الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :...............

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

PROBLEMES AUX LIMITES DANS DES DOMAINES AVEC POINTS DE REBROUSSEMENT

Préparé par :

-Khirouche Abd Elmadjid

-Zarezi Najib

Devant le jury

-Boufelgha Nabila	(M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Président
-Benhabiles Hanane	(M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Rapporteur
-Ahmed yahia Rakia	(M.A.A)	C.U.Abd Elhafid Boussouf	Examinateur

Année Universitaire : 2016/2017

Remerciement

Avant tout, nous remercions ALLAH tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener ce travail.

D'une façon toute particulière, On tient à remercier notre encadreur Monsieur BENHABILES Hanane, pour nous avoir fait travailler sur un Projet aussi intéressant et riche.

Nous lui sommes reconnaissants tout particulièrement pour la confiance qu'il nous a témoignée et la liberté qui nous a laissé.

Nous remercions Madame BOUFELGHA Nabila ait accepté de présider le Jury de ce travail.

Nous remercions aussi Madame AHMED YAHIA Rakia pour avoir acceptée d'examiner ce travail.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude aux nombreuses personnes qui nous ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse.

Nous remercions aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadrés, observé, aidé, conseillé et même supporté.

On tient également à remercier ici toutes les personnes, les amis, dont on a croisé le chemin au l'institut des sciences et de technologie de Mila et ailleurs.

Enfin, on souhaite exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes, qui ont contribué largement à son aboutissement.

Abd Elmadjid, Nadjib

TABLE DES MATIÈRES

notation

Ω : ouvert de $\mathbb{R}^n$,
$\partial\Omega$: frontière topologique de Ω,
$x = (x_1, ..., x_N)$: point générique de $\mathbb{R}^n$,
$dx = dx_1 dx_2 ... dx_N$: mesure de Lebesgue sur Ω,
$d\sigma$: mesure de surface sur $\partial\Omega$, notée parfois $\mathcal{H}^{N-1}$,
η : normale unitaire extérieure à Ω,
Du : gradient de u,
$Supp(f)$: support d'une fonction f,
$C^k(\Omega), C^k(Q)$: espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans Ω, Q,
$C_0(\Omega), C_0(Q)$: espace des fonctions continues nulles au bord dans Ω, Q,
$L^p(\Omega)$: espace des fonctions de puissance p-ème intégrables sur Ω pour la mesure,
$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), Du \in (L^p(\Omega))^N \right\}; ||u||_{1,p} = \left(||u||_p^p + ||Du||_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$,
$W_0^{1,p}(\Omega)$: adhérence de $\otimes$ dans $W^{1,p}(\Omega)$,
$W^{-1,p}(\Omega)$: espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$,
$W^{-\frac{1}{p},q}(\partial\Omega)$: espace des traces des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$,
$W^{-\frac{1}{p},q}(\partial\Omega)$: espace dual de $W^{-\frac{1}{p},q}(\partial\Omega)$,
Si X est un espace de Banach,
$L^p(0, T; X) = f : (0, T) \to X$ mesurable,
$L^\infty(0, T; X) = f : (0, T) \to X$ mesurable,
$C^k([0, T]; X)$: espace des fonctions k-fois continûment différentiables de $[0, T] \to X$,
$\mathcal{D}([0, T]; X)$: espace des fonctions continûment différentiables à support compact dans $[0, T]$,
Pour une fonction u, on note par
u', u'' les dérivations première et seconde de u par rapport au temps,
Δ l'opérateur de Laplace,
∇ l'opérateur de gradient,

INTRODUCTION

Les problèmes aux limites dans des domaines plygonaux ou polyédraux on été abondamment étudiés. les résultat maintenant classique d'Arron-Douglis-Niremberg[1] et Lious-Magenes, établis pour des domaine réguliers, on été adaptes. Ceci répondait à des nécersites pratique.

En effet dans les applications industrielles, les problèmes aux limites qui interviennent sont souvent porés dans des domains polyédraux.

Dans notre travail nous intéressons au probléme de Dirichlet dans un domains avec point de rebroussement Nous commençons notre travaile par un rappel sur les espace L^p, en particulier les propritéts densité ainsi que dualité entre L^p et $L^{p'}$.

Dans le deuxiéme chapitre : il nous semble indispensable de commencer par les principales propiétés des espaces de Sobolev lorsqu'ils sont définis sur des polygones.

Dans le troisième chapitre : on étudiera le problème de Dirichlet pour l'equation de laplace dans un domaine plan modèle présentant un oint de rebroussement :

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < a, 0 < y < \varphi(x)\right\},$$

où $\varphi(x) = x^\alpha$ avec $\alpha > 1$. On cherchera la solution dans les espaces de Sobolev cnstruits sur $L^p(\Omega), 1 < p < \infty$

CHAPITRE 1

ESPACE DE L^P

résumé

Dans cette chapter, nous allons définir les espaces L^p et rappeler les principaux théorèmes de base de la théorie de la mesure. Soit X muni d'une tribu B et μ une mesure positive sur B. On suppose, comme il est classique, que la mesure est σ-finie, c'est-à-dire que X est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie.

1.1 Rappel sur la théorie de la mesure et définition des espaces L^p

Définition 1.1.1. *Soit p dans l'intervalle $[1,+\infty[$, on désigne par $L^p(X,d\mu)$ l'espace des (classes d'équivalence modulo la relation de coïncidence presque partout) des fonctions mesurables telles que*

$$\int_X |f(x)|^p d\mu < \infty.$$

- *Si $p=\infty$, on désigne par $L^p(X,d\mu)$ l'espace des (classes d'équivalence modulo la relation de coïncidence presque partout) des fonctions mesurables telles que*

$$||f||_{L^\infty} = \sup\left\{\lambda/\mu\left\{x/|f(x)|>\lambda\right\}>0\right\} = \inf\left\{M/\mu\left\{x/|f(x)|>M\right\}\right\} = 0.$$

- *Démontrons l'égalité entre les deux quantités qui définissent $||f||_{L^\infty}$. Remarquons tout d'abord que pour tout couple (λ, M) tel que $\mu\left\{x/|f(x)|>M\right\}$ et $\mu\left\{x/|f(x)|>\lambda\right\}>0$ est tel que et strictement inférieur à M. Ainsi donc*

$$\sup\left\{\lambda/\mu\left\{x/|f(x)|>\lambda\right\}>0\right\} = \inf\left\{M/\mu\left\{x/|f(x)|\right\}>M\right\}.$$

- *Soit M_1 un nombre réel strictement supérieur à $\sup\left\{\lambda/\mu\left\{x/|f(x)|>\lambda\right\}>0\right\}$. . Par définition de la borne supérieure, on a $\mu\left\{x/|f(x)|>M_1\right\}=0$. Ainsi donc*

$$\inf\left\{M/\mu\left\{x/|f(x)|>M\right\}\right\} \leq \sup\left\{\lambda/\mu\left\{x/|f(x)|\right\}>0\right\}.$$

Nous commencerons par rappeler les principaux énoncés qui fondent la théorie de la mesure.

Théorème 1.1.1. *(de convergence monotone) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives sur X. On suppose que, pour tout x, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*

Soit f *la fonction définie par*

$$f \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \\ x \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x). \end{cases}$$

Alors on a, au sens des égalités de $\mathbb{R}^+ \cup +\infty$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Lemme 1.1.1. *(de Fatou) Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* X *dans* $[0,+\infty]$*. On a*

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} \inf f_n) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n d\mu.$$

Les rapports entre la convergence dominée presque partout et la convergence en norme L^p *peuvent être décrits par les deux théorème suivants.*

Théorème 1.1.2. *Soit* p *un nombre réel supérieur ou égal à* 1*, on considère une suite* $f(n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* L^p *et une fonction* f *telles que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f(x - f_n)|^p d\mu(x) = 0.$$

Il existe une fonction d'extraction ψ *telle que*

$$\forall p.pd\mu(x), \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(x) = f(x).$$

Théorème 1.1.3. *(de convergence dominée de Lebesgue) Soient* p *un réel supérieur à* 1 *et* $f(n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $L^p(X, d\mu)$*. Si, pour presque tout* x *de* X*,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

et s'il existe une fonction g *de* $L^p(X, d\mu)$ *telle que, pour presque tout* x *de* X*, on ait*

$$|f_n(x)| \leq g(x),$$

alors, on a

$$f \in L^p \quad et \quad \lim_{n\to\infty} ||f_n - n||_{L^p} = 0.$$

Théorème 1.1.4. *(de dérivation sous l'intégrale) Soient* (X, μ) *un espace mesuré,* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$ *et* f *une application mesurable de* $\Omega \times X$ *dans* $\mathbb{K}$*. Si, pour presque tout* x *de* X*, la fonction*

$$z \longmapsto f(z, x),$$

est différentiable sur Ω*, si pour tout* z *de* Ω*,*

$$x \longmapsto f(z, x) \quad et \quad x \longmapsto Df(z, x),$$

sont intégrables sur X *et si enfin, pour presque tout* x *de* X *et pour tout* z *de* Ω*, on a*

$$|Df(z, x)| \leq g(z) \quad avec \quad g \in L^1(X, d\mu),$$

alors l'application

$$z \longmapsto \int_X f(z, x) d\mu(x),$$

est différentiable sur Ω *et l'on a*

$$D \int_x f(z, x) d\mu(x) = \int_X D(z, x) d\mu(x).$$

Théorème 1.1.5. *(de Fubini) Soient* (X_1, μ_1) *et* (X_2, μ_2) *deux espaces mesurés et* F *une fonction mesurable positive de* $X_1 X_2$ *dans* $[0, +\infty]$*. On a*

$$\begin{aligned}\int_{X_1\times X_2} F(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \otimes d\mu_2(x_2) &= \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \int_{X_2} F(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)\\ &= \int_{X_2} d\mu_2(x_2) \int_{X_1} F(x_1, x_2) d\mu_1(x_1).\end{aligned}$$

En appliquant ce théorème, on résout l'exercice suivant

Théorème 1.1.6. *(de Fubini-Tonelli) Soient* (X_1, μ_1) *et* (X_2, μ_2) *deux espaces mesurés et* F *une fonction mesurable sur* $X_1 \times X_1$*. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1 : La fonction F *appartient à* $L^1(X_1, X_1, d\mu_1 \otimes \mu_2)$*,* *2 : Pour presque tout point x_1 de X_1, la fonction $F(x_1,.)$ appartient à $L^1(X_2,d\mu_2)$, la fonction*

$$\int_{X_2} F(x_1,x_2)d\mu_2(x_2) \in L^1(X_1,d\mu_1),$$

et

$$||\int_{X_2} F(x_1,x_2)d\mu_2(x_2)||_{L^1(X_1,d\mu_1)} \leq ||F||_{L^1(X_1\times X_2,d\mu_1\otimes d\mu_2)}.$$

De même, pour presque tout point x_2 de X_2, la fonction $F(.,x_2)$ appartient à $L1(X_1,d\mu_1)$, la fonction

$$\int_{X_1} F(x_1,x_2)d\mu_1(x_1) \in L^1(X_2,d\mu_2),$$

et

$$||\int_{X_1} F(x_1,x_2)d\mu_1(x_1)||_{L^1(X_2,d\mu_2)} \leq ||F||_{L^1(X_1\times X_2,d\mu_1\otimes d\mu_2)}.$$

De plus, lorsque est vérifié, on a

$$\begin{aligned}\int_{X_2}\left(\int_{X_1} F(x_1,x_2)d\mu_1(x_1)\right)d\mu(x_2) &= \int_{X_1}\left(\int_{X_2} F(x_1,x_2)d\mu_2(x_2)\right)d\mu(x_1)\\ &= \int_{X_2\times X_2} F(x_1,x_2)d\mu_1\otimes)d\mu(x_1,x_2).\end{aligned}$$

1.2 Les espaces L^p comme espaces de Banach

L'étude de ces espaces requiert la notion d'exposant conjugé :

$$Si \quad p\in]1,\infty[,\ p'=\frac{p}{p-1}, \quad si \quad p=1,\ p'=+\infty, \quad et\ si \quad p=+\infty, p'=1.$$

Les exposants p et p' sont dits conjugués et, en convenant que $\frac{1}{\infty}=0$, on a

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Le premier théorème important est le suivant.

Théorème 1.2.1. *Pour tout p dans $[1,\infty]$, $(L^p(X,d\mu),||.||_{L^p}$ est un espace de Banach.*

Proposition 1.2.1. *(Inégalité de Hölder) Soient (X, μ) un espace mesuré, f une fonction de $L^p(X, d\mu)$ et g une fonction de $L^{p'}(X, d\mu)$. Alors, le produit fg appartient à $L^1(X, d\mu)$ et*

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^{p'}}.$$

Démonstration *: Remarquons tout d'abord que si $p = 1$ ou $p = \infty$, il n'y a rien à démontrer. De plus, on peut supposer que $||f||_{L^p} + ||g||_{L^{p'}} = 1$ et que les deux fonctions f et g sont positives.*
En utilisant l'inégalité on peut écrire que

$$f(x)g(x) = (f(x)^p)^{\frac{1}{p'}}(g(x)^{p'})^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{1}{p}f(x)^p + \frac{1}{p'}g(x)^{p'},$$

ce qui assure l'inégalité de Hölder. Par intégration, il vient

$$\begin{aligned}\int_X |fg|d\mu &\leq \frac{1}{p}\int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{p'}\int_X |g|^p d\mu \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.\end{aligned}$$

Ceci conclut la démonstration de l'inégalité de Hölder. ■

Poursuite de la démonstration du théorème 2.2.1 Comme $f + g$ appartient à L^p, l'inégalité de Hölder implique que

$$\begin{aligned}\int_X |f+g|^p d\mu &\leq \int_X |f||f+g|^{p-1}d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1}d\mu \\ &\leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \left(\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + (\left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right) + \left(\int_X |f+g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Ceci implique que l'on a $||f + g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^p}$ et donc que $L^p(X, d\mu)$ est un espace normé. Démontrons maintenant la complétude de ces espaces. Cela repose sur le lemme *suivant.*

Lemme 1.2.1. *Si E est un espace normé tel que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ait*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||_E < \infty \Rightarrow S_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n,$$

converge, alors l'espace E est de Banach. alors l'espace E est de Banach.

