

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatiques

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Etude de la dynamique d'un modèle financier continu

Préparé par :

- Louza Ibtissam
- Zerrouki Roqiya

Soutenue devant le jury

- Encadré par: *M. S. Abdelouahab*M.C.A
- Président : *N. Hamri*Pr
- Examineur : *W. Laouira* M.A.A

Année Universitaire : 2015/2016

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout Puissant et le miséricordieux, qui nous a donné la Force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

Nous tenons à saisir cette occasion et adresser nos Profonds remerciements et nos profondes Reconnaissances à nos Parents.

Un remerciement particulier à notre encadreur Mr : M.S. Abdelouahab pour sa présence, ses Précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury Mr : Nasr-Eddine Hamri et widad laouira pour l'honneur qu'il nous ont accordé en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions. Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction Générale	v
1 Notions générales sur les systèmes dynamiques	1
1.1 Systèmes autonomes et systèmes non-autonomes	2
1.2 Espace des phases	3
1.3 Portrait de phases	3
1.4 Flot	3
1.5 Trajectoire (Orbite)	4
1.6 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs	4
1.7 Ensembles limites	5
1.8 Attracteurs	6
1.9 Les cycles limites	8
1.10 Points fixes	9
2 Stabilité et bifurcations	10
2.1 Notions de stabilité	10
2.1.1 Stabilité au sens de Lyapunov	10
2.1.2 Stabilité d'un système linéaire	12
2.1.3 Stabilité d'un système non linéaire	15

❖ *TABLE DES MATIÈRES*

2.1.4	Stabilité structurelle	18
2.2	Bifurcation	20
2.2.1	Bifurcation noeud-col (ou pli)	20
2.2.2	Bifurcation transcritique	23
2.2.3	Bifurcation fourche (pitchfork)	24
2.2.4	Bifurcation verticale	29
2.2.5	Bifurcation de Hopf	31
3	 systèmes chaotiques	37
3.1	Propriétés du chaos	38
3.2	Attracteurs chaotiques	39
3.3	Quelques exemples célèbres des premiers attracteurs chaotiques	42
3.4	Exposants de Lyapunov	45
3.4.1	Cas des systèmes discrets unidimensionnels	45
3.4.2	Cas d'une application multidimensionnelle	46
4	 Etude d'un modèle financier	51
4.1	Système financier de dimension 3	52
4.2	Système financier de dimension 4	61
	Conclusion Générale	77
	Annexe	78
	Bibliographie	90

TABLE DES FIGURES

1.1	Attracteurs réguliers	8
1.2	Quelques exemples d'attracteurs étranges	9
2.1	Les types de stabilité	11
2.2	Différents portraits de phase possibles du système $x' = Ax$	14
2.3	Points hyperboliques $\forall i, \text{Rel}(\lambda_i) \neq 0$	19
2.4	Points non hyperboliques $\exists i, \text{Rel}(\lambda_i) = 0$	19
2.5	Conventions graphiques	21
2.6	Diagramme de la bifurcation noeud-col	23
2.7	Diagramme de bifurcation transcritique	24
2.8	Portrait de phase de la bifurcation fourche pour $\mu < 0$	25
2.9	Portrait de phase de la bifurcation fourche pour $\mu = 0$	26
2.10	Portrait de phase de la bifurcation fourche pour $\mu > 0$	27
2.11	Diagramme de bifurcation fourche super-critique	28
2.12	Diagramme de bifurcation fourche sous-critique	28
2.13	Diagramme de la bifurcation verticale.	30
2.14	Diagramme de la bifurcation de Hopf super-critique.	34
2.15	Diagramme de la bifurcation de Hopf sous-critique.	36
3.1	Attracteur de Plykin	41

3.2	Attracteur de Lorenz : $(a, b, c) = (10, 28, \frac{8}{3})$	43
3.3	Attracteur de Rössler : $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$	44
3.4	Attracteur de Hénon : $(a, b) = (1.4, 0.3)$	45
3.5	Méthode de Wolf pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov.	48
4.1	Solution du système financier cas $a = 0.45$	58
4.2	Solution du système financier cas $a = 3.6$	58
4.3	Solution du système financier cas $a = 4.17$	59
4.4	Diagramme de bifurcation fourche.	59
4.5	Diagramme de bifurcation du système financier.	60
4.6	L'exposant de Lyapunov.	60
4.7	Solution du système financier cas $a = 0.1$	68
4.8	Solution du système financier cas $a = 2$	69
4.9	Solution du système financier cas $a = 4$	69
4.10	Solution du système financier cas $a = 4.4611$	70
4.11	Diagramme de bifurcation du système financier.	70
4.12	Solution du système financier cas $c = 0.1$	75
4.13	Solution du système financier cas $c = 1$	75
4.14	Solution du système financier cas $c = 2.5$	76
4.15	Solution du système financier cas $c = 6$	76

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les systèmes dynamiques ont été développés au cours du 19^{ème} siècle et maintenant les systèmes dynamiques sont utilisés dans plusieurs domaines : géophysique, biologique, économique, médical...

Un système dynamique autonome est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur. Sa modélisation vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter rigoureusement son comportement dans un domaine de fonctionnement donné [4].

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dits « de contrôle », qui agissent sur les caractéristiques de fonction. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes Conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle peut conduire à une modification de la Nature des régimes dynamiques développés dans le système.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marqué par des changements discontinus appelés bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On parle également, lors d'une telle transition, d'une perte de Stabilité structurelle.

Donc pour l'étude mathématique des systèmes dynamiques on applique souvent la théorie



de bifurcation.

Récemment, il y a eu un intérêt croissant pour la création de systèmes chaotiques en raison de ses applications potentielles en physique, réacteur chimique, théorie du contrôle, les réseaux biologiques, les réseaux de neurones artificiels, des télécommunications et des communications sécurisées.

Il est bien connu que les systèmes économiques et financiers sont des systèmes non linéaires très compliqués. Le phénomène du chaos dans l'économie a été découvert en 1985, et il est apparu dans le système financier pendant la crise économique en 2007. Cette crise était le contexte de la construction proprement du système financier hyperchaotique. Historiquement, le système hyperchaotique est premièrement introduit par rossler, ensuite plusieurs systèmes ont été introuits.

Ce mémoire est constitué d'une introduction et quatres chapitres. On rappelle dans le premiere chapitre quelques notions générale de système dynamique et dans le deuxième chapitre on présente l'étude de la stabilité d'un système dynamique (linéaires et non linéaires) et les bifurcations. Dans le troisième chapitre on va donner quelques notions des systèmes chaotiques. En fin, nous allons étudier deux systèmes financiers hyperchaotiques.

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques notions générales sur les systèmes dynamiques (système autonomes et non-autonomes, espace des phases, flot,...).

Définition 1.1. *Un système dynamique est un modèle évoluant avec le temps, en suivant une loi, qui peut être décrite par un ensemble fini d'équations qui peut prendre des formes mathématiques diverses : équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles,..., il existe en générale deux types de systèmes dynamiques :*

a) *Les système dynamique continue : sont des systèmes d'équations différentielle de la formes :*

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(x, t, \mu), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in V \subset \mathbb{R}^p. \quad (1.1)$$

Où $t \in I \subset \mathbb{R}$ est le temps $x : t \in I \rightarrow x(t) \in U \subset \mathbb{R}^n$, le vecteur d'état du système (1.1), \mathbb{R}^n est l'espace de phases et $\mu \in V \subset \mathbb{R}^p$ est le vecteur des paramètres et f est une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.0.1. *Loscillateur de Duffing :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & y \\ \frac{dy}{dt} = & x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

Où δ, γ, ω sont des paramètres physiques réels. L'espace des phases est \mathbb{R}^2 et l'espace des paramètres est \mathbb{R}^3 .

Ce système est non linéaire, non autonome, il peut être dissipatif ou conservatif (suivant le mouvement avec ou sans frottement).

b) *Les systèmes dynamiques discrets sont des systèmes de la forme :*

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), \quad x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^p, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Où $k \in \mathbb{N}$ représente le temps discrétisé, $x_k \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état du système (1.2), \mathbb{R}^n l'espace des phases, $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^p$ est un vecteur de paramètres. L'application f en générale étant de classe C^1 .

Exemple 1.0.2. *L'application de Hénon :*

$$\begin{cases} x_{k+1} = & y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = & bx_k \end{cases}$$

Où a et b sont des paramètres réels. L'espace des phases est \mathbb{R}^2 et l'espace des paramètres est \mathbb{R}^2 .

1.1 Systèmes autonomes et systèmes non-autonomes

Définition 1.2. *Le système (1,1) est dit autonome si f ne dépend pas explicitement de t . Dans ce cas on l'écrira :*

$$x' = f(x, \mu)$$

Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome.

Exemple 1.1.1. Soit l'équation :

$$x' = -\frac{x}{1+t}$$

Cette équation est non autonome.

1.2 Espace des phases

Définition 1.3. L'espace des phases est l'ensemble des états possibles d'un système dynamique, on peut également le définir comme un espace abstrait dont chaque variable représente une dimension nécessaire à la description du système à moment donné, le degré de liberté caractérise l'espace des phases. Il représente l'ordre qui est égal à la dimension de l'espace d'état.

1.3 Portrait de phases

Définition 1.4. Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentatives dans l'espace des phases. Etant donné un système dynamique, $x' = f(x, t)$, sans résoudre les équations, on peut toujours, à un instant t , représenter graphiquement (à l'aide de flèches) le champ des x' . La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour avoir une idée du comportement du système.

1.4 Flot

Définition 1.5. Soit $X(x_0, t)$, $x_0 \in \mathbb{U}$, une solution du système (1.1) avec la condition initial $X(0) = x_0$. On appelle flot du système (1.1), l'application :

$$\phi_t : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\phi_t(x_0) = X(x_0, t)$$

Proposition 1.

- $\phi_t(x_0)$ est de classe C^r si f est de classe C^r .
- $\phi_0(x_0) = x_0$.
- $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$.
- ϕ_t est un semi-groupe.

1.5 Trajectoire (Orbite)

Définition 1.6. Soit $x_0 \in \mathbb{U}$ une condition initiale et $X(x_0, t)$ la solution du système (1.1). L'ensemble des points $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(x_0, t)$ est la trajectoire dans l'espace d'état passant au point x_0 à initial.

Donc, deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initial :

$$\phi_t(x_1) = \phi_t(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

1.6 Systèmes conservatifs et systèmes dissipatifs

En physique

Un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, et pour préciser cette définition, on dit qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale x_0 a un et un seul état final $x(t)$; il faut pour cela qu'il existe une application bijective de l'espace des phases.

