الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie   Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Méthode de Vogel et Vogel modifiée pour la résolution du problème de transport simple

Préparé par : *Boulhella Meriem*
Lahkiri Abla

Devant le jury

Meskin Habiba	….. (M.A.B)	C .U.Abd Elhafid Boussouf	Président
Fadel Wahida	…... (M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
Baiche Kenzia	……(M.A.B)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examinateur

Année Universitaire : 2016/2017

Remerciement

Chaque fois qu'on achève une étape importante dans notre vie, on fait une pose pour regarder en arrière et se rappeler toutes ces personnes qui ont partagé avec nous tous les bons moments de notre existence, mais surtout les mauvais.

Avant tout, nous remercions le bon dieu tout puissant qui nous avons donné la force et de nous avoir permis d'arriver à ce stade-là.

Notre première pensée va tout naturellement à notre encadreur **MADAME FADEL WAHIDA** qui suit fidèlement nos travails, nous tenons la remercie pour son encadrement, pour la confiance qu'il nous a témoigné en nos confiant ce travail et pour nous avoir donné les moyens d'arriver au tout de ce mémoire.

Nous voudrais sons remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Ensuite, nous tenons à remercier **tous les enseignants** de centre université de Mila en générale **et l'équipe enseignantes de l'institut des sciences et de technologie** en particulier.

Nous dédions cet humble travail :

Nos très chers parents dont le courage et l'abnégation constitueront toujours pour nous un exemple à suivre.

Les familles**'' Boulhella ''et '' Lahkiri .**

Enfin, nous adressons notre plus sincères remerciements à **tous notre proches et amis et tous les groupes de Master** qui nous ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

ملخص

نهتم في هذه المذكرة بدراسة نظرية لمشكل النقل تناولنا خلالها طريقة Vogel، Vogel modifié لإيجاد حل إبتدائي للمشكل المطروح، و قدمنا عرض نظري مفصل لهذه الأخيرة و أبرزنا الإختلاف بينها و بين الطريقة التقليدية وإيجابيات هذا الإختلاف.

كلمات مفتاحية : البرمجة الخطية، مشكل النقل، طريقة فوجيل.

Résumé

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à une étude théorique du problème de transport classique, au cours de laquelle nous avons traité les méthodes de Vogel et Vogel modifiée pour trouver une solution initiale du problème posé, on a présenté l'étude cette dernière en détails et nous avons souligné sa différence avec celui de la méthode classique, et on a monté l'avantage de cette modification.

Mots clés : programmation linéaire, problème de transport classique, la méthode de Vogel.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La programmation linéaire est une technique mathématique permettant de déterminer la meilleur solution d'un problème dont les données et les inconnues satisfait à une série d'équations et inéquations linéaires, la programmation linéaire à été formulée par Dantzig en 1947 et connait un développement rapide par suite de son application directe à la gestion scientifique des entreprises. Le facteur expliquant l'essor de la programme linéaire est la construction d'ordinateur puissants qui ont permis de traiter les problème concrets des taille très grande. On applique surtout en gestion et on économie appliquée. On peut citer domaines application de la programmation linéaire qui sont : les transports, les banques, les industries lourds et légères, l'agriculture les chaîne commerciales, la sidérurgie, et même le domaine des application militaires.
Les méthode de résolution sont la méthode du simplexe et méthode duale du simplexe, méthode des point intérieure ... etc.
Ici, nous intéressons au cas où la fonction à optimiser et les contraintes sont linéaire on aura alors affaire à un problème de programmation linéaire et exactement le problème de transport classique.
Le problème de transport, souvent observé dans différents domaines l'industrie, est introduit pour la première fois par Hitchcock en 1941, traité et étudié en détail par Koopmans en 1947, Kantorovich et Savourine en 1949 et puis Dantzig en 1951. Ainsi le problème du transport est un programme linéaire qu'a une structure particulière.

Cette classe de programmations linéaires englobe, les problème qui s'ènnoncent dans une forme approximation à celle-ci : il y a m sources et n destinations. Dans chaque source on dispose d'une certaine quantité (de matière première ou produit donnée), et dans chaque destination on demande une certaine quantité de ce produit, le coût de transport est différent pour chaque couple source-destination. On cherche un plan de transport optimale dans le sens qu'il minimise le coût total de transport.

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Dans le premier nous présentons quelques notations d'analyse convexe et la programmation mathématique et linéaire.

le deuxième chapitre nous contient une présentation du problème de transport à deux indices et la méthode de Vogel et Vogel modifiée pour la résolution de ce problème.

Dans le dernier chapitre on consacré quelque exemples numériques corrigées par la méthode de Vogel et Vogel modifiée.

CHAPITRE 1

PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE

Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons des résultats fondamentaux d'analyse convexe et de la programmation mathématique et particulièrement celle linéaire.

1.1 Notions fondamentales d'analyse convexe

1.1.1 Définitions

Définition 1.1. *On dit que l'ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si :*
$\forall x,\ y \in C;\ \forall \lambda \in [0,\ 1],\ \lambda x + (1-\lambda)y \in C$
Autrement dit si le segment de droit joignant deux points quelconques
$x,\ y \in C : [x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ *est entièrement inclus dans* C.

Exemples

Les ensembles suivant sont des convexes :

1. $\{x \in \mathbb{R}^n /\ b^T x \geq \beta\};\ \{x \in \mathbb{R}^n /\ b^T x \leq \beta\}$ sont appelés : demi-espace fermés.

$\{x \in \mathbb{R}^n / \ b^T x > \beta\}$; $\{x \in \mathbb{R}^n / \ b^T x < \beta\}$ sont appelés : demi-espace ouverts.

Tous ces ensembles sont des convexes non vides.

2. Les ensembles de la forme : $P = \{x / \ Ax \leq b\}$ où A est une $m \times n$ matrice et b un m-vecteur sont des convexes de $\mathbb{R}^n$.

   Ils sont appelés polyèdres convexes (polyèdre).

3. L'ensemble S des solution optimales du programme linéaire

$$\begin{cases} \quad \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

   est convexe.

   Il constitue l'ensemble de tous les points qui minimisent la forme linéaire $c^T x$ sur la région polyédrique :

$$P = \{x \ : \ \ Ax = b; \ x \geq 0\}$$

Définition 1.2. *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite affine si elle écrit :*

$$f(x) = c^T x + d$$

où $c \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de constante et $d \in \mathbb{R}$ une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est affine si chacune de ses composantes $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ i = 1, \ \cdots, \ m$; est affine. Dans ce cas elle peut s'écrit

$$f(x) = Ax + b$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice et $b \in \mathbb{R}^m$ un vecteur.

Définition 1.3. *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout $x, \ y \in X; \ \forall \lambda \in [0, 1]$; on a :*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

f est dite strictement convexe si et seulement si :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n;\ \forall \lambda \in [0,1],\ \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Définition 1.4. *Pour qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ soit compact, il faut et il suffit qu'elle soit fermée et bornée.*

Définition 1.5. *(Combinaison Convexe) On appelle combinaison convexe de m-vecteurs de $\mathbb{R}^m$ $x_1, ..., x_m$ toute combinaison linéaire s'écrire sous la forme :*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i;\ \lambda_i \geq 0;\ \sum \lambda_i = 1;\ 1 \leq i \leq m$$

Définition 1.6. *(Sommet) Un vecteur $x \in P$ est un sommet de P s'il est impossible de trouver deux vecteur y, z dans P différents de x tel que x soit combinaison convexe de y, z c'est-à-dire tel qu'il n'existe pas un réel $0 \leq \lambda \leq 1$ tant que : $x = \lambda y + (1-\lambda)z$.*

proposition 1.1. *Si $f : C \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par C-convexe*
f est concave sur C si et seulement si : $-f$ est convexe sur C
ie : $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n;\ \forall \lambda \in [0,1] f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

1.2 Programmation mathématique :

Un programme mathématique (PM) est un problème d'optimisation de la forme :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \cdots,\ k \\ h_j(x) = 0,\ j = 1, \cdots,\ m \\ x \in C \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où $f,\ g_i,\ h_j\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Parmi les cas particuliers les plus étudiés, on note :

- la programmation linéaire ($f(x)$ linéaire, $g_i(x)$, $h_j(x)$ affines, C octant positif).
- la programmation convexe ($f(x)$, $g_i(x)$ convexes, $h_j(x)$ affines, C convexe).

– la programmation en nombres entiers (C discret).

Définition 1.7. *L'ensemble* $S = \{x \in C \ : \ g_i(x) \leq 0, \ h_j(x) = 0\}$ *est appelé ensemble des solutions réalisables.*

Définition 1.8. *Soit* $x^* \in S$, *on dit que* x^* *est un minimum local s'il existe* $\epsilon > 0$ *tel que*

$$f(x^*) \leq f(x), \ \forall x \in B_\epsilon(x^*)$$

où $B_\epsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - x^*\| < \epsilon\}$.

Définition 1.9. *Un vecteur* $x \in \mathbb{R}^n$ *est appelle solution réalisable d'un (PM) s'il vérifié les contraintes.*

1.2.1 Conditions d'optimalité (cas sans contrainte)

Soit le programme non linéaire et sans contrainte (PNC)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \qquad\qquad (1)$$

où la fonction $f(x)$ est au moins deux fois continûment différentiables.

Théorème 1.1. *(Condition nécessaire du 1er ordre) Soit* x^* *un minimum local pour (1), on a alors*

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Théorème 1.2. *(Conditions nécessaires du 2ième ordre) Soit* x^* *un minimum local pour (1), on a alors*

$$\begin{aligned} &\nabla f(x^*) = 0 \\ &y^T \nabla^2 f(x^*) y \geq 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

La matrice hessienne ou point x^* *est donc semi-définie positive.*

Théorème 1.3. *(Conditions suffisante du 2ième ordre) Soit x^* un point tel que :*

$$\begin{aligned} &\nabla f(x^*) = 0 \\ &y^T \nabla^2 f(x^*) y > 0, \ \forall y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

alors x^* un minimum local (strict).