Démonstration *: la Cauchy admettant une valeur d'adhérence cenverge. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E, nous allons extraire de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente assurera le résultat. Définissons l'application ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $\phi(0) = 0$ et*

$$\phi(n+1) = \min\left\{ m \geq \phi(n)+1, \sup_{p\neq 0} ||a_m - a_{m+p}|| \geq \frac{1}{(2+n)^2} \right\}.$$

Ainsi donc, on a, pour tout entier n,

$$||a_{\phi(n+1)} - a_{\phi(n)}|| \leq \frac{1}{(1+n)^2}.$$

Posons $x_n = a_{\phi(n+1)} - a_{\phi(n)}$. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} ||x_n|| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(1+n)^2} < \infty.$$

Donc par hypothèse, la suite $\sum_{n\in\mathbb{N}}^{N} x_n = a_{\phi(N)} - a_0$ converge. D'où le lemme. ■

Poursuite de la démonstration du théorème 1.2.1 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_{L^p} < \infty.$$

Introduisons les fonctions

$$S_N(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{N} f_n, S_N^+(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{N} |f_n(x)|.$$

Pour tout entier n, on a

$$||S_N^+||_{L^p} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_{L^p}.$$

Ceci s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_X S_N^+(x)^p d\mu(x) \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_{L^p}\right)^p.$$

La suite $(S_N^+(x))_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Le théorème de convergence monotone implique que

$$\int_X S^+(x)^p d\mu(x) \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_{L^p}\right)^p, \quad S^+(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

La fonction S^+ est finie presque partout et appartient à L^p. Ainsi donc, pour presque tout x, la série de terme général $f_n(x)$ converge dans $\mathbb{C}$. Désignons par S sa somme. C'est un élément de L^p. On a

$$||S - \sum_{n=0}^{N} f_n||_{L^p}^p = \int_x |S(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)|^p d\mu(x).$$

On sait que

$$|S(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)| \leq 2S^+(x).$$

Comme S^+ est dans L^p, le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{N\to\infty} ||S - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)||_{L^p}^p = 0.$$

Le théorème est ainsi démontré. ■

Nous allons maintenant faire quelques remarques sur l'inégalité de Hölder. Donnons tout d'abord le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.1. *Soient p et q deux réels strictement supérieurs à 1 tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1.$$

Alors l'application

$$\begin{cases} L^p \times L^q \to L^r, \\ (f,g) \to fg. \end{cases}$$

Est une application bilinéaire continue si

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Démonstration *: On applique l'inégalité de Hölder avec $s = r/p$. D'où il vient que*

$$\int_x |f(x)g(x)|^r \leq ||f||^r_{L^p} ||g||^r_{L^q},$$

ce qui signifie que

$$||fg||_{L^r} \leq ||f||_{L^p} ||g||_{L^q},$$

d'où le corollaire. ■

Corollaire 1.2.2. *Si X est de mesure finie, alors $L^p(X, d\mu) \subset L^q(X, d\mu)$ si $p \geq q$.*

Démonstration *: Comme la fonction **1** appartient visiblement à l'espace $L^\infty(X, d\mu) \bigcap L^1(X, d\mu)$, donc à $L^p(X, d\mu)$ pour tout p. On a même*

$$\forall p \in [1, \infty], \quad ||1||_{L^p} = \mu(X)^{\frac{1}{p}}.$$

Si implique que

$$||f||_{L^q} \leq \mu(X)^{\frac{1}{x}} ||f||_{L^p} \quad \textit{avec} \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{q}, \frac{1}{p}.$$

D'où le corollaire. ■

L'inégalité de Hölder est fondamentale. Nous allons voir qu'elle est optimale au sens suivant.

Lemme 1.2.2. *Soit (X, μ) un espace mesuré. Soit f une fonction mesurable et p un élément de $[1, +\infty]$. On a alors la propriété suivante. Si*

$$\sup_{\substack{||g||_{L^{p'}} \leq 1 \\ g \geq 0}} \int_X |f(x)g(x)d\mu(x) < +\infty,$$

alors, f appartient à L^p et

$$||f||_{L^p} = \sup_{||g||_{L^p}\leq 1} |\int_x f(x)g(x)d\mu(x)|.$$

1.3 Densité dans les espaces L^p

Dans toute la suite de ce chapitre, Ω désignera un ouvert de $\mathbb{R}^d$ muni de la distance euclidienne usuelle et μ désignera une mesure positive finie sur tous les compacts. Le résultat principal de cette section est le suivant.
Cmmeçons par une digression pour la topologie des ouverts de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.3.1. *(de caractérisation des compacts d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$) Soit A une partie fermée d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ telle qu'il existe un réel strictement positif r tel que $A \subset [-r, r]^d$.*

Alors

$$A \text{ est compacte} \Longleftrightarrow \inf_{x\in A} d(x, X \setminus \Omega) > 0.$$

Démonstration *: Supposons A compacte. Comme Ω est ouvert, pour tout x de A, $d(x, X\setminus\Omega)$ est strictement positif. on sait que la fonction distance d'un point à un ensemble est continue. nous dit que l'infimum est atteint, donc il est strictement positif. Réciproquement, soit A une partie fermée de Ω telle qu'il existe un réel strictement positif r tel que $A \subset [-r, r]^d$ et vérifiant*

$$\delta = \inf_{x\in A} d(x, X \setminus \Omega).$$

Pour démontrer que A est compacte, il suffit de démontrer que A est une partie fermée de $\mathbb{R}^d$.
Comme A est fermée dans Ω, cela signifie qu'il existe un fermé B de $\mathbb{R}^d$ tel que $A = B\cap\Omega$.
Soit $\Omega_{\delta/2}$ le fermé défini par

$$\Omega_{\delta/2} = \{x/d(x, X \setminus \Omega) \geq \delta/2\}.$$

On a les relations ensemblistes suivantes

$$A = A \cap \Omega_{\delta/2} = B \cap \Omega \cap \Omega_{\delta/2} = B \cap \Omega_{\delta/2}.$$

L'ensemble $B \cap \Omega_{\delta/2}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^d$ *en tant qu'intersection de deux fermés, donc* A *est une partie fermée de* $\mathbb{R}^d$. *Le théorème est démontré.* ■

Le résultat suivant nous sera également utile

Théorème 1.3.2. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$, *il existe une suite de compacts* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega, K_n \subset K_{n+1}^{\circ} \quad \text{et} \quad \forall K \quad \text{compact de} \quad \Omega, \exists n / K \subset K_n^{\circ}.$$

Démonstration : *Posons*

$$K_n = B(0,n) \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^d / d(x, \mathbb{R}^d/\Omega) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme Ω *est un ouvert, pour tout* x *de* X, $d(x, \mathbb{R}^d/\Omega)$ *est strictement positif. Donc, il existe un entier* n *tel que* $x \in K_n$. *De plus,*

$$K_n \subset B^{\circ}(0, n+1) \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^d / d(x, \mathbb{R}^d/\Omega) > \frac{1}{n} \right\} \subset K_{n+1}^{\circ}.$$

D'où le premier point du théorème. Quant au second, il suffit d'observer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_{n+1}^{\circ} = \Omega$ *puisque* $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$. *Le théorème est démontré.* ■

Définition 1.3.1. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$, *on appelle suite exhaustive de compacts toute suite de compacts*

Revenons aux espaces L^p.

Théorème 1.3.3. *Soit* p *un élément de* $[1, +\infty[$, *l'espace* $C_c(\Omega)$ *des fonctions continues à support compact dans* Ω *est dense dans* $L^p(\Omega, d\mu)$.

La démonstration de ce théorème, longue et délicate, est présentée ici à titre culturel. Pour démontrer ce théorème, nous allons tout d'abord démontrer deux résultats de densité valables pour les fonctions définies sur un espace mesuré quelconque. Démontrons tout d'abord la proposition suivante.

Proposition 1.3.1. *Si p appartient à $[1,\infty[$, $L^1(X,d\mu)\cap L^1(X,d\mu)$ est dense dans $L^p(X,d\mu)$.*

Démonstration *: Considérons une suite croissante $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de mesure finie dont la réunion est l'ensemble X. Posons*

$$f_n = \mathbf{1}_{K_n\cap(|f|<n)}f.$$

Il est clair que, pour presque tout x, on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

De plus, on a clairement l'inégalité

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p|f(x)|^p.$$

Le théorème de la convergence dominée assure alors le résultat. ■

Nous allons établir maintenant un second résultat de densité.

Proposition 1.3.2. *Si p appartient à $[1,\infty[$, alors l'espace des fonctions étagées intégrables (i.e. ne prenant qu'un nombre fini de valeurs non nulles sur des ensembles de mesure finie) est dense dans $L^p(X,d\mu)$.*

Lemme 1.3.1. *Pour tout p dans $[1,\infty[$, pour tout borélien A de mesure finie, pour tout réel strictement positif ε, il existe une fonction h continue à support compact telle que*

$$||h - \mathbf{1}_A||_{L^p} < \varepsilon.$$

Nous pouvons donc affirmer l'existence, pour tout j de $\{1,...,N\}$ l'existence d'une fonction g_j continue à support compact dans Ω telle que

$$||\mathbf{1}_{A_j} - g_j||_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{2N|\alpha_j|}.$$

Définissons maintenant la fonction g par Soit $g = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j g_j$. *Nous avons*

$$\begin{aligned} \|\tilde{f} - g\|_{L^p} &\leq \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j| \|\mathbb{1}_{A_j} - g_j\|_{L^p} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.4. *Pour tout ensemble A appartenant à la tribu borélienne complétée B et de mesure finie,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ compact}, \exists U \text{ ouvert } / K \subset A \subset U \text{ et } \mu(U/K) < \varepsilon.$$

Corollaire 1.3.1. *Soit p un réel de l'intervalle* $[1, \infty[$ *; l'espace* $L^p(\Omega)$ *est séparable.*

Démonstration *: Soit* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite exaustive de compacts . Il suffit de trouver une partie démonbrable A de* $L^p(\Omega)$ *telle que, pour toute fonction continue à support compact dans* K_n*, on ait*

$$\forall \varepsilon, \exists g \in A / \|f - g\|_{L^\infty(K_n)} \leq \varepsilon.$$

Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues valant* 1 *près de* K_n *et dont le support est inclus dans* K_{n+1}°. *On prend pour A l'ensemble des fonctions de type* $\psi_n P$ *où P est un polynôme à d indéterminées à coefficients rationnels. Démontrer que cet ensemble satisfait est un excellent exercice que le lecteur est fortement invité à faire.* ■

1.4 Convolution et régularisation

Dans toute cette section, nous travaillerons dans l'espace $\mathbb{R}^d$. *L'opérateur de convolution est un opérateur crucial dans l'étude des fonctions sur* $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.4.1. *Soient f et g deux fonctions de* L^1. *Alors, pour presque tout x de* $\mathbb{R}^d$, *la fonction*

$$y \to f(x - y)g(y),$$

est intégrable et la fonction F définie par

$$F(x) = \int_X f(x-y)g(y)dy,$$

appartient à L^1. Elle est appelée la convoluée de f et de g et notée $f * g$. L'opération $*$ ainsi définie est une application bilinéaire continue de $L^1 \times L^1$ dans L^1. On a

$$||f * g||_{L^1} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^1} \quad et \quad \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x)dx = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx\right).$$

Démonstration *: Comme les fonctions f et g sont supposées être dans L^1, on a*

$$|f(x-y)| \times |g(y)| \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \quad et \quad \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |f(x-y)| \times |g(y)| dxdy = ||f||_{L^1}||g||_{L^1}.$$

Les conclusions du Fubini entraînent immédiatement la première partie du théorème 1.1.5 Pour la seconde, il suffit d'appliquer le théorème de Fubini-Tonelli. ■

On peut aussi définir la convolution d'une fonction de L^p par une fonction de $L^{P'}$.

Théorème 1.4.2. *Soient f une fonction de L^p et g une fonction de $L^{p'}$. La formule*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy,$$

définit une application bilinéaire continue de $L^p \times L^{p'}$ dans L^∞.

Démonstration *: D'après l'inégalité de Hölder, pour presque tout x dans $\mathbb{R}^d$, l'application*

$$y \longrightarrow f(x-y)g(y),$$

est intégrable et

$$|\int_K f(x-y)g(y)dy| \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^{p'}}.$$

D'où le théorème. ■

Les deux théorèmes ci-dessus se généralisent. On peut définir la convolution de deux fonctions si elles appartiennent à des espaces L^p convenables. Plus précisément :

Théorème 1.4.3. *(Inégalités de Young) Soit* (p, q, r) *un triplet de réels tel que*

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Considérons un couple de fonctions (f, g) *dans* $L^p \times L^{p'}$ *. Alors la formule*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy,$$

définit une fonction de L^r *et l'on a*

$$||f \star g||_{L^r} \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^q}.$$

Théorème 1.4.4. *Soient* f *et* g *deux fonctions respectivement dans* L^p *et* L^q *telles que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1.$$

Alors, on a

$$Supp(f \star g) \subset Adh(Supp(f) + Supp(g)).$$

Démonstration *: Soit* x *un point de* $\mathbb{R}$ *et* ρ *un réel strictement positif tels que*

$$B(x, \rho) \cap (Supp(f) + Supp(g)) = \varnothing.$$

Pour toute fonction φ *bornée et nulle en dehors de* $B(x, \rho)$*, on a*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \varphi(x)f(x-y)g(y)dxdy &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \varphi(x+y)f(x)g(y)dxdy \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

La convolution est une opération cruciale, car elle permet la définition d'une procédure explicite d'approximation et de régularisation.

Théorème 1.4.5. *Soient φ une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ d'intégrale 1 et p un réel supérieur ou égal à 1. Posons*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$$

On a alors, pour toute fonction f appartenant à L^p,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ||\varphi_\varepsilon \star f - f||_{L^p=0}.$$

Théorème 1.4.6. *Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = e^{\frac{1}{x(x-1)}} \quad si \quad x \in [0,1] \quad et \quad f(x) = 0,$$

sinon Cette fonction est indéfiniment différentiable à support compact.

Il suffit d'observer que

$$f^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{x^{k+1}(1-x)^{k+1}} e^{\frac{1}{x(x-1)}},$$

où P_k est un polynôme de degré δ_k.

Remarque 1.4.1. *Les familles $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ sont appelées suites régularisantes ou bien approximations de l'identité.*

Corollaire 1.4.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact inclus dans Ω. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est différentde $\{0\}$.*

Il suffit pour cela de considérer $\varphi(x) = f(|x|)$ où f est la fonction définie dans ci-dessus et de faire une translation et une homothétie.

Corollaire 1.4.2. *Pour tout réel $p \geq 1$, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$*
Démonstration *: il existe une fonction φ indéfiniment différentiable à support compact d'intégrale 1. Considérons la famille $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$$

Considérons alors une fonction f de L^p. On peut trouver une fonction g continue à support compact telle g soit arbitrairement proche de f dans L^p. posons

$$g_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \star g.$$

la fonction g_ε est à support compact. Comme la fonction φ, donc aussi la fonction φ_ε est indéfiniment différentiable, le théorème de dérivation sous l'intégrale assure g_ε est indéfiniment différentiable à support compact. D'où le corollaire.

