opérateur linéaire continue $\gamma_0 \in L(H^1(\Omega), L^2(\partial\Omega))$ tel que :

$$\gamma_0 f = f|_{\partial\Omega}, \forall f \in C^1(\bar{\Omega}).$$

$L^2(\partial\Omega)$ est l'espace de fonctions réelles, de carré intégrable sur $\partial\Omega$.
D'après le théorème de trace, on peut donner la caractérisation suivante des fonctions de $H_0^1(\Omega)$ qui explique le rôle important joué par ce dernier dans la résolution des équations différentielles couplées avec des conditions au bord, c'est-à-dire quand la valeur f est prescrite sur la frontière $\partial\Omega$:

Définition 1.19. *Les fonctions de* $H_0^1(\Omega)$ *sont les fonctions de* $H^1(\Omega)$ *qui s'annulent sur la frontière* $\Gamma = \partial\Omega$,

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega); f = 0 \textit{ sur } \Gamma\} = \textit{le noyau de } \gamma_0.$$

1.4.5 Théorème (de Rellich)

Si Ω est un ouvert borné de classe C^1, alors l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compact, i.e. tout ensemble borné de $H_0^1(\Omega)$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$, on écrit :

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

est compact ($\hookrightarrow$ injection continue) on peut identifier $L^2(\Omega)$ et son dual, alors on a les inclusion :

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injection continues et denses.

Remarque 1.7. *On désigne l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$ par $H^{-1}(\Omega)$.*

Définition 1.20. $(H_0^2(\Omega))$
$H_0^2(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ *(par rapport la norme de $H^2(\Omega)$).*

Proposition 1.16. *Si Γ est de classe C^2, alors $H_0^2(\Omega) = \ker \gamma_0 \bigcap \ker \gamma$ c'est-à-dire :*

$$f \in H^2(\Omega) \text{ tq } f = 0 \text{ p.p sur } \Gamma \quad \text{ et } \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \text{ p.p sur } \Gamma.$$

Théorème 1.13. *Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$ et la frontière de classe C^m pour tout $m \geq 1$ et $1 \leq p \leq \infty$ alors :*
1) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [p, q^*]$ oú $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.
2) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [p, +\infty]$.
3) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \Longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.
On a $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^K(\overline{\Omega})$ et $K = |m - \frac{n}{m}|$.

1.4.6 Inégalité d'interpolation :

Soit $m \in \mathbb{N}/\{0,1\}$ et $p_1, p_2, \ldots, p_m \in [1, +\infty]$ tq : $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_m} \geq 1$.
On pose $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_m}$.
On a : $\forall f_i \in L^{p_i}(\Omega), i = 1, \ldots, m$ alors $f = f_1.f_2 \ldots f_m \in L^p(\Omega)$ et on a :

$$\| f \|_{L^p(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{m} \| f_i \|_{L^{p_i}(\Omega)} .$$

1.4.7 Inégalité de Hölder :

Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ alors :

$$\forall f \in L^p(\Omega), \forall g \in L^q(\Omega) \Rightarrow f.g \in L^1(\Omega),$$

et on a :

$$|f.g|_{L^1(\Omega)} \leq |f|_{L^p(\Omega)}.|g|_{L^q(\Omega)}$$

$$\Big(\text{ i.e : } \int_\Omega \mid f(x).g(x) \mid dx \leq \Big(\int_\Omega \mid f(x) \mid^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} . \Big(\int_\Omega \mid g(x) \mid^q dx \Big)^{\frac{1}{q}} \Big).$$

1.4.8 Inégalité de Green :

Soient $f, g \in H^1(\Omega)$ (où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert) de frontière Γ bornée et de classe C^1 alors

$$\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma f(x) g(x) v_i(x) dx.$$

1.4.9 Inégalité de Poincaré :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, il existe une constant $c > 0$ vérifiant :

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $\nabla f = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \Big)$ c'est-à-dire :

$$\int_\Omega \Big[f^2(x) + \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial f}{\partial x_i}|^2 \Big] dx \leq c \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial f}{\partial x_i}|^2 dx.$$

1.5 Opérateur maximal monotone

Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \to H$ un opérateur donné où $D(A)$ est son domaine $(D(A) \subset H)$.

Définition 1.21. *Un opérateur est une application entre deux espaces vectoriels normés.*

Un opérateur $A : D(A) \to H$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall \lambda, \mu \in K; \forall x_1, x_2 \in H; A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2).$$

Définition 1.22. *On appelle un opérateur borné toute application linéaire continue de $D(A)$ dans H.*
On dit que A est continue (borné) s'il existe $c \geq 0$ tel que :

$$\| Ax \| \leq c \| x \|$$

si non A est dit non borné.

Définition 1.23. *Soit $B(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaire borné sur un espace de Hilbert H et soit $A \in B(H)$. On pose :*

$$\|A\| = inf\{c > 0, \forall x \in H : \|Ax\|_H \leq c\|x\|_H\};$$

$\|A\|$ est appelée norme de A.

Définition 1.24. *Soit $A \in B(H)$, on a :*

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \\ &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \mid \langle Ax, y\rangle \mid . \end{aligned}$$

Définition 1.25. *Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \to H$ un opérateur donnée.*
On dit que A est monotone si :

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_H \geq 0; \forall u, v \in D(A).$$

Remarque 1.8. *Si A linéaire on a $\langle Au, u\rangle_H \geq 0, \forall u \in D(A)$.*

Définition 1.26. *On dit que A est maximal si seulement si $I_d + A : D(A) \to H$ est un surjectif c'est-à-dire :*

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que } u + Au = f.$$

Proposition 1.17. *Soit H un espace de Hilbert (réel). Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) A est maximal monotone dans H.
2) $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction par tout définie de H pour tout $\lambda \geq 0$.
3) A est monotone et il existe λ positif tel que $(I + \lambda A)$ est surjectif.

Théorème 1.14. *Supposons que A est maximal monotone alors :*
1) Pour tout $u_0 \in D(A)$, on a le système :

$$\begin{cases} u^{'}(t) + Au(t) = 0, \forall t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Admet un solution unique $u \in C(\mathbb{R}_+, H)$ (c'est-à-dire $\forall t_0 \in \mathbb{R}^+$: $\|u(t) - u(t_0)\|_H \to 0$ tend $t \to t_0$). La solution u est dit faible.
2) Si $u_0 \in D(A)$ alors $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, H) \cap W^{0,\infty}(\mathbb{R}_+, D(A))$ où sur $D(A)$ on considère la norme du graphe

$$\|u\|_{D(A)} = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2}, \forall u \in D(A).$$

La solution u dit forte (la régularité de u signifie $\sup\limits_{t \geq 0} \|u(t)\|_H < \infty$, $\sup\limits_{t \geq 0} \|u(t)\|_{D(A)} < \infty$ et u est dérivable au sens des distributions).
3) Si A est linéaire et $u_0 \in D(A)$ alors $u \in C(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H)$. La solution u est dite classique.

Définition 1.27. *Soient H et G deux espaces de Hilbert.*
Un opérateur A^* défini sur $D(A^*) \subset G^*$ à valeur dans H^*, tel que :

$$\forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*); \langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle,$$

est appelé l'adjoint de A et vérifie de plus :

$$(A^*)^* = A \text{ et } \|A^*\| = \|A\|.$$

Proposition 1.18. *Soient A, B deux opérateur linéaires et α, β deux scalaires. on a :*
1) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$.
2) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$.
3) $(AB)^* = B^* A^*$.
4) $(A^*)^* = A$.
5) Si A a un inverse bornée A^{-1} alors $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.
6) $\ker A^* = (ImA)^{\perp}$.
7) $(\ker A^*)^{\perp} = \overline{ImA}$.
8) Si $F \subset H$ est un sous espace vectoriel stable par A alors $F^{\perp}$ est stable par A^*.

Définition 1.28. *Soit H un espace de Hilbert.*

On dit que l'opérateur A est auto-adjoint si seulement si $A^* = A$ c'est-à-dire :

$$\forall u, v \in H; \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

L'ensemble de tous les opérateurs auto-adjoints sur H est noté par $\delta(H)$.

Théorème 1.15. *Sur un espace de Hilbert on a les propriétés :*
1) $\forall A, B \in \delta(H); \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha A + \beta B \in \delta(H)$.
2) $\forall A, B \in \delta(H)$, AB est un opérateur auto-adjoint $\Longleftrightarrow AB = BA$.
3) Si l'opérateur $A \in \delta(H)$, alors on a $\|A\| = \sup\limits_{\|u\| \leqslant 1} |\langle Au, u \rangle|$.

Théorème 1.16. *Soit A un opérateur maximal monotone, auto-adjoint. Alors pour tout $u_0 \in H$ il existe une fonction :*

$$u \in C([0, +\infty[; H) \cap C^1(]0, +\infty[; H) \cap C(]0, +\infty[; D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{sur} \quad]0, +\infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \textit{et} \quad |\frac{du}{dt}(t)| = |Au(t)| \leq \frac{1}{t}|u_0| \quad \forall t > 0$$

$$u \in C^k(]0, +\infty[; D(A^l)) \quad \forall k, l \textit{ entiers }.$$

Définition 1.29. *Un opérateur $A \in \delta(H)$ est dite positive et noté $A \geq 0$ si :*

$$\langle Au, u \rangle \geq 0, \forall u \in H.$$

Définition 1.30. *Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert.*

Un opérateur $A : H_1 \to H_2$ est dit compact si toute suite borne (f_n) de $D(A)$ contiennent un sous suite (f_{n_k}) pour laquelle (Af_{n_k}) est converge et ça c'est équivalent à l'image d'un ensemble borné par l'opérateur A est un ensemble relativement compact.