1.2.2 Condition d'optimalité (cas avec contrainte)

Soit le programme mathématique non linéaire (PM) :

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ &g_i(x) \leq 0, \ i = 1, \cdots, \ k \\ &h_j(x) = 0, \ j = 1, \cdots, \ m \end{aligned} \qquad (2)$$

où les fonction f, g_i et h_j sont au moins deux fois différentiables.

Définition 1.10. *Le lagrangien du programme mathématique (2) est défini par*

$$L(x, \ \lambda, \ \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(x) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i g_i(x).$$

Théorème 1.4. *(Karush-Kuhn-Tucker) Soit x^* un minimum local régulier de(2), alors il existe les multiplicateurs $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^k$ tel que :*

$$\begin{aligned} &\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla h_j(x) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i \nabla g_i(x) = 0. \ (\nabla_x L(x^*, \ \lambda^*, \ \mu^*) = 0) \\ &\mu_i^* \geq 0, \ i = 1, \cdots, \ k \qquad (KKT) \\ &\mu_i^* g_i(x^*) = 0, \ i = 1, \cdots, \ k \\ &g_i(x^*) \leq 0, \ i = 1, \cdots, \ k \\ &h_j(x^*) = 0, \ j = 1, \cdots, \ m \end{aligned}$$

Les conditions nécessaires du premier ordre (KKT) sont souvent appelées les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (ou Kuhn-Tucker). Dans le cas convexe (c'est-à-dire lorsque $f(x)$ et $g_i(x)$ sont des fonctions convexes $h_j(x)$ des fonctions affines), un point x^* régulier est *un minimum global pour le programme (2) si et seulement si il satisfait les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.*

Les condition du deuxième ordre utilisent les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
&I(x) = \{i = 1, \cdots, k \; : \; g_i(x) = 0\},\\
&I'(x) = \{i = 1, \cdots, k \; : \; g_i(x) = 0, \; \mu_i > 0\},\\
&T(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \; : \; \nabla g_i(x) y \leq 0, \; i \in I(x) \; et \; \nabla h_j(x) y = 0, \; j = 1, \cdots, m\},\\
&T'(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \; : \; \nabla g_i(x) y \leq 0, \; i \in I'(x) \; et \; \nabla h_j(x) y = 0, \; j = 1, \cdots, m\}.
\end{aligned}$$

Théorème 1.5. *(Conditions nécessaires du deuxième ordre) Soit x^* un minimum local régulier de (2), alors il existe les multiplicateurs $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^k$ tel que :*

- *Les conditions de KKT sont satisfaites.*
- $y^T \nabla^2 L(x^*, \; \lambda^*, \; \mu^*) y \geq 0, \; \forall y \in T(x^*)$.

Théorème 1.6. *(Conditions suffisante du deuxième ordre) Le point x^* est un minimum local strict de (2) si il existe les multiplicateurs $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^k$ tel que :*

- *Les conditions de KKT sont satisfaites.*
- $y^T \nabla^2 L(x^*, \; \lambda^*, \; \mu^*) y > 0, \; \forall y \in T'(x^*)$.

1.2.3 Principaux résultats d'éxistence et unicité :

Théorème 1.7. *(Existence) : Si f est une fonction convexe alors (PM) admet au moine une solution optimale.*

Théorème 1.8. *(Unicité) : Si f est une fonction continue et strictement convexe alors (PM) admet une solution optimale unique.*

1.3 Programmation linéaire (PL)

1.3.1 Forme standard et canonique d'un (PL)

Forme standard

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

n variables, m contraintes $m \leq n$; $x, c \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$; $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Forme canonique

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leqslant b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Notons que tout programme linéaire, c'est-à-dire tout problème d'optimisation où la fonction objectif et les fonctions définissant les contraintes sont affines, peut se mettre sous la forme standard par des manipulations algébriques simples.

- La matrice A est de dimension $m \times n$ avec $m \leq n$.
- On pose l'hypothèse que la matrice A est de plein rang.
- Sur des modélisations pratique, cette hypothèse est rarement satisfaite.
- La matrice A peut toutefois être réduit à une matrice plein rang par une décomposition QR ou une élimination de Gauss.
- L'ensemble des solution réalisable

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b, \ x \geq 0\}$$

  Forme polyèdre convexe.
- Un programme linéaire est réalisable si S est non vide.

– Un programme réalisable est borné si la valeur de la fonction objectif est fini pour tout point de S.

proposition 1.2. *Un point x est un point extrême de S si et seulement si les colonnes $\{A^j \ : \ x_j > 0\}$ de A sont linéairement indépendantes.*
On en déduit que si S est non vide, alors il existe au moins un point extrême.

proposition 1.3. *Un programme linéaire réalisable et borné possède une solution optimale à un point extrême du polyèdre de ses solutions réalisable.*

Définition 1.11. *Une base de A est toute sous-matrice B formée de m colonnes linéairement indépendantes de A.*

Définition 1.12. *Soit B une base de A. La solution de base associée à B est le point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$x_B = B^{-1}b$$
$$x_N = 0.$$

Définition 1.13. *Une solution de base telle que : $x_B \geq 0$ est dite solution de base réalisable.*
À *une solution de base réalisable du système :*

$$Ax = b$$

correspond un point extrême du polyèdre convexe. À *tout point extrême, correspond au moins une base réalisable.*

1.3.2 La dualité

Problème primal :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \qquad\qquad (primal) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

n variables , m contraintes $m \leq n$; $x, c \in \mathbb{R}^n; b \in \mathbb{R}^m; A \in \mathbb{R}^{n*m}$

Problème dual

Le liens entre les programmes primal et sont dual sont les suivants :

Primal	$\rightleftarrows$	dual
minimisation $c^T x$	$\rightleftarrows$	second membre c
second membre b	$\rightleftarrows$	maximisation $b^T y$
A matrice des contraintes	$\rightleftarrows$	A^T matrice des contraintes
contraintes $j \geq$	$\rightleftarrows$	variables $y_j \geq 0$
variables $x_i \geq 0$	$\rightleftarrows$	contrainte $i \leq 0$
contrainte $j =$	$\rightleftarrows$	variables $y_j \geq 0$ où ≤ 0
variables $x_i \geq 0$ où ≤ 0	$\rightleftarrows$	contraintes $i =$

Alors la forme standard donner par :

$$\begin{cases} \max b^T y \\ A^T y \geq c & (Dual) \\ y(non\, restreint) \end{cases}$$

Théorème 1.9. *(Dualité faible) x est une solution réalisable primal et y est une solution réalisable dual alors $by \leqslant cx$ lorsque primal du type minimisation et $by \geq cx$ lorsque primal du type maximisation.*

Théorème 1.10. *(Dualité forte) : x^* est une solution optimale pour le programme alors le programme dual admet une solution optimale y^* tel que $by^* = cx^*$.*

CHAPITRE 2

PROBLÈME DE TRANSPORT

Introduction

Ce chapitre consacré à la présentation du problème de transport (la méthode du Vogel et Vogel modifié).

2.1 Position du problème

Le problème de transport simple dont l'objectif est de minimiser la fonction coût rattachée au transfert de différentes quantités d'une matière ou de particules à partir de m sources vers n destinations, et dans l'hypothèse l'offre total égale la demande.
Soit $S_1, ..., S_m$; m sources (centres d'expéditions) et $D_1, ..., D_n$ les destinations (centres de consommations). On introduit les notation suivant :
x_{ij} : quantité transportée de S_i a D_j ;
c_{ij} : la coût unitaire du transportée de S_i a D_j ;
a_i : offre de la source S_i avec : $(a_i \geq 0)$;
b_j : demande de la destination D_j avec $(b_j \geq 0)$.

Alors mathématiquement, ce problème est formulé comme suit :

$$\begin{cases} \min z = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1,m} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, \ j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases} \qquad (PT)$$

avec $a_i > 0, \ b_j > 0 \ \ et \ \ c_{ij} \geq 0$

2.2 L'écriture matricielle

Le problème de transport s'écrit de manière matricielle :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = d \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (PT)$$

où $x = (x_{11}, ..., x_{1n}, x_{21}, ..., x_{2n}, ..., x_{mn})$ et $c = (c_{11}, ..., c_{1n}, c_{21}, ..., c_{2n}, ..., c_{mn})$ et le vecteur d correspond a $d = (a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n)$.

Si l'on range les variable x_{ij} dans l'ordre :

$x_{11}, ..., x_{1n}, x_{21}, ..., x_{2n}, ..., x_{mn}$ la matrice A de contraintes s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix}
\overbrace{11\cdots1}^{nfois} & \overbrace{00\cdots0}^{nfois} & \bullet\bullet\cdots\bullet & \overbrace{00\cdots0}^{nfois} \\
00\cdots0 & 11\cdots1 & \bullet\bullet\cdots\bullet & 00\cdots0 \\
00\cdots0 & 00\cdots0 & \bullet\bullet\cdots\bullet & 00\cdots0 \\
\bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet \\
\bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet \\
\bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet \\
00\cdots0 & 00\cdots0 & \bullet\bullet\cdots\bullet & 11\cdots1 \\
10\cdots0 & 10\cdots0 & \bullet\bullet\cdots\bullet & 10\cdots0 \\
01\cdots0 & 01\cdots0 & \bullet\bullet\cdots\bullet & 01\cdots0 \\
00\cdots0 & 00\cdots0 & \bullet\bullet\cdots\bullet & 00\cdots1 \\
\bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet \\
\bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet \\
\bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet & \bullet\bullet\cdots\bullet \\
00\cdots1 & 00\cdots1 & \bullet\bullet\cdots\bullet & 00\cdots1
\end{pmatrix}.$$

proposition 2.1. *La matrice A possède les propriétés suivantes :*

1. *Chaque élément de A égal soit à 0 soit à 1.*
2. *On partage les lignes de A en deux ensembles B (contenant les m première lignes) et C (contenant les n dernière lignes). Si une colonne a deux éléments non nuls, alors les lignes les contenant appartiennent l'une à B et l'autre à C.*
3. *La matrice est de rang $(m + n - 1)$.*

2.3 Tableau de transport

Le tableau "T" de transport est par définition un tableau rectangulaire ayant m ligne $(i = 1, \cdots, m)$ et n colonnes $(j = 1, \cdots, n)$ correspondant aux source et destination respectivement.