Corollaire 1.4.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et p un réel de l'intervalle $[1, \infty[$. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Corollaire 1.4.4. *Soit K un compact d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$; il existe une fonction ψ de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que ψ vaille 1 au voisinage de K.*
Démonstration *: Soit δ un réel strictement positif tel que, si*

$$K_r = x \in \Omega / d(x, K) \leq 2r,$$

alors $K_{2\delta}$ soit inclus dans Ω. (Un tel réel existe On considère alors une approximation de l'identité $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ et l'on pose

$$\psi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon * 1_{K_\delta}(x) = \int_{K_\delta} \varphi_\varepsilon(x-y)dy.$$

Il existe une constante C telle que

$$x \notin K_\delta + B(0, C\varepsilon) \Longrightarrow \varphi_\varepsilon \circ \boldsymbol{1}_{K_\delta}(x) = 0.$$

Donc, si $C\varepsilon < \delta$, alors $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ car $K_{2\delta} \subset \Omega$. Enfin, si x est dans $K_{\delta - C\varepsilon}$ (qui est non *vide puisque $\delta < C\varepsilon$), alors, pour tout $y \in B_{x,C\varepsilon}, y$ dans K_δ. Ainsi donc*

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon \circ \mathbf{1}_{K_\delta}(x) &= \int_{\mathbb{K}_\delta} \varphi_\varepsilon(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y)dy \\ &= 1.\end{aligned}$$

D'où le corollaire. ■

1.5 Dualité entre L^p et $L^{p'}$

Le théorème principal de cette section est le théorème suivant, qui dit comment l'on peut représenter une forme linéaire continue sur les espaces L^p lorque p est réel.

Théorème 1.5.1. *Soient p un réel supérieur à 1 et B la forme bilinéaire définie par*

$$B\begin{cases} L^{p'} \times L^p \to \mathbb{K}, \\ (g,f) \longrightarrow \int_X f(x)g(x)d\mu(x). \end{cases}$$

Alors la forme bilinéaire B identifie le dual de $L^p(\Omega, d\mu)$ à $L^{p'}(\Omega, d\mu)$.

Corollaire 1.5.1. *Soit p dans $[1,\infty[$. On considère une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $L^{p'}$. Il existe une extraction ϕ et une fonction g dans $L^{p'}$ telles que*

$$\forall f \in L^p, \lim_{n\to\infty} \int_X g(n)(x)f(x)d\mu(x) = \int_X g(x)f(x)d\mu(x).$$

Démonstration *: On applique la suite de formes linéaires $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur L^p définie par*

$$\langle L_n, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_X g_{\phi(n)}(x)f(x)d\mu(x).$$

Ceci implique l'existence d'une fonction d'extraction ϕ et d'une forme linéaire $L^{p'}$ telle que

$$\forall f \in L^p, \lim_{n\to\infty} \int_X g_{\phi(n)}(x)f(x)d\mu(x) = \langle L, f\rangle .$$

ci-dessus assure alors l'existence d'une fonction g de L^p telle que

$$\forall f \in L^p, \lim_{n\to\infty} \int_X g(x)f(x)d\mu(x) = \langle L, f\rangle .$$

■

Il est possible d'interpréter en terme de dualité les résultats du théorème 1.4.5 sur les familles dites d'approximation de l'identité : l'espace $L^1(\Omega, dx)$ ne s'identifie, par l'application bilinéaire

$$B(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

au dual d'un espace normé de fonctions contenant les fonctions continues à support compact dans Ω. En effet, soit $(\epsilon_n)n \in \mathbb{N}$ une suite de nombres réels positifs convergeant vers 0, on considère la suite $(\phi_{\epsilon_n})n \in \mathbb{N}$ d'approximation de l'identité définie dans l'énoncé du théorème 5.4.5. On a, pour toute fonction g continue à support compact,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_{\epsilon_n}(x)g(x)d\mu(x) = g(0).$$

CHAPITRE 2

LES DÉFINITION DE BASE ET LES PROPRIÉTÉS DES ESPACE DE SOBOLEV

résumé

Il n'y a pas de doute que les espace de sobolev sont les espaces fonctionnels les plus appropriés pour une description précise des propriétés qualitatives des solutions des équations elliptique avec des condition aux limites. le but principal de ce chapitre et de mettre l'accent sur les principales propriétés de ces espaces lorsqu'ilsont définis sur des polygones(cf.[8,9])

2.1 Notation

Soit Ω une sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ de poit générique $(x_1, x_2, ...x_n)$. On note $L^2(\Omega)$ l'espace de toutes les fonction de carré intégrable sur Ω par rapport à la mesure de lebesgue dx $\mathbb{R}^n$. On note aussi par $\mathcal{D}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$) l'espace de toutes les fonction indéfiniment continûment différentiables et à support compact dans Ω (resp. l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$). On not aussi par ∂_i dérivé partielle par rapport à la variable x_i, $1 \leq i \leq n$ et pout tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on a $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}...\partial_n^{\alpha_n}$. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distribution sur Ω comme étant l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, i.e. l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$. pour tout entier positif k, on désigne par $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ l'espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonction de class $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^n$ et par $\mathcal{C}_0^k(\bar{\Omega})$ le sous-espace $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ formé par les fonction ayant un support borné dans Ω (rappelons que Ω peut etre non borné).

soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S} = u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$; $\forall, \beta \in \mathbb{N}^n$, $x^\alpha \partial^\beta u \longrightarrow 0$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$. $\mathcal{S}$ est l'espace des fonction àdécroissance rapide àl'infini.

On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriél des formes linéaire continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Classification des domaines

Définition 2.2.1. *soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que sa frontier Γ est continue (res. lipschitzienne, continument différentiable, de class $\mathcal{C}^{k,1}$, m fois continument différentiable "k, m des entier ≥ 1 peuvent prendre la valeur $+\infty$") si pour tout $x \in \Gamma$, il existe un voisinage V de x $\mathbb{R}^n$ et des nouveaux axes de coordonnées orthogonaux $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ tels que :*

1. *V est une cube dans les nouveaux axes de coordonnées :*

$$V = \{(y_1, ...y_n)| - a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n\},$$

2. *Il existe une fonction continue (resp. lipschitzienne, continument différentiable, de class $\mathcal{C}^{k,1}$, m fois continûment différentiable) φ, définie dans*

$$V' = \{(y_1, ...y_{n-1}) | -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n-1\},$$

et telle que

$$|\varphi(y')| \leq \tfrac{a_n}{2} \quad \textit{pour tout} \quad y' = (y_1, ...y_{(n-1)}) \in V',$$

$$\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V | y_n < \varphi(y')\},$$

$$\Gamma \cap V = \{y = (y', y_n) \in V | y_n < \varphi(y')\}.$$

En d'autre termes, dans un voisinage de x, la frontiére Γ est le graphe de φ, Nous rappelons que dire que φ est de $\mathcal{C}^{k,1}$ signifie qu'elle est continument différentiable et ses dérivées d'ordre k sont lipschitzienne continues.

Si un ouvert Ω a une frontiére continue Γ, alors Ω est d'un sul côté de Ω en tout point de Γ. Par exemple, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'a pas une frontiére continue au sens de la Définition 2.2.1 De même un domaine avec une fissure ne vérifie pas les conditions de la Définition 2.2.1, consulter[5] pour plus de détails.

2.3 Les espace de sobolev $H^s(\Omega)$

Définition 2.3.1. *On note $H^s(\Omega)$ l'espace des distribution u définies dans Ω telles que.*

1. *pour $D^\alpha \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$ lorsque est $s = m$ est entier positif.*

2. *$u \in H^m(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy < +\infty,$$

pour $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier et positif avec m entier et σ la partie fractionnaire de s, $0 < \sigma < 1$.

On munit $H^s(\Omega)$de la norme(naturelle)

dans le cas 1

$$||u||_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

et dans le cas 2

$$||u||_{s,\Omega} = \left(||u||^2_{m,\Omega} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 2.3.1. *$H^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert la norme $||.||_{s,\Omega}$.*

Remarque 2.3.1. *Dans le cas où Ω est $\mathbb{R}^n$ tout entier, la définition équivalent vai la transformation de Fourier est donnée par*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}' : \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi < +\infty \right\},$$

oû $\mathcal{F}u$ désigne la transformée de Fourier de u. De plus l'application

$$u \mapsto \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi \right\}^{\frac{1}{2}},$$

définie une norme équivalente sur $H^s(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.3.2. *$H^s_0(\Omega)$ note l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$*

Remarque 2.3.2. *$H^s_0(\Omega)$ est un espace de hilbert pour la norme $||.||_{s,\Omega}$, car $H^s_0(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^s(\Omega)$ donc complet.*

Définition 2.3.3. *pour $s < 0$, $H^s(\Omega)$ est le dual de $H^{-s}_0(\Omega)$.*

Théorème 2.3.1. *(Inégalité Poincaré) On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il éxiste une constante $C(\Omega)$ qui ne dépend que du diamètre de Ω telle que*

pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$ on a :

$$||u||_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \left\{ \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\partial_i u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Corollaire 2.3.1. *soit Ω un ouert borné de $\mathbb{R}^n$, on a : pour tuot $u \in H^1_0(\Omega)$, on a :*

$$||u||_{1,\Omega} \leq \sqrt{1+c^2(\Omega)} \left(\sum_{i=1}^n ||\partial_i u||^2_{0,\Omega} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $c(\Omega)$ est la constante de l'inégalité de Poincaré.

Corollaire 2.3.2. *soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$, la semi-norme*

$$|u|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{n} ||\partial_i u||_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

est une normé sur $H_0^1(\Omega)$ équivalent à la norme induite par $||.||_{1,\Omega}$.

Corollaire 2.3.3. *L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $|.|_{1,\Omega}$ est un espace de hilbert. Afin de pouvoir donner un sens aux traces d'une fonction prés d'un sommet, nous introduisons encore les espaces suivants :*

Définition 2.3.4. *On note $\tilde{H}^s(\Omega)$ le sous-espace de $H^s(\Omega)$ des fonction u dont le prolongement $\tilde{u}$ par zéro hors de Ω appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Théorème 2.3.2. *Si v est une fonction de $H_0^1(\Omega)$, la fonction $\tilde{v}$, prolongement de v par 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 2.3.3. *Si domaine Ω lipshitzien, la Définition 2.3.4 est équivalent à*

$$\tilde{H}^s(\Omega) = \left\{u \in H_0^s(\Omega) | \frac{D^\alpha u}{\rho^\sigma} \in L^2(\Omega), |\alpha| = m\right\},$$

où $\rho(x)$ désigne la distance de x à la frontiére Γ de Ω, et $s = m + \sigma$ pour un entier m et $\sigma \in [0, 1[$ (voir Corollary 1.4.4.10 dans [8]). par conséquent, on peut définir une norme $\tilde{H}^s(\Omega)$ par

$$||u||_{\sim,s,\Omega} = \left(||u||_{s,\omega}^2 + sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \frac{|D^\alpha u(x)|^2}{\rho(x)^{2\sigma}} dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.4 Multiplication

Théorème 2.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. soit $\varphi \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ tel que $k \geq |s|$ alors $\varphi u \in H^s(\Omega)$(resp. $H_0^s(\Omega)$, $\tilde{H}^s(\Omega)$) pour tout $u \in H^s(\Omega)$(resp. $H_0^s(\Omega)$, $\tilde{H}^s(\Omega)$) il existe une constante $K = K(\varphi, s)$ telle que*

$$||\varphi u||_{s,\Omega} \leq K ||u||_{s,\Omega}.$$

2.5 Résultat de densité

Nous rappelons ici les prencipeux résultats de densité. Remarquons que les résultat n'ont été établis que dans le cas d'une domaine à frontière lipshitzienne.

Théorème 2.5.1. *Soit Ω un ouvert de à frontière lipshitzienne. Alors $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^s(\Omega)$ quel que soit $s \geq 0$.*

Théorème 2.5.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontiér lipshitzienne. Alors $\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans $\tilde{H}^s(\Omega)$ quel que soit $s \geq 0$.*

Théorème 2.5.3. *Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ à frontiére lipshitzienne. Alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^s(\Omega)$ quel que soit $s \in [0, \frac{1}{2}[$, autrement dit $H^s(\Omega) = H_0^s(\Omega)$.*

Proposition 2.5.1. *$H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est dense dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ pour tout entier $m \geq 2$.*

2.6 Propriété du prolongement, copacité et immersions

Le théoreme de prolongement est une propriété fondomontale des espaces de sobolev qui permet de prolonger une fonction de $H^s(\Omega)$ à travers la frontiére de ω en une fonction de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.6.1. *Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ à frontiére lipshitzienne. Alors, quel que soit $s > 0$ il existe un opérateur linéaire et continu P_s de $H^s(\Omega)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ tel que.*

$$P_s u_{|\Omega} = u \quad \forall u \in H^s(\Omega),$$

où $P_s u_{|\Omega}$ est la restiction de u sur Ω au sens des distributions.

On trouve une démonstration de ce théoreme dans[5]. Le théoreme de prolongement permet de généraliser certains résultats valables $\mathbb{R}^n$ sur à des ouverts à frontiére lipshitzienne. Ainsi, on retrouve les théoremes d'injection habituels.

Théorème 2.6.2. *Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ à frontiére lipshitzienne. Alors, l'injection deOdans est compacte pour $s > t \geq o$.*

Théorème 2.6.3. *Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ à frontiére lipshitzienne. Alors,*

$$H^s(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^k(\bar{\Omega}) \quad si \quad k < s - \frac{n}{2}.$$

Le théoreme suivant précise le lien entre les espace $H_0^s(\Omega)$ et $\tilde{H}^s(\Omega)$.