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{U} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{U} \\ (x, t) &\mapsto \phi_t(x) = \phi(x, t) \end{aligned}$$

En mathématique

Une fonction différentiable $(x, y) \mapsto H(x, y)$ est une intégrale première du système différentiel si :

$$f(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

Un système différentiel défini sur un domaine du plan est dit conservatif s'il possède une intégrale première sur ce domaine. Dans le cas où il ne possède pas d'intégrale première, il est dit dissipatif. On peut utiliser le terme intégrable au lieu de conservatif. Il peut être difficile dans certaines circonstances de montrer qu'un système donné n'est pas conservatif surtout si on ne précise pas la régularité de l'intégrale première.

Remarque 1.1. *Si le système est dissipatif alors le flot n'est pas bijectif et il existe en générale un ou plusieurs attracteur dans l'espace de phase du système.*

1.7 Ensembles limites

Définition 1.7. *Un point $a \in \mathbb{U}$ est un point ω -limite d'une trajectoire $X(x_0, t)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ tel que :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n}(x_0) = a.$$

Définition 1.8. *Un point $b \in \mathbb{U}$ est un point α -limite d'une trajectoire $X(x_0, t)$ s'il existe une suite $t_n \rightarrow -\infty$ tel que :*

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \phi_{t_n}(x_0) = b.$$

Définition 1.9. *L'ensemble des points ω -limite (resp α -limites) est désigné par $\omega(x)$ (resp $\alpha(x)$), alors on définit l'ensemble limite de $X(x_0, t)$ par l'ensemble $\alpha(x) \cup \omega(x)$.*

Théorème 1.1. *Les ensembles ω -limite et α -limite d'une trajectoire γ_{x_0} de (1.1) sont des sous ensemble fermés de \mathbb{U} et si γ_{x_0} est contenu dans un sous ensemble compact de \mathbb{R}^n alors $\omega(x_0)$ et $\alpha(x_0)$ sont non vides, connexes compacts dans \mathbb{U} .*

Théorème 1.2. *Si p est un point ω -limite d'une trajectoire γ_{x_0} de (1.1) alors tout les points du trajectoire $\phi(\cdot, p)$ de (1.1) sont aussi des points ω -limite de γ_{x_0} , i.e si $p \in \omega(x_0)$ alors $\gamma_p \subset \omega(x_0)$ et de même si $q \in \alpha(x_0)$ alors $\gamma_q \subset \alpha(x_0)$.*

Corollaire 1.1. $\omega(x_0)$ et $\alpha(x_0)$ sont des ensemble invariant par le flot ϕ de (1.1).

Remarque 1.2.

- Si x_0 est un point d'équilibre de (1.1) alors :
 $\omega(x_0) = \alpha(x_0) = x_0$ car $\phi(t, x_0) = x_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Si une trajectoire γ de (1.1) possède un seul point ω -limite a , alors par le corollaire précédent, a est un point d'équilibre.

1.8 Attracteurs

Définition 1.10. Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points d'une partie de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble d'états) vers lesquels évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales. Soit A un ensemble compact, fermé, de l'espace des phases. On suppose que A est invariant par le flot : $\phi_t(A) \subset A$ pour tout t . A est dite stable si pour tout voisinage \mathbb{U} de A , il existe un voisinage \mathbb{V} de A tel que toute solution $X(x_0, t) = \phi_t(x_0)$ restera dans \mathbb{U} si $x_0 \in \mathbb{V}$. Si de plus :

$$\bigcap_{t>0} \phi_t(\mathbb{V}) = A.$$

S'il existe une orbite dense dans A , alors A est un attracteur.

L'orsque A est un attracteur, l'ensemble

$$W = \bigcup_{t<0} \phi_t(A),$$

est appelé bassin d'attraction de A . C'est l'ensemble des points dont les trajectoires convergent vers A .

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1- Attracteurs réguliers :

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques et on peut citer trois types :

- Le point fixe :

C'est l'attracteur le plus simple, il est représenté par un point dans l'espace des phases. Le système évolue vers un état de repos.

- Le cycle limite périodique :

C'est une trajectoire dans l'espace des phases qui se referme sur elle-même, l'évolution temporelle est alors cyclique, le système présentant des oscillations permanentes, et attire toutes les trajectoires proches.

- Le cycle limite pseudo-périodique (Tore) :

C'est une trajectoire qui s'enroule le long d'un tore et remplir sa surface de manière dense, et finira par se refermé sur elle même au bout d'un temps infini. La figure (1,1) représente les différents types d'attracteurs réguliers.

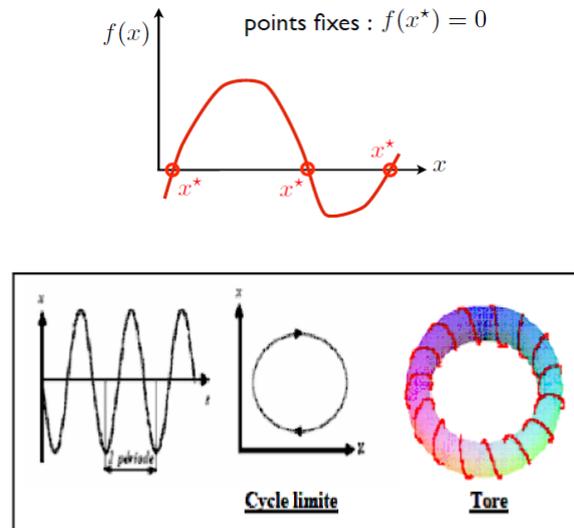


FIGURE 1.1 – Attracteurs réguliers

2- Attracteurs étranges (chaotiques) :

Ce sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques. Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :

- Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nulle.
- La dimension d de l'attracteur est fractale (non entier), pour un système continue autonome $2 < d < n$, avec n la dimension de l'espace des phases.
- Sensibilité au conditions initiales : Deux trajectoires initialement voisins finissent toujours par s'écartier l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique.

1.9 Les cycles limites

Définition 1.11. *Pour un système (1.1), on appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques.*

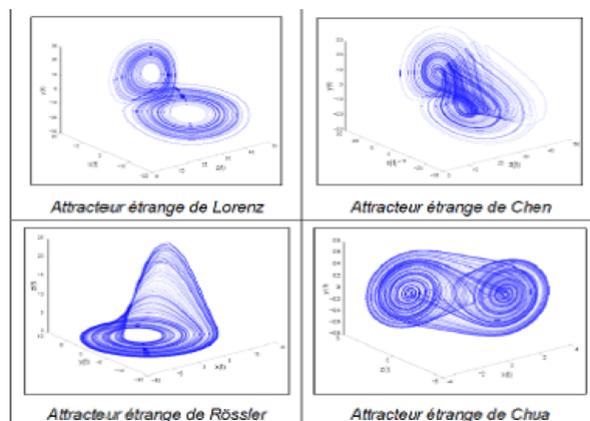


FIGURE 1.2 – Quelques exemples d'attracteurs étranges

1.10 Points fixes

Définition 1.12. *On appelle point fixe ou point d'équilibre ou point critique du système (1.1) une solution constante x^* vérifiant :*

$$f(x^*) = 0.$$

CHAPITRE 2

STABILITÉ ET BIFURCATIONS

Dans ce chapitre, nous présentons la notion de stabilité d'un système linéaire, et d'un système non linéaire avec deux méthodes, et nous traitons quelques types de bifurcation local (neoud-col, transcritique, fourche et verticale et Hopf).

2.1 Notions de stabilité

Considérons un système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle vectorielle non-linéaire de premier ordre :

$$x' = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

2.1.1 Stabilité au sens de Lyapunov

- Un point d'équilibre x^* de (2.1) est stable au sens de Lyapunov si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout x vérifiant :

$$\|x - x^*\| \leq r \text{ on a : } \|\phi_t(x) - x^*\| \leq \varepsilon, \quad \forall t > 0. \tag{*}$$

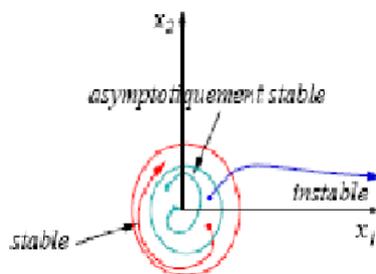


FIGURE 2.1 – Les types de stabilité

- Un point d'équilibre x^* de (2.1) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il est stable au sens de Lyapunov et de plus pour tout x suffisamment proche de x^* on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x^*.$$

- Un point d'équilibre x^* de (2.1) est exponentiellement stable au sens de Lyapunov s'il existe $a, b, r > 0$ tel que pour tout x vérifiant :

$$\|x - x^*\| \leq r \text{ on a : } \|\phi_t(x) - x^*\| < a \|x - x^*\| e^{-bt}, \quad \forall t > 0.$$

- Un point d'équilibre x^* de (2.1) est instable si la condition (*) n'est pas satisfaite. Et la figure (2.1) illustre les différentes types de stabilité.

2.1.2 Stabilité d'un système linéaire

Considérons le système linéaire suivant :

$$x' = Ax$$

Avec A une matrice $n \times n$. Pour calculer les valeurs propre de A , on résoudre l'équation :

$$|A - \lambda Id| = 0$$

- Si toutes les valeurs propres de A ont leur partie réelle strictement négative, alors les solutions vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

Et l'origine est un puits (asymptotiquement stable).

- Si toutes les valeurs propres de A ont leur partie réelle strictement positive, alors les solutions vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$$

Et l'origine est un source.

- S'il y a des valeurs propres à parties réelles négatives et des valeurs propres à parties réelles positives et pas de valeurs propres à parties réelles nulles, on a un point selle.

Définition 2.1. *Un point d'équilibre x^* du système (2.1) est dit hyperbolique si les valeurs propres de la matrice Jacobiënne :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

sont toutes à partie réelle non nulle.

Dans ce qui suit et par abus de langage, on parle de stabilité du système au lieu de parler de stabilité du point d'équilibre.

Remarque 2.1. *Dans le cas du plan, un point hyperbolique peut être un col, un noeud ou un foyer.*

Typologie des solutions des systèmes linéaires dans le plan (tr, det)

La typologie des solutions des systèmes linéaires planaires que nous avons établie à partir de la nature des valeurs propres de la matrice du système peut également se résumer dans un plan (tr, det).