Chaque case (i, j) de T contient des quantités comme :

– Le coût unitaire c_{ij} de transport de S_i vers D_j.

– La valeur de la variable x_{ij}.

– Le vecteur colonne P_{ij} de la matrice S des coefficients.

Le tableau “T” est en outre bordé par une ligne marginale contenant les disponibilités a_i et une colonne marginale contenant les demandes b_j.

donc le tableau de transport donnée par :

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	$\cdots$	D_n	Offre
S_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
S_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
S_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	$\cdots$	c_{3n}	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_m	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
Demande	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_n	

Théorème 2.1. *Le problème de transport a un sens (admet un solution réalisable) si et seulement si :*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

c-à-d la demande du bien transport est égal à la disponibilité.

Si :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

On peut toujours ramener le problème à une condition comme :

$$\sum_{i=1}^{m} a'_i = \sum_{j=1}^{n} b'_j$$

Théorème 2.2. *Pour qu'un solution réalisable x soit optimale, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur $(u_i, v_j), i = 1, \cdots, m$ et $j = 1, \cdots, n$ vérifiant les condition suivantes :*

$$u_i + v_j = c_{ij} \;\; ; \; pour \;\; x_{ij} > 0$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \;\; ; \; pour \;\; x_{ij} = 0$$

2.4 Résolution de problème de transport

Le problème de transport est ainsi un programme linéaire et peut donc être résolu par des méthodes du simplexe (voire balansky(1986)ou arsham(1989)).
Cependant il existe une méthode plus adaptée connue sous le non d'algorithme de transport (Charnes and cooper (1954) ou Dantzig(1963)). L'algorithme de transport, comme toute application de la méthode du simplexe à la résolution de ce type de problème, nécessite une solution initiale de base. Sa détermination à partir de la forme standard n'est pas appropriée compte tenu de la structure des problèmes de transport. D'autres techniques plus simples et adaptées leur sont appliquées. Nous pouvons citer la méthode du Coin Nord Ouest et celle des coûts moindres [voir Taha (2009)]. Dans cette même optique, il existe des approches plus raffinées qui sont des méthodes d'approximation parmi lesquelles nous pouvons citer la méthode de Russel, 1961 et la méthode de Vogel (Vogel et al. 1958) Cette dernière approche à été le sujet d'une modification pour la résolution des problèmes de transport non balancés [Gayal(1984)ou Ramakrishnam (1988)]. Dans cette partie, on s'intéresse d'étudier la méthode de Vogel et Vogel modifié avec un rappel sur la méthode du coût minimum.

2.4.1 Méthode de moindre coût

L'idée à exploiter les cases ayant des coût de transport faible et leur attribuer les quantité maximales (dans la mesure du possible). On procède de la manière suivant :
Étape 01 :repérer le case du tableau ayant le coût le plus faible.
Étape 02 : affecter à cette case la quantité minimale possible.
Étape 03 : une colonne ou une ligne est saturée :

3.1 Si une colonne est saturée, l'éliminer du tableau, mettre à jour la quantité dans la ligne correspondante et reprendre au point 1 avec le nouveau tableau.

3.2 Si une ligne est saturée, l'éliminer du tableau, mettre à jour la quantité dans la colonne correspondante et reprendre au point 1 avec le nouveau tableau.

Étape 04 :lorsque toutes les lignes et toutes les colonnes sont saturée alors doit contenir exactement $m + n - 1$ variable de base.

2.4.2 Méthode de Vogel

Cette méthode mise sur la minimisation d'un système de pénalité. On appelle la pénalité d'une rangée, la différence de coût entre la case de plus petit coût et celle du deuxième plus petit coût de la rangée.

Étape 1 : Détermination d'une case (i, j) de la grille.

1.1 : Poser $I = \{1, \ldots, m\}$, $J = \{1, \ldots, n\}$

Calculer les pénalités pour chaque rangée $i \in I$, $j \in J$.

- pour tout $i \in I$ calculer :

$$\min C_{ij} = C_{ij_0}$$

$$\min C_{ij} = C_{ij_1},\ \forall j \neq j_0$$

$$p_i = C_{ij_1} - C_{ij_0}.$$

- pour tout $j \in J$ calculer :

$$\min C_{ij} = C_{i_0j}$$

$$\min C_{ij} = C_{i_1j}, \forall i \neq i_0$$

et calculer

$$q_j = C_{i_1j} - C_{i_0j}.$$

1.2 : Identifier la rangée correspondant à la plus grand pénalité.

1.2.1 : Si cette rangée est unique alors choisir la case (i, j) la moins coûteuse de cette rangée.

1.2.2 : choisir parmi les p_i, q_j la pénalité la plus grande

– Déterminer dans la rangée de pénalité choisie la case (i, j) la moins couteuse.

– s'il y a une égalité des pénalités choisir parmi elles la rangée qui a la case la moins couteuse.

– s'il y a encoure égalité (Les case de moindre coût) choisir la première situé dans le tableau de transport.

Étape 2 et 3 : Ces étapes de la procédure d'initialisation sont effectuée en recalculant les pénalités à chaque itération.

2.4.3 Méthode de vogel modifiée

Elle comprend principalement plusieurs étape. la première consiste à réduit la matrice des coût unitaire de transport $(C_{ij})\,;\, i = 1, \cdots, m, \;\; j = 1, \cdots, n$, cette démarche induit un problème équivalent au problème initiale de transport PT.

Étape 1 : Matrice des coût réduit :

La réduction de la matrice de coût unitaire de transport (C_{ij}) s'effectue par :

pour chaque ligne i déterminer

$$u_i = \min_j \{C_{ij}\} \;\; et \;\; poser \;\; \overline{C_{ij}} = C_{ij} - u_i, \; j = \overline{1, \; n}$$

pour chaque colonne j déterminer

$$v_j = \min_i \{C'_{ij}\} \;\; et \;\; poser \;\; R_{ij} = \overline{C_{ij}} - v_j, \; i = \overline{1, \; m}$$

La matrice R résultante de la réduction contient au moins un zéro au niveau de chaque rangée (ligne ou colonne).

proposition 2.2. *Le problème de transport $\overline{PT}$ associée à la matrice de coûts réduit est équivalent au problème original PT.*

L'étape suivante consiste à associer comme dans la méthode de Vogel une pénalité à chaque rangée. Ensuite la rangée de plus grande pénalité est choisie pour déterminer le variable à assigner.

Étape 2 : Le plus grand pénalité(pgp) :

2-1 **Déterminer des pénalités :**

Déterminer pour chaque ligne i :

$$u_i = \min_j \{C_{ij}\} \;\; et \;\; p_i = \min_{i \neq j} \{C_{ij} - u_i\}$$

Déterminer pour chaque colonne j :

$$v_j = \min_i \{C_{ij}\} \;\; et \;\; q_j = \min_{i \neq j} \{C_{ij} - v_j\}$$

2-2 **Rangée de plus grande pénalité :**

Déterminer la plus grande pénalité tq : $pgp = \max\{p_i, q_j\}$

Si $\max\{p_i, q_j\} = p_k$ *alors déterminer* $\min_j\{C_{kj}\} = C_{kr}$

Si $\max\{p_i, q_j\} = q_r$ *alors* $\min_i C_{ir} = C_{kr}$

la variable à allouer X_{kr}.

Si la plus grand pénalité égal à 0 alors appliquer la méthode de moindre coût sinon continues.

proposition 2.3. *Si une matrice réduite associée à un problème de transport est telle que la plus grande pénalité est nulle, alors l'assignation par les moindres coûts au niveau de la matrice initiale fournit la solution optimale.*

Étape 3 : Déterminer de la variable à assigner :

Nous fournissons une brièvement une présentation de la méthode de Vogel. Pour chaque ligne i ou colonne j, elle évalue une pénalité qui représente la perte unitaire résultante du transport d'une unité de produit au second moindre coût plutôt qu'au moindre coût de cette rangée. En d'autres termes, elle représente le manque à gagner si on rate le moindre coût de cette rangée pour se contenter du second moindre coût. La méthode de Vogel donne la priorité d'assignation aux rangées de plus grande pénalité.

3-1 **La plus grande pénalité**

3-2 **Allocation de la variable :**

Allouer la variable X_{kr} en effectuant $X_{kr} = \min\{a_k, b_r\}$ poser : $a_k = a_k - X_{kr}$ et $b_r = b_r - X_{kr}$

3-3 **Rayer d'une rangée**

L'assignation de la variable X_{kr} implique $a_k = 0$ ou $b_r = 0$.

Donc la saturation d'au moins une rangée du tableau.

3-4 **Embarras de chois :**

Si les deux rangée de la variable assignée sont saturées en même temps c-à-d : $a_k = 0$ et $b_r = 0$ il faut rayer celle de plus grand pénalité.

Étape 4 : Test d'arrêt :

s'il reste une colonne ou une ligne non rayée dans le tableau la remplir et fin.