Théorème 1.17. *Si A est compact $\Rightarrow \bar{A}$ est compact.*

1.6 Semi-groupe

H un espace de Hilbert réel ou complexe muni de la norme $x \to \|x\|_H$ on désigne par $L(H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de H en lui même.

$L(H)$ est un espace de Banach pour la norme $S \to \|S\|$ définie par :

$$\|S\| = \sup_{\|x\|_H = 1} \|Sx\|_H = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\|_H}{\|x\|_H}.$$

Définition 1.31. *On appelle l'application $S : [0, +\infty[\to L(H)$ semi-groupe fortement continu dans H si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1) $S(0) = I$ (I est l'opérateur d'identité).

2) $S(t + s) = S(t)S(s); \forall s, t \geq 0$.

3) $\forall x \in H$, l'application $S(.)x$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Dans la suite nous les appellerons $S(t)$ est semi-groupe de classe C^0 et note par C^0-semi-groupes.

Proposition 1.19. *Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C^0-semi-groupes dans H, alors l'application adjoint $(S^*(t))_{t\geq 0}$ est aussi semi-groupes de classe C^0 dans H.*

Lemme 1.2. *Pour $S(t)$ est C^0-semi-groupe on a :*

$$\exists M \geq 1 \text{ et } \omega \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0. \tag{1.4}$$

Preuve :

Considérons le compact $[0,1]$, comme $(S(t))_{t\geq 0}$ est fortement continue alors l'application $t \longrightarrow S(t)x$ est continue. Donc l'image de $[0,1]$ par cette application est compact alors

$$\exists M_x \text{ tel que : } \|S(t)x\| \leq M_x, \forall t \in [0,1].$$

D'après le théorème de Banach-steinhauss :

$$\exists M \text{ tel que : } \|S(t)\| \leq M, \forall t \in [0,1].$$

On remarque que le constant $M \geq 1$ $(1 = \|S(0)\| \leq M)$.

Maintenant si $t \notin [0,1]$, on écrit $t = n + \theta$ avec $n \in N^*$ et $\theta \in]0,1[$ donc

$$\begin{aligned} S(t) &= S(n+\theta) \\ &= S(n)S(\theta) \\ &= (S(1))^n S(\theta). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|S(t)\| = \|(S(1))^n S(\theta)\| &\leq \|(S(1))^n\|.\|S(\theta)\| \\ &\leq M^n.M \\ &\leq Me^{n\log M}. \end{aligned}$$

On pose $\log M = \omega$ donc

$$\|S(t)\| \leq Me^{n\omega} \leq Me^{t\omega}.$$

Remarque 1.9. *Si $S(t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continue à l'origine vérifiant la majoration (1.4) alors il est fortement continue.*

Preuve :

Si $s \geq 0$:

$$\|S(t+s)x - S(t)x\|_H = \|S(t).S(s)x - S(t)x\|_H$$

on pose $y = S(t)x$ donc

$$\|S(t+s)x - S(t)x\|_H = \|S(s)y - y\|_H \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$$

car $S(t)_{t\geq 0}$ est fortement continue à l'origine.

Si $s < 0$:

$$\begin{array}{rcl} \|S(t+s)x - S(t)x\|_H & = & \|S(t+s)x - S(-s)S(t+s)x\|_H \\ & = & \|-S(t+s)[S(-s)x - x]\|_H \\ & \leq & \|S(t+s)\|_H.\|S(-s)x - x\|_H \\ & \leq & Me^{\omega(t+s)}\|S(-s)x - x\|_H \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{array}$$

Maintenant on va voir que l'estimation (1.4) peut être améliorée, en effet posons

$$\omega(t) = \log\|S(t)\|, \forall t > 0 \text{ et } \omega_0 = \inf_{t>0} \frac{\omega(t)}{t}.$$

Soit $\varepsilon \geq 0$ suffisamment petit, alors il existe une constante $\alpha \geq 0$ tel que :

$$\frac{\omega(\alpha)}{\alpha} \leq \omega_0 + \varepsilon.$$

Soit $t = k\alpha + r$ avec $k \in N^*, 0 < r < \alpha$ donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\omega(t)}{t} &= \frac{\omega(k\alpha + r)}{k\alpha + r} \\
&\leq \frac{k\omega(\alpha) + \omega(r)}{k\alpha + r} \\
&\leq \omega_0 + \varepsilon + \frac{\omega(r)}{t}
\end{aligned}$$

d'où

$$\|S(t)\| \leq M.e^{t(\omega_0 + \varepsilon)}.$$

Si en plus $\omega_0 = -\infty$ il existe $N > 0$ tel que $\|S(t)\| \leq Me^{-tN}$.

Définition 1.32. *On dit que $S(t)$ est un semi-groupe bornée si :*

$$\exists M \geq 0 \text{ tel que } \|S(t)\| \leq M, \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.10. *Si $M \leq 1$ on a nous dit que $S(t)$ contraction.*

Définition 1.33. *On appelle générateur infinitésimal du C^0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \to H$ définit par :*

$$x \mapsto Ax = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad = \quad \frac{d}{dt} S(t)x \mid_{t=0}, \forall t > 0$$

quand cette limite existe.
Le domaine de l'opérateur A est défini par :

$$D(A) = \{x \in H; \forall t > 0, \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe } \}.$$

Proposition 1.20. *$\forall x \in D(A)$ et $S(t)x \in D(A)$ on a :*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Preuve :

$x \in D(A)$ et posons $y(t) = S(t)x$, $\forall t \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} S(t) \frac{S(h)x - x}{h} \\
&= S(t)Ax
\end{aligned}$$

de la même manière on a aussi :

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} S(t)x. \\
&= AS(t)x.
\end{aligned}$$

Théorème 1.18. *A générateur infinitésimal de semi-groupe $S(t)$ alors A est un opérateur fermé.*

Proposition 1.21. *Domaine $D(A)$ de générateur infinitésimal A de semi-groupe $S(A)$ est un espace vectoriel dense dans H.*

Corollaire 1.5. *Soit $S(t)$ un C^0-semi groupe sur H de générateur infinitésimal A. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ le système :*

$$\begin{cases} u^{'}(t) + Au(t) = 0, \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

admet un unique solution $u \in C^1([0, +\infty[) \cap C([0, +\infty[; D(A))$ donnée par :

$$u(t) = S(t)u_0.$$

Corollaire 1.6. *Supposons que u_0 et f est continue dans $D(A)$ on a :*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^{+\infty} S(t-s)f(s)ds$$

est un solution de le système non homogène suivant :

$$\begin{cases} u^{'}(t) + Au(t) = f(t), \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Théorème 1.19. *Soit H un espace de Hilbert réel. Soit $S(t)$ est C^0-semi groupe et A générateur infinitésimal de semi-groupe $S(t)$ on a l'opérateur $(\lambda I - A)$ inversible $\forall \lambda \in \rho(A)$.*

Preuve :

Comme lemme (1.2) $\exists M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que : $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$; $\forall t \geq 0$.

Soit

$$R_\lambda(A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt$$

pour tout $x_0 \in D(A)$ alors :

$$\begin{aligned}
R_\lambda(A)Ax_0 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) A x_0 dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{dS(t)}{dt} x_0 dt \\
&= e^{-\lambda t} S(t) x_0]_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x_0 dt \\
&= -x_0 + \lambda R_\lambda(A) x_0 \\
\Rightarrow x_0 &= R_\lambda(A)(\lambda I - A) \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

et autre façon $\forall x \in H$ on a :

$$\begin{aligned}
AR_\lambda(A)x &= \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} R_\lambda(A)x \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left[\ (S(h) - I) \textstyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt \ \right] \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left[\ \textstyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t+h) x dt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt \ \right] \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \left[\ \textstyle\int_h^{+\infty} (e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t}) S(t) x dt - \int_0^h e^{-\lambda t} S(t) x dt \ \right] \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt - x \\
&\Longrightarrow x = (\lambda I - A) R_\lambda(A) x. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

De (1.5) et (1.6) on a l'opérateur $(\lambda I - A)$ est inversible de $D(A)$ dans H et l'inverse donnée par :

$$(\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda(A).$$

Remarque 1.11. *$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est s'appelle résolvant de A, $\forall \lambda \in \rho(A)$.*

1.6.1 Opérateur dissipatifs

Définition 1.34. *Un opérateur $(A, D(A))$ est dissipatif si :*

$$\forall x \in D(A) \ \text{et}\ \forall \lambda > 0, \|x - \lambda Ax\| \geq \|x\|.$$

Dans le cas où $X = H$ est Hilbertien on montre que A est dissipatif si et seulement si :

$$\forall x \in D(A);\ Re(\langle Ax, x\rangle_H) \leq 0.$$

Si $(A, D(A))$ est un opérateur dissipatif alors $\forall \lambda > 0$ l'opérateur $(Id - \lambda A)$ est injectif car

$$(Id - \lambda A) > 0 \Longrightarrow 0 \leq \|x\| \leq \|(Id - \lambda A)x\| = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Si de plus $\forall \lambda > 0, (Id - \lambda A)$ est surjectif on dit que $(A, D(A))$ est maximal-dissipatif (ou m-dissipatif). On peut montrer que $\forall \lambda > 0$, $(Id - \lambda A)$ est surjectif $\Longrightarrow \exists \lambda_0 > 0$ tel que $(Id - \lambda_0 A)$ est surjectif.

En pratique pour montrer qu'un opérateur est m-dissipatif on montre d'abord à la main qu'il dissipatif et on résout ensuite un problème variationnel pour une valeur λ_0 bien choisie.