Les valeurs propres de A sont des solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = 0$$

Avec :

$$\begin{cases} tr(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ det(A) &= \lambda_1 \lambda_2 \end{cases}$$

La nature des valeurs propres dépend de signe du discriminant :

$$\Delta = (tr(A))^2 - 4det(A).$$

Dans le plan (tr, det) l'équation $\Delta = 0$ est celle d'un parabole passant par l'origine :

$$det(A) = \frac{1}{4}(tr(A))^2.$$

Cette parabole divise le plan en deux grandes régions : au-dessus de la parabole ($\Delta < 0$), on trouve les portraits de phase des foyers et des centres ; en-dessous, ($\Delta > 0$) on trouve les noeuds et les points selle.

* Cas $\Delta = 0$:

On a alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, c'est-à-dire $det(A) = \lambda_0^2 > 0$. et $tr(A) = 2\lambda_0$ Par conséquent si la trace est positive ($\lambda_0 > 0$), on a une étoile ou un noeud dégénéré instable, si la trace est négative ($\lambda_0 < 0$), on a une étoile ou un noeud dégénéré stable.

* Cas $\Delta > 0$:

On a alors deux valeurs propres réelles distinctes. On est dans la région sous le

parabole qui se partage en trois zones :

- $\det(A) < 0$: λ_1 et λ_2 sont de signes opposés, l'origine est un point selle.
- $\det(A) > 0$ et $\text{tr}(A) > 0$: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, l'origine est un noeud instable.
- $\det(A) > 0$ et $\text{tr}(A) < 0$: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, l'origine est un noeud stable.

* Cas $\Delta < 0$:

On a alors deux valeurs propres complexes conjuguées, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ c'est-à-dire :

$$\det(A) = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(A) = 2\alpha.$$

On est dans la région au-dessus du parabole, qui se partage là encore en trois zones distinctes :

- $\text{tr}(A) < 0$: La partie réelle des valeurs propres est négative, l'origine est un foyer stable.
- $\text{tr}(A) > 0$: La partie réelle des valeurs propres est positive, l'origine est un foyer instable.
- $\text{tr}(A) = 0$: La partie réelle des valeurs propres est nulle, l'origine est un centre.

On résume les différents portraits de phase possibles dans la figure (2.2).

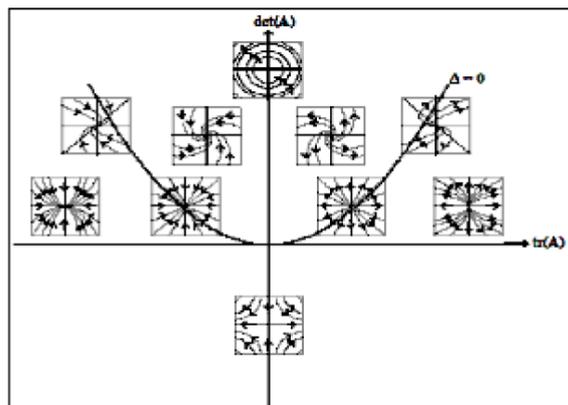


FIGURE 2.2 – Différents portraits de phase possibles du système $x' = Ax$

2.1.3 Stabilité d'un système non linéaire

Soit le système dynamique autonome $x' = f(x)$ avec f une fonction non linéaire. Pour étudier la stabilité on a deux méthodes :

1. Méthode indirecte basé sur la linéarisation.
2. Méthode directe basé sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov.

Méthode indirecte :

Le point x^* se ramène à l'origine $f(0) = 0$ par le changement de variable $X = x - x^*$ et le développement de f en série de Taylor au point $X = 0$ est donné par :

$$f(X) = Df(0)X + \frac{1}{2}D^2f(0)(X, X) + \dots$$

Pour étudier la stabilité d'un point d'équilibre x^* par la méthode indirecte de Lyapunov refaire le système linéaire :

$$x' = Ax \tag{2.2}$$

Avec :

$$A = Df(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobiéenne de f en x^* qui s'appelle le linéarisé du système au point d'équilibre 0. Si A admet n valeurs propres distincts $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, alors la solution de (2,2) est donnée par :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i$$

v_i le vecteur propre associée à λ_i , d'où le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Considérons le système (2.2) avec n valeurs propres distincts $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et $x^* = 0$ point d'équilibre alors :*

- Si $Re(\lambda_j) > 0$ pour $j \in 1, 2, \dots, n$ alors x^* est instable.

- Si $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ pour tout $j \in 1, 2, \dots, n$ alors x^* est asymptotiquement stable.
- si $\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$ avec un pôle de multiplicité 1 et tel que $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$ pour $j \in 1, 2, \dots, n$ alors x^* est stable.

Définition 2.2. Deux systèmes autonomes sont dits topologiquement équivalents dans le voisinage de l'origine, s'il ya un homéomorphisme H appliquant l'ouvert \mathbb{U} contenant l'origine à l'ouvert \mathbb{V} contenant l'origine qui transforme les trajectoires du premier système dans \mathbb{U} en les trajectoires du deuxième système dans \mathbb{V} et préserve leurs orientations via le temps.

Théorème 2.2. (Hartman-Grobman) : Soit \mathbb{U} un ouvert de \mathbb{R}^n contenant l'origine, $f \in C^1(\mathbb{U})$, ϕ_t le flot du système non linéaire (2.1). Supposons que $f(0) = 0$ et que la matrice $A = Df(0)$ n'a pas de valeurs propres à partie réelle nulle. Alors il existe un homéomorphisme H de l'ouvert \mathbb{U} contenant l'origine vers l'ouvert \mathbb{V} contenant l'origine telle que pour tout $x_0 \in \mathbb{U}$ il ya un intervalle ouvert $\mathbb{I}_0 \in \mathbb{R}$ contenant 0 tel que pour tout $x_0 \in \mathbb{U}$ et $t \in \mathbb{I}_0$

$$H \circ \phi_t(x_0) = \exp(At)H(x_0).$$

Méthode directe :

Considérons le système non linéaire (2.1). Lorsque le point d'équilibre x^* est hyperbolique, la stabilité est déterminée par le signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$. La stabilité de point d'équilibre non hyperbolique est plus difficile à déterminer car dans ce cas le théorème de Hartman Grobman ne s'applique pas. Une méthode utile pour déterminer la stabilité dans ce cas est la méthode directe de Lyapunov qui consiste à trouver une fonction de teste appelé la fonction de Lyapunov.

Définition 2.3. Si $f \in C^1(\mathbb{U})$, $V \in C^1(\mathbb{U})$ et ϕ_t le flot de (2.1) alors pour $x \in \mathbb{U}$ la dérivée de la fonction $V(x)$ sur $\phi_t(x)$ est :

$$V'(x) = \frac{d}{dt}V(\phi_t(x)) = D(V(x))f(x).$$

Théorème 2.3. Soit \mathbb{U} un ouvert de \mathbb{R}^n contenant x^* et supposons que $f \in C^1(\mathbb{U})$ avec

$f(x^*) = 0$, supposons aussi qu'il existe une fonction réelle $V \in C^1(U)$ satisfait $V(x^*) = 0$ et $V(x) > 0$, si $x \neq x^*$ alors :

- Si $V'(x) \leq 0$ pour tout $x \in U$ alors x^* est stable.
- Si $V'(x) < 0$ pour tout $x \in U - \{x^*\}$ alors x^* est asymptotiquement stable.
- Si $V'(x) > 0$ pour tout $x \in U - \{x^*\}$ alors x^* est instable.

Théorème 2.4. *Si le point d'équilibre x^* admet une fonction de Lyapunov, alors c'est un point d'équilibre stable. Si le point d'équilibre x^* admet une fonction de Lyapunov stricte, alors c'est un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

Quelques remarques au sujet des fonctions de Lyapunov :

- On note souvent V' pour $\frac{d}{dt}V(\phi_t(x))$.
- On peut utiliser une fonction de Lyapunov sans résoudre le système.
- Il n'y a aucune méthode générale pour trouver une fonction de Lyapunov.

Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.

Critère de Routh-Hurwitz

Criterion 2.1. *(Routh-Hurwitz.)*

Soit le polynôme :

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Où les coefficients a_i , $i=1,2,3,\dots,n$ sont des constantes réelles.

On définit les n matrices d'Hurwitz :

$$\begin{aligned}
 H_1 &= (a_1) \\
 H_2 &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \\
 &\vdots \\
 H_n &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Où, $a_i = 0$ si $i > n$.

Tous les racines du polynôme ont la partie réelle négative si et seulement si les déterminants de toutes les matrices de Hurwitz sont positives :

$$\det H_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Le critère de Routh-Hurwitz pour $n=3$ devient $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ et $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

2.1.4 Stabilité structurelle

Un système dynamique (champ de vecteurs ou application) est structurellement stable si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle.

Une manière de comprendre la stabilité structurelle est la suivante : le système est structurellement stable si en déformant légèrement par un homéomorphisme, sans en altérer ainsi les propriétés fondamentales, le domaine où s'accomplit le mouvement, on peut modifier, un tantinet également, les équations du mouvement de sorte que l'allure générale de l'ensemble des trajectoires, bien que peut-être localement différentes dans leur forme mais non

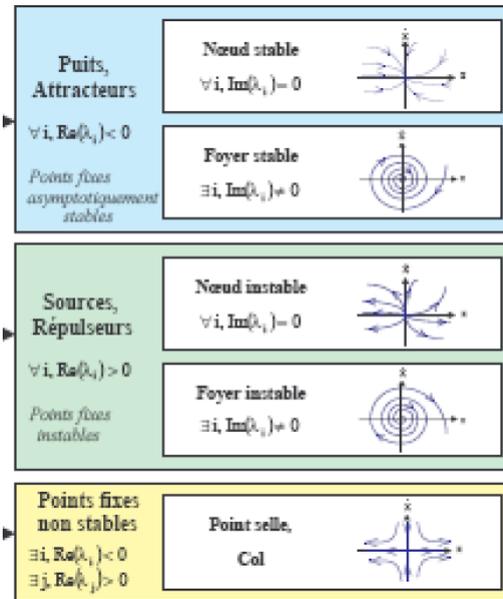


FIGURE 2.3 – Points hyperboliques $\forall i, \text{Re}(\lambda_i) \neq 0$

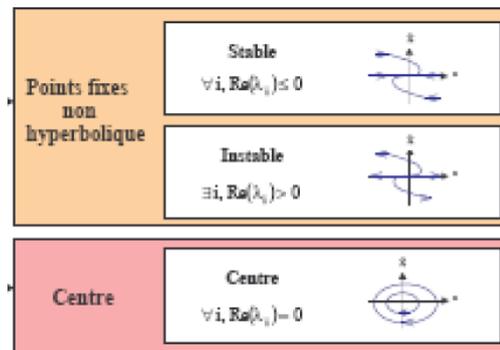


FIGURE 2.4 – Points non hyperboliques $\exists i, \text{Re}(\lambda_i) = 0$

point dans leurs propriétés essentielles, reste inchangée. La signification physique de cette définition est très intéressante : si, par exemple, les équations du mouvement dépendent de paramètres difficiles à mesurer mais dont les variations modifient peu les équations, alors les mouvements eux-mêmes ne sont pas profondément perturbés par ces variations. Cette espérance en cette forme de stabilité a été longtemps partagée, notamment par les esprits physiciens, cependant, la propriété d'être structurellement stable est rare, n'est pas vérifiée pour presque tout système dynamique : on dit que cette propriété n'est pas générique, elle manque de stabilité.