Étape 5 : Réduction de la matrice de coût réduit :

La matrice restante n'est plus nécessairement réduite. Il faut effectuer la réduction par le biais de la réduction de la matrice des coût réduit . Pour la présenter, nous considérons que la dernière variable assignée est X_{kr}. Elle est associée aux pénalités p_k et q_r respectivement associées à sa ligne et à sa colonne. La plus grande pénalité est forcément p_k ou q_r pour que X_{kr} puisse être la variable à assigner.

5.1 : **Test de non réduction**

- Si la ligne k est rayer telle que $p_k \neq 0$ et $q_r = 0$ alors la matrice est restante est réduite.
- Si la colonne r est rayer telle que $p_k = 0$ et $q_r \neq 0$ alors la matrice est restante est réduite.

5.2 : **Test de réduction**

- Si la ligne rayée est telle que $p_k = 0$ alors aller à l'étape 2.
- Si la colonne rayée telle que $q_r = 0$ alors aller à l'étape 3.

5.3 : **réduction des colonnes**

Réduire les colonne j telle que $q_j \neq 0$ et $\overline{C_{r,j}} = 0$.

5.4 : **réduction des lignes**

Réduire les colonne i telle que $p_i \neq 0$ et $\overline{C_{i,k}} = 0$.

Règles supplémentaires

Notons que dans les étapes 2 et 3, nous appliquons la méthode de Vogel avec quelques règles supplémentaires présentées ci-dessous. Elles permettent de lever les situations d'embarras de choix.

Règle 1 : Comparaison de pénalités de rangées complémentaires si la plus grande pénalité est atteinte plusieurs fois, alors un embarras de choix entre diverses rangées (lignes, colonnes) se pose. Elles ont est selectionnèes car ayant le moindre coût dans une rangée de plus grande pénalité. Il faut considérer les pénalités de leurs rangées complémentaires et selectionner celles de plus grande pénalité.

Règle 2 : Moindre coût non réduit Si l'embarras du choix persiste, alors considérer toutes les variables candidates. Á chacune de ces rangées correspond au moins une variable associée au moindre coût. L'embarras du choix est donc reporté sur ces variables. La règle 2 privilégie la variable X_{ij} de moindre coût original C_{ij} pour lever cette indécision.

Règle 3 : Si l'embarras du choix persiste, alors il faut la lever arbitraire.

CHAPITRE 3

EXEMPLES NUMÉRIQUES

Introduction

Dans ce chapitre on va présenté des exemples numériques sur les méthodes des Vogel et Vogel modifié.

Exemple 01 : Considérons le problème suivant : 3 sources notées S_1, S_2, S_3 et 2 destinations notées D_1, D_2, Chaque source a une offre (à respecter) et chaque destination une demande (à satisfaire) On possède, en outre, les coûts de transport unitaires des source vers les destinations.

Source \ Destination	D_1	D_2	Offre
S_1	50	10	2
S_2	40	60	9
S_3	70	20	10
Demande	7	14	

La fonction objectif à minimiser est :

$$\min Z = 50x_{11} + 10x_{12} + 40x_{21} + 60x_{22} + 70x_{31} + 20x_{32}$$

Méthode de Vogel

Source \ Destination	D_1	D_2	Offre
S_1	50	10	2
S_2	40	60	9
S_3	70	20	10
Demande	7	14	

Tableau initial

Étape 01 : Pour la ligne 1, les deux coûts les plus bas sont 50 et 10 leur différence est 40

Pour la ligne 2, on prend 40 et 60, la différence est 20.

Pour la ligne 3, on prend 70 et 20, la différence est 50.

Pour la colonne 1, la différence est 10.

Pour la colonne 2, la différence est 10.

La différence maximale est celle de la ligne 3 (elle est égale à 50), on cherche donc sur la ligne 3 quel est le coût minimal. Il s'agit de $c_{32} = 20$. Alors $x_{kr} = x_{32}$

Étape 2 :

$$x_{32} = \min\{a_3, b_2\} = \min\{10, 14\} = 10$$

$$a'_3 = a_3 - x_{32} = 10 - 10 = 0$$

$$b'_2 = b_2 - x_{32} = 14 - 10 = 4$$

Étape 03 : $a'_3 = 0,\ b'_2 = 4$, il faut donc éliminer la ligne 3

Étape 04 : il reste deux lignes(1 et 2) est tous les colonne, il faut donc choisir un nouveau x_{kr} qui entrera à sont tour dans la solution réalisable de base initiale.

Destination / Source	D_1	D_2	Offre
S_1	50	10	2
S_2	40	60	9
S_3	70	20 $\boxed{10}$	10 $\boxed{0}$
Demande	7	14 $\boxed{4}$	

Tableau après la première itération

Étape 01 : La différence maximale est celle de la colonne 2 (elle est égale à 50) le moindre coût est dans la colonne 2 on cherche donc sur la colonne 2 quel est coût minimal, il s'agit de $c_{12} = 10$ alors $x_{kr} = x_{12}$

Étape 2 :

$$x_{12} = \min\{a_1, b_2\} = \min\{2, 4\} = 2$$

$$a'_1 = a_1 - x_{12} = 2 - 2 = 0$$

$$b'_2 = b_2 - x_{12} = 4 - 2 = 2$$

Étape 03 : $a'_1 = 0,\ b'_2 = 2$, il faut donc éliminer la ligne 1.

Étape 04 : il reste une ligne(2) et deux colonnes (1 et 2), il faut donc choisir un nouveau x_{kr} qui entrera à sont tour dans la solution réalisable de base initiale.

Destination / Source	D_1	D_2	Offre
S_1	50	10 $\boxed{2}$	2 $\boxed{0}$
S_2	40	60	9
S_3	70	20 $\boxed{10}$	10 $\boxed{0}$
Demande	7	4 $\boxed{2}$	

Tableau après la deuxième itération

Étape 01 : La différence maximale est celle de la colonne 2 (elle est égale à 60) on cherche donc sur la colonne 2 quel est coût minimal. Il s'agit de 60 alors $x_{kr} = x_{22}$

Étape 2 :

$$x_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{9, 2\} = 2$$

$$a'_2 = a_2 - x_{22} = 9 - 2 = 7$$

$$b'_2 = b_2 - x_{22} = 2 - 2 = 0$$

Étape 03 : $a'_2 = 7,\ b'_2 = 0$, il faut donc éliminer la colonne 2

Étape 04 : il reste une ligne(1) et une colonne(1), il faut donc choisir un nouveau x_{kr}

Source \ Destination	D_1	D_2	Offre
S_1	50	10 $\boxed{2}$	2 $\boxed{0}$
S_2	40	60 $\boxed{2}$	9 $\boxed{7}$
S_3	70	20 $\boxed{10}$	10 $\boxed{0}$
Demande	7	2 $\boxed{0}$	

Tableau après la troisième itération

Étape 01 : La différence maximale est celle dans la ligne 2 et la colonne 1 (elle est égale à 40), mais le coût minimale il y a dans la colonne 1, alors on cherche sur la colonne 1. Donc $x_{kr} = x_{21}$

Étape 2 :

$$x_{21} = \min\{a_2, b_1\} = \min\{7, 7\} = 7$$

$$a'_2 = a_2 - x_{21} = 7 - 7 = 0$$

$$b'_1 = b_1 - x_{21} = 7 - 7 = 0$$

Étape 03 : $a'_2 = 0,\ b'_1 = 0$, il faut donc éliminer la ligne 2 et la colonne 1

Source \ Destination	D_1	D_2	Offre
S_1	50	10 $\boxed{2}$	2 $\boxed{0}$
S_2	40 $\boxed{7}$	60 $\boxed{2}$	7 $\boxed{0}$
S_3	70	20 $\boxed{10}$	10 $\boxed{0}$
Demande	7 $\boxed{0}$	2 $\boxed{0}$	

Tableau après la dernière itération

$$\min Z = 0*50+7*40+0*70+2*10+2*60+10*20 = 620$$

Méthode de Vogel Modifiée

Source \ Destination	D_1	D_2	Offre
S_1	50	10	2
S_2	40	60	9
S_3	70	20	10
Demande	7	14	

Tableau initial

Étape 01 :

$$u_i = \min_j\{C_{ij}\} \ \ et \ \ poser \ \ \overline{C_{ij}} = C_{ij} - u_i, j = \overline{1,\ n}$$

Source \ Destination	D_1	D_2	Offre	u_i
S_1	40	0	2	10
S_2	0	20	9	40
S_3	50	0	10	20
Demande	7	14		

$$v_j = \min_i\{C_{ij}\} \ \ et \ \ poser \ \ \overline{R_{ij}} = \overline{C_{ij}} - v_j, i = \overline{1,\ m}$$

Source \ Destination	D_1	D_2	Offre	u_i
S_1	40	0	2	10
S_2	0	20	9	40
S_3	50	0	10	20
Demande	7	14		
v_j	0	0		

Étape 02 :

$$u_i = \min_j\{C_{ij}\} \ \ et \ \ p_i = \min_{i\neq j}\{C_{ij} - u_i\}, \ \ v_j = \min_i\{C_{ij}\} \ \ et \ \ q_j = \min_{j\neq i}\{C_{ij} - v_j\}$$

Source \ Destination	D_1	D_2	Offre	p_i
S_1	40	0	2	40
S_2	0	20	9	20
S_3	50	0	10	50
Demande	7	14		
q_j	40	0		

la plus grande pénalité est $p_3 = 50$, la ligne 3 donc est choisie, on cherche le moindre coût dans cette ligne est $c_{32} = 0$