Théorème 2.6.4. *Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ à frontiére lipshitzienne. Alors pour $u \in H_0^s(\Omega)$ et $|\alpha| \leq s$ avec $s - \frac{1}{2}$ est un non entier, on a*

$$\frac{\mathcal{D}^\alpha u}{\rho^{s-|\alpha|}} \in L^2(\Omega).$$

De plus

$$\tilde{H}^s(\Omega) = H_0^s(\Omega) \quad si \quad s - \frac{1}{2} \geq 0 \quad n'est\ pas\ un\ entier\ et \tag{2.1}$$

$$\tilde{H}^s(\Omega) = H^s(\Omega) = H_0^s(\Omega) \quad si \quad 0 \leq s < \frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Si $s - \dfrac{1}{2}$ est un entier, L'espace$\tilde{H}^s(\Omega)$ est caractérisé par : l'espace des fonctions $u \in H_0^m(\Omega)$ telles que $\dfrac{D^\alpha u}{\sqrt{\rho}} \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec m est la partie entiére de s et $|\alpha| = m$, i.e.

$$\tilde{H}^s(\Omega) = \left\{ u \in H_0^m(\Omega) | \frac{D^\alpha u}{\sqrt{\rho}} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Remarque 2.6.1. *La situation se complique lorsque $s - \frac{1}{2}$ est un entiér : dans ce cas-là, $\tilde{H}^s(\Omega)$ est un espace strictement inclus mais non fermé dans $\tilde{H}_0^1(\Omega)$ $\mathcal{D}(\Omega)$ étant à la fois dense dans $\tilde{H}^s(\Omega)$ et $\tilde{H}_0^s(\Omega)$. par ailleurs, on avait dit (Définition 2.3.3) que, pour $s \geq 0$, $\tilde{H}^{-s}(\Omega)$ était le dual de $\tilde{H}_0^s(\Omega)$. Evidemment, d'après(2.1) c'est aussi le dual de $\tilde{H}^s(\Omega)$ si $s - \dfrac{1}{2}$ n'est pas un entier. Par contre, on aura besoin d'introdiure une autre justement pour le dual de $\tilde{H}^s(\Omega)$ dans la cas où $s - \dfrac{1}{2} \in \mathbb{N}$. On note alors $\tilde{H}^{-s}(\Omega)$ cet espace qui contient l'espace $H^{-s}(\Omega)$.*

Fonctions ayaut une singularité isolée

Nous donnons ici un critère qui permet de vérifier si ou non une fonction appartient à un espace de sopolev donné.

Proposition 2.6.1. *Soit Ω un polygone de plan. Supposons que $0 \in \Gamma$. soit $\mathcal{V}$ un voisinage de 0 tel que*

$$\mathcal{V} \cap \bar{\Omega} = \{(x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta) | 0 \leq r \leq R, a \leq \theta \leq b\},$$

pour un réel positif R et $b - a < 2\pi$. soit enfin u une fonction régulière dans $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$ qui coïncide avec $r^{\alpha}\varphi(\theta)$ dans $\mathcal{V} \cap \bar{\Omega}$, φ appartenant à $H^{s_0}(]a, b[)$. Alors, quel que soit $s < s_0$, on a

$$u \in H^s(\Omega) \quad si \quad \alpha > s - 1 \ , \tag{2.3}$$

$$u \notin H^s(\Omega) \quad si \quad \alpha \leq s - 1 \quad et \quad r^{\alpha}\varphi(\theta) \notin \mathbb{R}[x, y], \tag{2.4}$$

où $\mathbb{R}[x, y]$ désigne l'anneau des polynômes en coordonnées cartésiennes x et y

2.7 La géométrie polygonal

Nous allons donner dans ce paragraphe les notation concernant les domaines polygonaux de $\mathbb{R}^2$. Nous appelons"polygone du plan" un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à frontiér lipshitzienne et polygonal (ce qui exclut un domaine contenant une fissure ou coupure). La frontiér Γ est constitueé des segments Γ_j, $j = 1,...,N$ où Les Γ_j sont deux à deux disjoints.

On note $M_j$le sommet commun aux arêtes Γ_j et Γ_{j+1} qui forment l'angle ω_j vers l'intérieur de Ω. Enfin, n_j désigne la normale orientée vers l'extérieur de Ω et τ_j la tangente dans le sens direct. Il claire qu'undomaine polygonal véritie les condition de la Définition 2.2.1 puisque chaque arête Γ_j peut être représentée par une fonction f : $x \mapsto ax + b$, f est lipshitzienne car :

$$|f(x) - f(y)| = |a||x - y|.$$

2.8 Un resulta de densité pour les fonction s'annulant aux singularités

Nous énonçons dans ce paragraphe un résultat de densité pour les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent au voisinage de singularités géométrique. Ce résultat a été montré dans[9](lemme 2.1.2,p.39) pour polygone du plan.

Lemme 2.8.1. *soit Ω un polygone du plan. Le sous-espace de $H^1(\Omega)$, constité des fonctions qui s'annulant au voisinage des coins, est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Du Lemme 2.8.1, on déduit facilement le résultat suivant pour les espace de traces correspondants. On désigne par $\prod_{j=1}^{N} \mathcal{D}(\Gamma_j)$ l'espace des fonctions définies sur Γ dont la restriction à chaque Γ_j appartient à $\mathcal{D}(\Gamma_j)$, Γ_j étant une arête du bord de Ω.

Corollaire 2.8.1. *L'espace $\prod_{j=1}^{N} \mathcal{D}(\Gamma_j)$ est dense dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Demonstration *: Etant donné un élément g de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe un relèvement continu u appartenant à $H^1(\Omega)$ tel que $\gamma\ u = g$ sur Γ (théoreme 2.9.2). Le Lemme 2.8.1 implique que l'on peut trouver une suit $(u_n)_{n\in(N)} \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ s'annulant au voisinage des coins et telle que u_n converge vers u dans $H^1(\Omega)$. Par continuité de l'aplication γ, il vient que γu_n converge vers γu dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, où, par construction, la suie $(g_n = \gamma u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\prod_{j=1}^{N} \mathcal{D}(\Gamma_j)$.* ■

2.9 Théorème de traces sur un domaine polygonal

A partir de maintenant, on s'intéresse à des domaines polygonaux de $\mathbb{R}^2$. Nous allons, dans un premier temps, caractériser les sur Γ des fonctionns de $H^1(\Omega)$. Nous adoptons la notation ds pour la mesure de longueur sur Γ. Conformément à la définition 2.3.1, on introduit l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

Définition 2.9.1. *On note $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ l'espace des fonctions $f \in L^2(\Gamma)$ telles que*

$$\int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^2} ds(x) ds(y) < +\infty.. \tag{2.5}$$

Cet espace est justement l'espace des traces sur Γ *des fonction de* $H^1(\Omega)$ *:*

Théorème 2.9.1. *L'application "trace"* $u \mapsto u_{|\Gamma}$ *quiest bien définie sur* $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ *se prolonge par densité en un opérateur linéaire surjectif* γ*, de* $H^1(\Omega)$ *sur* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *dont le noyauu est l'espace* $H_0^1(\Omega)$*.*

Afin de mieux caractériser l'espace des traces $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$*, on considére la restriction à chacune des arêtes* Γ_j *des élément de* $H^1(\Omega)$*. comme chaque* Γ_j *est un ouvert de* $\mathbb{R}$*, la restriction* $f_j = f_{|\Gamma_j}$ *d'un élément de* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *appartient à* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ *au sens de la définition 2.3.1.*

Au voisinage des sommets , les éléments de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *satisfont certaines conditions de raccord qui sont précisées dans la proposition suivante*

Proposition 2.9.1. *la fonction f appartient à* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *si et seulement si* $f_j \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ *pour tout j et si en plus (pour* ε *assez petit)*

$$\int_0^\varepsilon |f_j(x_j(-\sigma)) - f_{j+1}(x_j(+\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} < +\infty, \forall 1 \leq j \leq N,, \tag{2.6}$$

où, la notation $x_j(+\sigma)$ *(resp.*$x_j(-\sigma)$*) désigne le point de* Γ_{j+1}*(resp.* Γ_j*)à distance* σ *du sommet* M_j*.*
On peut dire que la condition (2.6) exprime le fait que les fonctions f_{j+} *et* f_{j+1} *se raccordent en* M_j *en un sens faible, et on écrit, pour alléger les notation,*

$$f_j \equiv f_{j+1} \text{ en } M_j.$$

Enfin, on introduit encore l'opérateur linéare continu surjectif de $H^1(\Omega)$ *sur* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ *qui définit la trace d'une fonction sur* Γ_j *par*

$$\gamma_j u = (\gamma u)_{|\Gamma}.. \tag{2.7}$$

Corollaire 2.9.1. *l'application*

$$u \longmapsto \{\gamma_j u\}_{j=1}^N,$$

est linéaire contunue et surjective de $H^1(\Omega)$ sur le sous-espace de $\prod_{j=1}^{N} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ définie par les conditions de raccord suivantes :

$$\gamma_j u = \gamma_{j+1} u \quad \text{au point} \quad M_j, \forall j = \overline{1.N}.$$

Traces des éléments de $H^m(\Omega)$.

La situation se revéle plus compliquées si on s'intéresse aux traces des fonctions appartenant à l'espace $H^m(\Omega)$ pour $m > 1$. Dans la suite, nous n'aurons besoin de donner un sens à ces traces que si $m = 2$. Ainsi, nous allons caractériser l'espace des traces dans ce cas spécifique et nous renvoyons à[9] pour un entier m quelconque.

Considérons dans un premier temps les traces d'une fonction de $H^2(\Omega)$ une seule arête Γ_j.

Proposition 2.9.2. *Soit Ω un polygone du plan. Alors, quel que soit j, l'application*

$$u \mapsto \{\gamma_j u, \gamma_j \partial_{n_j} u\},$$

qui est définit pour $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ se prolonge de façon continue en une application linéare et surjective de $H^2(\Omega)$ sur $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$.

Remarque 2.9.1. *Si Ω est un domaine régulier (de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ au moins), on peut indentifier $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ à l'espace des traces sur Γ des élément de H^Ω. En revanche, dans le cas d'un polygone, on se heurte à la difficulté que l'on ne sait définir $H^s(\Gamma)$ que si $s \leq 1$ (la définition de H^Γ por $s > 1$ nécessitant une surface Γ plus régulier). L'espace des traces de $H^2(\Omega)$ n'est donc pas un espace de sobolev usuel, d'où l'idée de travailler face par face en précisant les condition de raccord aux sommets. Pour comprendre l'origine de ces conditions, considérons l'espace des fonctions continûment dérivables, $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. si Γ est réguliére, il est clair que l'application*

$$u \mapsto (u_{|\Gamma}, \partial_n u_{|\Gamma}).$$

envoie $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}) \quad$ sur $\quad \mathcal{C}^\infty(\Gamma) \times \mathcal{C}'(\Gamma)$.

Supposons maintenant que Γ est décomposée en morceaux Γ_j. Alors, limage de $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ par l'application

$$u \mapsto (u_{|\Gamma}, \partial_n u_{|\Gamma})_j$$

est le sous -espace de $\prod_j \mathcal{C}^1(\Gamma_j) \times \mathcal{C}^0(\Gamma_j)$ *constitué des éléments* $\{g_j, h_j\}_j$ *qui satisfant en plus les conditions de raccord*

$$g_j(M_j) = g_{j+1}(M_j),, \tag{2.8}$$

$$g'_j(M_j) = g'_{j+1}(M_j),, \tag{2.9}$$

$$h_j(M_j) = h_{j+1}(M_j),. \tag{2.10}$$

Aux point d'intersectiobn de Γ_j *et* Γ_{j+1}.

Dans le cas d'un polygone , on écrit ces mêmes relations en tenant compte du changement de repère $(n,\ \tau)$*sur les différentes faces* Γ_j. *On est maintenant en mesure de caractériser de façon compléte l'esace des traces de* $H^2(\Omega)$ *:*

Proposition 2.9.3. *l'image de* $H^2(\Omega)$ *par l'application*

$$u \mapsto \{g_j, h_j\}_{j=1}^N,$$

où l'on a posé $g_j = \gamma_j u$ *et* $h_j = \gamma_j(\partial_{n_j}, u)$ *est le sous-espace de*

$$\prod_{j=1}^N H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j),$$

défini par les conditions de raccord

$$g_j(M_j) = g_{j+1}(M_j), \forall 1 \leq j \leq N,, \tag{2.11}$$

$$g'_j \equiv -\cos(\omega_j) g'_{j+1} + \sin(\omega_j) h_{j+1} \text{ en } M_j \forall 1 \leq j \leq N,, \tag{2.12}$$

$$h_j \equiv -\cos(\omega_j) h_{j+1} - \sin(\omega_j) g'_{j+1} \text{ en } M_j \forall 1 \leq j \leq N., \tag{2.13}$$

Remarque 2.9.2. *Ce résultat est en fait un cas particulier du théorème des traces des fonctions de* $H^m(\Omega)$ *pour* m *entier dont on trouve la démonstration dans[9] (Théorème 2.4.6 et 2.4.9).*

2.10 Une formule de Green sur un polygone

Rappelons d'abord les formules de Green usuelles qui sont valides dans tout domaine lipshitzienne borné suivant nečac [5] :

Théorème 2.10.1. *soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontiére lipshitzienne Γ. Alors pour u,v $\in H^1\Omega$, on a :*

$$\int_\Omega v\partial_i u dx = -\int_\Omega u\partial_i v dx + \int_\Gamma \gamma u \gamma v n^i d\sigma.. \tag{2.14}$$

Ici, n^i désigne la i éme composante du vecteur normal à Γ orienté vers l'extérieur de Ω.

Par conséquent, sous les mêmes hypothèses sur Ω, on a la demi-formule de Green

$$\int_\Omega u\Delta v dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Gamma \gamma u \gamma (\frac{\partial v}{\partial u}) d\sigma \forall u \in H^1(\Omega); v \in H^2(\Omega),$$

ainsi que la formule de Green

$$\int_\Omega u\Delta v dx - \int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Gamma \gamma u \gamma (\frac{\partial v}{\partial n}) d\sigma - \int_\Gamma v \gamma (\frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma \forall u, v \in H^2(\Omega).$$

Lorsque Ω est un ouvert polygonal borné de $\mathbb{R}^n$, les formules de Green s'énoncent de la façon suivante :

$$(u, \Delta v)_\Omega + (\nabla u, \nabla v)_\Omega = \sum_j (\gamma_j u, \gamma_j \partial_{nj})_{\Gamma_j} \forall u \in H^1(\Omega) \quad et \quad v \in H^2(\Omega), \tag{2.15}$$

$$(u, \Delta v)_\Omega - (v, \Delta u)_\Omega = \sum_j \left\{ (\gamma_j u, \gamma_j \partial_{n_j} v)_{\Gamma_j} - (\gamma_j v, \gamma_j \partial_{n_j} u)_{\Gamma_j} \right\} \quad et \quad u, v \in H^2(\Omega)., \tag{2.16}$$

où $(.,.)_\Omega$ et $(.,.)_{\Gamma_j}$ désignent le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma_j)$.