Définition 2.4. *Un système dynamique (champ de vecteurs ou application) est structurellement stable ou robuste si les systèmes suffisamment "proches" présentent un même comportement dynamique.*

Définition 2.5 (Stabilité structurelle). *Une application f est structurellement stable s'il existe un voisinage, \mathbb{V} de f , tel que pour toute application $g \in \mathbb{V}$, il existe un homéomorphisme h tel que :*

$$f = h^{-1} \circ g \circ h$$

2.2 Bifurcation

Le terme "bifurcation" est utilisé pour désigner dans un sens large, toute modification qualitative du comportement d'un système dynamique suit à la variation de l'un des paramètres dont dépend le système étudié. Il existe plusieurs types de bifurcations, parmi les quelles on peut citer :

- Bifurcation noeud-col.
- Bifurcation transcritique.
- Bifurcation fourche (sou-critique et sur-critique).
- Bifurcation verticale.
- Bifurcation de Hopf (super-critique et sous-critique). Dans la suite, chaque bifurcation sera présentée graphiquement. Les conventions des représentations graphiques seront dans la figure (2.5).

2.2.1 Bifurcation noeud-col (ou pli)

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} x' = x^2 + \mu \\ y' = -y \end{cases} \quad (2.3)$$

Où μ est un paramètre, qui peut être positif, négatif ou nul.

- Lorsque $\mu < 0$:

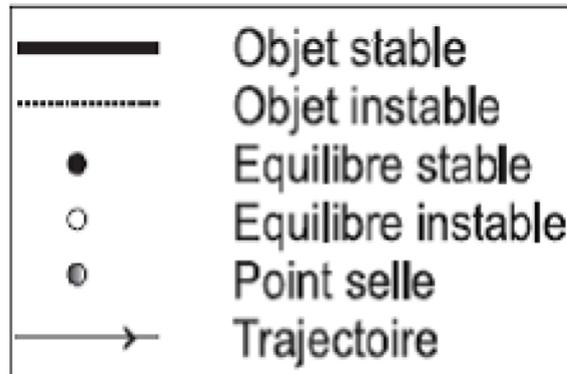


FIGURE 2.5 – Conventions graphiques

Dans ce cas, le système admet deux points d'équilibre de coordonnées $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$ et $(\sqrt{|\mu|}, 0)$. Afin de déterminer la nature de chacun de ces points d'équilibre, calculons la matrice Jacobienne qui, de manière générale, s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour le premier point d'équilibre $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$, A est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2\sqrt{|\mu|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe négatif : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2\sqrt{|\mu|}$.

Par conséquent le point $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$ est un noeud asymptotiquement stable.

Pour le second point d'équilibre $(\sqrt{|\mu|}, 0)$, la matrice A devient :

$$A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{|\mu|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe opposé : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2\sqrt{|\mu|}$.

Par conséquent le point $(\sqrt{|\mu|}, 0)$ est un point selle (col).

- Lorsque $\mu = 0$:

Dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ y' = -y \end{cases} \quad (2.4)$$

qui admet l'origine comme unique point d'équilibre. Il s'agit d'un point non hyperbolique car la matrice Jacobienne est la suivante :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système est découpé en x et en y . L'étude de la première équation du système (2.4) montre que $x = 0$ est un point d'équilibre non hyperbolique correspondant à un shunt positif. La seconde équation indique que $y = 0$ est point d'équilibre asymptotiquement stable de la seconde équation.

- Lorsque $\mu > 0$,

Dans ce cas, le système devient :

$$\begin{cases} x' = x^2 + \mu \\ y' = -y \end{cases} \quad (2.5)$$

Il n'admet aucun point d'équilibre. La variable x est toujours croissante. La variable y est croissante pour les $y < 0$ et décroissante pour les $y > 0$.

Cette bifurcation est appelée une 'bifurcation selle-noeud' et correspond à l'apparition simultanée de deux points d'équilibre, l'un instable (un point selle) et l'autre asymptotiquement stable (un noeud). D'une manière générale, cette bifurcation se produit lorsque deux isoclines de natures différentes, c'est-à-dire l'une verticale $x' = 0$ et l'autre horizontale $y' = 0$, initialement disjointes, deviennent tangentes (à la bifurcation) et se coupent ensuite en deux points d'équilibre qui apparaissent. La figure (2.6) représente le diagramme de bifurcation noeud-col.

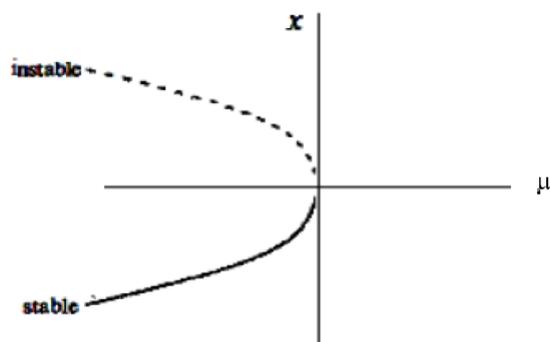


FIGURE 2.6 – Diagramme de la bifurcation noeud-col

2.2.2 Bifurcation transcritique

Il y a certaines situations scientifiques où un point fixe doit exister pour toutes les valeurs d'un paramètre et ne peut jamais être détruite. Par exemple, dans l'équation logistique et d'autres modèles simples pour la croissance d'une espèce unique, zéro est un point fixe, quelle que soit la valeur de la vitesse de croissance. Cependant, un tel point fixe peut changer sa stabilité quand le paramètre est modifié. La bifurcation transcritique est le mécanisme standard pour de tels changements dans la stabilité. La forme normale pour une bifurcation transcritique est :

$$x' = \mu x - x^2$$

Cela ressemble à une équation logistique, mais maintenant nous permettons x et μ à être positif ou négatif.

- Pour $\mu < 0$, il y a un point fixe instable $x^* = \mu$ et un point fixe stable $x^* = 0$.
- Lorsque μ augmente, le point fixe instable s'approche de l'origine, et entre en fusion avec elle lorsque $\mu = 0$.
- Enfin, lorsque $\mu > 0$, l'origine est devenue instable, et $x^* = \mu$ est maintenant stable.

La figure (2.7) représente le diagramme de bifurcation transcritique. Comme sur la figure, le paramètre μ est considéré comme la variable indépendante, et les points fixes $x^* = 0$ et $x^* = \mu$ sont présentés comme variables dépendantes.

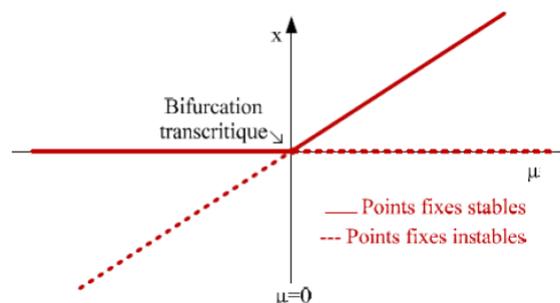


FIGURE 2.7 – Diagramme de bifurcation transcritique

Remarque 2.2. *La différence importante entre la bifurcation noeud-col et la bifurcation transcritique est que : dans le cas transcritique, les deux points fixes ne disparaissent pas après la bifurcation, il change simplement de stabilité.*

2.2.3 Bifurcation fourche (pitchfork)

On étudie ici la bifurcation des systèmes sous la forme :

$$\begin{cases} x' = x(-\mu - x^2) \\ y' = -y \end{cases} \quad (2.6)$$

On distingue trois cas selon le signe du paramètre μ :

- Cas $\mu < 0$:

Dans ce cas, le système admet trois points d'équilibre, l'origine et deux autres points symétriques de coordonnées $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$ et $(\sqrt{|\mu|}, 0)$. Afin de déterminer la nature de chacun de ces points d'équilibre, calculons la matrice Jacobienne qui s'écrit de manière générale :

$$A = \begin{pmatrix} -\mu - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre origine, cette matrice s'écrit :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} |\mu| & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe opposé : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = |\mu|$. Par conséquent l'origine est un point selle (instable). Aux deux autres points d'équilibre $(-\sqrt{|\mu|}, 0)$ et $(\sqrt{|\mu|}, 0)$, la matrice jacobienne prend la même forme :

$$A^* = \begin{pmatrix} -2|\mu| & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles et négatives $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2|\mu|$. Ainsi, ces deux points d'équilibre sont des noeuds asymptotiquement stables. Les isoclines verticales ($x' = 0$) correspondent à trois droites : la droite $x = 0$ et les deux droites $x = \pm\sqrt{|\mu|}$. L'isocline horizontale ($y' = 0$) est la droite $y = 0$. Le portrait de phase peut alors être construit (Figure 2.8).

Ce portrait de phase montre un point selle fixé à l'origine entouré de deux noeuds asymptotiquement stables, symétriques autour de l'origine et qui s'en éloignent lorsque $|\mu|$ augmente.

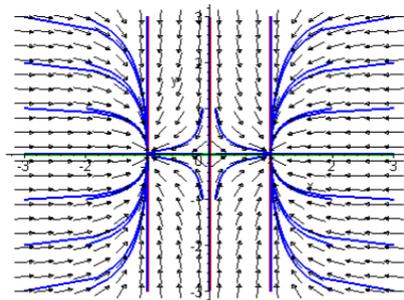


FIGURE 2.8 – Portrait de phase de la bifurcation fourche pour $\mu < 0$.