Donc $x_{kr} = x_{32}$

Étape 03 : $x_{32} = \min\{a_3, b_2\} = \min\{10, 14\} = 10$

$a'_3 = a_3 - x_{32} = 10 - 10 = 0$

$b'_2 = b_2 - x_{32} = 14 - 10 = 4$

$a'_3 = 0$ et $b'_2 = 4$ donc il saturé la ligne 3

Étape 04 : la matrice reste est réduite

Destination / Source	D_1	D_2	Offre	p_i
S_1	40	0	2	40
S_2	0	20	9	20
S_3	50	0 $\boxed{10}$	10 $\boxed{0}$	
Demande	7	14 $\boxed{4}$		
q_j	40	20		

Tableau après la première itération

Étape 02 : la pénalité associée à la colonne 2 est changée $q_2 = 20$ les plus grandes pénalités sont $p_1 = 40$ et $q_1 = 40$, les pénalités des rangées complément sont toutes nulles, l'embarras du choix persiste du niveau des variables x_{12} et x_{21}
le variable x_{12} de moindre coûts initiale $c_{12} = 10$ est sélectionnée par le bais de règle 2 alors $x_{kr} = x_{12}$
Étape 03 : $x_{12} = \min\{2, 4\} = 2$
$a'_1 = 2 - 2 = 0$, $b'_2 = 2$ et rayée la ligne 1
Étape 04 : la matrice est encore réduit

Destination / Source	D_1	D_2	Offre	p_i
S_1	40	0 $\boxed{2}$	2 $\boxed{0}$	40
S_2	0	20	9	20
S_3	50	0 $\boxed{10}$	10 $\boxed{0}$	
Demande	7	14 $\boxed{2}$		
q_j	0	20		

Tableau après la deuxième itération

Étape 02 : la pénalité associée à la colonne 1 est changée $q_1 = 0$ les plus grandes pénalité sont p_2 *et* q_2 le variable x_{21} de moindre coûts $c_{21} = 0$

Étape 03 : $x_{21} = \min\{a_2, b_1\} = \min\{9, 7\} = 7$

$a'_2 = 2$, $b'_1 = 0$

Étape 04 : la matrice est encore réduit

Source \ Destination	D_1	D_2	Offre	p_i
S_1	40	0 $\boxed{2}$	2 $\boxed{0}$	40
S_2	0 $\boxed{7}$	20	9 $\boxed{2}$	20
S_3	50	0 $\boxed{10}$	0	
Demande	7 $\boxed{0}$	14 $\boxed{2}$		
q_j	0	20		

Tableau après la troisième itération

Étape 02 : la pénalité associée aux colonne et ligne reste sont inchangées les plus grandes p_2 *et* q_2 le variable x_{22} de moindre coûts initiale alors $x_{kr} = x_{22}$

Étape 03 : $x_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{2, 2\} = 2$

$a'_2 = 0$, $b'_1 = 0$

Source \ Destination	D_1	D_2	Offre	p_i
S_1	40	0 $\boxed{2}$	2 $\boxed{0}$	40
S_2	0 $\boxed{7}$	20 $\boxed{2}$	9 $\boxed{0}$	20
S_3	50	0 $\boxed{10}$	$\boxed{0}$	
Demande	7 $\boxed{0}$	14 $\boxed{0}$		
q_j	0	20		

Tableau après la dernière itération

$$\min Z = 0 * 50 + 7 * 40 + 0 * 70 + 2 * 10 + 2 * 60 + 10 * 20 = 620$$

Exemple 02 : Considérons le problème suivant : 4 sources notées S_1, S_2, S_3, S_4 et 4 destinations notées D_1, D_2, D_3, D_4. Chaque source à une offre (à respecter) et chaque destination une demande (à satisfaire) On possède, en outre les coûts de transport unitaires des sources vers les destinations.

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre
S_1	8	5	6	7	120
S_2	15	10	12	13	80
S_3	3	9	10	11	80
S_4	4	10	11	12	70
Demande	150	70	60	70	

La fonction objectif à minimiser est :

$\min Z = 8x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 7x_{14} + 15x_{21} + 10x_{22} + 12x_{23} + 13x_{24} + 3x_{31} + 9x_{32} + 10x_{33} + 11x_{34} + 4x_{41} + 10x_{42} + 11x_{43} + 12x_{44}$

Méthode de Vogel

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre
S_1	8	5	6	7	120
S_2	15	10	12	13	80
S_3	3	9	10	11	80
S_4	4	10	11	12	70
Demande	150	70	60	70	

Tableau initiale

Étape 01 : Pour la ligne 1, les deux coûts les plus pas sont 5 et 6 leur différence est 1

Pour la ligne 2, on prend 10 et 12, la différence est 2.

Pour la ligne 3, on prend 3 et 9, la différence est 6.

Pour la ligne 4, on prend 4 et 10, la différence est 6.

Pour la colonne 1, la différence est 1.

Pour la colonne 2, la différence est 4.

Pour la colonne 3, la différence est 4.

Pour la colonne 4, la différence est 4.

La différence maximale est celle de les lignes 3 et 4 (elle est égale à 6), on cherche donc sur les lignes 3 et 4 quel est coût minimal. Il s'agit de $c_{31} = 3$.

Alors $x_{kr} = x_{31}$

Étape 2 :

$$x_{31} = \min\{a_3, b_1\} = \min\{80, 150\} = 80$$

$$a'_3 = a_3 - x_{31} = 80 - 80 = 0$$

$$b'_1 = b_1 - x_{31} = 150 - 80 = 70$$

Étape 03 : $a'_3 = 0,\ b'_1 = 70$, il faut donc éliminer la ligne 3

Étape 04 : il reste deux lignes(1 et 2) est tous les colonne , il faut donc choisir un nouveau x_{kr} qui entrera à sont tour dans la solution réalisable de base initiale.

Destination / Source	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre
S_1	8	5	6	7	120
S_2	15	10	12	13	80
S_3	3 $\boxed{80}$	9	10	11	80 $\boxed{0}$
S_4	4	10	11	12	70
Demande	150 $\boxed{70}$	70	60	70	

Tableau après la première itération

Étape 01 : La différence maximale est celle de la ligne 4 (elles sont égales à 6), le coût minimal dans cette ligne il s'agit sur la colonne 1. Alors $x_{kr} = x_{41}$

Étape 2 :

$$x_{41} = \min\{a_4, b_1\} = \min\{70, 70\} = 70$$

$$a'_4 = a_4 - x_{41} = 70 - 70 = 0$$

$$b'_1 = b_1 - x_{41} = 70 - 70 = 0$$

Étape 03 : $a'_4 = b'_1 = 0$, il faut donc éliminer la ligne 4 et la colonne 1

Étape 04 : il reste deux lignes(1 et 2) est trios colonnes (2 et 3, 4), il faut donc choisir un nouveau x_{kr} qui entrera à sont tour dans la solution réalisable de base initiale.

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre
S_1	8	5	6	7	120
S_2	15	10	12	13	80
S_3	3 $\boxed{80}$	9	10	11	80 $\boxed{0}$
S_4	4 $\boxed{70}$	10	11	12	70 $\boxed{0}$
Demande	150 $\boxed{0}$	70	60	70	

Tableau après la deuxième itération

Étape 01 : La différence maximale est celle dans les colonnes (3 et 4 elle est égale à 6), mais le coût minimale il s'agit sur la colonne 3. Alors $x_{kr} = x_{13}$

Étape 2

$$x_{13} = \min\{a_1, b_3\} = \min\{120, 60\} = 60$$

$$a'_1 = a_1 - x_{13} = 120 - 60 = 00$$

$$b'_3 = b_3 - x_{13} = 60 - 60 = 0$$

Étape 03 : $a'_1 = 60$ $b'_3 = 0$, il faut donc éliminer la colonne 3

Étape 04 : il reste deux lignes (1 et 2) et deux colonnes (2 et 4), il faut donc choisir un nouveau x_{kr}

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre
S_1	8	5	6 $\boxed{60}$	7	120 $\boxed{60}$
S_2	15	10	12	13	80
S_3	3 $\boxed{80}$	9	10	11	80 $\boxed{0}$
S_4	4 $\boxed{70}$	10	11	12	70 $\boxed{0}$
Demande	150 $\boxed{0}$	70	60 $\boxed{0}$	70	

Tableau après la troisième itération

Étape 01 : La différence maximale est celle dans la colonne 4 (elle est égale à 6) et le coût minimale est 7. Donc $x_{kr} = x_{14}$

Étape 2 : $x_{14} = \min\{a_1, b_4\} = \min\{60, 70\} = 60$

$$a_1' = a_1 - x_{14} = 60 - 60 = 0$$

$$b_4' = b_4 - x_{14} = 70 - 60 = 10$$

Étape 03 : $a_1' = 0,\ b_4' = 10$, il faut donc éliminer la ligne 1

Étape 04 : il reste un seul ligne (2) et deux colonne (2 et 4), il faut donc choisir x_{kr}

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre
S_1	8	5	6 $\boxed{60}$	7 $\boxed{60}$	120 $\boxed{0}$
S_2	15	10	12	13	80
S_3	3 $\boxed{80}$	9	10	11	80 $\boxed{0}$
S_4	4 $\boxed{70}$	10	11	12	70 $\boxed{0}$
Demande	150 $\boxed{0}$	70	60 $\boxed{0}$	70 $\boxed{10}$	

Tableau après la quatrième itération

Étape 01 : La différence maximale est celle dans la colonne 4 (elle est égale à 13) et le coût minimale est 13. Donc $x_{kr} = x_{24}$

Étape 2

$$x_{24} = \min\{a_2, b_4\} = \min\{80, 10\} = 10$$

$$a_2' = a_2 - x_{24} = 80 - 10 = 70$$

$$b_3' = b_3 - x_{23} = 10 - 10 = 0$$

Étape 03 : $a_2' = 70,\ b_3' = 0$, il faut donc éliminer la colonne 4

Étape 04 : il reste un seul ligne(2) et un colonne (2), il faut donc choisir x_{kr}.