Lemme 2.10.1. *pour tout fonction $u \in H^2(\Omega)$, on a l'estimation suivante :*

$$||\Delta u||_{0,\Omega} \leq \sqrt{2}||u||_{2,\Omega}.. \tag{2.17}$$

Par conséquent , l'opérateur Δ est continue de$H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Demonstration *: L'estimation (2.17) s'obtient par calcul direct en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarzet l'inégalité* $(a+b)^2 \leq (a^2+b^2)$. *En effet, soit* $u \in, H^2(\Omega)$ *alors on a*

$$
\begin{aligned}
||\Delta u||_{0,\Omega}^2 &= ||\partial_1^2 u||_{0,\Omega}^2 + ||\partial_2^2 u||_{0,\Omega}^2 + 2\int_\Omega \partial_1^2 u + \partial_2^2 u dx \\
&\leq ||\partial_1^2 u||_{0,\Omega}^2 + ||\partial_2^2 u||_{0,\Omega}^2 + 2||\partial_1^2 u||_{0,\Omega}^2 ||\partial_2^2 u||_{0,\Omega} \\
&\leq ||\partial_1^2 u||_{0,\Omega}^2 + ||\partial_2^2 u||_{0,\Omega}^2 + 2||\partial_1^2 u||_{0,\Omega}^2 ||\partial_2^2 u||_{0,\Omega} \\
&= \left(||\partial_1^2 u||_{0,\Omega}^2 + ||\partial_2^2 u||_{0,\Omega}^2 ||^2 \right) \\
&\leq 2\left(||\partial_1^2 u||_{2,\Omega}^2 + ||\partial_2^2 u||_{2,\Omega}^2 \right)^2 \\
&\leq 2||u||_{2,\Omega}.
\end{aligned}
$$

■

A l'aide de la deuxième formule de Green, (2.16), nous allons donner un sens àla trace des fonctions u appartenant au domaine d'extension maximale de l'opérateur de laplace danS $L^2(\Omega)$ *(cf,[9]). posons*

$$D(\Delta, L^2(\Omega)) = \left\{ v \in L^2(\Omega) | \Delta v \in L^2(\Omega) \right\},$$

muni de la forme

$$u \to (||v||_{o,\Omega}^2 + ||\Delta v||_{o,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On a $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ *(et par conséquent* $H^2(\Omega)$*) est dense dans* $D(\Delta, L^2(\Omega))$. *on a le*

Théorème 2.10.2. *Soit* Ω *un polygone du plan Alors, l'aplication*

$$v \to \{\gamma_j v, \gamma_j \delta_{nj} v\},$$

se prolonge de façon unique et continue en un opérateur de $D(\Delta, L^2(\Omega))$ *dans*

$$\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \times \tilde{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_j).$$

demonstration *: Considérons, pour j fixé, l'espace*

$$\mathcal{U}_j = \left\{ u \in H^2(\Omega) | \gamma_k u = 0, \gamma_k \partial_{nk} u = 0 \forall k \neq j \right\}.$$

Etant donnés $(g_j, h_j) \in \tilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$, *posons* $g_k = h_k = 0$ *Nous allons montrer que les fonction* $(g_k, h_k)_{k=\overline{1,N}}$ *vérifiant les conditions de raccord (2.11)-(2.13).*

En effet, $g_j \in \tilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j)$, *signifie d'aprèr le Théorème 2.6.4 que* $g_j \in \tilde{H}^{\frac{1}{0}}(\Gamma_j)$ *et* $\dfrac{g_j'}{\sqrt{\rho}} \in L^2(\Gamma_j)$ *où* ρ *désigne la distance entre* x *et* $\partial\Gamma_j$. *Alors* $g_j(M_j) = g_j(M_{j-1}) = 0$ *et (2.11) suit.*

D'autre part, vérifier (2.12) signifie montrer que l'intégrale

$$I_k = \int_0^{\varepsilon} |g_k'(x_k(-\sigma)) - (-\cos(\omega_k) g_{k+1}' + \sin(\omega_k) h_{k+1})(x_k(+\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma},$$

converge pour tout $k = \overline{1.N}$. *Or pour* $k \neq j$ *et* $k \neq j-1$ *on a*

$$g_k = g_{k+1} = h_{k+1} = 0,$$

et par conséquent,les intégrales converge.

Il nous reste à traiter les cas $k = j$ *et* $k = j-1$ *On a*

$$I_j = \int_0^{\varepsilon} |g_j'(x_j(-\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma},$$

$$\begin{aligned} I_{j-1} &= \int_0^{\varepsilon} |cos(\omega_{j-1}) g_j'(x_{j-1}(+\sigma)) - \sin(x_{j-1}) h_j(x_{j-1}(+\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} \\ &\leq 2 \int_0^{\varepsilon} |g_j'(x_j(+\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma} + 2 \int_0^{\varepsilon} |h_j(x_{j-1}(+\sigma))|^2 \frac{d\sigma}{\sigma}. \end{aligned}$$

Remarquons que Γ_j *peutêtre décomposé comme suit*

$$\Gamma_j = \Gamma_j^1 \cup \Gamma_j^2,$$

où

$$\Gamma_j^1 = \{x \in \Gamma_j, d(x, \partial\Gamma_j) = d(x, M_j)\},$$

$$\Gamma_j^2 = \{x \in \Gamma_j, d(x, \partial\Gamma_j) = d(x, M_{j-1})\},$$

Comme $\dfrac{g_j'}{\sqrt{\rho}} \in L^2(\Gamma_j)$, *alors*

$$\int_{\Gamma_j^i} \frac{|g_j'(x)|^2}{\rho(x)} dx < \int_{\Gamma_j} \frac{|g_j'(x)|^2}{\rho(x)} dx < +\infty, i = 1, 2.$$

Or, en utilisant les notation $x_j(+\sigma)$ *et* $x_j(-\sigma)$ *introduites dans la Proposition 2.9.3, on peut écrire*

$$\int_{\Gamma_j^i} \frac{|g_j'(x)|^2}{\rho(x)} dx = \int_0^{\frac{mes(\Gamma_j)}{2}} \frac{|g_j'(x_j(-\sigma))|^2}{\sigma} d\sigma,$$

et

$$\int_{\Gamma_j^i} \frac{|g_j'(x)|^2}{\rho(x)} dx = \int_0^{\frac{mes(\Gamma_j)}{2}} \frac{|g_j'(x_{j-1}(+\sigma))|^2}{\sigma} d\sigma.$$

On a aussi $h_j \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}$ *et danc* $\int_{\Gamma_j} \frac{|h_j(x)|^2}{\rho(x)} dx < +\infty$. *Le même raisonnement précédent implique alor la convergence des intégrales*

$$\int_0^{\frac{mes(\Gamma_j)}{2}} \frac{|h_j(x_j(-\sigma))|^2}{\sigma} d\sigma,$$

et

$$\int_0^{\frac{mes(\Gamma_j)}{2}} \frac{|h_j(x_{j-1}(-\sigma))|^2}{\sigma} d\sigma,$$

par coséquent, il suffit de choisir $\varepsilon < \dfrac{mes(\Gamma_j)}{2}$ *pour assurer la converge de* I_j *et* I_{j-1}. *la codition (2.13) se vérifie de maniére similaire. Cesi étant, d'après le théorème de trace (Proposition 2.9.7) il existe continu,* $u \in \mathcal{U}j$, *tel que*

$$\gamma_j u = g_j \text{ et } \gamma_j \delta_{nj} u = h_j. \tag{2.18}$$

Soit maintenant $v \in D(\Delta, L^2(\Omega))$, *posons*

$$l_v(g_j, h_j) = (u, \Delta v)_\Omega - (\Delta u, v)_\Omega,$$

où $u_j \in \mathcal{U}_j$ *vérifie (2.18) Ceci définit une forme linéare et continue sur* $\tilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j)\times\ \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$. *En effet ,en appliquuant l'inégalité de Cauchy-schwarz et l'inégalité*

$$\sum_i a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

on obtient

$$\begin{aligned}|l_v(g_j,h_j)| &\leq ||u||_{0,\Omega}||\Delta v||_{0,\Omega} + ||\Delta u||_{0,\Omega}||v||_{0,\Omega} \\ &\leq \left(||u||_{0,\Omega}^2 + ||\Delta v||_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(||v||_{0,\Omega}^2||\Delta v||_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Laderniere majoration est dù à(3.17) alors

$$|l_v(g_j,h_j)| \leq \sqrt{3}||v||_{D(\Delta,L^2(\Omega))}||u||_{2,\Omega}.$$

par conséquent :

$$|l_v(g_j,h_j)| \leq C_v\left(||g_j||_{\frac{1}{2},\Gamma_j}^2 + ||h_j||_{\frac{3}{2},\Gamma_j}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

d'apres la continuité du relèvement u, avec une constant générique C_v *qui dépend de v. Ainsi,* $l_v(.,.) \in \tilde{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$*, le dual de* $\tilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$*. comme, d'autre part, pour une fonction* $v \in H^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}l_v(g_j,h_j) &= \sum_k \{(\gamma_k u, \gamma_k\partial_{nk}v)_{\Gamma_k} - (\gamma_k v, \gamma_k\partial_{nk}u)_{\Gamma_k}\} \\ &= (\gamma_j u, \gamma_j\partial_{nj}v)_{\Gamma_j} - (\gamma_j v, \gamma_j\partial_{nj}u)_{\Gamma_j} \\ &= (\gamma_j\partial_{nj}v, g_j)_{\Gamma_j} - (\gamma_u, h_j)_{\Gamma_j}.\end{aligned}$$

d'après la deuxième formule de green (2.16), la desnsité de $H^2(\Omega) dans D(\Delta, L^2(\Omega))$ *permet de donner un sens à* $(\gamma_j u, \gamma_j\partial_{nj}v)$ *dans* $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j) \times \tilde{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_j)$ *par*

$$(\gamma_j v, \gamma_j\partial_{nj}v) : (h_j,g_j) \mapsto (g_j,h_j) = \langle\gamma_j\partial_{nj}v, g_j\rangle_{-\frac{3}{2},\sim} - \langle\gamma_j v, h_j\rangle_{-\frac{1}{2},\sim}$$

où $\langle.,.\rangle_{-\frac{3}{2}},\sim$*(resp. où*$\langle.,.\rangle_{-\frac{1}{2}},\sim$*) désigne le produit de dualité dans* $\tilde{H}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_j)\times\tilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j)$*(resp.*

$\tilde{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_j)\times\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_j))$. ■

Dans le cas d'une ouvert à frontiére réguliére, on peut donner un sens à la deuxiéme formule de Green pour $v \in D(\Delta, L^2(\Omega))$ et $u \in H^2(\Omega)$. Ici, la présence des coins oblige à restreindre l'espace où varie u afin de pouvoir utiliser le théorème précédent.Ainsi, on a la

Proposition 2.10.1. *soit $v \in D(\Delta, L^2(\Omega))$. Alors, ona*

$$(u, \Delta v)_\Omega - (v, \Delta u)_\Omega = \sum_j \left\{\langle \gamma_j \partial_{nj} v, \gamma_j u\rangle_{-\frac{3}{2}} \sim, -\langle \gamma_j v, \gamma_j \partial_{nj} u, j\rangle_{-\frac{1}{2},} \sim\right\}, \tag{2.19}$$

qule que soit $u \in H^2(\Omega)$ telle que $\gamma_j u \in \tilde{H}^{\frac{3}{2}}$ et $\partial_{nj} u \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega)(\Gamma_j)$ pour $1 \leq 2 \leq N$.

Demonstration *: pour u et $v \in H^2(\Omega)$, l'egalité(2.19) n'est en fait que la formule de Green (3.16) On veut étendre cette égalité pour $v \in D(\Delta, L^2(\Omega))$. pour une telle fonction v, il existe une suite $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $H^2(\Omega)$ qui converge vers v dans $D(\Delta, L^2(\Omega))$. pour v_m la formule de Green (2.19) est valable qule que soit $v \in H^2(\Omega)$ tel que $\gamma_j u \in \tilde{H}^{\frac{3}{2}}, \gamma_j \partial_{nj} u \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$*

$$(u, \Delta v_m)_\Omega - (v_m, \Delta u)_\Omega = \sum_j \left\{\langle \gamma_j \partial_{nj} v_m, \gamma_j u\rangle_{-\frac{3}{2}}, \sim -\langle \gamma_j v_m, \gamma_j \partial_{nj} u, j\rangle_{-\frac{3}{2},} \sim\right\}. \tag{2.20}$$

Remarquons d'abord que la forme linéaire

$$v \to (u, \Delta v)_\Omega - (v, \Delta u)_\Omega,$$

est continue sur $D(\Delta, L^2(\Omega))$ puisque

$$|(u, \Delta v)_\Omega - (v, \Delta u)_\Omega| \leq \sqrt{3}||u||_{2,\Omega}||v||_{D(\Delta, L^2(\Omega))},$$

(voir la preuve du théorème 2.10.3), et par conséquent,

$$(u, \Delta v_m)_\Omega - (v_m, \Delta u)_\Omega \text{ converge vers } (u, \Delta v)_\Omega - (v, \Delta u)_\Omega. \tag{2.21}$$

D'autre par, d'après le théorème 2.10.3, l'application

$$v \to (\gamma_j v, \gamma_j \partial_{nj} v),$$

est linéaire continue de

$$D(\Delta, L^2(\Omega)) \quad dans \quad \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Omega)(\Gamma_j) \times \tilde{H}^{-\frac{3}{2}}(\Omega)(\Gamma_j),$$

il s'en suit alors que

$$\begin{cases} \gamma_j v_m \to \gamma_j v \ \ dans \ \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Omega)(\Gamma_j), \\ \gamma_j v_m \partial_{nj} \to \gamma_j \partial_{nj} v \ \ dans \ \tilde{H}^{-\frac{3}{2}}(\Omega)(\Gamma_j). \end{cases}$$

On sait que la convergence fort implique la convergence faible, d'où

$$\begin{cases} \langle \gamma_j v_m, \varphi \rangle \to \langle \gamma_j v, \varphi \rangle \ ;\forall \varphi \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Omega)(\Gamma_j), \\ \langle \gamma_j \partial_{nj} v_m, \psi \rangle \to \langle \gamma_j \partial_{nj} v, \psi \rangle \ ;\forall \psi \in \tilde{H}^{-\frac{3}{2}}(\Omega)(\Gamma_j). \end{cases} \tag{3.22}$$

En passant à la limite dans (2.20) et en utilisant (2.21) et (2.22) on obtient l'egalité cherchée. ∎