Dans ce cas l'opérateur $(Id - \lambda A)$ est un isomorphisme (a priori non continu) de (A, X) et on note $J_\lambda = (Id - \lambda A)^{-1}$.

De plus, comme :

$$\|J_\lambda y\|_X \leq \|(Id - \lambda A)[J_\lambda y]\|_X \leq \|y\|_X, J_\lambda \in ((X, \|.\|_X), (D(A), \|.\|_X)).$$

Nous allons voir que cette propriété de continuité peut être améliorée (on va rendre moins fine la topologie sur $(D(A), \|.\|_X)$ en munissant $D(A)$ d'une norme $\|.\|_{D(A)}$).

1.6.2 Propriété des opérateurs m-dissipatif

Proposition 1.22. *Si* $(A, D(A))$ *est m-dissipatif alors c'est un opérateur fermé.*

Corollaire 1.7. *Pour* $x \in D(A)$ *on pose* $\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X$.
Alors $\|.\|_{D(A)}$ *est une norme pour laquelle* $D(A)$ *est un espace de Banach et* $A \in ((D(A), \|.\|_A), (X, \|.\|_X))$.

Proposition 1.23. *Si* H *est un espace Hilbertien et* $A \in D(A) \subset H \to H$ *est m-dissipatif alors il est à domaine dense.*

Proposition 1.24. *Réciproquement si* $A \in D(A) \subset H \to H$ *est un domaine dense, dissipatif, fermé et tel que son adjoint* $(A^*, D^*(A))$ *est dissipatif alors* $(A, D(A))$ *est m-dissipatif.*

Corollaire 1.8. *Toujours dans le cadre Hilbertien :*

i) Si $(A, D(A))$ *est dissipatif auto-adjoint à domaine dense alors il est m-dissipatif.*

ii) Si $(A, D(A))$ *anti-adjoint à domaine dense alors il est m-dissipatif.*

Remarque 1.12. *Dans (ii) la condition de dissipativité n'est pas nécessaire car* $(A, D(A))$ *anti-adjoint entraîne que* $\langle Ax, x\rangle_H = 0$ *donc la dissipativité.*

1.6.3 Théorème de Hille-Yosida

Soit $S(t)$ est C^0-semi groupe en espace de Hilbert H. Il existe un constant $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $Re\lambda > \omega$ avec $\lambda \in \rho(A)$:

$$\|R_\lambda^m(A)\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^m}, \forall m \in N$$

alors A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe $S(t)$.

Preuve :

Soit $x \in H$ on a :

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)^{-m}x\| &= \|\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t_1}S(t_1)\cdots e^{-\lambda t_m}S(t_m)x dt_1\cdots\cdots dt_m\| \\
&= \|\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} e^{(-\lambda t_1+\cdots t_m)}S(t_1+\cdots+t_m)x dt_1\cdots\cdots dt_m\| \\
&\leq \|x\|\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} Me^{-(Re\lambda-\omega)(t_1+\cdots+t_m)}dt_1\cdots\cdots dt_m \\
&\leq \|x\|\frac{M}{(Re\lambda-\omega)^m}, \forall m \in N.
\end{aligned}$$

1.6.4 Semi-groupe adjoint

L'adjoint de A noté A^* engendre le semi-groupe $(S^*(t))_{t\geq 0}$ adjoint de $(S(t))_{t\geq 0}$ qui est également fortement continu sur le dual H^* de H. Si $D(A)$ est dense dans H, $D^*(A)$ est dense dans H^*.

Chapitre 2

Contrôlabilité

2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ représentant le domaine géométrique du système (2,1), et soit $T > 0$, on suppose que la frontière Γ est assez régulière. On considère les systèmes d'écrits par l'équation différentielle opérationnelle. Trouver $y(t)$ tel que :

$$\begin{cases} y^{'}(t) = Ay(t) + Bu(t) \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[\\ y(0) = y_0 \qquad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $A \in L(V, H)$; $B \in L(U, H)$; $u \in L^2(0, T; U)$.
La fonction u dit contrôle et U espace de contrôle, avec y l'état de système et y_0 l'état initial.

Mathématiquement cette formulation est assez général et se prête mieux à certaines démonstrations et aux définitions des diverses notions liées à l'analyse des systèmes.

Nous allons rappelles diverses notions liées à l'analyses à travers le choix d'opérateur B, c'est-à-dire encore à travers les divers types d'excitation aux quels peut être soumis le système (2.1).

Hypothèses :

On considère les hypothèses suivantes :

i) H, U sont des espaces de Hilbert séparables désignant respectivement l'espace d'état, de contrôle.

ii) $u \in L^2(0, T; U), B \in L(U, H)$.

iii) A est auto-adjoint a résolvant compact et engendre un semi groupe fortement continue $(S(t))_{t \geq 0}$ sur H.

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses ci-dessous, le système (2,1) admet une solution faible unique fortement continue sur $[0, T]$ donnée par :*

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds. \tag{2.2}$$

On considère l'opérateur $L_t : L^2(0, T; U) \longrightarrow H$ défini par :

$$L_t u = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds. \tag{2.3}$$

Remarque 2.1. *L'hypothèse de continuité faite sur B est forte, elle sera modifiée dans les cas ponctuel et frontière.*

Contrôlabilité

Dans le cas des systèmes à paramètres répartis (2.1) de dimension infinie, l'état du système ne peut pas être atteint en général. C'est le cas, par exemple, où l'opérateur A n'est pas borné et que $D(A)$ peut être différent de H, mais les éléments qui ne sont pas atteints, peuvent être approchés, ceci nous amène à introduire divers degrés de contrôlabilité.

2.2 Contrôlabilité exacte

Le système considéré est (2.1) et H désigne l'espace d'état ; $T > 0$.

Définition 2.1. *On dit que le contrôle u transfère un état y_0 à un état y_d au temps $T > 0$ si :*

$$y_u(T) = y(T, y_0, u) = y_d.$$

Définition 2.2. *Le système (2.1) est dit exactement contrôlable dans H sur $[0, T]$ si :*

$$\forall y_d \in H, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que : } y_u(T) = y_d.$$

Remarque 2.2. *L'opérateur L_T étant défini en (2.3), la définition précédente équivaut à $Im(L_T) = H$.*

Définition 2.3. *Soit H_1 un sous espace vectoriel de H, le système (2.1) est dit exactement contrôlable dans H_1 si :*

$$\forall y_d \in H_1, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que : } y_u(T) = y_d.$$

Remarque 2.3. *La définition précédente équivaut à : $H_1 \subset Im(L_T)$, L_T étant toujours défini par (2.3).*

Caractérisations

De la définition (2.1) résulte les propriétés de caractérisations suivantes :

Proposition 2.1. *Le système (2.1) est exactement contrôlable sur $[0, T]$ si et seulement si $\exists \gamma > 0$ tel que :*

$$\|y^*\|_{H^*} \leq \gamma \|B^* S^*(.) y^*\|_{L^2(0,T,U)}$$

pour tout y^* dans H^*.

Où $(S^*(t))_{t \geq 0}$ est le semi-groupe adjoint de semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$.

Et elle découle du résultat plus général suivant :

Lemme 2.1. *Soient E, F et G des espaces de Banach réflexifs et $f \in L(E, G)$ et $g \in L(F, G)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) $Imf \subset Img$.
2) $\exists c > 0$ tel que $\|f^* y^*\|_{E^*} \leq c \|g^* y^*\|_{F^*}, \forall y^* \in G^*$.

La propriété de caractérisation donnée ci-dessus est intéressante dans la mesure où on ramène l'exacte contrôlabilité à une inégalité assez facile à expliciter pour un système (2.1) donné.

Il y a des cas où certaines hypothèses sur les paramètres du système permettent directement de savoir si le système est exactement contrôlable ou non, ainsi nous avons :

Proposition 2.2. *Si pour tout $t \geq 0$, L_t est compact alors le système* (2.1) *n'est pas exactement contrôlable.*

Corollaire 2.1. *Si $(S(t))_{t>0}$ est compact pour tout $t > 0$, alors le système* (2.1) *n'est pas exactement contrôlable.*

Corollaire 2.2. *Si B est compact alors le système* (2.1) *n'est pas exactement contrôlable.*

Dans le système (2.1)*, n'est pas être exactement contrôlable, au sens de la définition* (2.2)*, si B ou $(S(t))_{t>0}$ sont compacts.*

2.3 Contrôlabilité faible

Définition 2.4. *Le système* (2.1) *est dit faiblement contrôlable dans H sur $[0, T]$ si :*
pour tout y_d dans H, $\forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0, T; U)$ tel que : $\|y_u(T) - y_d\|_H \leq \varepsilon$.