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre
S_1	8	5	6 $\boxed{60}$	7 $\boxed{60}$	120 $\boxed{0}$
S_2	15	10	12	13 $\boxed{10}$	80 $\boxed{70}$
S_3	3 $\boxed{80}$	9	10	11	80 $\boxed{0}$
S_4	4 $\boxed{70}$	10	11	12	70 $\boxed{0}$
Demande	150 $\boxed{0}$	70	60 $\boxed{0}$	70 $\boxed{0}$	

Tableau après la cinquième itération

Étape 01 : $x_{kr} = x_{22}$

Étape 2 :

$$x_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{70, 70\} = 70$$

$$a_2' = 0$$

$$b_2' = 0$$

Étape 03 : $a'_2 = 0,\ b'_2 = 0$, il faut donc éliminer la colonne 2 et la ligne 2.

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre
S_1	8	5	6 $\boxed{60}$	7 $\boxed{60}$	120 $\boxed{0}$
S_2	15	10 $\boxed{70}$	12	13 $\boxed{10}$	80 $\boxed{0}$
S_3	3 $\boxed{80}$	9	10	11	80 $\boxed{0}$
S_4	4 $\boxed{70}$	10	11	12	70 $\boxed{0}$
Demande	150 $\boxed{0}$	70 $\boxed{0}$	60 $\boxed{0}$	70 $\boxed{0}$	

Tableau après la dernière itération

$\min Z = 6 * 60 + 7 * 60 + 10 * 70 + 13 * 10 + 3 * 80 + 4 * 70 = 2130$

Méthode de Vogel Modifié

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre
S_1	8	5	6	7	120
S_2	15	10	12	13	80
S_3	3	9	10	11	80
S_4	4	10	11	12	70
Demande	150	70	60	70	

Tableau initiale

Ètape 01 : réduit la matrice de coût par :

$$u_i = \min_j \{C_{ij}\} \ \ et \ \ poser \ \ \overline{C_{ij}} = C_{ij} - u_i, j = \overline{1,\ n}$$

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre	u_i
S_1	3	0	1	2	120	5
S_2	5	0	2	3	80	10
S_3	0	6	7	8	80	3
S_4	0	6	7	8	70	4
Demande	150	70	60	70		

$$v_j = \min_i\{C_{ij}\} \;\; et \;\; poser \;\; \overline{R_{ij}} = \overline{C_{ij}} - v_j, j = \overline{1,\ n}$$

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre	u_i
S_1	3	0	0	0	120	5
S_2	5	0	1	1	80	10
S_3	0	6	6	6	80	3
S_4	0	6	6	6	70	4
Demande	150	70	60	70		
v_j	0	0	1	2		

Étape 02 : calculer les plus grandes pénalités

$u_i = \min_j\{C_{ij}\}$ *et* $p_i = \min_{i \neq j}\{C_{ij} - u_i\}$, $v_j = \min_i\{C_{ij}\}$ *et* $q_j = \min_{j \neq i}\{C_{ij} - v_j\}$

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre	p_i
S_1	3	0	0	0	120	0
S_2	5	0	1	1	80	1
S_3	0	6	6	6	80	6
S_4	0	6	6	6	70	6
Demande	150	70	60	70		
q_j	0	0	1	1		

Tableau après la première itération

Étape 02 : Les plus grandes pénalités sont $p_3 = 6$ et $p_4 = 6$, les pénalités des rangées complément sont toutes nulles, l'embarras du choix persiste du niveau des variables x_{31} et x_{41}.

Le variable x_{31} de moindre coûts initiale $c_{31} = 3$ est sélectionnée par le bais de règle 2 alors $x_{kr} = x_{31}$

Étape 03 : $x_{31} = \min\{a_3, b_1\} = \min\{80, 150\}$

$a'_3 = 80 - 80 = 0$, $b'_1 = 150 - 80 = 70$ et rayée la ligne 3

Étape 04 : la matrice reste est réduit

Destination / Source	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre	p_i
S_1	3	0	0	0	120	0
S_2	5	0	1	1	80	1
S_3	0 $\boxed{80}$	6	6	6	80 $\boxed{0}$	3
S_4	0	6	6	6	70	6
Demande	150 $\boxed{70}$	70	60	70		
q_j	3	0	1	1		

Tableau après la deuxième itération

Étape 02 : la pénalité associée à la colonne 1 est changée $q_1 = 3$ la plus grandes pénalités c'est $p_4 = 6$ la variable x_{41} de moindre coûts dans cette rangée

Étape 03 : $x_{41} = \min\{70, 70\} = 70$

$a'_4 = 70 - 70 = 0$, $b'_1 = 70 - 70 = 0$ et rayée la ligne 4 et la colonne 1

Étape 04 : la matrice est encore réduit

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre	p_i
S_1	3	0	0	0	120	0
S_2	5	0	1	1	80	1
S_3	0 $\boxed{80}$	6	6	6	80 $\boxed{0}$	6
S_4	0 $\boxed{70}$	6	6	6	70 $\boxed{0}$	6
Demande	150 $\boxed{0}$	70	60	70		
q_j	3	0	1	1		

Tableau après la troisième itération

Étape 02 : les pénalités associées sont inchangées les plus grandes pénalités sont $p_2 = 1$ et $q_3 = 1$ et $q_4 = 1$, les pénalités des rangées complément sont toutes nulles, l'embarras du choix persiste du niveau des variables x_{22} et x_{13}, x_{14}. Le variable x_{13} de moindre coûts initiale $c_{13} = 6$ est sélectionnée par le bais de règle 2 alors $x_{kr} = x_{13}$

Étape 03 : $x_{13} = \min\{120, 60\} = 60$

$a'_1 = 120 - 60 = 60$

$b'_3 = 60 - 60 = 0$ et rayée la colonne 3

Étape 04 : la matrice est encore réduit

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre	p_i
S_1	3	0	0 $\boxed{60}$	0	120 $\boxed{60}$	0
S_2	5	0	1	1	80	1
S_3	0 $\boxed{80}$	6	6	6	80 $\boxed{0}$	6
S_4	0 $\boxed{70}$	6	6	6	70 $\boxed{0}$	6
Demande	150 $\boxed{0}$	70	60 $\boxed{0}$	70		
q_j	3	0	1	1		

Tableau après la quatrième itération

Étape 02 : Les pénalités associées sont inchangées, les plus grandes pénalités sont $p_2 = 1$ et $q_4 = 1$, les pénalités des rangées complément sont toutes nulles, l'embarras du choix persiste du niveau des variables x_{22} et x_{14}. La variable x_{14} de moindre coûts initiale $c_{14} = 7$ est sélectionnée par le bais de règle 2

Étape 03 : $x_{kr} = \min\{60, 70\} = 60$

$a'_1 = 60 - 60 = 0$, $b'_4 = 70 - 60 = 10$ et rayée la ligne 1

Étape 04 : la matrice est encore réduit

Destination / Source	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre	p_i
S_1	3	0	0 $\boxed{60}$	0 $\boxed{60}$	120 $\boxed{0}$	0
S_2	5	0	1	1	80	1
S_3	0 $\boxed{80}$	6	6	6	80 $\boxed{0}$	6
S_4	0 $\boxed{70}$	6	6	6	70 $\boxed{0}$	6
Demande	150 $\boxed{0}$	70	60 $\boxed{0}$	70 $\boxed{10}$		
q_j	3	0	1	1		

Tableau après la cinquième itération

Étape 02 : les pénalités associées sont inchangées les plus grandes pénalités sont $p_2 = 1$ et $q_4 = 1$, les pénalités des rangées complément sont toutes nulles, l'embarras du choix persiste du niveau des variables x_{22} et x_{14}. Le variable x_{22} de moindre coûts initiale $c_{22} = 10$ est sélectionnée par le bais de règle 2

Étape 03 : $x_{kr} = x_{22} = \min\{80, 70\} = 70$

$a'_2 = 80 - 70 = 10$, $b'_2 = 70 - 70 = 0$ et rayée la colonne 2

Étape 04 : la matrice est encore réduit

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre	p_i
S_1	3	0	0 $\boxed{60}$	0 $\boxed{60}$	120 $\boxed{0}$	0
S_2	5	0 $\boxed{70}$	1	1	80 $\boxed{10}$	1
S_3	0 $\boxed{80}$	6	6	6	80 $\boxed{0}$	6
S_4	0 $\boxed{70}$	6	6	6	70 $\boxed{0}$	6
Demande	150 $\boxed{0}$	70 $\boxed{0}$	60 $\boxed{0}$	70 $\boxed{10}$		
q_j	3	0	1	1		

Tableau après la sixième itération

Étape 02 : les pénalités associées sont inchangée ainsi il reste une seule ligne (2) et une seule colonne (4) donc $x_{kr} = x_{24}$

Étape 03 : $x_{22} = \min\{10, 10\} = 10$

$a'_2 = 10 - 10 = 0$, $b'_4 = 10 - 10 = 0$ et rayée la colonne 4 et la ligne 2

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre	p_i
S_1	3	0	0 $\boxed{60}$	0 $\boxed{60}$	120 $\boxed{0}$	0
S_2	5	0 $\boxed{70}$	1	1 $\boxed{10}$	80 $\boxed{0}$	1
S_3	0 $\boxed{80}$	6	6	6	80 $\boxed{0}$	6
S_4	0 $\boxed{70}$	6	6	6	70 $\boxed{0}$	6
Demande	150 $\boxed{0}$	70 $\boxed{0}$	60 $\boxed{0}$	70 $\boxed{0}$		
q_j	3	0	1	2		

Tableau après la dernière itération

$\min Z = 6 * 60 + 7 * 60 + 10 * 70 + 13 * 10 + 3 * 80 + 4 * 70 = 2130$

Exemple 03 : Considérons le problème suivant : 4 sources notées S_1, S_2, S_3, S_4 et 5 destinations notées D_2, D_3, D_4, D_5 Chaque source a une offre (à respecter) et chaque destinations une demande (à satisfaire) On possède, en outre, les coûts de transport unitaires des source vers les destinations.