- Cas $\mu = 0$:

Dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{cases} x' = -x^3 \\ y' = -y \end{cases} \quad (2.7)$$

Ce système admet l'origine comme point d'équilibre unique ; il est non hyperbolique car la matrice jacobienne en ce point s'écrit :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la stabilité de ce point d'équilibre, considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

Calculons V' . Il vient :

$$V'(x, y) = 2xx' + 2yy' = -2(x^4 + y^2)$$

Cette expression est strictement négative sur l'ensemble du plan, à l'exception de l'origine. Par conséquent, la fonction $V(x, y)$ est une fonction de Lyapunov forte pour le système (2.5). Par application du théorème de Lyapunov pour fonction forte, nous pouvons conclure que l'origine est asymptotiquement stable. Figure (2.9).

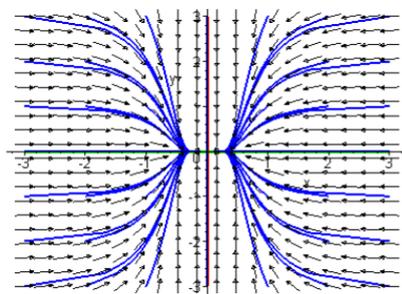


FIGURE 2.9 – Portrait de phase de la bifurcation fourche pour $\mu = 0$

- Cas $\mu > 0$:

Dans ce cas, le système dynamique devient :

$$\begin{cases} x' = x(-\mu - x^2) \\ y' = -y \end{cases} \quad (2.8)$$

Il n'admet qu'un unique point d'équilibre, l'origine. La matrice jacobienne en ce point s'écrit :

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles et négatives $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -\mu$. L'origine est donc un noeud asymptotiquement stable la figure (2.10).

En résumé, à la valeur du paramètre $\mu = 0$, le système voit le nombre de points

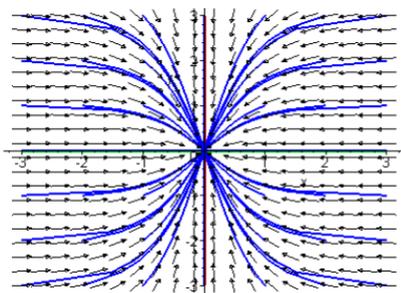


FIGURE 2.10 – Portrait de phase de la bifurcation fourche pour $\mu > 0$

d'équilibre passer de trois à un. Pour $\mu < 0$, nous avons un point selle entouré de deux noeuds asymptotiquement stables. Pour $\mu \geq 0$, le système n'admet qu'un seul point d'équilibre asymptotiquement stable, l'origine.

Le diagramme de bifurcation est présenté sur la figure (2,11). Il s'agit là de la bifurcation fourche super-critique. Le système suivant :

$$\begin{cases} x' = x(-\mu + x^2) \\ y' = -y \end{cases} \quad (2.9)$$

correspond par contre à une bifurcation fourche sous-critique dont le diagramme

de bifurcation est donné sur la Figure (2,12).

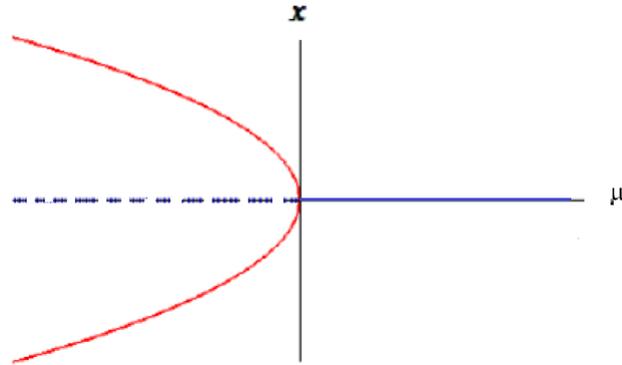


FIGURE 2.11 – Diagramme de bifurcation fourche super-critique

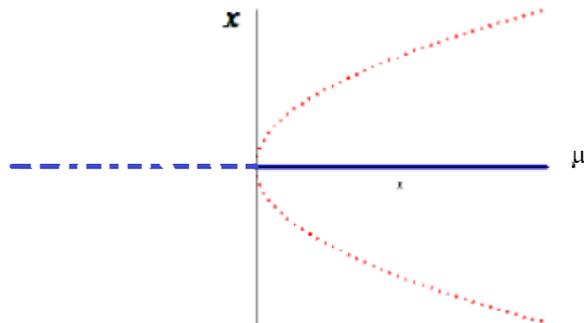


FIGURE 2.12 – Diagramme de bifurcation fourche sous-critique

2.2.4 Bifurcation verticale

Soit le système dynamique linéaire suivant :

$$\begin{cases} x' = \mu x + y \\ y' = -x + \mu y \end{cases} \quad (2.10)$$

On remarque en premier lieu que le système (2.10) est linéaire, ce qui sera le cas pour toutes les bifurcations verticales. Le cas non linéaire sera traité ultérieurement. Nous pouvons le réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff X' = AX \quad (2.11)$$

Sous réserve que le déterminant de la matrice A soit non nul, ce système admet un point d'équilibre unique à l'origine. La dynamique du système (2.11) dépend de la trace et du déterminant de la matrice A. Selon le signe de μ , trois cas doivent être considérés.

- Cas $\mu < 0$: Dans ce cas, la trace de la matrice est égale à $-2 |\mu|$; elle est négative et le déterminant $\mu^2 + 1$ est strictement positif. Ceci permet d'affirmer que l'origine est asymptotiquement stable et qu'elle correspond à un foyer. En effet, $\Delta = (-2 |\mu|)^2 - 4(\mu^2 + 1) = -4 < 0$.
- Cas $\mu = 0$: Dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

La forme du système (2.12) correspond au représentant de la classe d'équivalence topologique des centres. Ainsi, l'origine correspond à des centres car le modèle est linéaire.

- Cas $\mu > 0$: Dans ce cas, la trace de la matrice vaut 2μ ; elle est cette fois strictement positive. Le déterminant reste inchangé et strictement positif. L'origine

est donc un foyer instable car le discriminant de l'équation caractéristique reste strictement négatif.

Cette bifurcation est appelée verticale. A la bifurcation, pour la valeur du paramètre $\mu = 0$, le point d'équilibre unique à l'origine change de nature. Pour $\mu < 0$, nous avons un foyer asymptotiquement stable. Pour $\mu > 0$, l'origine devient un foyer instable. A la bifurcation, $\mu = 0$, l'origine correspond à des centres. Cette bifurcation correspond à un système linéaire dont le déterminant est toujours positif et dont la trace change de signe

Une autre manière de considérer cette bifurcation est de calculer les valeurs propres de la matrices A qui sont complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$. La partie réelle des valeurs propres est $Re(\lambda_{1,2}) = \mu$ et la partie imaginaire est $Im(\lambda_{1,2}) = \pm 1$. En d'autres termes, les valeurs propres traversent l'axe imaginaire à la bifurcation. Ainsi, lorsque $\mu = 0$, la partie réelle des valeurs propres s'annule donnant des centres et change de signe avec le paramètre μ , ce qui correspond au passage d'un foyer asymptotiquement stable ($\mu < 0$) à un foyer instable ($\mu > 0$). Le diagramme de bifurcation est présenté sur la figure (2.13). La barre verticale

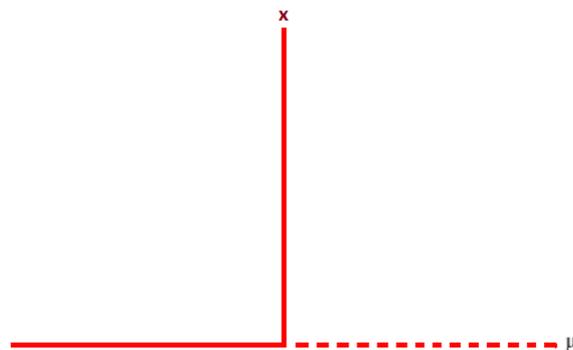


FIGURE 2.13 – Diagramme de la bifurcation verticale.

en $\mu = 0$ signifie que le point d'équilibre peut prendre n'importe quelle valeur, on aura toujours des centres.

La bifurcation verticale correspond à un système linéaire dont la trace de la matrice change de signe à déterminant positif. Nous allons maintenant étudier le

cas d'un système non linéaire dont la partie linéaire se comporte de la même manière que précédemment. Cette situation correspond à la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf.

2.2.5 Bifurcation de Hopf

Bifurcation super-critique de Hopf

Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Partie linéaire}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x(x^2 + y^2) \\ -y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{Partie non linéaire}} \quad (2.13)$$

Ce système admet un point d'équilibre unique à l'origine. Il est écrit sous la forme d'une somme de deux termes : une partie linéaire (identique au système linéaire de la bifurcation verticale) et une partie non linéaire. La partie linéaire est donc caractérisée par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

La trace de la matrice est égale à 2μ , le déterminant à $\mu^2 + 1$ et le discriminant de l'équation caractéristique vaut -4 .

Comme nous l'avons vu précédemment, les valeurs propres de la matrice A sont complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$. La partie réelle des valeurs propres est $Re(\lambda_{1,2}) = \mu$ et la partie imaginaire est $Im(\lambda_{1,2}) = \pm 1$. Lorsque le paramètre μ change de signe, l'origine passe de foyer asymptotiquement stable à foyer instable. Le système linéarisé prévoit des centres lorsque le paramètre μ est égal à zéro. Du fait de la non linéarité du système, nous allons voir que ces centres ne sont en fait pas conservés.

Pour déterminer la stabilité de l'origine, considérons la fonction définie positive

suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

La dérivée V' s'écrit :

$$V'(x, y) = xx' + yy' = -(x^2 + y^2)^2$$

V' est strictement négative sur l'ensemble du plan à l'exception de l'origine. Par conséquent, la fonction $V(x, y)$ est une fonction de Lyapunov forte pour le système (2.13). Ainsi, les centres prévus par la linéarisation ne sont pas conservés et par le théorème de Lyapunov pour fonctions fortes, nous pouvons conclure que l'origine est asymptotiquement stable lorsque $\mu = 0$. Par ailleurs, le domaine d'attraction de l'origine est \mathbb{R}^2 .