D'une façon similaire, il est possible d'érire la premiére formule de green pour une fonction $v \in H^1(\Omega)$ dont le laplacien apparttient à $L^2(\Omega)$. posons

$$E(\Delta, L^2(\Omega)) = \left\{ v \in H^1(\Omega) | v \in L^2(\Omega) \right\},$$

c'est un espace de banach pour la norme

$$v \mapsto \left(||v||^2_{1.(\Omega)} + ||\Delta v||^2_{0.(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $E(\Delta, L^2(\Omega))$ (voir lemma 1.5.3.9.dans [8])

Proposition 2.10.2. *soit $v \in H^1(\Omega)$ et $\Delta v \in L^2(\Omega)$. Alors, l'application*

$$v \to \gamma_j \partial_{nj} v,$$

qui est bien définie pour les fonction dans $H^2(\Omega)$ permet un prologement unique et continue une application de l'espace $E(\Delta, L^2(\Omega))$ dans $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}$ De plus, on a

$$(\Delta v, u)_\Omega = -(\nabla v \nabla u) + \sum_{j=1}^{N} \langle \gamma_j \partial_{nj} v, \gamma_j u \rangle_{-\frac{1}{2},\sim}, \tag{2.23}$$

quel que soit $u \in H^1(\Omega)$ telque $\gamma_j u \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}$ pour tout $1 \leq j \leq N$

Demonstration *: pour $v \in H^1(\Omega)$ et $\varphi_j \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}$, j fixé on considére l'application*

$$L(\varphi_j) = \int_{\Gamma_j} \varphi \gamma_j \partial_{nj} v d\sigma.$$

Considérons où $\varphi = (\varphi_{1,...}\varphi_N)$ ou $\varphi_k = 0$ pour $k \neq j$, on montre comme dans la preuve du théorème 2.10.3 que les fonctions φ_k vérifient les conditions de compatibilité

$$\varphi_j \equiv \varphi_{j+1} \quad \text{au point} \quad M_j, \forall j$$

Appliquant le théorème de trace (Corollaire 2.9.4), on déduit l'éxistence d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \gamma_j u = \varphi_j & \text{sur} \quad \Gamma_j, \\ \gamma_k u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_k \forall k \neq j, \end{cases}$$

de plus, il existe $c > 0$ telle que

$$\begin{aligned} ||u||_{1,\Omega} &\leq c||\varphi_j||_{\frac{1}{2},\Gamma_j} \\ &\leq ||\varphi_j||_{\frac{1}{2},\sim}, \end{aligned}$$

ce implique que

$$L(\varphi) = L(\gamma_i u) = \int_{\Gamma_j} \gamma_j u \gamma_j \partial_{nj} v d\sigma$$

D'autre part, puisque $u \in H^1(\Omega)$, $v \in H^2(\Omega)$, on a alors grâce à la formule de green

(2.15) :

$$\begin{aligned}
L(\varphi) &= (\gamma_j u, \gamma_j \partial_{nj} v)_{\Gamma_j} \\
&= \sum_k (\gamma_k u, \gamma_k \partial_{nk} v)_{\Gamma_k} \\
&= (u, \Delta v)_\Omega + (\bigtriangledown u, \bigtriangledown v)_\Omega \\
&\leq ||u||_{o,\Omega} ||\Delta v||_{0,(\Omega)} + |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \\
&\leq ||u||_{o,\Omega} ||\Delta v||_{0,(\Omega)} + |u|_{1,\Omega} ||v||_{1,\Omega} \\
&\leq (||u||^2_{o,\Omega} + |u|^2_{1,\Omega})^{\frac{1}{2}} (||v||^2_{1,\Omega} + ||\Delta u||^2_{0,\Omega})^{\frac{1}{2}} \\
&= ||u||_{1,\Omega} ||v||_{E(\Delta, L^2(\Omega))} \\
&\leq c||v||_{E(\Delta, L^2(\Omega))} ||\varphi_j|| \ _{,1/2}, \Gamma_j.
\end{aligned}$$

par conséquent, L est une forme linéaire continue sur $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega)(\Gamma_j)$*, i.e.* $L \in (\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega)(\Gamma_j))' = \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Omega)(\Gamma_j)$ *de plus*

$$\sup_{\substack{\varphi_j \in \tilde{H}^{1/2}(\Omega)(\Gamma_j) \\ \varphi_j \neq 0}} \frac{|L(\varphi_j)|}{||\varphi_j|| \ _{,1/2,\Gamma_j}} \leq c||v||_{E(\Delta, L^2(\Omega)},$$

par conséquent, lapplication

$$\gamma_j \partial_{nj} : v \to L$$

est linéaire continue de $H^2(\Omega)$ *muni de la norme induite par celle de* $E(\Delta, L^2(\Omega))$ *dans* $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Omega)(\Gamma_j)$ *muni de la norme duale. donc en vertu de la densité de* $H^2(\Omega)$ *dans* $E(\Delta, L^2 5\Omega)$*, cette application peut être prolongée continûment de façon unique en une application linéaire encore notée* $\gamma_j \partial_{nj}$ *de* $E(\Delta, L^2(\Omega)$ *dans* $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Omega)(\Gamma_j)$*.*
maintenant, pour $v \in H^2(\Omega)$ *et* $u \in H^2(\Omega)$ *tel que* $\gamma_j u \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Omega)(\Gamma_j)$*,* $1 \leq j \leq n$ *l'égalité(2.23), n'est en fait que la formule de Green (2.23) s'obtient alor par densité de* $H^2(\Omega)$ *dans* $E(\Delta, L^2(\Omega))$ ■

CHAPITRE 3

LE PROBLÈME DE DIRICHLET DANS UN DOMAINE PLAN AVEC POINT DE REBROUSSEMENT

résumé

On étudiéra le probléme de Dirichlet pour l'equation de Laplace dans un domaine plan modèle présentant un point de rebroussement.

Les technique de démonstration repose au départ sur le même changement de variables déj a utilisé par Ibuki[4], qui réduit le problème à une pertur batiar du problème de Dirichlrt pour l'equation de Laplace dans une demi-bande infinie.

3.1 Le problème de référence

On démontre ici le problème suivant :

Théorème 3.1.1. *Pour $f \in L^p(\Omega_0)$ donné, il existe $u \in W^{2,p}(\Omega_0) \cap W_0^{1,p}(\Omega_0)$ nunique, solution de $\Delta u = f$, dans Ω_0.*

On utilise une réflexion impaire dans la direction de x. On pose donc

$$U(x,y) \begin{cases} u(x,y) & si\ x > 0, \\ -u(-x,y) & si\ x < 0. \end{cases}$$

et

$$F(x,y) \begin{cases} f(x,y) & si\ x > 0 \\ -f(-x,y) & si\ x < 0 \end{cases}$$

On vérifie aisément l'équivalence des propriétés suivantes :

(a)$u \in W^{2,p}(\Omega_0) \cap W_0^{1,p}(\Omega_0)$ et $\Delta u = f$;

(b)$U \in W^{2,p}(]0,1[\times\mathbb{R}) \cap W_0^{1,p}(]0,1[\times\mathbb{R})$ et $\Delta U = F$;

Par ailleurs, il est clair que $f \in L^p(\Omega_0)$ si et seulement si $F \in L^p(]0,1[\times\mathbb{R})$

L'existence et l'unicité de U vérifiant (b) est bien connue (c,f. entre autres Grisvard [2]) L'affirmation du théorème 3.1.1 en résulte immédiatement.

3.2 le changement de variable

Suivant Ibuki [4], on pose

$$\xi = \frac{1}{\alpha - 1} x^{-\alpha+1}, \eta = yx^{-\alpha}.$$

On étudie l'effet de ce changement de variable sur l'equation $\Delta u = f$ posée dans Ω. L'image de Ω par ce changement de variable est l'ouvert

$$\Omega_\alpha = \left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 | \xi > \frac{1}{\alpha - 1}^{\alpha^1 - \alpha}, 0 < \eta < 1 \right\},$$

On pose naturellement $v(\xi,\eta) = u(x,y)$ *et* $g(\xi,\eta) = f(x,y)$. *On a donc*

$$u(x,y) = v\left(\frac{1}{\alpha-1}x^{-\alpha+1}, yx^{-\alpha}\right).$$

On a :

$$D_y u(x,y) = D_y v(\xi,\eta),$$

alors :

$$\begin{aligned} D_y u &= D_\xi v D_y \xi + D_\eta v D_y \eta \\ &= D_\eta v x^{-\alpha} (car D_y \xi = 0) \\ &= x^{-\alpha} D_\eta v. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} D_y^2 u &= D_y D_y u \\ &= D_y[x^{-\alpha} D_\eta v] \\ &= x^{-\alpha} D_y D_\eta v \\ &= x^{-\alpha} D_\eta^2 v D_y \eta \\ &= x^{-\alpha} D_\eta^2 v x^{-\alpha} \\ &= x^{-2\alpha} D_\eta^2 v. \end{aligned}$$

Il vient

$$D_y u = x^{-\alpha} D_\eta v, D_\eta^2 = x^{-2\alpha} D_\eta^2 v.$$

On a :

$$\begin{aligned}\xi = \frac{1}{\alpha-1}x^{-\alpha+1} &\Longleftrightarrow (\alpha-1)\xi = x^{-\alpha+1}\\ &\Longleftrightarrow ((\alpha-1)\xi)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = (x^{-\alpha+1})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\\ &\Longleftrightarrow (\alpha-1)\frac{\alpha}{\alpha-1}\xi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = (x^{-\alpha+1})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\\ &\Longleftrightarrow (\alpha-1)\frac{\alpha}{\alpha-1}\xi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = x^{-\alpha}\\ &\Longleftrightarrow x^{-\alpha} = (\alpha-1)\frac{\alpha}{\alpha-1}\xi^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

On pose :

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1},$$

et

$$c = (\alpha-1)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = (\alpha-1)^{\beta}.$$

Alors :

$$x^{-\alpha} = c\xi^{\beta},$$

et

$$x^{-2\alpha} = c^2\xi^{2\beta}.$$

Donc

$$D_y u = c\xi^{\beta}D_\eta v, D_y^2 u = c^2\xi^{2\beta}D_\eta^2 v,$$

où $c = (\alpha-1)^{\beta}$ *et* $\beta = \alpha/(\alpha-1)$. *il vient également*

On a :

$$D_x u(x,y) = D_x v(\xi,\eta).$$

Alors :

$$\begin{aligned}D_x u &= D_\xi v D_x\xi + D_\eta v D_x\eta\\ &= -x^{-\alpha}D_\xi v - \alpha y x^{-\alpha-1}D_\eta v.\end{aligned}$$

Donc :

$$D_x u = -x^{-\alpha} D_\xi v(\frac{1}{\alpha-1}x^{-\alpha+1}, yx^{-\alpha}) - \alpha y x^{-\alpha-1} D_\eta v(\frac{1}{\alpha-1}x^{-\alpha+1}, yx^{-\alpha}),$$

et :

$$\begin{aligned}
D_x^2 u &= D_x D_x u \\
&= D_x[-x^{-\alpha} D_{xi} v - \alpha y x^{-\alpha} D_\eta v] \\
&= \alpha x^{-\alpha-1} D_\xi v - x^{-\alpha-1} D_x D_\xi v + \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2} D_\eta v - \alpha y x^{-\alpha-1} D_x D_\eta v.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
D_x D_y v &= D_\xi^2 v D_x \xi + D_\eta D_\xi v D_x \eta \\
&= -x^{-\alpha} D_\xi^2 v - \alpha y x^{-\alpha-1} D_\eta D^{xi} v,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D_x D_\eta v &= D_\xi D_\eta v D_x \xi + D_\eta^2 v D_x \eta \\
&= -x^{-\alpha} D_\xi D_\eta v - \alpha y x^{-\alpha-1} D_\eta^2 v.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
D_x^2 u &= \alpha x^{-\alpha-1} D_\xi v - x^{-\alpha}[-x^{-\alpha} D_\xi^2 - \alpha y x^{-\alpha-1} D_\eta D_\xi v] + \alpha(\alpha-1) y x^{-\alpha-2} D_\eta v \\
&- \alpha y x^{-\alpha-1}[-x^{-\alpha} D_\xi D_\eta v - \alpha y x^{-\alpha-1} D_\eta^2 v] \\
&= \alpha x^{-\alpha-1} D_\xi v + x^{-2\alpha} D_{xi}^2 v + \alpha y x^{-2\alpha-1} D_\eta D_\xi v + \alpha(\alpha-1) y x^{-\alpha-2} D_\eta v + \alpha y x^{-2\alpha-1} D_\xi D_\eta v \\
&+ \alpha^2 y^2 x^{-2\alpha-2} D_\eta^2 v \\
&= \alpha x^{-\alpha-1} D_\xi v + x^{-2\alpha} D_\xi^2 v + 2\alpha y x^{-2\alpha-1} D_\xi D_\eta v + \alpha(\alpha+1) y x^{-2\alpha-2} D_\eta v + \alpha^2 y^2 x^{-2\alpha-2} D_\eta^2 v \\
&= x^{-2\alpha}\left\{D_\xi^2 v + 2\alpha y x^{-1} D_\xi D_\eta v + \alpha^2 y^2 x^{-2} D_\eta^2 v + \alpha x^{\alpha-1} D_\xi v + \alpha(\alpha+1) y x^{\alpha-2} D_\eta v\right\} \\
&= x^{-2\alpha}\left\{D_\xi^2 + 2\alpha \eta x^{\alpha-1} D_\eta D_\xi v + \alpha^2 \eta^2 x^{2\alpha-2} D_\eta^2 v + \alpha x^{\alpha-1} D_\xi v + \alpha(\alpha+1) \eta x^{2\alpha-2} D_\eta v\right\}.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\xi = \frac{1}{\alpha-1}x^{-\alpha+1} &\Longleftrightarrow x^{-\alpha+1} = (\alpha-1)\xi \\
&\Longleftrightarrow (x^{-\alpha+1})^{-1} = ((\alpha-1)\xi)^{-1} \\
&\Longleftrightarrow x^{\alpha-1} = (\alpha-1)^{-1}\xi^{-1} \\
&\Longleftrightarrow x^{\alpha-1} = (\alpha-1)^{-\frac{\beta}{\beta}}\xi^{-1} \\
&\Longleftrightarrow x^{\alpha-1} = ((\alpha-1)^{\beta})^{-\frac{1}{\beta}}\xi^{-1} \\
&\Longleftrightarrow x^{\alpha-1} = c^{-\frac{1}{\beta}}\xi^{-1} \\
&\Longleftrightarrow x^{\alpha-1} = \frac{c^{-\frac{1}{\beta}}}{\xi} \\
et : x^{\alpha-1} = \frac{c^{-\frac{1}{\beta}}}{\xi} &\Longleftrightarrow x^{2\alpha-2} = \frac{c^{-\frac{2}{\beta}}}{\xi^2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$D_x^2 u = c^2\xi^{2\beta}\left\{D_\xi^2 v + 2\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}\frac{\eta}{\xi}D_\xi D_\eta v + \alpha^2 c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta^2}{\beta^2}D_\eta^2 v + \alpha c^{-\frac{1}{\beta}}\frac{1}{\xi}D_\xi v + \alpha(\alpha+1)c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta}{\xi^2}D_\eta v\right\}.$$

Au total l'équation $\Delta u = f$ devient.

$$c^2\xi^{2\beta}\left\{\Delta v + 2\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}\frac{\eta}{\xi}D_\xi D_\eta v + \alpha^2 c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta^2}{\xi^2}D_\eta^2 v + 2\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}\frac{1}{\xi}D_\xi v + \alpha(\alpha+1)c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta^2}{\xi^2}D_\eta^2 v\right\} = g...(*).$$

Il convient également d'étudier l'effet du même changement de variablessur les espaces fonctionnels. Le résultat suivant est évident.