Destination / Source	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre
S_1	7	12	1	5	9	12
S_2	15	3	12	6	14	11
S_3	8	16	10	12	7	14
S_4	18	8	17	11	16	8
Demande	10	11	15	5	4	

La fonction objectif à minimiser est :

$minZ = 7x_{11} + 12x_{12} + x_{13} + 5x_{14} + 9x_{15} + 15x_{21} + 3x_{22} + 12x_{23} + 6x_{24} + 14x_{25} + 8x_{31} + 16x_{32} + 10x_{33} + 12x_{34} + 7x_{35} + 18x_{41} + 8x_{42} + 17x_{43} + 11x_{44} + 16x_{45}$

Méthode de Vogel

Destination / Source	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre
S_1	7	12	1	5	9	12
S_2	15	3	12	6	14	11
S_3	8	16	10	12	7	14
S_4	18	8	17	11	16	8
Demande	10	11	15	5	4	

Tableau initial

Étape 01 Pour la ligne 1, les deux coûts les plus bas sont 1 et 5 leur différence est 4.

Pour la ligne 2, on prend 3 et 6, la différence est 3.

Pour la ligne 3, on prend 7 et 8, la différence est 1.

Pour la ligne 4, on prend 8 et 11, la différence est 3.

Pour la colonne 1, la différence est 1.

Pour la colonne 2, la différence est 5.

Pour la colonne 3, la différence est 9.

Pour la colonne 4, la différence est 1.

Pour la colonne 5, la différence est 2.

La différence maximale est celle de la colonne 3 (elle est égale à 9), on cherche donc sur la colonne 3 quel est le coût minimal, il s'agit de $c_{13} = 1$. Alors $x_{kr} = x_{13}$

Étape 2 :

$$x_{13} = \min\{a_1, b_3\} = \min\{12, 15\} = 12$$

$$a'_1 = a_1 - x_{13} = 12 - 12 = 0$$

$$b'_3 = b_3 - x_{13} = 15 - 12 = 3$$

Étape 03 : $a'_1 = 0$, $b'_3 = 3$, il faut donc éliminer la ligne 1.

Étape 04 : il reste trois lignes(2 et 3 4) est tous les colonne, il faut donc choisir un nouveau x_{kr} qui entrera à sont tour dans la solution réalisable de base initiale.

Destination / Source	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre
S_1	7	12	1 $\boxed{12}$	5	9	12 $\boxed{0}$
S_2	15	3	12	6	14	11
S_3	8	16	10	12	7	14
S_4	18	8	17	11	16	8
Demande	10	11	15 $\boxed{3}$	5	4	

Tableau après la première itération

Étape 01 : La différence maximale est celle de la colonne 1 et 5 (elles sont égales à 7), le moindre coût c'est dans la colonne 5 on cherche donc sur la colonne 5 quel est coût minimal. Il s'agit de $c_{35} = 7$. Alors $x_{kr} = x_{35}$

Étape 2 :

$$x_{13} = \min\{a_3, b_5\} = \min\{14, 4\} = 4$$

$$a'_3 = a_3 - x_{35} = 14 - 4 = 10$$

$$b'_3 = b_5 - x_{35} = 4 - 4 = 0$$

Étape 03 : $a'_3 = 10,\ b'_5 = 0$, il faut donc éliminer la colonne 5

Étape 04 : il reste trois lignes(2 et 3 4) est quatre colonne (1 et 2 et 3, 4) , il faut donc choisir un nouveau x_{kr} qui entrera à sont tour dans la solution réalisable de base initiale.

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre
S_1	7	12	1 $\boxed{12}$	5	9	12 $\boxed{0}$
S_2	15	3	12	6	14	11
S_3	8	16	10	12	7 $\boxed{4}$	14 $\boxed{10}$
S_4	18	8	17	11	16	8
Demande	10	11	15	5	4 $\boxed{0}$	

Tableau après la deuxième itération

Étape 01 : La différence maximale est celle de la colonne 1 (elle est égale à 7), on cherche donc sur la colonne 1 quel est le coût minimal. Il s'agit de 8, Alors $x_{kr} = x_{31}$

Étape 2 : $x_{31} = \min\{a_3, b_1\} = \min\{10, 10\} = 10$

$$a'_3 = a_3 - x_{31} = 10 - 10 = 0$$

$$b'_1 = b_1 - x_{31} = 10 - 10 = 0$$

Étape 03 : $a'_3 = 0,\ b'_1 = 0$, il faut donc éliminer la ligne 3 et la colonne 1

Étape 04 : il reste deux lignes (2 et 4) est trois colonne(2 et 3, 4), il faut donc choisir un nouveau x_{kr}

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre
S_1	7	12	1 $\boxed{12}$	5	9	12 $\boxed{0}$
S_2	15	3	12	6	14	11
S_3	8 $\boxed{10}$	16	10	12	7 $\boxed{4}$	14 $\boxed{0}$
S_4	18	8	17	11	16	8
Demande	10 $\boxed{0}$	11	15	5	4 $\boxed{0}$	

Tableau après la troisième itération

Étape 01 : La différence maximale est celle dans les colonnes 2 et 3, 5 (elle est égale à 5), mais le coût minimale il y a dans la colonne 2, alors on cherche sur la colonne 2. Donc $x_{kr} = x_{31}$

Étape 2 :

$$x_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{11, 11\} = 11$$

$$a_2' = a_2 - x_{22} = 11 - 11 = 0$$

$$b_2' = b_2 - x_{22} = 11 - 11 = 0$$

Étape 03 : $a_2' = 0,\ b_2' = 0$, il faut donc éliminer la ligne 2 et la colonne 2

Étape 04 : il reste un seul ligne (4) est deux colonnes (3 et 4), il faut donc choisir un nouveau x_{kr}

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre
S_1	7	12	1 $\boxed{12}$	5	9	12 $\boxed{0}$
S_2	15	3 $\boxed{11}$	12	6	14	11 $\boxed{0}$
S_3	8 $\boxed{10}$	16	10	12	7 $\boxed{4}$	14 $\boxed{0}$
S_4	18	8	17	11	16	8
Demande	10 $\boxed{0}$	11 $\boxed{0}$	15	5	4 $\boxed{0}$	

Tableau après la quatrième itération

Étape 01 : La différence maximale est celle de la colonne 3 (elle est égale à 17), on cherche donc sur la colonne 3 quel est coût minimal. Il s'agit de 17, c_{43}.

Alors $x_{kr} = x_{43}$

Étape 2 : $x_{43} = \min\{a_4, b_3\} = \min\{3, 8\} = 3$

$$a'_4 = a_4 - x_{43} = 8 - 3 = 5,\ b'_3 = b_3 - x_{43} = 3 - 3 = 0$$

Étape 03 : $a'_4 = 5,\ b'_3 = 0$, il faut donc éliminer la colonne 3

Étape 04 : il reste un ligne (4) et un colonne (4).

Il faut donc choisir un nouveau x_{kr}

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre
S_1	7	12	1 $\boxed{12}$	5	9	12 $\boxed{0}$
S_2	15	3 $\boxed{11}$	12	6	14	11 $\boxed{0}$
S_3	8 $\boxed{10}$	16	10	12	7 $\boxed{4}$	14 $\boxed{0}$
S_4	18	8	17 $\boxed{3}$	11	16	8 $\boxed{5}$
Demande	10 $\boxed{0}$	11 $\boxed{0}$	15 $\boxed{0}$	5	4 $\boxed{0}$	

Tableau après la cinquième itération

Étape 01 : on a donc $x_{kr} = x_{44}$

Étape 2 :

$$x_{44} = \min\{a_4, b_4\} = \min\{5, 5\} = 5$$

$$a'_4 = a_4 - x_{44} = 5 - 5 = 0$$

$$b'_4 = b_4 - x_{44} = 5 - 5 = 0$$

Étape 03 : $a'_4 = 0,\ b'_4 = 0$, il faut donc éliminer la ligne 4 et la colonne

Destination / Source	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre
S_1	7	12	1 $\boxed{12}$	5	9	12 $\boxed{0}$
S_2	15	3 $\boxed{11}$	12	6	14	11 $\boxed{0}$
S_3	8 $\boxed{10}$	16	10	12	7 $\boxed{4}$	14 $\boxed{0}$
S_4	18	8	17 $\boxed{3}$	11 $\boxed{5}$	16	8 $\boxed{0}$
Demande	10 $\boxed{0}$	11 $\boxed{0}$	15 $\boxed{0}$	5 $\boxed{0}$	4 $\boxed{0}$	

Tableau après la dernière itération

$$\min Z = 1 * 12 + 3 * 11 + 8 * 10 + 7 * 4 + 17 * 3 + 11 * 5 = 259$$

Méthode de Vogel Modifié

Destination / Source	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre
S_1	7	12	1	5	9	12
S_2	15	3	12	6	14	11
S_3	8	16	10	12	7	14
S_4	18	8	17	11	16	8
Demande	10	11	15	5	4	

Tableau initial

Ètape 01 : réduit la matrice de coût par :

$$u_i = \min_j\{C_{ij}\} \;\; et \;\; poser \;\; \overline{C_{ij}} = C_{ij} - u_i, j = \overline{1,\ n}$$

Destination / Source	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre	u_i
S_1	6	11	0	4	8	12	1
S_2	12	0	9	3	11	11	3
S_3	1	11	3	5	0	14	7
S_4	10	0	9	3	8	8	8
Demande	10	11	15	5	4		

$$v_j = \min_i\{C_{ij}\} \;\; et \;\; poser \;\; \overline{R_{ij}} = \overline{C_{ij}} - v_j, j = \overline{1,\ n}$$

Destination / Source	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre	u_i
S_1	5	11	0	1	8	12	1
S_2	11	0	9	0	11	11	3
S_3	0	9	3	2	0	14	7
S_4	9	0	9	0	8	8	8
Demande	10	11	15	5	4		
v_j	1	0	0	3	0		

Étape 02 : calculer les plus grandes pénalités

$$u_i = \min_j\{C_{ij}\} \;\; et \;\; p_i = \min_{i \neq j}\{C_{ij} - u_i\}, \;\; v_j = \min_i\{C_{ij}\} \;\; et \;\; q_j = \min_{j \neq i}\{C_{ij} - v_j\}$$

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre	p_i
S_1	5	11	0	1	8	12	1
S_2	11	0	9	0	11	11	0
S_3	0	9	3	2	0	14	0
S_4	9	0	9	0	8	8	0
Demande	10	11	15	5	4		
q_j	5	0	3	0	8		

La plus grande pénalité est $q_5 = 8$. La colonne 5 est donc choisie, le moindre coût dans cette colonne est 0 alors $x_{kr} = x_{35}$.