Remarque 2.4.
- *Dans la définition précédente le choix de y_d dans H est important.*
- *Pour les systèmes distribués, La notion de faible contrôlabilité est beaucoup plus adaptée.*

Nous pouvons la caractériser par la :

Proposition 2.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) Le système (2.1) *est faiblement contrôlable sur* $[0, T]$.
2) $\overline{Im(L_T)} = H$.
3) $\ker(L_T^*) = \ker(L_T L_T^*) = \{0\}$.
4) $\{\langle y, S(s)Bv\rangle_H = 0, \forall s \in [0, T]$ *et* $\forall v \in H\} \Longrightarrow y = 0$.
5) Si le semi-groupe $(S(t))_{t\geqslant 0}$ est analytique, alors on a :

$$\overline{\bigcup_{n\in N} Im(A^n S(s)B)} = H \, , \, \forall s \in [0, T].$$

Preuve :

$1 \Longrightarrow 2$

Par définition (2.1) faiblement contrôlable sur $[0, T]$ c'est-à-dire

$$\forall y_d \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que : } \|y_u(T) - y_d\|_H \leq \varepsilon.$$

On a

$$y(T) = L_T u.$$

Alors :

$$\forall y_d \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que : } \|L_T u - y_d\|_H \leq 0 \Longleftrightarrow \overline{Im(L_T)} = H.$$

$2 \Longrightarrow 3$

On a

$$\begin{aligned} \overline{Im(L_T)} = H \quad &\Longrightarrow \quad (\overline{Im(L_T)})^\perp = (H)^\perp \\ &\Longrightarrow \quad (\overline{Im(L_T)})^\perp = \{0\}. \end{aligned}$$

Et comme :

$$(\overline{Im(L_T)})^\perp = \ker(L_T^*) \text{ alors } \ker(L_T^*) = \{0\}.$$

On calcule $\ker(L_T L_T^*)$ on suppose que :

$$\forall y \in H, \exists x \in H \text{ tel que } \langle (L_T L_T^*)x, y\rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \exists x \in H \text{ tel que } \langle L_T^* x, L_T^* y\rangle = 0, \forall y \in H.$$

Pour $y = x$ on a $\exists x \in H$ tel que

$$\langle L_T^* x, L_T^* x\rangle = 0 \Longrightarrow \exists x \in H : \|L_T^* x\| = 0.$$

Et comme

$$\begin{aligned}\ker(L_T^*) = \{0\} &\Longrightarrow x = 0\\ &\Longrightarrow \ker(L_T L_T^*) = \{0\}.\end{aligned}$$

Donc

$$\ker(L_T^*) = \ker(L_T L_T^*) = \{0\}.$$

$3 \Longrightarrow 4$

On a :

$$\ker(L_T^*) = \ker(L_T L_T^*) = \{0\}.$$

C'est-à-dire

$$\langle y, S(s)Bv\rangle = 0, \forall s \in [0,T], \forall v \in U \Longrightarrow y = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}\langle y, S(s)Bv\rangle = 0; \forall s \in [0,T], \forall v \in U &\Longrightarrow \langle B^* S^*(s)y, v\rangle = 0; \forall s \in [0,T], \forall v \in U\\ &\Longrightarrow L_T^* y = 0\\ &\Longrightarrow y = 0.\end{aligned}$$

$4 \Longrightarrow 5$

On suppose que :

$$\exists s \in [0,T] \text{ tel que : } \overline{\bigcup_{n\in N} Im(A^n S(s)B)} \neq H$$

$$\Longrightarrow \exists s \in [0,T], y \neq 0 \text{ tel que : } \langle y, A^n S(s)Bv\rangle = 0; \forall n \in N, \forall v \in U.$$

Or

$$\langle y, A^n S(s)Bv\rangle = \frac{\partial}{\partial^n s}\langle y, S(s)Bv\rangle, \forall n \in N.$$

Et l'analyticité on en déduit que :

$$\langle y, S(s)Bv\rangle = 0, \forall v \in U \text{ et } t \text{ voisin de } s.$$

C'est-à-dire non (4)

$5 \Longrightarrow 1$

Si non

$$\exists y \neq 0 \text{ tel que : } \langle y, S(s)Bv \rangle = 0, \forall v \in U$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \forall n \in N, \forall v \in U, \frac{\partial}{\partial^n s}\langle y, S(s)Bv \rangle = 0, s \in [0,T] \\
&\Longrightarrow \quad \forall n \in N, \forall v \in U, \langle y, A^n S(s)Bv \rangle = 0, s \in [0,T] \\
&\Longrightarrow \quad \overline{\bigcup_{n \in N} Im(A^n S(s)B)} \neq H, s \in [0,T].
\end{aligned}$$

C'est-à-dire non (5).

Proposition 2.4. *Si le système* (2.1) *faiblement contrôlable sur* $[0,T]$ *alors est faiblement contrôlable sur* $[0,T_1]$ *pour tout* $T_1 \geq T$.

Proposition 2.5. *Soit le système* (2.1) *et soit* A *générateur infinitésimal de semi-groupe analytique* $S(t)$.
Si le système (2.1) *est faiblement contrôlable sur* $[0,T]$ *alors est faiblement contrôlable sur* $[0,T_1]$ *pour tout* $T_1 \leq T$.

2.4 Contrôlabilité aux trajectoires

Définition 2.5. *Le système* (2.1) *est contrôlable à zéro sur* $[0,T]$ *si* $y_0 \in H$ *pout être transféré à* 0 *au temps* T *c'est-à-dire :*

$$y_0 \in H, \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que : } S(T)y_0 + L_T u = 0.$$

Définition 2.6. *Soit* y_d *une trajectoire sur temps* $[0,T]$*, il existe* $y_1 \in H$ *et* $v \in L^2(0,T;U)$ *tel que* $y(T,y_1,v) = y_d = S(t)y_1 + L_T v$.

Proposition 2.6. *La contrôlabilité aux trajectoires est équivalant à la contrôlabilité à zéro.*

Proposition 2.7. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
i) Le système (2.1) *est contrôlable a zéro au temps* $T > 0$.

ii) Il existe $c_T > 0$ *tel que pour tout* $x \in H$ *:*

$$\|S^*(T)x\|^2 \leq c_T \int_0^T \|B^*S^*(t)x\|^2 dt.$$

Remarque 2.5. *(La relation entre les trois variétés)*

• *La contrôlabilité exacte* $\Longrightarrow$ *la contrôlabilité faible mais la réciproque est fausse.*

• *La contrôlabilité exacte* $\Longrightarrow$ *la contrôlabilité aux trajectoire mais la réciproque est fausse.*

• *Il n'y a aucune relation entre contrôlabilité faible et contrôlabilité aux trajectoires.*

Chapitre 3

L'équation de la chaleur

3.1 Introduction

Nous allons nous intéresser à un exemple typique d'équation aux dérivées partielles : l'équation de la chaleur, ou équation de diffusion. Cette équation s'écrit

$$\partial_t u(t,x) - \triangle u(t,x) = f(t,x), \tag{3.1}$$

où $\triangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$ est l'opérateur Laplacien, et le couple (t,x) est dans $[0,\infty[\times\Omega$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La fonction f est une donnée du problème. Cette équation est de plus assortie d'une condition initiale :

$$u(0,x) = u_0(x), \text{ pour } x \in \Omega,$$

et d'une condition aux limites :

$$u(t,x) = g(t,x) \text{ pour } (t,x) \in]0,T[\times\partial\Omega.$$

Où u_0 et g sont des fonctions données.

Cette équation est le prototype des équations dites équations parabolique. La terminologie “parabolique” vient du fait que le membre de gauche s'écrit en dimension 1 comme $(\partial_t - \partial_x^2)f$, à rapprocher de l'équation $y - x^2 = 0$ de la parabole.

Une des interprétations possibles de l'équation (3.1) est la modélisation d'un

flux de chaleur dans un corps. Voici l'interprétation de chaque terme de l'équation :
– Le terme $\partial_t u$ permets de décrire l'évolution de la distribution de chaleur au cours du temps. Notamment, on s'attend à pouvoir définir la valeur d'une solution à un temps $t > 0$ quelconque en connaissant la distribution à l'instant 0.
– Le terme $\triangle u$ correspond à une variation de u par rapport à sa moyenne locale. Un point x où $\triangle u(x) > 0$ est un point plus froid que son entourage direct (et dont la température va augmenter), et inversement. Ce terme correspond donc à un phénomène de moyenne, et va avoir tendance à rendre régulières les solutions de l'équation.
– Le terme u_0 correspond à la distribution de chaleur à l'instant initial.
– Le terme g correspond à un thermostat situé sur le bord de l'ouvert et imposant sa chaleur à la frontière du système.

La première question à se poser avant la résolution du problème (3.1) est de savoir quel sens donner à cette équation. Le sens le plus naturel est de considérer qu'une fonction $u : [0, \infty[\times\Omega \to \mathbb{R}$ est solution si elle est dérivable par rapport à t en tout point, qu'elle admet une dérivée seconde par rapport à chaque x_i en tout point et que les dérivées soient reliées par la relation (3.1) quel que soit le point (t, x).
Il apparaîtra que cette définition est trop restrictive, car elle exige de connaître ne permet de considérer que des fonctions régulières car cette approche est trop "locale". Une meilleure manière de faire est de considérer la solution u comme un tout et non comme une collection de valeur $u(t, x)$.

La notion de solution que l'on va considérer s'obtient en considérant les valeurs $\mathbb{R}$ prises par la quantité $\int_\Omega u(t, x)\varphi(x)dx$, pour une certaine collection de fonctions test φ. On dit que l'on considère des solutions faibles. Pour étudier ces quantités, il suffit de multiplier l'équation de la chaleur par φ, puis d'intégrer par rapport à x. On obtient alors :

$$\int_\Omega \partial_t u(t, x)\varphi(x)dx - \int_\Omega \triangle u(t, x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(t, x)\varphi(x)dx.$$

En intégrant par partie, on obtient, si l'on suppose φ nulle sur le bord $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega \partial_t u(t, x)\varphi(x)dx + \int_\Omega \triangledown u(t, x) \triangledown \varphi(x)dx = \int_\Omega f(t, x)\varphi(x)dx. \tag{3.2}$$

On définira donc une solution de l'équation (3.1) comme une fonction vérifiant l'égalité (3.2) pour toutes les fonctions φ d'une certaine classe. La question importante est donc de choisir les bons espaces dans lesquels doivent vivre les fonctions $u(t,.), \partial_t u(t,.)$ et φ pour que l'égalité (3.2) ait un sens. L'esquisse de définition (3.2) fait intervenir des intégrales sur du produit de deux fonctions. Un cas où ces intégrales sont bien définies est le cas où l'une des fonctions est dans l'espace $L^p(\Omega)$ et l'autre est dans l'espace $L^q(\Omega)$, où p et q satisfont la relation $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Si on veut avoir une expression symétrique où ces deux espaces seraient égaux, il suffit de considérer l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré intégrable.
En effet, si u et u_0 sont deux fonctions de $L^2(\Omega)$, l'intégrale $\int_\Omega u(x)u_0(x)dx$ est bien définie.
L'expression (3.2) fait également intervenir l'intégrale $\int_\Omega \bigtriangledown u(x) \bigtriangledown u_0(x)dx$. Au vu de ce que l'on vient de dire, l'hypothèse naturelle est donc que les fonction $\bigtriangledown u$ et $\bigtriangledown u_0$ soient des fonctions de $L^2(\Omega)$.