Afin de préciser l'allure du portrait de phase, effectuons le changement en coordonnées polaires (r, θ) . Les coordonnées polaires sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{cases} \quad (2.14)$$

Ces relations permettent d'effectuer le passage inverse c'est-à-dire des coordonnées polaires vers les coordonnées rectangulaires :

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{cases} \quad (2.15)$$

Dérivons la première des équations (2.14) par rapport au temps, il vient :

$$rr' = xx' + yy' = r^2(\mu - r^2)$$

Dérivons maintenant la seconde équation par rapport au temps :

$$\frac{d \tan \theta}{dt} = \frac{\theta'}{\cos^2 \theta} = \frac{-r^2}{r^2 \cos^2 \theta}$$

Finalement, en coordonnées polaires, le système s'écrit sous la forme des deux équations découplées suivantes :

$$\begin{cases} r' &= r(\mu - r^2) \\ \theta' &= -1 \end{cases} \quad (2.16)$$

La seconde équation admet la solution suivante :

$$\theta(t) = -t + \theta(0)$$

Où $\theta(0)$ est la valeur de l'angle à $t=0$. Cette équation montre que l'angle varie avec une vitesse angulaire constante $w = -1$. Les trajectoires vont tourner autour de l'origine.

La première équation gouverne la variation de la distance à l'origine. Selon le signe du paramètre μ , le nombre de points d'équilibre varie :

- $\mu \leq 0$:

L'équation admet un seul point d'équilibre $r=0$ qui est asymptotiquement stable.

- $\mu > 0$:

L'équation (2.14) admet deux points d'équilibre positifs $r=0$ et $r = \sqrt{\mu}$. Le premier est instable et le second est asymptotiquement stable. Le second point d'équilibre de l'équation (2.16) correspond donc à un cercle de rayon $r = \sqrt{\mu}$ qui est une trajectoire fermée isolée parcourue à la vitesse angulaire $w=-1$. Il s'agit d'un cycle limite asymptotiquement stable.

En résumé, nous pouvons conclure que lorsque :

- $\mu < 0$: l'origine est point d'équilibre unique et est un foyer stable.
- $\mu = 0$: l'origine est le point d'équilibre unique et est asymptotiquement stable.
- $\mu > 0$: l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite asymptotiquement stable de rayon $r = \sqrt{\mu}$.

Nous pouvons maintenant tracer le diagramme de bifurcation en faisant apparaître les points d'équilibre, leur nature mais aussi les cycles limites dont l'amplitude

est représentée en ordonnée Figure (2,14). On utilisera la même notation pour les cycles limites que pour les points d'équilibre : stabilité asymptotique en trait plein et instabilité en pointillés.

Cette bifurcation s'appelle une bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf. A la bifur-

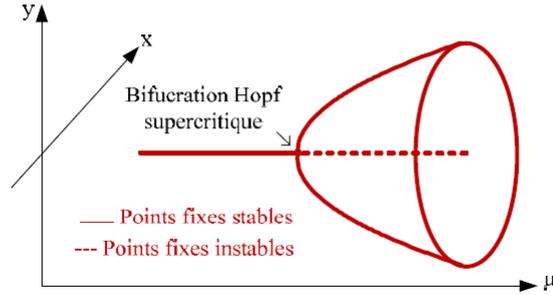


FIGURE 2.14 – Diagramme de la bifurcation de Hopf super-critique.

cation, le point d'équilibre à l'origine devient instable et s'entoure d'un cycle limite stable dont, l'amplitude (le rayon) augmente avec la racine carrée du paramètre de bifurcation. Lorsque le cycle limite créé à la bifurcation est asymptotiquement stable, on parle de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf super-critique.

Bifurcation sous-critique de Hopf

On considère cette fois le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}}_{\text{Partie linéaire}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{Partie non linéaire}} \quad (2.17)$$

La partie linéaire de ce système est identique au cas précédent avec les mêmes conclusions. Cependant, à la bifurcation, la dérivée V' s'écrit maintenant de la manière suivante :

$$V'(x, y) = xx' + yy' = (x^2 + y^2)^2$$

V' est strictement positive sur l'ensemble du plan à l'exception de l'origine. Ainsi, par le théorème de Lyapunov, l'origine est cette fois instable lorsque $\mu = 0$.

Le passage en coordonnées polaires conduit au système suivant :

$$\begin{cases} r' &= r(\mu + r^2) \\ \theta' &= -1 \end{cases} \quad (2.18)$$

L'angle varie avec une vitesse angulaire constante $w = -1$. Selon le signe du paramètre μ , le nombre de points d'équilibre de l'équation (2.18) varie :

- $\mu < 0$:

L'équation admet deux points d'équilibre positifs $r=0$ et $r = \sqrt{|\mu|}$. Le premier point d'équilibre est asymptotiquement stable et le second est instable. Celui-ci correspond à un cercle de rayon $r = \sqrt{|\mu|}$ qui est une trajectoire fermée isolée parcourue à la vitesse angulaire $w = -1$ et entourant un foyer asymptotiquement stable. Il s'agit donc d'un cycle limite instable.

- $\mu \geq 0$:

L'équation admet un seul point d'équilibre $r = 0$ qui est instable.

En résumé, nous pouvons conclure que lorsque :

- $\mu < 0$:

l'origine est point d'équilibre unique et est un foyer stable entouré d'un cycle limite instable de rayon $r = \sqrt{|\mu|}$.

- $\mu = 0$:

l'origine est le point d'équilibre unique et est instable.

- $\mu > 0$:

l'origine est un foyer stable.

Nous pouvons maintenant tracer le diagramme de bifurcation Figure (2,15).

Cette bifurcation s'appelle la bifurcation sous-critique de Hopf. Lorsque le cycle limite créé à la bifurcation est instable, on parle de bifurcation de Hopf sous-critique. Dans les deux exemples précédents, nous avons utilisé le système sous la forme générique. Lors de l'étude d'un système non linéaire quelconque, le système n'est pas nécessairement sous cette forme initialement. Cependant, après quelques changements de variables, il est possible de le mettre sous une forme adaptée permettant

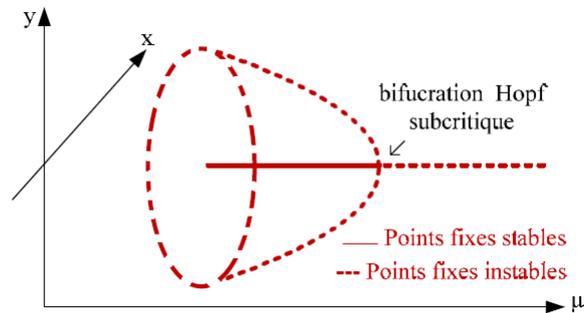


FIGURE 2.15 – Diagramme de la bifurcation de Hopf sous-critique.

d'appliquer un théorème pour prévoir l'existence de cycle limite.

La valeur numérique du paramètre de bifurcation de Hopf

Soit le système dynamique suivent :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu)$$

qui a un point fixe $x = x^*(\mu_r)$ et que sa matrice jacobienne possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm iw(\mu)$ telle que :
pour une certaine valeur d'un paramètre $\mu = \mu_r$,

$$\alpha(\mu_r) = 0 \text{ et } \left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_r} \neq 0$$

les $n - 2$ autres valeurs propres évaluées en μ aient leur partie réelle strictement négative. Si ces hypothèses sont satisfaites alors $(x^*(\mu_r), \mu_r)$ est un point de bifurcation de Hopf de l'état d'équilibre $x^*(\mu_r)$ vers un cycle limite.

CHAPITRE 3

SYSTÈMES CHAOTIQUES

Depuis longtemps, le terme "chaos" était synonyme de désordre et de confusion. Il s'opposait à l'ordre et devait être évité. La science était caractérisée par le déterminisme, la prévisibilité et la réversibilité. Poincaré fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos. Il découvrit la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers le problème de l'interaction de trois corps célestes. Le terme chaos définit un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais qui est très sensible aux conditions initiales, et imprédictible à long terme. Des chercheurs des domaines divers ont alors commencé à s'intéresser à ce comportement. Le chaos a ainsi trouvé de nombreuses applications dans les domaines tant physiques que biologique, chimique ou économique.

Le chaos tel que le scientifique le comprend ne signifie pas l'absence d'ordre ; il se rattache plutôt à une notion d'imprévisibilité, d'impossibilité de prévoir une évolution à long terme du fait que l'état final dépend de manière sensible de l'état initial.

On appelle donc un système dynamique chaotique, un système qui dépend d'un ou de plusieurs paramètres et qui est caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Il n'est pas déterminé ou modélisé par des systèmes d'équations

linéaires ni par les lois de la mécanique classique.

Une manière rapide de représenter la transition vers le chaos est le diagramme de bifurcations.

Les changements du comportement dynamique du système, ou bifurcations, peuvent être donc observés en fonction du paramètre dit de bifurcation.

3.1 Propriétés du chaos

Les définitions et propriétés suivantes permettent d'analyser qualitativement les points marquants des systèmes chaotiques.

La non-linéarité :

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique.

La notion de système dynamique est relative à tous les systèmes dont l'évolution dépend du temps. En général, pour prévoir des phénomènes réels générés par ces systèmes, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire.

Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause.

Le déterminisme :

Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes.

Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer), son évolution au cours du temps : la connaissance exacte de l'état du système à un instant donné, (l'instant initial) permet le calcul précis de l'état de système à n'importe quel autre moment.

La Sensibilité aux conditions initiales :

Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles.

Une autre propriété des phénomènes chaotiques est qu'ils sont très sensibles aux perturbations. L'un des premiers chercheurs à s'en être aperçu fut Edward Lorenz qui s'intéressait à la météorologie et par conséquent aux mouvements turbulents d'un fluide comme l'atmosphère. Lorenz venait de découvrir que dans des systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des trajectoires totalement différentes. Il illustre ce fait par l'effet papillon. Il est clair que la moindre erreur ou imprécision sur la condition initiale ne permet pas de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et en conséquence de faire une prédiction sur l'évolution à long terme du système, une des propriétés essentielles du chaos est donc bien cette sensibilité aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant des taux de divergence des trajectoires. En effet deux orbites chaotiques initiées avec des conditions initiales très voisines vont diverger et s'écarter l'une de l'autre très rapidement. La vitesse de divergence de deux orbites initialement voisines peut être étudiée à partir des exposants de Lyapunov afin de caractériser la nature du chaos observé.

3.2 Attracteurs chaotiques

L'attracteur chaotique (ou étrange) est une forme géométrique complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.

Définition 3.1. *Soit A un ensemble de \mathbb{R}^n ; A est un attracteur, alors A est appelé attracteur étrange si il est chaotique (l'attracteur vérifie la notion de sensibilité aux conditions initiales), Un lecteur intéressé pourra consulter.*

Définition 3.2. *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange ou chaotique pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage V de A ; c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point*

et contenue dans V vérifiant les propriétés suivantes :

- 1- *Attraction* : V est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans V , est entièrement contenue dans V . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.
- 2- Il est contenu dans un espace fini. Son volume est nul. sa dimension est fractale (non entière).
- 3- Presque toute trajectoire sur l'attracteur à la propriété de ne jamais passer deux fois sur le même point, chaque trajectoire est presque sûrement apériodique.
- 4- Deux trajectoires proches à l'instant t voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle (sensibilité aux conditions initiales).