Lemme 3.2.1. *On a $f \in L^p(\Omega)$ si et seulement si $\xi^{-\frac{2\beta}{p}}\ g \in L^p(\Omega_\alpha)$ En d'autres termes, une fonction est de puissance p sommable en x,y si et seulement si elle est de puissance p sommable en ξ,η après multiplication par $\xi^{-\frac{2\beta}{p}}$.*

On devra donc étudier l'équation en v ci-dessus en supposant que $\xi^{-\frac{2\beta}{p}}g \in L^p(\Omega_\alpha)$. Pour éviter de manipuler des espaces avec poids, ilsera plus commode de considérer une équation dont le second membre est proportionnel $\xi^{-\frac{2\beta}{p}}g$. Pour cela on pose

$$w = \xi^\gamma v, \gamma = \frac{2\beta}{p}.$$

Alors $v = \xi^{-\gamma}w$

et on cherche l'équation de w *:*

$$\begin{aligned}
D_\eta v &= D_\eta[\xi^{-\gamma}w] \\
&= \xi^{-\gamma}D_\eta w + wD_\eta\xi^{-\gamma} \\
&= \xi^{-\gamma}D_\eta w + 0 \\
D_\eta^2 v &= D_\eta D_\eta v = D_\eta[\xi^{-\gamma}D_\eta w] \\
&= \xi^{-\gamma}D_\eta^2 w + D_\eta\xi^{-\gamma}D_\eta w \\
&= \xi^{-\gamma}D_\eta^2 w + 0 \\
&= \xi^{-\gamma}D_\eta^2 w \\
D_\xi v &= D_\xi[\xi^{-\gamma}w] = \xi^{-\gamma}D_\xi w + wD_\xi\xi^{-\gamma} \\
&= \xi^{-\gamma}D_\xi w - \gamma\xi^{-\gamma-1}w \\
D_\xi D_\eta v &= D_\xi[\xi^{-\gamma}D_\eta w] \\
&= \xi^{-\gamma}D_\xi D_\eta w + D_\xi\xi^{-\gamma}D_\eta w \\
&= \xi^{-\gamma}D_\xi D_\eta w - \gamma\xi^{-\gamma-1}D_\eta w \\
D_\xi^2 v &= D_\xi D_\xi v \\
&= D_\xi[\xi^{-\gamma}D_\xi - \gamma\xi^{-\gamma_1}w] \\
&= \xi^{-\gamma}D_\xi^2 w + D_\xi\xi^{-\gamma}D_\xi w - \gamma\xi^{-\gamma-1}D_\xi v + wD_\xi[-\gamma\xi^{-\gamma-1}] \\
&= \xi^{-\gamma}D_\xi^2 w - \gamma\xi^{-\gamma-1}D_\xi w - D_\xi w - \gamma\xi^{-\gamma-1}D_\xi w - \gamma(-\gamma-1)\xi^{-\gamma-2}w \\
&= \xi^{-\gamma}D_\xi^2 w - 2\gamma\xi^{-\gamma-1}D_\xi w + D_\xi w + \gamma(-\gamma-1)\xi^{-\gamma-2}w.
\end{aligned}$$

Il vient :

$D_\eta v = \xi^{-\gamma}D_\eta w,\ D_\eta^2 v = \xi^{-\gamma}D_\eta^2 w,\ D_\xi v = \xi^{-\gamma}D_\xi w - \gamma\xi^{-\gamma-1}w,\ D_\xi D_\eta v = \xi^{-\gamma}D_\xi D_\eta w - \gamma\xi^{-\gamma-1}D_\eta w,\ D_\xi^2 v = \xi^{-\gamma}D_\xi^2 w - 2\gamma\xi^{-\gamma-1}w + \gamma(\gamma+1)\xi^{-\gamma-2}.$

Alors :

$$\begin{aligned}(*) \Leftrightarrow & c^2\xi^{-2\beta}\xi^{2\beta}\left\{\xi^{-\gamma}D_\xi^2 D_\eta w - 2\gamma\xi^{-\gamma-1}D_\xi w + \gamma(\gamma+1)\xi^{-\gamma-2}w + 2\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}\frac{\eta}{\xi}(\xi^{-\gamma}D_\xi D_\eta w - \gamma\xi^{-\gamma-1}D_\eta w)\right\}\\ & + c^2\xi^{-2\beta}\xi^{2\beta}\left\{\alpha^2 c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta^2}{\xi^2}(\xi^{-\gamma}D_\eta^2 w)\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}\frac{1}{\xi}(\xi^{-\gamma}D_\xi w - \gamma\xi^{-\gamma-1}w) + \alpha(\alpha+1)c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta}{\xi^2}(\xi^{-\gamma}D_\eta w)\right\}\\ & = \xi^{-2\beta}g.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(*) \Leftrightarrow c^2\xi^{-\gamma} & \left\{D_\xi^2 - 2\gamma\xi^{-1}D_\xi w + \gamma(\gamma+1)\xi^{-2}w + 2\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}\frac{\eta}{\beta}(D_\xi D_\eta w - \gamma\xi^{-1}D_\eta w) + \alpha^2 c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta^2}{\xi^2}D_\eta^2 w\right\}\\ & + c^2\xi^{-\gamma}\left\{\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}\frac{1}{\xi}(D_\xi w - \gamma\xi^{-1}w) + \alpha(\alpha+1)c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta}{\xi^2}D_\eta w\right\}\\ & = \xi^{-2\beta}g.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(*) \Leftrightarrow c^2\xi^{-\gamma} & \left\{\Delta w - \frac{2\gamma}{\xi}D_\xi w\frac{\gamma(\gamma+1)}{\xi^2}w + 2\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}(\frac{\eta}{\xi}D_\xi D_\eta w - \gamma\frac{\eta}{\xi^2}D_\eta w) + \alpha^2 c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta^2}{\xi^2}D_\eta^2 w\right\}\\ & + c^2\xi^{-\gamma}\left\{\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}(\frac{1}{\xi}D_\xi w - \frac{\gamma}{\xi^2}w) + \alpha(\alpha+1)c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta}{\xi^2}D_\eta w\right\}\\ & = \xi^{-2\beta}g.\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}c^2\xi^{-\gamma} & \left\{\Delta w - \frac{2\gamma}{\xi}D_\xi w + \frac{\gamma(\gamma+1)}{\xi^2}w + 2\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}(\frac{\eta}{\xi}D_\xi D_\eta w - \gamma\frac{\eta}{\xi^2}D_\eta w) + \alpha^2 c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta^2}{\xi^2}D_\eta^2 w\right\}\\ & + c^2\xi^{-\gamma}\left\{\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}(\frac{1}{\xi}D_\xi w - \frac{\gamma}{\xi^2}w) + \alpha(\alpha+1)c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta}{\xi^2}D_\eta w\right\}\\ & = \xi^{-2\beta}g...(*,*).\end{aligned}$$

Autrement dit, on a montré l'existence d'un opérateur différentiel linéaire du second ordre L à coefficients bornés (pour $\xi > 1$ pour fixer les idées) tel que

$$\begin{aligned}(*,*) \Longleftrightarrow & c^2\left\{\Delta w - \frac{1}{\xi}[-2\gamma D_\xi w + \frac{\gamma(\gamma+1)}{\xi}w + 2\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}(\eta D_\xi D_\eta w - \gamma\frac{\eta}{\xi}D_\eta w) + \alpha^2 c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta^2}{\xi}D_\eta^2 w\right\} \\ & + c^2\left\{\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}(D_\xi w - \frac{\gamma}{\xi}w) + \alpha(\alpha+1)c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta}{\xi}D_\eta w]\right\} \\ & = \xi^{\gamma-2\beta}g.\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}Lw = & -2\gamma D_\xi w + \frac{\gamma(\gamma+1)}{\xi}w + 2\alpha c^{-\frac{1}{\beta}}(\eta D_\xi D_\eta w - \gamma\frac{\eta}{\xi}D_\eta w) \\ & + \alpha^2 c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta^2}{\xi}D_\eta^2 w + \alpha c^{-\frac{1}{\beta}}(D_\xi w - \frac{\gamma}{\xi}w) + \alpha(\alpha+1)c^{-\frac{2}{\beta}}\frac{\eta}{\xi}D_\eta w.\end{aligned}$$

Donc :

$$(*,*) \Leftrightarrow c^2\left\{\Delta w + \frac{1}{\xi}Lw\right\} = \xi^{\gamma-2\beta}g.$$

On a :

$$\begin{aligned}\gamma - 2\beta &= \frac{2\beta}{p'} - 2\beta \\ &= \frac{2\beta - 2\beta p'}{p'} \\ &= \frac{-2\beta(p'-1)}{p'} \\ &= -2\beta\frac{(p'-1)}{p'},\end{aligned}$$

et on a :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{p'}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{p} = 1 - \frac{p'-1}{p'},$$

donc

$$\gamma - 2\beta = \frac{-2\beta}{p}.$$

Alors :

$$c^2 \left\{ \Delta w + \frac{1}{\xi} Lw \right\} = \xi^{\gamma - 2\beta} g = \xi^{\frac{-2\beta}{p}} g.$$

Il est naturel à ce point de poser $h = \xi^{\frac{-2\beta}{p}} g$*. En résumé on établit la proposition suivante.*

Proposition 3.2.1. *Il existe un opérateur différentiel linéaire dusecond ordre à coefficients bornés L tel que l'équation $\Delta u = f$ dans Ω soit équivalente à l'équation $c^2\Delta w + (1/\xi)Lw = h$ dans Ω_α, où on a posé*

$$h = \xi^{\frac{-2\beta}{p}} f, w = \xi^{\frac{2\beta}{p'}} u,$$

avec

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, c = (\alpha - 1)^{\beta}.$$

3.3 Résolution du problème transformé

On déduit du théorème 3.1.1 le résultat suivant.

Théorème 3.3.1. *Pour a assez petit la propriété suivante est vérifiée :*

l'opérateur $\Delta + (1 + /\xi)L$ est un isomorphisme de $W^{2,p}(\Omega_\alpha) \cap W_0^{1,p}(\Omega_\alpha)$ sur $L^p(\Omega_\alpha)$.

Démonstration *: On sait que Δ est un isomorphisme de $W^{2,p}(\Omega_0) \cap W_0^{1,p}(\Omega_0)$ sur $L^p(\Omega_0)$ Par ailleurs, Ω_α est un translaté de (Ω_0) $((1/(\alpha-1))\alpha^{1-\alpha}$ dans la direction de x). Comme Δ et les conditions auxlimites de Dirichlet sont invariants par translation, il en résulte que Δ est un isomorphisme de $W^{2,p}(\Omega_\alpha) \cap W_0^{1,p}(\Omega_\alpha)$ sur $L^p(\Omega_0)$ pour tout a, et lanorme de Δ^{-1} est indépendante de a*

Pour a assez petit, donc $((1/(\alpha-1))\alpha^{1-\alpha}$ *assez grand, l'opérateur* $(1/\xi)L$ *a une norme inférieure à l'inverse de celle de* Δ^{-1}. *En d'autres termes* $(1/\xi)L\Delta^{-1}$ *est une contraction stricte. Il en résulte que* $\Delta+(1/\xi)L$ *est un isomorphisme. Ainsi, partant de* f *dans* $L^p(\Omega)$ *ou, ce qui revient au même, de* h *dans* $L^p(\Omega_\alpha)$ *il existe* $w \in W^{2,p}(\Omega_\alpha)$ *unique solution de* $c^2\left\{\Delta w + \dfrac{1}{\xi}Lw\right\} = h$ *dans* Ω_α *avec* $w = 0$ *sur* $\partial\Omega_\alpha$.