On a donc besoin d'objets qui sont des fonctions dans $L^2(\Omega)$ et dont le gradient est dans $L^2(\Omega)$. Ces objets ne peuvent pas être définis à l'aide de dérivée ponctuelles, car les fonctions de $L^2(\Omega)$ peuvent très bien ne pas être dérivables en tout point. La théorie des espaces de Sobolev est le bon cadre pour définir ces objets.

3.2 Existence, unicité et régularité de la solution

3.2.1 Notations :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de frontière Γ. On note :

$$Q = \Omega \times]0, +\infty[, \qquad \Sigma = \Gamma \times]0, +\infty[:$$

Σ est la frontière latérale du cylindre Q.

Considérons le problème suivant. Trouver une fonction $u(x,t) : \bar{\Omega} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{sur} \quad Q. \tag{3.3}$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma. \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega. \tag{3.5}$$

L'équation (3.3) est appelée équation de la chaleur car elle modélise la distribution de la température u dans le domaine Ω à l'instant t. L'équation de la chaleur et ses variantes interviennent dans de très nombreux phénomènes de diffusion (la propagation de la chaleur est seulement un exemple parmi d'autres !). L'équation de la chaleur est l'exemple le plus simple d'une équation parabolique.

L'équation (3.4) est la condition aux limites de Dirichlet : elle peut être remplacée par la condition de Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \tag{3.6}$$

(n est le vecteur unitaire de la normale extérieure à Γ) ou bien par l'une quelconque des conditions aux limites. La condition (3.4) exprime que l'on maintient le bord Γ de Ω à une température nulle : la condition (3.4) exprime que le flux de la chaleur à travers Γ est nul.

L'équation (3.5) est la condition initiale ou donnée de Cauchy.

Nous allons résoudre le problème (3.3), (3.4) et (3.5) en considérant $u(x,t)$ comme une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans un espace H. où H est un espace de fonction que dépendent seulement de x (par exemple $H = L^2(\Omega)$ ou bien $H = H_0^1(\Omega)$, $\cdots$ etc). Ainsi le notation $u(t)$ désignera un élément de H. C'est-à-dire la fonction $x \to u(x,t)$ à t fixé. Ce point de vue permet d'obtenir très facilement une solution du problème (3.3), (3.4) et (3.5) en combinant le théorème de Hille-Yosida et les résultats de chapitre 1.

Pour fixer les idées. On suppose dans tout le chapitre que Ω est de classe C^∞ avec Γ borné (mais cette hypothèse peut être affaiblie considérablement si l'on s'intéresse seulement à des solutions faibles).

Théorème 3.1. *On suppose que $u_0 \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une fonction $u(x,t)$*

unique vérifiant (3.3), (3.4) et (3.5) et

$$u \in C([0, +\infty[; L^2(\Omega)) \cap C(]0, +\infty[; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)). \tag{3.7}$$

$$u \in C^1([0, +\infty[; L^2(\Omega)). \tag{3.8}$$

De plus

$$u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [\varepsilon, +\infty[), \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.9}$$

Enfin $u \in L^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$ *et l'on a :*

$$\frac{1}{2}|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} dt = \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)}; \quad \forall T > 0. \tag{3.10}$$

Précisons les notations :

$$|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x,t)|^2 dx, \quad |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)|^2 dx.$$

Démonstration :

On applique la théorie de Hille-Yosida dans l'espace $H = L^2(\Omega)$.
Pour cela on introduit l'opérateur non-borné $A : D(A) \subset H \to H$ défini par :

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ Au = -\Delta u. \end{cases}$$

Il est important de noter que l'on incorpore la condition aux limites (3.4) dans la définition du domaine de A. On va vérifier que A est maximal monotone et auto-adjoint.

On pourra alors appliquer le théorème (1.16) et en déduire l'existence d'une solution unique de (3.3), (3.4) et (3.5).
i) A est monotone. En effet si $u \in D(A)$ on a :

$$(Au, u)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (-\Delta u) u = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0.$$

ii) A est maximal monotone. Il suffit de montrer que $R(I+A)=H=L^2(\Omega)$. Or on sait que pour tout $f\in L^2(\Omega)$ il existe $u\in(H^2\cap H_0^1)$ unique solution de l'équation $u-\Delta u=f$; ceci résulte du théorème de régularité pour le problème de Dirichlet (voir [12]).

iii) A est auto-adjoint. On a A maximal monotone il suffit de vérifier que A est symétrique.

Or si $u,v\in D(A)$ on a :

$$(Au,v)_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega(-\Delta u)v=\int_\Omega \bigtriangledown u\bigtriangledown v.$$

$$(u,Av)_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega u(-\Delta v)=\int_\Omega \bigtriangledown u\bigtriangledown v.$$

et par suite $(Au,v)=(u,Av)$.

D'autre part. On déduit du théorème de régularité pour le problème de Dirichlet (voir [12]) que $D(A^l)\subset H^{2l}(\Omega)$ avec injection continue ; plus précisément on a :

$$D(A^l)=\{u\in H^{2l}(\Omega);u=\Delta u=\cdots\Delta^{l-1}u=0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

On sait (théorème (1.16)) que la solution u de (3.3), (3.4) et (3.5) appartient à

$$C^k(]0,+\infty[;D(A^l));\quad \forall k,\forall l.$$

et donc

$$u\in C^k(]0,+\infty[;H^{2l}(\Omega));\ \ \forall k,l.$$

Il en résulte (grâce au théorème (1.13))que :

$$u\in C^k(]0,+\infty[;C^k(\bar\Omega);\quad \forall k.$$

Prouvons (3.10) : formellement on multiplie (3.3) par u et on intégre sur $\Omega\times]0,T[$. Alors :

$$\frac{du}{dt}-\Delta u=0$$

$$\Longrightarrow u\frac{du}{dt}-u\Delta u=0$$

$$\Longrightarrow \iint u\frac{du}{dt}dtdx - \iint u\Delta udtdx = 0$$

alors

$$\int_\Omega \frac{1}{2}u^2dx = \int_\Omega u(\Delta u)tdx.$$

Néanmoins il faut être prudent car $u(t)$ est différentiable sur $]0,+\infty[$ mais pas sur $[0,+\infty[$. Considérons la fonction $\varphi(t) = \frac{1}{2}(u(t))^2_{L^2(\Omega)}$; φ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ (d'après (3.8)) et on a :

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}(u(t))^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(\Delta u)tdx$$

donc

$$\varphi^{'}(t) = (u(t),\frac{du}{dt}(t))_{L^2(\Omega)} = (u,\Delta u)_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega \nabla u^2.$$

Par conséquent si $0 < \varepsilon < T < +\infty$. On a :

$$\varphi(T) - \varphi(\varepsilon) = \int_\varepsilon^T \varphi^{'}(t)dt = -\int_\varepsilon^T |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt.$$

Quand $\varepsilon \to 0$. $\varphi(\varepsilon) \to \frac{1}{2}|u(0)|^2_{L^2(\Omega)}$ et en déduit :

$$\frac{1}{2}|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt = \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)}; \quad \forall T > 0.$$

Moyennant des hypothèses supplémentaires sur u_0. La fonction u devient plus régulière au voisinage de $t = 0$ (rappelle que d'après le théorème (3.1)), on a toujours $u \in (C^\infty(\bar{\Omega} \times [\varepsilon,\infty[); \quad \forall\varepsilon > 0$.

Théorème 3.2.

a) On suppose que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Alors la solution u de (3.3), (3.4) et (3.5) vérifie :

$$u \in C([0,+\infty[; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,+\infty; H^2(\Omega))$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,+\infty; L^2(\Omega)).$$

De plus on a

$$\int_0^T |\frac{\partial u}{\partial t}(t)|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{2}|\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2_{L^2(\Omega)}.$$

b) On suppose que $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, alors on a :

$$u \in C([0,+\infty[; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,+\infty; H^3(\Omega))$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,+\infty; H^1(\Omega)).$$

c) On suppose que $u_0 \in H^k(\Omega)$; $\forall k$ et vérifie les relations de compatibilité

$$u_0 = \Delta u_0 = \cdots = \Delta^j u_0 = \cdots = 0 \ \textit{sur}\ \Gamma; \quad \forall j \ \textit{entier}\ . \tag{3.11}$$

Alors

$$u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,+\infty[).$$

Démonstration

a) On choisit ici $H_1 = H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H_1} = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv.$$

Dans H_1 on considère l'opérateur non borné $A_1 : D(A_1) \subset H_1 \to H_1$ défini par :

$$\begin{cases} D(A_1) = \{u \in (H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)); \Delta u \in H_0^1(\Omega)\} \\ A_1 u = -\Delta u. \end{cases}$$

Vérifions que A_1 est maximal monotone et auto-adjoint :

i) A_1 est monotone. En effet si $u \in D(A_1)$ on a :

$$(A_1 u, u)_{H_1} = \int \nabla(-\Delta u)\nabla u + \int(-\Delta u)u = \int |\Delta u|^2 + \int |\nabla u|^2 \geq 0.$$

ii) A_1 est maximal monotone. On sait (de régularité pour le problème de Dirichlet voir [12]) que pour tout $f \in H^1(\Omega)$ il existe $u \in (H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ unique solution de l'équation $u - \Delta u = f$.