Les différents types d'attracteurs chaotiques

Nous donnons une classification commune d'attracteurs chaotiques des systèmes dynamiques. En règle générale, à l'heure actuelle, les attracteurs chaotiques peuvent être classés en trois types (catégories) principales :

1- Attracteur hyperbolique :

Les attracteurs hyperboliques sont des ensembles-limites pour lesquelles "l'axiome A" de Smale (La condition essentielle qui caractérise la stabilité structurelle est appelé "Axiome A") est satisfait, il sont structurellement stables. Les points périodiques et les orbites homoclines sont denses et sont du type selle, les ont la même dimension, et les variétés stables et instables se coupent transversalement. Cette définition est le résultat d'une fondation axiomatique rigoureuse qui exploite la notion d'hyperbolicité. L'attracteur Plykin est l'exemple d'un attracteur hyperbolique d'un difféomorphisme sur une sphère à dimensions deux, ce qui a été suggéré par Plykin (Figure 3.1). Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à la classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques. Les attracteurs étranges hyperboliques sont robustes (structurellement stable). Comme un autre exemple physique du chaos hyperbolique on cite l'attracteur de Smale-Williams.

2- Attracteur de type Lorenz :

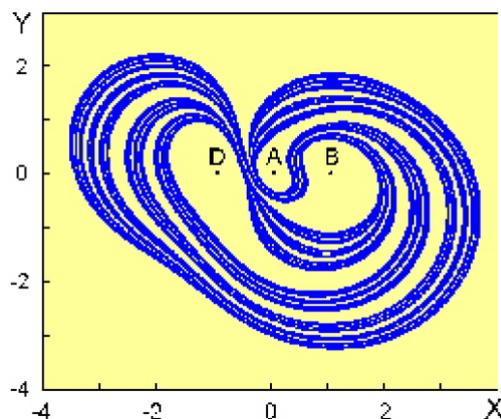


FIGURE 3.1 – Attracteur de Plykin

Les attracteurs de types Lorenz ne sont pas structurellement stables, mais leur orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stables (hyperboliques), et aucun orbites périodiques instables apparaissent sous les petits variations des paramètres, comme par exemple dans le système de Lorenz lui-même.

3- Quasi-attracteurs :

Les quasi-attracteurs sont des ensembles-limites renfermant des orbites périodiques de différents types topologiques et des orbites structurellement instables. Par exemple, les attracteurs générés par le circuit de Chua. Notez que ce type est plus complexe que les deux précédents-attracteurs et donc ne convient pas pour certaines applications potentielles de chaos, telle que la sécurité des communications et le masquage du signal. Pour plus d'informations sur ces types d'attracteurs chaotiques.

3.3 Quelques exemples célèbres des premiers attracteurs chaotiques

L'attracteur de Lorenz

L'attracteur de E. Lorenz signe, en 1963, les débuts de la météorologie moderne : c'est en se posant la question de savoir comment prévoir le temps à l'avance que E. Lorenz a abouti à son système différentiel et à son attracteur étrange. Il s'agit de modéliser certains mouvements atmosphériques : on considère pour cela le mouvement d'un fluide entre deux plaques horizontales portées à des températures légèrement différentes (la plaque la plus chaude en bas). Pour une différentiel de température suffisante, il apparaît alors des tourbillons convectifs qui vérifient les équations de la convection de Rayleigh - Bénard dont la formulation est classique en mécanique des fluides : on obtient un système de trois équations aux dérivées partielles. Avec quelques hypothèses simplificatrices, on peut associer à ce système aux dérivées partielles un système différentiel ordinaire de la forme (a, b, c étant des paramètres réels, b décrivant la différence des températures des deux plaques) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = bx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - cz \end{cases} \quad (3.1)$$

(on observera que les seconds membres de ces équations sont assez simples mais cependant non linéaires). On effectue une résolution numérique de ces équations : pour b supérieur à une certaine valeur critique, on obtient un comportement chaotique pour les trajectoires de ce système (l'attracteur étrange de Lorenz) ; simulez une vue en 3 dimensions de l'attracteur de E. Lorenz. Historiquement, c'est en voulant vérifier ses calculs que Lorenz s'est aperçu que des conditions initiales voisines pouvaient aboutir à des résultats assez différents (sensibilité aux conditions initiales) et qu'il a mis ainsi en évidence le comportement chaotique de son modèle.

L'attracteur a la forme d'un papillon en vol, pour laquelle les deux "yeux" des ailes seraient remplacés par vide Figure (3,2).

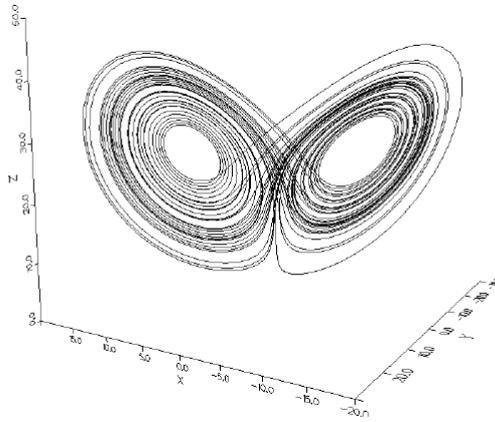


FIGURE 3.2 – Attracteur de Lorenz : $(a, b, c) = (10, 28, \frac{8}{3})$

L'attracteur de Rössler

L'attracteur de O. Rössler (1974) issu de travaux en cinétique chimique, correspond lui aussi à une formulation dans le cadre de la mécanique des fluides ; il est associé au système différentiel (a, b, c étant des paramètres réels) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + xz - cz \end{cases} \quad (3.2)$$

(même remarque sur la forme simple mais non linéaire des seconds membres des équations). Pour certaines valeurs des paramètres la résolution numérique du système fait apparaître un comportement chaotique des trajectoires dans l'espace des phases (l'attracteur étrange de Rössler). Si les deux systèmes dynamiques précédents étaient formés d'équations différentielles ordinaires dans \mathbb{R}^3 (le paramètre évolutif étant donc le réel t représentant le temps) résultant en fait d'une troncature et simplification d'équations aux dérivées partielles de type Navier-Stokes, système suivant est associé à une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , qui définit en fait un

système dynamique discret (le paramètre évolutif est un entier) de type itération dans \mathbb{R}^2 Figure (3,3).

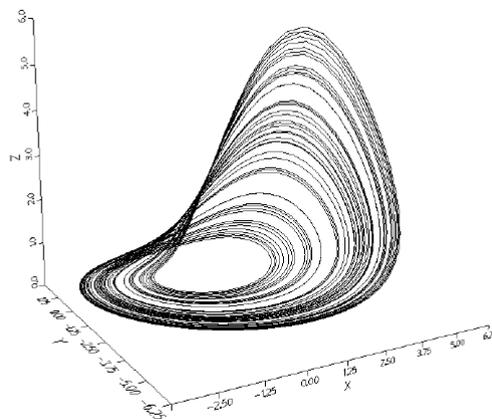


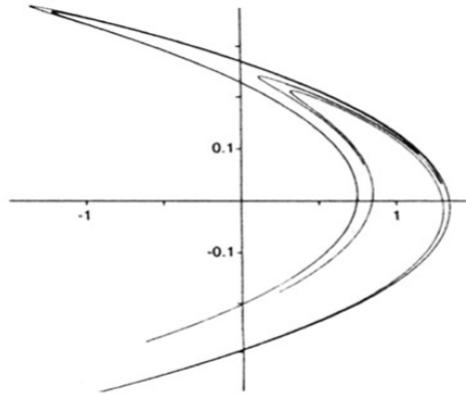
FIGURE 3.3 – Attracteur de Rössler : $(a, b, c) = (0.398, 2, 4)$.

L'attracteur de Hénon

L'attracteur de M. Hénon (1976), associé à une application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forme

$$(x, y) \rightarrow (X = 1 - ax^2 + y, Y = bx),$$

est initialement issu d'un problème d'astronomie concernant les amas globulaires. Le système différentiel initial (système de Hénon-Heiles) est un système hamiltonien non intégrable ; il est traité par la méthode des surfaces de section de Poincaré pour lui associer une application du plan dans lui-même dont l'étude plus abordable permet d'analyser le problème initial et ici de décrire son comportement chaotique par l'attracteur de Hénon. Ce procédé d'analyse d'un système différentiel non intégrable (et c'est le cas le plus souvent) par une méthode de section est assez courant ; bien que le système itératif associé soit lui aussi non linéaire, son analyse est souvent plus facile à développer Figure (3.4).

FIGURE 3.4 – Attracteur de Hénon : $(a, b) = (1.4, 0.3)$.

3.4 Exposants de Lyapunov

Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité est appelée " exposant de Lyapunov " qui est souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non.

Les exposants de Lyapunov peuvent caractériser le comportement d'un état stationnaire.

- Pour un point d'équilibre asymptotiquement stable, $\lambda_i < 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.
- Pour un cycle limite asymptotiquement stable, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_i < 0$ pour, $i = 2, \dots, n$.
- Pour k-tore asymptotiquement stable, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ et $\lambda_i < 0$ pour $i = k + 1, \dots, n$.

3.4.1 Cas des systèmes discrets unidimensionnels

Considérons un système dynamique décrit par une application discrète f (c'est à dire $x_n = f(x_{n-1})$) et soit x_0 une condition initiale, perturbons x_0 par l'ajout d'une très petite erreur ϵ et on observe le comportement des trajectoires x_n et \bar{x}_n issues des deux conditions initiales x_0 et $x_0 + \epsilon$. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne

exponentiellement c'est à dire il existe un réel λ tel que après n itérations on a :

$$f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0) \cong \epsilon e^{n\lambda}$$

D'ou

$$n\lambda \cong \ln \frac{|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)|}{\epsilon}$$

et pour $\epsilon \rightarrow 0$ on a :

$$\begin{aligned} \lambda &\cong \frac{1}{n} \ln \frac{|f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)|}{\epsilon} = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{d(x_0)} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_{n-1})}{d(x_{n-1})} \cdot \frac{df(x_{n-2})}{d(x_{n-2})} \cdots \frac{df(x_0)}{d(x_0)} \right| \\ &\cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{d(x_i)} \right| \end{aligned}$$

finalement pour $n \rightarrow +\infty$ on a :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| f'(x_i) \right|$$

λ est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence.