Étape 03 :

$$x_{35} = \min\{a_3, b_5\} = \min\{14, 4\} = 4$$

$$a'_3 = a_3 - x_{31} = 14 - 4 = 10$$

$$b'_1 = b_5 - x_{35} = 4 - 4 = 0$$

$b'_5 = 0$ et $a'_3 = 10$, alors il faut saturée la colonne 5

Étape 04 : La matrice résultante reste est réduit

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre	p_i
S_1	5	11	0	1	8	12	1
S_2	11	0	9	0	11	11	0
S_3	0	9	3	2	0 $\boxed{4}$	14 $\boxed{10}$	0 $\boxed{2}$
S_4	9	0	9	0	8	8	0
Demande	10	11	15	5	4 $\boxed{0}$		
q_j	5	0	3	0	8		

Tableau après la première itération

Étape 02 : La pénalité associée de la ligne 3 est changée $p_3 = 2$, et La plus grande pénalité est $q_1 = 5$ de moindre coût dans cette colonne est 0, alors $x_{kr} = x_{31}$

Étape 03 : $x_{31} = \min\{a_3, b_1\} = \min\{10, 10\} = 10$

$a_3 = 0 = b_1 = 0$

Ensuite la ligne 3 et colonne 1 deviennent saturées au même temps, la colonne 1 de la plus grande pénalité est rayée du tableau.

Étape 04 : La matrice résultante reste réduit.

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre	p_i
S_1	5	11	0	1	8	12	1
S_2	11	0	9	0	11	11	0
S_3	0 $\boxed{10}$	9	3	2	0 $\boxed{4}$	14 $\boxed{0}$	0 $\boxed{1}$
S_4	9	0	9	0	8	8	
Demande	10 $\boxed{0}$	11	15	5	4 $\boxed{0}$		
q_j	5	0	3	0	8		

Tableau après la deuxième itération

Étape 02 : La pénalité associée de la ligne 3 est changée $p_3 = 1$. La plus grande pénalité est q_3 alors $x_{kr} = x_{13}$

Étape 03 : $x_{13} = \min\{a_1, b_3\} = \min\{12, 15\} = 12$

$$a_1 = 12 - 12 = 0$$

$$b_3 = 15 - 12 = 3$$

Alors la ligne 1 est saturée

Étape 04 : La matrice reste est encore réduit

Destination / Source	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre	p_i
S_1	5	11	0 $\boxed{12}$	1	8	12 $\boxed{0}$	1
S_2	11	0	9	0	11	11	0
S_3	0 $\boxed{10}$	9	3	2	0 $\boxed{4}$	14 $\boxed{0}$	0
S_4	9	0	9	0	8	8	0
Demande	10 $\boxed{0}$	11	15 $\boxed{3}$	5	4 $\boxed{0}$		
q_j	5	0	3 $\boxed{6}$	0	8		

Tableau après la troisième itération

Étape 02 : La pénalité associée de la colonne 3 changée $q_3 = 6$. La plus grande pénalité est q_3 alors $x_{kr} = x_{33}$

Étape 03 : $x_{33} = \min\{a_3, b_3\} = \min\{0, 3\} = 0$

$$a_3 = 0,\ b_3 = 3$$

Alors la ligne 3 est saturée

Étape 04 : la matrice reste est réduit

Destination / Source	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre	p_i
S_1	5	11	0 $\boxed{12}$	1	8	12 $\boxed{0}$	1
S_2	11	0	9	0	11	11	0
S_3	0 $\boxed{10}$	9	3 $\boxed{0}$	2	0 $\boxed{4}$	14 $\boxed{0}$	0
S_4	9	0	9	0	8	8	0
Demande	10 $\boxed{0}$	11	15 $\boxed{3}$	5	4 $\boxed{0}$		
q_j	5	0	3	0	8		

Tableau après la quatrième itération

La plus grande pénalité égale à 0 alors appliqué la méthode de moindre coût.

Étape 01 : le moindre coût initial est $c_{22} = 3$. Alors $x_{kr} = x_{22}$

Étape 02 : $x_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{11, 11\} = 11$

$$a'_2 = 11 - 11 = 0$$

$$b'_2 = 11 - 11 = 0$$

Étape 03 : alors $a_2 = 0,\ b_2 = 0$ donc sature la ligne 2 et la colonne 2 dont la rayure transforme la matrice en une seule ligne(4) et deux colonne (3 et 4).

Étape 04 : Il reste une seule ligne (4) et deux colonnes (3 et 4)

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre	p_i
S_1	5	11	0 $\boxed{12}$	1	8	12 $\boxed{0}$	1
S_2	11	0 $\boxed{11}$	9	0	11	11 $\boxed{0}$	0
S_3	0 $\boxed{10}$	9	3	2	0 $\boxed{4}$	14 $\boxed{0}$	0
S_4	9	0	9	0	8	8	0
Demande	10 $\boxed{0}$	11 $\boxed{0}$	15 $\boxed{3}$	5	4 $\boxed{0}$		
q_j	5	0	3	0	8		

Tableau après la cinquième itération

Étape 01 : Le moindre coût est 11. Alors $x_{kr} = x_{44}$

Étape 02 : $x_{44} = \min\{8, 5\} = 5$

$$a'_4 = 8 - 5 = 3$$

$$b'_4 = 5 - 5 = 0$$

Étape 03 : $a_4 = 3, b_4 = 0$ alors on éliminer la colonne 4

Étape 04 : il reste une ligne (4) et une colonne (3)

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre	p_i
S_1	5	11	0 $\boxed{12}$	1	8	12 $\boxed{0}$	1
S_2	11	0 $\boxed{11}$	9	0	11	11 $\boxed{0}$	0
S_3	0 $\boxed{10}$	9	3	2	0 $\boxed{4}$	14 $\boxed{0}$	0
S_4	9	0	9	0 $\boxed{5}$	8	8 $\boxed{3}$	0
Demande	10 $\boxed{0}$	11 $\boxed{0}$	15 $\boxed{3}$	5 $\boxed{0}$	4 $\boxed{0}$		
q_j	5	0	3	0	8		

Tableau après la sixième itération

Étape 01 : $x_{kr} = x_{43}$

Étape 02 : $x_{43} = 3$, alors $a_4 = 0,\ b_3 = 0$

Source \ Destination	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre	p_i
S_1	5	11	0 $\boxed{12}$	1	8	12 $\boxed{0}$	1
S_2	11	0 $\boxed{11}$	9	0	11	11 $\boxed{0}$	0
S_3	0 $\boxed{10}$	9	3	2	0 $\boxed{4}$	14 $\boxed{0}$	0
S_4	9	0	9 $\boxed{3}$	0 $\boxed{5}$	8	8 $\boxed{0}$	0
Demande	10 $\boxed{0}$	11 $\boxed{0}$	15 $\boxed{0}$	5 $\boxed{0}$	4 $\boxed{0}$		
q_j	5	0	3	0	8		

Tableau après la dernière itération

$$\min Z = 1 * 12 + 3 * 11 + 8 * 10 + 7 * 4 + 17 * 3 + 11 * 5 = 259$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Michel de Mathelin, Optimisation et programmation mathématique.

[2] Aaid Djamel, Étude numÉérique comparative entre des méthode de résolution d'un problème de transport à quatre indices avec capacités, Mémoire de magister, Université Constantine, 2010.

[3] Rossi, Optimisation, Décembre 2009/Janvier 2010.

[4] Hugues Talbot, Problème de transport et transbordement Résolution, Laboratoire **A2SI**, 9 avril 2009.

[5] Marie-Claude DAVID, Frédéric HAGLUND, Daniel PERRIN, GEOMETRIE AFFINE, Université Paris-Sud, 8 décembre 2003.

[6] Master 1, Enseignement, Chapitre 3 Convexité, Lucas Vienne 2012/2013.

[7] Dr. Ali DARBALA, Cour de programmation linéaire.

[8] Moez Kilani, Notes de cours Programmation Linéaire, $3^{\text{è}me}$ année Finance, Institut Supérieur de Gestion de Sousse **ISG**.

[9] F. Dubeau and O. M. Guèye, Une nouvelle méthode d'initialisation pour le problème de transport, (2008).

[10] Bernard Fortz, Recherche opérationnelle et application, 2012/2013.

[11] Salimata G. Diagne,La Méthode de Vogel Modifiée pour la résolution du problème de transport simple, Université Cheikh Anta Diop, Dakar Sénégal.