Si de plus $f \in H_0^1(\Omega)$ alors :

$$\Delta u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et donc} \quad u \in D(A_1).$$

iii) A_1 est symétrique. Si $u, v \in D(A_1)$ on a :

$$\begin{aligned}(A_1 u, v)_{H_1} &= \int \nabla(-\Delta u)\nabla v + \int (-\Delta u) v \\ &= \int \Delta u \Delta v + \int \nabla u \nabla v = (u, A_1 v)_{H_1}.\end{aligned}$$

Applique le théorème (1.16) on voit que si $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ il existe une solution u de (3.3), (3.4) et (3.5) (qui coincide avec celle obtenue au théorème (3.1) grâce à l'unicité) telle que :

$$u \in C([0, +\infty[: H_0^1(\Omega)).$$

Enfin ; posons $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}|\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)}$. La fonction φ est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et

$$\varphi'(t) = (\nabla u(t), \nabla \frac{du}{dt}(t))_{L^2(\Omega)} = (-\Delta u(t), \frac{du}{dt}(t))_{L^2(\Omega)} = -|\frac{du}{dt}(t)|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Il en résulte que si $0 < \varepsilon < T < +\infty$ alors :

$$\varphi(T) - \varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^T |\frac{du}{dt}(t)|^2_{L^2} dt = 0$$

et on conclut quand $\varepsilon \to 0$.

b) On raisonne maintenant dans l'espace de Hilbert $H_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H_2} = (\Delta u, \Delta v)_{L^2} + (u, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Dans H_2 on considère l'opérateur non-borné $A_2; D(A_2) \subset H_2 \to H_2$ défini par :

$$\begin{cases} D(A_2) = \{u \in H^4(\Omega);\ u \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \Delta u \in H_0^1(\Omega)\} \\ A_2 u = -\Delta u. \end{cases}$$

On vérifie aisément que A_2 est maximal monotone et auto-adjoint dans H_2 (de façon générale si $A : D(A) \subset H \to H$ est maximal monotone et auto-adjoint on peut introduire l'espace de Hilbert $\tilde{H} = D(A)$ muni du produit scalaire
$(u, v)_{\tilde{H}} = (Au, Av) + (u, v)$. Alors l'opérateur $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset \tilde{H} \to \tilde{H}$ défini par $D(\tilde{A}) = D(A^2)$ et $\tilde{A} = A$ est maximal monotone et auto-adjoint dans $\tilde{H}$), on peut alors appliquer le théorème (1.16) à A_2 dans H_2. Enfin on pose $\varphi(t) = \frac{1}{2}|\Delta u(t)|^2_{L^2}$; la fonction φ est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et l'on a :

$$\varphi'(t) = (\Delta u(t), \Delta \frac{du}{dt}(t))_{L^2(\Omega)} = (\Delta u(t), \Delta^2 u(t))_{L^2(\Omega)} = -|\nabla \Delta u(t)|^2_{L^2(\Omega)}.$$

D'où, pour $0 < \varepsilon < T < +\infty$

$$\frac{1}{2}|\Delta u(T)|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}|\Delta u(\varepsilon)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\varepsilon^T |\nabla \Delta u(t)|^2_{L^2(\Omega)} dt = 0.$$

A la limite, quand $\varepsilon \to 0$, on voit que $u \in L^2(0, \infty; H^3(\Omega))$ et $\frac{du}{dt} \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega))$.

c) On considère dans $H = L^2(\Omega)$ l'opérateur $A : D(A) \subset H \to H$ défini par :

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ Au = -\Delta u \end{cases}$$

pour $u_0 \in D(A^k), k \geq 2$ alors :

$$u \in C^{k-j}([0, +\infty[: D(A^j)); \quad \forall j = 0, 1, \cdots, k.$$

On l'hypothése (3.11) exprime exactement que $u \in D(A^k)$ pour tout $k \geq 1$.
Par conséquent on a :

$$u \in C^{k-j}([0, +\infty[: D(A^j)); \qquad \forall k \geq 1, \forall j = 0, 1, \cdots, k. \tag{3.12}$$

Il en résulte que $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, +\infty[)$ (comme dans la démonstration du théorème (3.1)).

Remarque 3.1. *Le théorème (3.1) montre que l'équation de la chaleur a un effet fortement régularisant sur la donnée initiale u_0, on notera que la solution $u(x, t)$ est C^∞ en x pour chaque $t > 0$, même si la donnée initiale u_0 est discontinue. Il* *en résulte en particulier que l'équation de la chaleur est irréversible. En général on ne peut pas résoudre le problème :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad sur \quad \Omega\times]0,T[\tag{3.13}$$

$$u = 0 \quad sur \quad \Gamma\times]0,T[\tag{3.14}$$

avec une donnée finale

$$u(x,T) = u_T(x) \quad sur \quad \Omega. \tag{3.15}$$

Il faudrait nécessairement que :

$$u_T \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad avec \quad \Delta^j u_T = 0 \ sur\ \Gamma; \quad \forall j \geq 0.$$

Mais même ces hypothèses ne suffisent pas à garantir l'existence d'une solution du problème rétrograde (3.13), (3.14) et (3.15).
Il ne faut pas confondre le problème (3.13), (3.14) et (3.15) avec le problème (3.13), (3.14) et (3.15) où

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad sur \quad \Omega\times]0,T[\tag{3.16}$$

qui admet toujours une solution unique pour chaque $u_T \in L^2(\Omega)$ (changer t en $T-t$ et appliquer le théorème (3.1)).

Remarque 3.2. *Les résultats précédents sont aussi valables. Moyennant quelques modifications. Pour le problème de Cauchy avec condition de Neumann.*

Remarque 3.3. *Lorsque Ω est borné le problème (3.3), (3.4) et (3.5) peut être résolu par décomposition sur une base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$. A cet effet, il est très commode de choisir un base $(e_i(x))_{i\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ constituée de fonctions propres de $-\Delta$ avec condition de Dirichlet c'est-à-dire*

$$-\Delta e_i = \lambda_i e_i \ sur\ \Omega; \quad e_i = 0 \ sur\ \Gamma.$$

On cherche une solution de (3.3),(3.4) et (3.5) sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) e_i(x) \tag{3.17}$$

pour des raisons évidentes cette méthode s'appelle aussi méthode de séparation des variables ou méthode de Fourier.

On voit immédiatement que l'on a nécessairement

$$a_i^{'}(t) + \lambda_i a_i(t) = 0; \quad d'où \;\; a_i(t) = a_i(0)e^{-\lambda_i t}$$

et les constantes $a_i(0)$ sont déterminées à partir de la relation

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0) e_i(x). \tag{3.18}$$

Autrement dit, la solution de (3.3), (3.4) et (3.5) est donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0) e^{-\lambda_i t} e_i(x) \tag{3.19}$$

où les constantes $a_i(0)$ sont les composantes de $u_0(x)$ dans la base (e_i). Pour l'étude de la convergence de la série (3.17) (et l'étude de la régularité de u à partir de (3.17)). Noter l'analogie de cette méthode avec la technique usuelle de résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + M\vec{u} = 0$$

où M est une matrice symétrique (ou diagonalisable M, etc.). Bien entendu, la difficulté du problème (3.3), (3.4) et (3.5) provient du fait que l'on doit résoudre ici un système de dimension infinie.

Remarque 3.4. *Les relations de compatibilité (3.11) ne doivent pas surprendre. Ce sont aussi des conditions nécessaires pour que la solution u de (3.3), (3.4) et (3.5) appartienne à $C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, \infty[)$, (l'hypothèse $u_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et $u_0 = 0$ sur Γ à elle seule n'est pas suffisante).*

En effet, supposons que $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0,\infty[)$ vérifie (3.3),(3.4) et (3.5) ; on a

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = \cdots = \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = \cdots = 0 \quad sur \quad \Gamma \times [0,\infty[, \ \forall j \in \mathbb{N}$$

et par continuité il vient

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0 \quad sur \quad \Gamma \times [0,\infty[, \ \forall j. \tag{3.20}$$

D'autre part on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad sur \quad Q \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta(\frac{\partial u}{\partial t}) = \Delta^2 u \quad sur \quad Q \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = \Delta^j u \quad sur \quad Q; \ \forall j \tag{3.23}$$

et par continuité on obtient

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = \Delta^j u \quad sur \quad \bar{\Omega} \times [0,\infty[; \ \forall j. \tag{3.24}$$

On en déduit (3.11) en comparant (3.18) et (3.22) sur $\Gamma \times \{0\}$.

Remarque 3.5. *Bien entendu. On peut obtenir une infinité de résultats de régularité pour u au voisinage de $t = 0$, moyennant des hypothèses intermédiaires entre les hypothèses (b) et (c) du théorème (3.2).*

Remarque 3.6. *On se donne Ω un ouvert de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ et on cherche à résoudre l'équation de la chaleur :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Sur $(x,t) \in \Omega \times [0,+\infty[$ pour une condition initial donnée.
On peut récrire cette EDP sous la fourme d'une EDO $y'(t) = Ay(t)$ posant

$$X = H = L^2(\Omega); \ y(t) = u(.,t) \in H$$

et en définissant $(A, D(A))$ par

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

et

$$Ax = \Delta x$$

pour tout $x \in D(A)$. Nous sommes dans le bon cadre pour utiliser la théorie des semi-groupes et le théorème de Hille-Yosida, reste à montres que l'opérateur A est m-dissipatif. Il est bien connu que le Laplacien est un opérateur auto-adjoint : (on a $\langle Au, v\rangle_H = \int_\Omega (\Delta u)v = -\int_\Omega \nabla u.\nabla v = \int_\Omega u(\Delta v) = \langle u, Av\rangle_H$ par double intégration par parties) et que $D(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il suffit donc de montres qu'il est dissipatif ou de façon équivalente que $Re(\langle Ax, x\rangle_H) \leqslant 0$.