Il reste à étudier les propriétés de dérivabilité de u correspondant à w ■

3.4 Effet du changement de variables inverse

On a :

$$\begin{aligned}
\xi = \frac{1}{\alpha-1}x^{-\alpha+1} &\Longleftrightarrow x^{-\alpha+1} = (\alpha-1)\xi \\
&\Longleftrightarrow (x^{-\alpha+1})^{\frac{1}{-\alpha-1}} = ((\alpha-1)\xi)^{\frac{1}{-\alpha+1}} \\
&\Longleftrightarrow x = (\alpha-1)^{\frac{1}{-\alpha+1}}\xi^{\frac{1}{-\alpha+1}} \\
&\Longleftrightarrow x = (\alpha-1)^{-\frac{1}{-\alpha-1}\frac{\alpha}{\alpha}}\xi^{-\frac{1}{\alpha-1}\frac{\alpha}{\alpha}} \\
&\Longleftrightarrow (x = (\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha-1}})^{-\frac{1}{\alpha}}\xi^{-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{\alpha}} \\
&\Longleftrightarrow c =^{-\frac{1}{\alpha}}\xi^{-\frac{\beta}{\alpha}},
\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}
\eta = yx^{-\alpha} &\Longleftrightarrow y = x^{\alpha}\eta \\
&\Longleftrightarrow y = c^{-1}\xi^{-\beta}\eta(car : x^{\alpha=c^{-1}\xi^{-\beta}}) \\
&\Longleftrightarrow y = c^{-1}\eta\xi^{-\beta},
\end{aligned}$$

on a par définition $w = \xi^{\frac{2\beta}{p'}}u(x,y)$ *Alors :*

$$w = \xi^{\frac{2\beta}{p'}}(c^{-\frac{1}{\alpha}}\xi^{-\frac{\beta}{\alpha}}, c^{-1}\eta\xi^{-\beta}).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
D_\eta w &= u(x,y) D_\eta \xi^{-\frac{2\beta}{p'}} + \xi^{-\frac{2\beta}{p'}} u(x,y) \\
&= \xi^{-\frac{2\beta}{p'}} D_\eta u(x,y) (car : D_\eta \xi^{-\frac{2\beta}{p'}} = 0) \\
&= \xi^{-\frac{2\beta}{p'}} [D_\eta (c^{-\frac{1}{\alpha}} \xi^{-\frac{\beta}{\alpha}}) D_x u(x,y) + D_\eta (c^{-1} \eta \xi^{-\beta}) D_y u(x,y)] \\
&= \xi^{-\frac{2\beta}{p'}} D_\eta (c^{-1} \eta \xi^{-\beta}) D_y u(x,y) (car : D_\eta (c^{-\frac{1}{\alpha}} \xi^{-\frac{\beta}{\alpha}}) = 0) \\
&= c^{-1} \xi^{-\beta} \xi^{-\frac{2\beta}{p'}} D_y u(x,y) \\
D_\eta^2 w &= D_\eta D_\eta w = D_\eta [c^{-1} \xi^{-\beta} \xi^{-\frac{2\beta}{p'}} D_y u(x,y)] \\
&= c^{-1} \xi^{-\beta} \xi^{-\frac{2\beta}{p'}} D_\eta [D_y u(x,y)] \\
&= c^{-1} \xi^{-\beta} \xi^{-\frac{2\beta}{p'}} D_\eta (c^{-1} \eta \xi^{-\beta}) D_y^2 u(x,y) \\
&= c^{-1} \xi^{-\beta} \xi^{-\frac{2\beta}{p'}} D_y^2 u(x,y).
\end{aligned}$$

De manière équivalente On a :

$$\begin{aligned}
w = \xi^{\frac{2\beta}{p'}} u &\Longleftrightarrow \xi^{-2\beta} w = \xi^{-\beta} \xi^{\frac{2\beta}{p'}} u \\
&\Longleftrightarrow \xi^{-2\beta} w = \xi^{-\beta + \frac{2\beta}{p'}} u \\
&\Longleftrightarrow \xi^{-2\beta} w = \xi^{\frac{2\beta}{p'} - 2\beta} u \\
&\Longleftrightarrow \xi^{-2\beta} w = \xi^{\gamma - 2\beta} u \\
&\Longleftrightarrow \xi^{-2\beta} w = \xi^{-\frac{2\beta}{p}} u,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D_\eta w &= c^{-1} \xi^{-\beta} \xi^{\frac{2\beta}{p'}} D_y u \\
&\Longleftrightarrow \xi^{-\beta} D_\eta w = c^{-1} \xi^{\frac{2\beta}{p'} - 2\beta} D_y u \\
&\Longleftrightarrow \xi^{-\beta} D_\eta w = c^{-1} \xi^{\frac{2\beta}{p'}} u,
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
D_\eta^2 w = c^{-2}\xi^{-2\beta}\xi^{\frac{2\beta}{p'}} D_y^2 u \\
&\Longleftrightarrow D_\eta^2 w = c^{-2}\xi^{\frac{2\beta}{p'}-2\beta} D_y^2 u \\
&\Longleftrightarrow D_\eta^2 w = c^{-2}\xi^{\frac{2\beta}{p'}} D_y^2 u,
\end{aligned}
$$

ou encore on a :

$$x^{-\alpha} = c\xi^{\beta} \Longleftrightarrow \xi^{\beta} = c^{-1}x^{-\alpha},$$

et

$$\xi^{2\beta} = c^{-2}x^{-2\alpha}.$$

$$
\begin{aligned}
\xi^{-2\beta} = \xi^{-\frac{2\beta}{p}} u \Longleftrightarrow w = \xi^{2\beta}\xi^{-\frac{2\beta}{p}} u \\
&\Longleftrightarrow w = c^{-2}\xi^{-\frac{2\beta}{p}} x^{-2\beta} u,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\xi^{-\beta} D_\eta w = c^{-1}\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_y u \\
&\Longleftrightarrow D_\eta W = \xi^{\beta} c^{-1}\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_y u \\
&\Longleftrightarrow D_\eta W = c^{-2}\xi^{-\frac{2\beta}{p}} x^{-\alpha} D_y u,
\end{aligned}
$$

et

$$D_\eta^2 w = c^{-2}\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_y^2 u.$$

Du fait que w, $D_\eta w$ et $D^2 w$ sont de puissances p sommables dans Ω_α, le lemme 3.2.1 implique que $x^{-2\alpha}u$, $x^{-\alpha}D_y u$ et $D_y^2 u$ sont de puissances p sommables dans Ω. Écrivant que $D_x^2 u = f - D_y^2 u$, on voit immédiatement que $D_x^2 u$ est aussi de puissance p sommable.

Il reste donc à étudier la sommabilité de $D_x u$ et $D_x D_y u$ à la puissance p.

On a :

$$\begin{aligned}
D_\xi w &= D_\xi[\xi^{\frac{2\beta}{p'}} D^2 u] \\
&= u D_\xi \xi^{\frac{2\beta}{p'}} + \xi^{\frac{2\beta}{p'}} D_\xi u \\
&= \frac{2\beta}{p'} \xi^{\frac{2\beta}{p}-1} u + \xi^{\frac{2\beta}{p'}} (D_\xi[c^{-\frac{1}{\alpha}} \xi^{-\frac{\beta}{\alpha}}] D_x u + D_\xi[c^{-1}\eta\xi^{-\beta}] D_y u) \\
&= \frac{2\beta}{p'} \xi^{\frac{2\beta}{p'}-1} u + \xi^{\frac{2\beta}{p'}} (-\frac{\beta}{\alpha} c^{-\frac{1}{\alpha}} \xi^{-\frac{\beta}{\alpha}-1} D_x u - \beta c^{-1}\eta\xi^{-\beta-1} D_y u) \\
&= \frac{2\beta}{p'} \xi^{\frac{2\beta}{p'}-1} u - \frac{\beta}{\alpha} c^{-\frac{1}{\alpha}} \xi^{-\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}-1} D_x u - \beta c^{-1}\eta\xi^{-\beta-1}\xi^{-\beta-1} D_y u \\
&= \frac{2\beta}{p'} \xi^{\frac{2\beta}{p'}-2\beta+2\beta-1} u - \frac{\beta}{\alpha} c^{-\frac{1}{\alpha}} \xi^{\frac{2\beta}{p'}-2\beta+2\beta-\frac{\beta}{\alpha}-1} D_x u - \beta c^{-1}\eta\xi^{-\beta-1}\xi^{\frac{2\beta}{p'}-2\beta+2\beta} D_y u \\
&= \frac{2\beta}{p'} \xi^{2\beta-1}(\xi^{\frac{2\beta}{p'}-2\beta} u) - \frac{\beta}{\alpha} c^{-\frac{1}{\alpha}} \xi^{2\beta-\frac{\beta}{\alpha}-1}(\xi^{\frac{2\beta}{p'}-2\beta} D_x u) - \beta c^{-1}\eta\xi^{-\beta-1}(\xi^{\frac{2\beta}{p'}-2\beta} D_y u) \\
&= \frac{2\beta}{p} \xi^{2\beta-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}} u) - \frac{\beta}{\alpha} c^{-\frac{1}{\alpha}} \xi^{2\beta-1-\frac{\beta}{\alpha}}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_x u) - \beta c^{-1}\eta\xi^{\beta-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_y u).
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1} &\iff \beta(\alpha-1) = \alpha \\
&\iff \beta\alpha - \beta = \alpha \\
&\iff \beta = \beta\alpha - \alpha \\
&\iff \beta = \alpha(\beta-1) \\
&\iff \frac{\beta}{\alpha} = \beta - 1 \\
&\iff \beta = \frac{\beta}{\alpha} + 1 \\
&\iff -\beta = -\frac{\beta}{\alpha} - 1 \\
&\iff 2\beta - \beta = 2\beta - \frac{\beta}{\alpha} - 1,
\end{aligned}$$

donc :

$$D_\xi w = \frac{2\beta}{p'}\xi^{2\beta-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}u) - \frac{\beta}{\alpha}c^{-\frac{1}{\alpha}}\xi^{\beta}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_x u) - \beta c^{-1}\eta\xi^{\beta-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_y u).$$

C'est encore

$$\begin{aligned} D_\xi w &= \frac{2\beta}{p'}(c^{-2}x^{-2\alpha})\xi^{-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}u) - \frac{\beta}{\alpha}c^{-\frac{1}{\alpha}}(c^{-1}x^{-\alpha})(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_x u) - \beta c^{-1}\eta(c^{-1}x^{-\alpha})\xi^{-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_y u) \\ &= \frac{2\beta}{p'c^2}\xi^{-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-2\alpha}u) - \frac{\beta}{\alpha c}c^{-\frac{1}{\alpha}}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-\alpha}D_x u) - \frac{\beta}{c^2}\eta\xi^{-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-\alpha}D_y u). \end{aligned}$$

On sait que $D_\xi w$ est de puissance p sommable. D'après les calculs précédentson sait déjà que

$$\xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-2\alpha}u, \xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-\alpha}D_y u,$$

sont de puissance p sommable en ξ, η. Il en résulte à plus forte raison que $\xi^{-\frac{2\beta}{p}}x^{-\alpha}D_x u$ est de puissance p sommable en ξ et η, donc que $x^{-\alpha}D_x u \in L^p(\Omega)$, par application du lemme 3.2.1.

On a enfin

$$\begin{aligned} D_\xi D_\eta w &= D_\eta D_\xi w \\ &= D_\eta[\frac{2\beta}{p'}\xi^{2\beta-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}u) - \frac{\beta}{\alpha}c^{-\frac{1}{\alpha}}\xi^{\beta}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_x u) - \beta c^{-1}\eta\xi^{\beta-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_y u)] \\ &= \frac{2\beta}{p'}\xi^{2\beta-1}\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_\eta u - \frac{\beta}{\alpha}c^{-\frac{1}{\alpha}}\xi^{\beta}\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_\eta[D_x u] - \beta c^{-1}\xi^{\beta-1}\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_y u - \beta c^{-1}\eta\xi^{\beta-1}\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_\eta[D_y u] \\ &= \frac{2\beta}{p'}\xi^{2\beta-1}\xi^{-\frac{2\beta}{p}}c^{-1}\xi^{-\beta}D_y u - \frac{\beta}{\alpha}c^{-\frac{1}{\alpha}}\xi^{\beta}\xi^{-\frac{2\beta}{p}}c^{-1}\xi{-}\beta D_y D_x u - \beta c^{-1}\xi^{\beta-1}\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_y u \\ &- \beta c^{-1}\eta\xi^{\beta-1}\xi^{-\frac{2\beta}{p}}c^{-1}\xi^{-\beta}D_y^2 u \\ &= (\frac{2\beta}{cp'} - \frac{\beta}{c})\xi^{\beta-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_y u) - \frac{\beta}{\alpha c}c^{-\frac{1}{\alpha}}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_x D_y u) - \frac{\beta}{c}\eta\xi^{-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}}D_y^2 u), \end{aligned}$$

d'où encore

$$D_\xi D_\eta w = (\frac{2\beta}{c^2 p'} - \frac{\beta}{c^2})\xi^{-1}(\xi^{-\frac{2\beta}{p}} x^{-\alpha} D_y u) - \frac{\beta}{\alpha c} c^{-\frac{1}{\alpha}} (\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_x D_y u) - \frac{\beta}{c} \eta \xi^{-1} (\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_y^2 u).$$

Comme on sait que $D_\xi D_\eta w, \xi^{-\frac{2\beta}{p}} x^{-\alpha} D_y u$ *et* $\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_y^2 u$ *sont de puissance sommable en* p *en* ξ, η, *il en est de même pour* $\xi^{-\frac{2\beta}{p}} D_x D_y u$. *Ceci établit que* $D_x D_y \in L^p(\Omega)$, *par application du lemme 3.2.1.*

Au total, on a établit la proposition 3.4.1.

Proposition 3.4.1. *Le fait que* $w \in W^{2,p}(\Omega)$ *implique que*

$$x^{-2\alpha} u, x^{-\alpha} D_x u, x^{-\alpha} D_y u, D_x^2 u, D_x D_y u, D_y^2 u.$$

appartiennent à $L^p(\Omega)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *AGMON (S.), DOUGLIS(A.) et NIRENBERG (L.) .- Estimates near the boundaryfor solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions,* 1, *Communications Pure Appl. Math.* 12(1959), *pp.* $623-627$.

[2] *GRISVARD (P.) .- Elliptic problems in nonsmooth domains, Monographs and Studies in Mathematics, Pitman,* 24(1985).

[3] *H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et Application, Masson, Paris,* 1983.

[4] *IBUKI (K.).- Dirichlet problem for elliptic equations of the second order in asingular domain of R2, Journal Math. Kyoto Univ. 14, n°*1 (1974), *pp.*$54-71$.

[5] *J. NEČAS, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris,* 1967.

[6] *LIONS (J.-P.) et MAGENES (E.) .- Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris* (1968).

[7] *M. Dauge , Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains, Lecture Note in Mathematics, 1341, Sringer-verlag, Berlin,* 1988.

[8] *P.GRISVARD, Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Pitman, London,* 1992.

[9] *P.GRISVARD, Singularities in Boundary value Problems, Masson, Paris,* 1992.

[10] *S, Niciare, Polygonal interface problems, Peter Lang, Berlin,* 1993.

[11] *T. Kato. :Perturbation theory for linear Operators, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York* 1980.

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة مسألة دريكلي في الميدان مع النقطة الرجعية (التوقف) . ومن اجل ذلك قمنا بإعطاء بعض الخواص على فضاءات صوبولاف . في أساسيات البرهان اعتمدنا على نفس تبديل المتغير المستعمل عبر Ibuki و الذي حول المسألة إلى نصف الشريط غير منته

الكلمات الأساسية: ديريكلي، فضاء صوبولاف، مضلع نقطة توقف.

Résumé

Dans notre travail, on a étudie le problème de Dirichlet dans un domaine avec point rebroussement, et pour cela on a commencer par donner quelque propriétés des espaces de sobolev dans un polygone, la technique utilisé est celle de Ibuki qui réduit le problème à une perturbation du problème de Dirichlet pour le Laplacien dans une demi bande infinie

Mots clés: Dirichlet, polygone, espace de Sobolev, point de rebroussement.

Abstract

In the present study, we dealt with the problem of Dirichlet, In a domain with a rebroussement point. In order for that, we started by giving some properties of Sobolev spaces. The technique that is used is that of Ibuki, and which decreases the problem with interruption of the problem to an infinit half band

Key words : Dirichlet, polygone, Sopolev sapace, rebroussement point.