Or tout $x \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est de trace nulle, donc en intégrant par parties

$$Re(\langle Ax, x\rangle_H) = -\int_\Omega \|\nabla x\|^2_{\mathbb{R}^n} \leqslant 0.$$

Le théorème de Hille-Yosida permet enfin de conclure quant à l'existence, unicité et la régularité des solutions.

Remarque que

$$\frac{d}{dt}(\|y(t)\|_H^2) = 2\langle y^{'}(t), y(t)\rangle_H = 2\langle Ay(t), y(t)\rangle_H \leqslant 0$$

on retrouve bien sur le côté dissipatif et irréversible de l'équation de la chaleur.

Définition 3.1. *On considère un matériau caractérisé par sa température $u(x,t) \in \mathbb{R}$ dans un domaine Ω borné et régulier. Alors la loi d'évolution de la température, à la présence d'une source, est donnée par :*

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = f \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T); \\ u = 0 \quad \text{dans} \quad \partial\Omega, \\ u(t=0) = u_0. \end{cases} \tag{3.25}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.3. *Pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, pour tout $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$, il existe une* *fonction u solution de l'équation* (3.25) *avec :*

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ \partial_t u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \end{cases}$$

et par conséquent, $u \in C([0,T],L^2(\Omega))$.

3.3 Contrôlabilité de l'equation de la chaleur

Nous allons considérer un problème avec contrôle distribué, et l'operateur $B = 1_\omega$ *avec* ω *un sous ouvert de* Ω. *Les espaces* U_0 *et* U_T *seront alors* $L^2(\Omega)$, *et on aura* $V = L^2(0,T;L^2(\omega))$ *qui satisfait :*

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = \upsilon.1_\omega \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \quad \text{dans} \quad \partial\Omega, \\ u(t=0) = u_0. \end{cases}$$

Remarquons tout de suite que, l'équation de la chaleur étant linéaire, il nous suffit de regarder la contrôlabilité à zéro.

Pour $\omega = \Omega$, *le problème de contrôlabilité à zéro est essentiellement trivial*

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = \upsilon \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \quad \text{dans} \quad \partial\Omega, \\ u(t=0) = u_0. \end{cases}$$

En effet, prenons $\upsilon = 0$ *sur* $[0, \frac{T}{2}]$. *Alors on a atteint une fonction* $u(\frac{T}{2})$ *de classe* C^∞.

Considérons ensuite une fonction $\eta : [0,T] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞ *telle que* $\eta = 1$ *sur* $[0, \frac{T}{2}]$ *et* $\eta = 0$ *sur* $[\frac{3T}{4}, T]$. *Posons alors* $\upsilon = \eta \triangle u(\frac{T}{2}) + \partial_t \eta.u(\frac{T}{2})$ *sur* $[\frac{T}{2}, T]$. *Alors* $\eta u(\frac{T}{2})$ *est la solution de l'équation sur* $[\frac{T}{2}, T]$ *et on a bien* $u(T) = 0$ *pour ce contrôle.*

Il est connu que l'équation de la chaleur ne possède pas la contrôlabilité exacte (voir par exemple l'article de G. Lebeau et E. Zuazua [14]).

3.3.1 Contrôlabilité approchée

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ de frentière Γ et soit ω un ouvert tel que $\omega \subset \Omega$.

Nous considérons l'équation de la chaleur dans $\Omega \times (0, T)$ avec un contrôle agissant sur $\omega \times (0, T)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v.1_\omega \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ y = 0 \qquad\qquad \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\ y(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.26}$$

où 1_ω est la fonction caractéristique de ω.

Remarque 3.7. *Nous pourrions avoir un second membre f et une donnée initiale y_0 mais moyennant une translation ce qui suit resterait inchangé. Le contrôle est pris ici «interne» afin de simplifier l'exposition, le cas du contrôle «frontière» posant certains problèmes technique.*

Proposition 3.1. *Pour tout $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ il existe une solution unique de (3.26) avec :*

$$y \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)),\ \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Ce résultat est classique mais de plus, d'après les propriétés régularisant de l'équation de la chaleur nous savons que si $\theta \subset \Omega - \bar{\omega}$, la solution y est de classe C^∞ sur $\theta \times]0, T[$. Il n'est pas possible de caractériser la classe de régularité de $y(T)$ à l'aide d'espaces «classiques».

Il est plus naturel de se demander si l'ensemble

$$R(T) = \{y(T), v \in L^2(\omega \times (0, T))\}$$

des états atteignables à l'instant T est dense dans $L^2(\Omega)$ par exemple. On donne à ce problème le nom de contrôlabilité approchée.

Proposition 3.2. *Pour le problème (3.26), pour tout $T > 0$, l'ensemble $R(T)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Démonstration

Il est clair que $R(T)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il sera dense dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si son orthogonal dans $L^2(\Omega)$ est réduit à $\{0\}$. Soit $\varphi_0 \in R(T)^\perp$. Résolvons le problème (rétrograde)

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T) \\ \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times (0,T) \\ \varphi(T) = \varphi_0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.27}$$

Le changement de t en $(T-t)$ nous ramène à une équation de la chaleur classique et (3.27) possède une solution unique :

$$\varphi \in C([0,T]; L^2(\Omega) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

Multiplions (3.26) par φ. Après intégrations par parties il vient :

$$\int_\Omega y(T)\varphi(T)dx = \int_0^T \int_\omega v\varphi dxdt.$$

Comme $\varphi(T) = \varphi_0 \in R(T)^\perp$ nous obtenons :

$$\int_\Omega y(T)\varphi_0 dx = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^T \int_\omega v\varphi dxdt = 0, \forall v \in L^2(\omega \times (0,T))$$

donc

$$\varphi = 0 \text{ dans } \omega \times (0,T). \tag{3.28}$$

Maintenant φ vérifie (3.27) et (3.28). D'après un résultat de continuation unique de Mizohata (voir [17]) il en résulte que :

$$\varphi \equiv 0 \text{ sur } \omega \times (0,T).$$

Par suit, $\varphi_0 = 0$ et $R(T)$ est dense dans $L^2(\omega)$.

Il est aisé de voir que la méthode utilisée ci-dessus a un caractère général et que, pour un problème linéaire, l'étude de la contrôlabilité approchée se ramène à l'étude d'une question de continuation unique pour le problème adjoint.

Remarque 3.8. *Soit $y_1 \in L^2(\Omega)$ et $\alpha > 0$. D'après le résultat précédent on sait qu'il existe $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ tel que la solution de (3.26) vérifie :*

$$|y(T) - y_1|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha.$$

Mais il va bien sur exister beaucoup de contrôles v ayant la même propriété. On peut chercher à «caractériser» un contrôle particulièr, le «meilleur» au sens d'un certain critère, par exemple :

$$\min\{\frac{1}{2}|v|^2_{L^2(\omega\times(0,T))},\ |y(T) - y_1|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha\}. \tag{3.29}$$

En utilisant un résultat de dualité de Fenchel-Rockafellar (voir [1]) le résultat suivant :
Soit $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ et φ solution de (3.27) associée. Soit

$$J(\varphi_0) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega |\varphi|^2 dxdt + \alpha|\varphi_0|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega y_1\varphi_0 dx.$$

Alors il existe $\hat{\varphi}_0 \in L^2(\Omega)$ tel que

$$J(\hat{\varphi}_0) = \min_{\varphi_0 \in L^2(\Omega)} J(\varphi_0)$$

et si $\hat{\varphi}$ est solution de (3.27) associé à $\widehat{\varphi}_0$, $\widehat{v} = \widehat{\varphi}_0.1_\omega$ est solution de (3.29).

3.3.2 Contrôlabilité aux trajectoires

Ici le problème est le suivant :
trouver $\upsilon \in L^2(0,T;L^2(\omega))$ telle que la solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = \upsilon.1_\omega \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \quad \text{dans} \quad \partial\Omega, \\ u(t=0) = u_0. \end{cases}$$

Vérifie

$$u(T) = 0.$$

Le principal problème de cette approche est qu'il n'y a pas à priori unicité du contrôle. L'idée qui pourrait sembler naturelle, c'est de regarder un υ_ε qui vérifie $\|u(\upsilon_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$, et extraire une sous suite convergente. Le problème est que le contrôle peut être à priori très grand et il y en a à priori beaucoup. On préfère donc sélectionner un contrôle de norme la plus petite possible.
Soit $\varepsilon > 0$, posons :

$$A_\varepsilon = \{\upsilon \in L^2(0,T;L^2(\omega)),\ \|u(\upsilon)(T)\| \leq \varepsilon\}.$$

Cet ensemble est fermé, convexe, et non vide d'après le point précédent. On peut donc trouver une solution υ_ε au problème :

$$\min_{\upsilon \in A_\varepsilon} \|\upsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))}.$$

Mieux : d'après le théorème de Fenchel (voir [1]),

$$\|\upsilon_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} = \min_{\psi_T \in L^2(\Omega)} J_\varepsilon(\psi_T),$$

où J_ε est définit par

$$J_\varepsilon(\psi_T) = \frac{1}{2} \iint_{(0,T)\times\omega} |\psi(t,x)|^2 dtdx + \varepsilon \|\psi_T\|_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega u_0(x)\psi(0,x)dx,$$

avec $\psi \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ solution du problème

$$\begin{cases} -\partial_t \psi - \triangle \psi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T), \\ \psi = 0 \quad \text{dans} \quad \partial\Omega, \\ \psi(T) = \psi_T. \end{cases}$$

Mieux, ici, il est facile de voir que le problème de minimisation de J_ε, qui admet forcément une solution ψ_T^ε par le théorème de Fenchel (voir [1]), vérifie $v_\varepsilon = 1_\omega.\psi_\varepsilon$. En effet, nous ne sommes pas obligés d'utiliser le théorème de Fenchel (voir [1]) pour voir que J_ε admet un minimum. En effet, il est facile de voir que l'inégalité de Carleman implique la coercivité de cette fonctionnelle.
Nous pouvons aussi nous demander pourquoi ne pas essayer de trouver un minimum sur la fonctionnelle limite J obtenue en prenant $\varepsilon = 0$. En fait, cette fonctionnelle n'est pas coercive à priori, et donc il est très difficile de montrer qu'elle admet un minimum, ce qui va se révéler être vrai par la suite, par exemple par le théorème de Fenchel (voir [1]), que l'on pourra appliquer puisque l'ensemble A_0 sera non vide, résultat que l'on n'a pas à priori.
Désormais, nous devons essayer de trouver une borne sur les v_ε. Pour celá, nous pouvons remarquer que $J_\varepsilon(\psi_T^\varepsilon) \leq J_\varepsilon(0) = 0$, d'où :

$$\frac{1}{2}\|v_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega))} + \int_\Omega u_0(x)\psi_\varepsilon(0,x)dx \leq 0.$$

Donc, si on arrive à démontrer que

$$|\int_\Omega \psi_\varepsilon(0,x)^2 dx| \leq C\|v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))},$$

alors on a le résultat facilement, puisqu'on aura :

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} \leq 2C\|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

et donc on pourra extraire une sous suite, encore notée v_ε par abus de langage, qui converge faible $L^2(0,T;L^2(\omega))$ vers un élément v. De là, on déduit des résultats classiques sur l'équation de la chaleur, que $z_\varepsilon = u(v_\varepsilon)$ converge vers $z = u(v)$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$.

Notamment, on peut passer à la limite dans les conditions aux bords, et on obtient :

$$Z(T) = 0.$$

Alors l'équation de la chaleur est contrôlable aux trajectoires, pour tout temps $T > 0$.

3.3.3 Inégalité de Carleman et applications à la contrôlabilité

Nous avons besoin ici d'introduire une fonction poids qui vérifie certaines hypothèses, et dont l'existence nous est assurée par le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soit ω_0 un sous ouvert tel que $\overline{\omega}_0 \subseteq \omega$. Alors il existe une fonction $\psi \in C^2(\Omega)$ tel que*

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega, \ \psi(x) > 0 \\ \forall x \in \partial\Omega, \ \psi(x) = 0 \\ \forall x \in \overline{\Omega} - \omega_0. \end{cases}$$

Posons, pour $\lambda > 0$,

$$\varsigma(x,t) = \frac{\exp \lambda(\psi(x) + m_1)}{t(T-t)}$$

$$\eta(x,t) = \frac{\exp \lambda(|\psi|_{L^\infty(\Omega)} + m_1) - \exp \lambda(\psi(x) + m_1)}{t(T-t)}$$

avec $m_1 = |\psi|_{L^\infty(\Omega)} + 2$ et $m_2 = |\psi|_{L^\infty(\Omega)} + 3$. Ainsi on obtient pour tout $\lambda > 0$;

$$\begin{cases} |\partial_t \varsigma| \leq T\varsigma^2 \\ |\partial_t \eta| \leq T\varsigma^2 \\ |\partial^2_{tt} \varsigma| \leq T^2\varsigma^3 \\ |\partial^2_{tt} \eta| \leq T^2\varsigma^3. \end{cases}$$

Armé de ces relations, on peut démontrer l'inégalité suivante :

Théorème 3.4. *(Inégalité de Carleman)*
Il existe $s_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$, tels qu'il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de Ω, ω_0, ψ, T, telle que pour tout $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, la solution

$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f \quad \textit{dans} \quad \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \quad \textit{dans} \quad \partial\Omega \\ u(t=0) = u_0 \end{cases}$$

satisfait $\forall s \geq s_0$, $\forall \lambda \geq \lambda_0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \iint_{(0,T)\times\Omega} \frac{\exp(-2s\eta)}{\varsigma}(|\partial_t u|^2 + \sum_{i,j=1}^{N} |\partial_{ij}^2 u|^2) dtdx + s\lambda^2 \iint_{(0,T)\times\Omega} \exp(-2s\eta)\varsigma|\nabla u|^2 dtdx \\ +s^3\lambda^4 \iint_{(0,T)\times\Omega} \exp(-2s\eta)\varsigma^3|u|^2 dtdx \\ \leq C(\iint_{(0,T)\times\Omega} \exp(-2s\eta)|g|^2 dtdx + s^3\lambda^4 \iint_{(0,T)\times\omega} \exp(-2s\eta)\varsigma^3|u|^2 dtdx). \end{aligned}$$

Corollaire 3.1. *(Continuation unique)*
Soit φ solution de (3.27), vérifiant

$$\varphi = 0 \quad \textit{sur} \quad (0,T) \times \omega.$$

Alors $\varphi = 0 \quad$ sur $\quad (0,T) \times \Omega$.

Résumé

Dans ce mémoire nous donnons les principes généraux qui concernent l'analyse des systèmes distribues que nous introduiront par le biais de quelques espèces d'inégalités principaux, de la théorie des semi-groupes. Le but de ce travaille consiste à étudié la contrôlabilité de l'équation de la chaleur, on remarque que la contrôlabilité exacte n'est pas vérifie par contre la contrôlabilité approchée et la contrôlabilité aux trajectoires sont vérifie.

Mots clés : contrôlabilité exacte, contrôlabilité approchée, contrôlabilité aux trajectoires, l'equation de la chaleur.

Abstract

In this work we give the general principles relating to the analysis of distributed systems we introduce through some major inequalities species, semi-group theory. The aim of this work is to study the controllability of chaleur equation, when we remark that the exacte controlability don't check however the approach controlability and controlability to the trajectories.

Key words : exacte controlability, approach controlability, controlability to the trajectories, chaleur equation.

ملخص

في هذه المذكرة نقدم المبادئ العامة المتعلقة بتحليل النظم الموزعة، ونحن نقدم من خلال بعض الانواع الرئيسية لعدم المساواة و نظرية شبه المجموعات. الهدف من هذا العمل هو دراسة مراقبة معادلة الحرارة. حيث نلاحظ أن المراقبة المظبوطة محققة اما بالنسبة للمراقبة التقريبية و المراقبة على المسار فهما محققتين.

الكلمات المفتاحية :

المراقبة المظبوطة، المراقبة التقريبية، المراقبة على المسار، معادلة الحرارة.

Bibliographie

[1] A. Ababsa ; Contrôlabilité à zéro des systèmes à deux équations paraboliques avec un seul contrôle, Université Mentouri de Constantine, 2012.

[2] A. Ayadi. A. Berahail ; Système parabolique F-contrôlable et les actionneurs frontières, Sci : Tech. $A - N^0 22$, Déc. 2004, pp $13 - 16$, univ Mentouri-Constantine.

[3] A. Bouzeraa et S. Bounamous ; Contrôlabilité des système non linéaires, Centre Universitaire Abd elhafid Boussouf Mila, 2015/2016.

[4] A. El Jai-A. J. Pritchard ; Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués. Masson. R.MA 3. Paris. 1986.

[5] A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov ; Controllability of Evolution Equations, Lecture Notes Series 34, Seoul National University, Korea, 1996.

[6] A. Pazy ; Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer, Applied Mathematical Sciences, 1983.

[7] A. Rekab et H. Zerizer ; Contrôlabilité d'un système évolution, Centre Universitaire Abd elhafid Boussouf Mila, 2012/2013.

[8] E, B, Davies ; One-parameter Semigroups, Academic Press, 1980.

[9] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah ; C. Dupaix, et I. Kostin, Controllability to the trajectories of phase-field models by one control force. SIAM J. Control optim. Vol.42, No. 5, pp. 1661-1680.

[10] F. Ammar Khodja , A. Benabdallah ; Une introduction à la théorie du contrôle. 2005.

[11] J. L. Lions ; Controlabilité exacte. Perturbation et stabilisation des systèmes distribués . Tome 1. Masson 1988.

[12] H. Brézis ; Analyse fonctionnelle. Théorie et application. Masson, Pais, (1983).

[13] H. Brézis et T. Cazenave ; Linear semi-groups of contractions : the Hille-Yosida theory and some applications. Publications du laboratoire d'Analyse Numérique. Université Pierre et Marie Curie, Paris (1992).

[14] G. Lebeau and E. Zuazua ; Null-controllability of a system of linear thermoelasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 141(4) : 297–329, 1998.

[15] G. Lebeau and L. Robbiano ; Contrôle exact de l'équation de la chaleur, Comm. P. D. E, 20, 335-356, (1996).

[16] P. Matriner ; A new methode to abtain decay rate estimations for dissipative systems. ESAIM. Control Optim. Calcul varia (1999).

[17] S. Mizohata ; Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A31, 1958, pp.219-239.

[18] V. Komornik ; Exact controllability and stabilization. Université Louis Pasteur, Strasbourg, France. 1994.