* un $\lambda_i > 0$ alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.

* $\sum \lambda_i < 0$ les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

3.4.2 Cas d'une application multidimensionnelle

Dans ce paragraphe nous allons généraliser les concepts du paragraphe précédent à des trajectoires multidimensionnelles du type :

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

Un système m -dimensionnel possède m exposants de Lyapunov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initial V_0 évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 \exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)n.$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un λ_i soit positif, pour avoir étirement selon au moins un axe. Mais il faut aussi que la somme des λ_i soit négative. Puisque, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé et on n'aurait plus un attracteur de faible dimension, ce qui signifie qu'on n'aura pas du chaos déterministe. Tout d'abord nous devons calculer les λ_i . Dans ce but, nous fixons une hyper sphère dans notre espace m -dimensionnel de rayon ϵ (petit) de conditions initiales, et examinons son évolution. Comme précédemment, nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0).$$

Posons $x'_0 = x_0 + \epsilon$, on a le développement en série limité d'ordre 1 de $f^n(x_0)$ au voisinage de x'_0 suivant :

$$x_n - x'_n = \frac{df^n(x_0)}{dx_0}(x_0 - x'_0) = j^n(x_0)(x_0 - x'_0),$$

$J^n(x_0)$ dénote la matrice jacobienne de f^n au point x_0 , si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_n telle que $D_m^t = P_n^{-1}J^n P_n$, D_m^t est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de J^n qui seront notés par Λ_i^n , $i = 1, \dots, m$.

On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln[\Lambda_i^n], \quad i = 1, \dots, m.$$

Estimation du plus grand exposant de Lyapunov

En 1985, Wolf, Swift Swinney et Vastano [14] ont proposé une méthode de calcul du plus grand exposant et de la somme des n plus grands exposants de Lyapunov à partir des séries chronologiques.

Leur algorithme est basé sur le contrôle de la divergence entre les trajectoires voisines.

On choisit dans un premier temps deux orbites très voisines, et on note $d(t_0)$ leur distance en un temps ultérieur, soit t_1 , cette distance est devenue $d'(t_1)$. On effectue alors un remplacement : on se choisit une autre orbite, située à une distance $d(t_1)$. On recommence alors ces opérations un grand nombre de fois pour les temps t_1, \dots, t_M , voir figure(3-5) et on calcule l'estimateur du plus grand exposant par la relation suivante :

$$\lambda = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{i=0}^M \ln \frac{d'(t_i)}{d(t_{i-1})}.$$

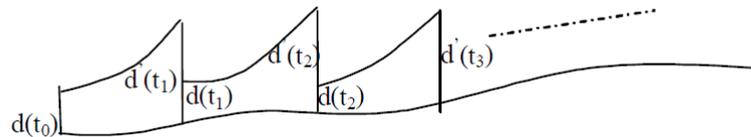


FIGURE 3.5 – Méthode de Wolf pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov.

Wolf et d'autre proposent aussi un algorithme pour le calcul de la somme des deux plus grands exposants. Le principe est similaire : ils prennent trois trajectoires voisines et calculent l'aire du triangle de conditions initiales, soit $A(t_0)$. En un temps ultérieur t_1 , cette aire est devenue $A'(t_1)$. On effectue alors un remplacement, et on obtient une nouvelle aire de conditions initiales $A(t_1)$. On recommence alors ces opérations un grand nombre de fois pour les temps t_1, \dots, t_M et on calcule l'estimateur de la somme des 2 plus grands exposants :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{i=0}^M \ln \frac{A'(t_i)}{A(t_{i-1})}.$$

L'algorithme fait en plus varier un paramètre de contrôle choisi pour permettre de visionner l'évolution de la sensibilité aux conditions initiales selon ce dernier. Il faut remarquer que l'algorithme de Wolf calcule l'exposant de Lyapunov le plus grand. Pour ce faire, il fait la moyenne des sommes des divergences normalisées, et puisque l'exposant le plus grand aura la plus grande influence sur le système.

Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

- 1- Changement du paramètre de contrôle.
- 2- Choix aléatoire d'une condition initiale.
- 3- Evolution du système dans le but d'atteindre un attracteur.
- 4- Création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une petite perturbation.
- 5- Évolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calcul de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires.
- 6- Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédant le calcul d'une moyenne de la divergence.
- 7- Retour au point (5) effectué selon un nombre donné.
- 8- Retour au point (1).

9- Dessin de l'exposant de Lyapunov le plus grand en fonction du paramètre de contrôle donné.

Utilisation au calcul de dimension de l'attracteur

On remarque qu'il y a un lien, entre les exposants de Lyapunov et la dimension de l'attracteur, comme nous l'avons mentionné précédemment si tous les exposants sont positifs la sphère de conditions initiales va remplir tout l'espace, mais s'il sont tous négatifs la sphère va se contracter en un point.

a) Dimension de Mori : Soient m_0 le nombre des exposants de Lyapunov qui sont nuls, m_+ le nombre d'exposants positifs, $\bar{\lambda}_+$ la moyenne des exposants positifs et $\bar{\lambda}_-$ celle des exposants négatifs.

La dimension de Mori est donnée par la relation suivante :

$$D_{M_0} = m_0 + m_+ + \left(1 + \frac{\bar{\lambda}_+}{|\bar{\lambda}_-|}\right).$$

b) Dimension de Kaplan et Yorke : Soit j_0 un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0.$$

On définit alors la dimension de Kaplan et Yorke par la relation suivante :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}.$$

CHAPITRE 4

ETUDE D'UN MODÈLE FINANCIER

Il est progressivement reconnu que les idées de la théorie de la dynamique complexes sont utile pour l'économie et la finance. En fait, au début des années 1950 Richard Good-win [17] utilise des techniques non linéaires dans l'étude des processus de la dynamiques économiques. Avec les progrès de la recherche sur les systèmes complexes, des concepts et des méthodes dans la dynamique non linéaire comme la stabilité, bifurcation, catastrophe et le chaos etc ont été appliquées à des problèmes économiques et des résultats positifs ont été obtenus. La dynamique non-linéaire est devenue une approche importante pour l'analyse économique. La bifurcation se réfère au phénomène lorsque le paramètre du système atteint une valeur critique, le comportement du système change soudainement, cela peut entraîner la rupture de l'ensemble du système d'ingénierie et de provoquer une perte inestimables.

4.1 Système financier de dimension 3

Description du système

Les références [7,19] ont rapporté un modèle dynamique des finances composé de quatre sous-blocs : production, argent, stock et le main-d'œuvre, qui est exprimée par trois équations différentielles de premier ordre. Le modèle décrit les variations temporelles de trois variables d'état : le taux d'intérêt \mathbf{x} , la demande d'investissement \mathbf{y} , et l'indice des prix \mathbf{z} . Le système financier est donnée comme suit :

$$\begin{cases} x' &= z + (y - a)x \\ y' &= 1 - by - x^2 \\ z' &= -x - cz \end{cases} \quad (4.1)$$

le paramètre \mathbf{a} représente le montant d'épargne, \mathbf{b} le coût d'investissement, et \mathbf{c} l'élasticité de la demande des marchés commerciaux, et ils sont des constantes positives. Les facteurs qui influent sur les changements dans \mathbf{x} viennent principalement des contradictions dans les investissements sur le marché et les ajustements structurelles des prix des marchandises. L'évolution du taux de \mathbf{y} est proportionnelle au taux d'investissement, ainsi qu'à une inversion du coût de l'investissement et les taux des intérêts. Les changements dans \mathbf{z} sont d'une part contrôlés par la contradiction entre l'offre et la demande sur les marchés commerciaux et d'autre part ils sont influencés par les taux des inflations.

Analyse du système

Propriétés mathématiques

Le système (4.1) est autonome, son espace de phase est tridimensionnel. Il est invariable par la transformation suivante : $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, -z)$.

On peut noter cette transformation par T , tel que :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X &\rightarrow AX \end{aligned}$$

qui satisfait

$$f(TX) = Tf(X)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et : $X = (x, y, z)$

Dissipation et existence de l'attracteur

La divergence du système est donnée par :

$$div f = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z}$$

Ce qui donne :

$$div f = y - a - b - c$$

Pour que le système soit dissipatif, il faut que :

$$div f < 0$$

Par conséquent (4.1) est dissipatif, pour $y < a + b + c$.

Points d'équilibre

Les points fixes sont les solutions de système :

$$\begin{cases} z + (y - a)x = 0 \\ 1 - by - x^2 = 0 \\ -x - cz = 0 \end{cases}$$

Après un simple calcul, on trouve que :

* si $1 - b(a + \frac{1}{c}) \leq 0$: on a un seul point fixe : $p_1 = (0, \frac{1}{b}, 0)$

* si $1 - b(a + \frac{1}{c}) > 0$: on a trois points fixe :

$$p_1 = (0, \frac{1}{b}, 0), p_{2,3} = \left(\pm \sqrt{1 - b(a + \frac{1}{c})}, (a + \frac{1}{c}), \pm \frac{\sqrt{1 - b(a + \frac{1}{c})}}{c} \right)$$

On pose $b = 0.2 = \frac{1}{5}$ $c = 1.2 = \frac{6}{5}$ et $a \in \mathbb{R}^+$ alors :

* si $a \geq \frac{25}{6}$: on a un seul point fixe : $p_1 = (0, 5, 0)$

* si $a < \frac{25}{6}$: il y a trois points d'équilibre :

$$p_1 = (0, 5, 0)$$

$$p_{2,3} = \left(\pm \sqrt{\frac{5}{6} - \frac{1}{5}a}, a + \frac{5}{6}, \pm \frac{5}{6} \sqrt{\frac{5}{6} - \frac{1}{5}a} \right)$$

L'étude de la stabilité des points d'équilibre repose sur le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne J obtenu en linéarisant le système autour d'un point d'équilibre.

L'expression de la matrice Jacobienne du système est :

$$J = \begin{pmatrix} y - a & x & 1 \\ -2x & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

La stabilité du point P_1

On a la la matrice jacobienne associée

$$J_{P_1} = \begin{pmatrix} 5 - a & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$P_1(\lambda) = \left(\frac{1}{5} + \lambda\right) \left[\lambda^2 + \left(a - \frac{19}{5}\right)\lambda + \left(\frac{6}{5}a - 5\right)\right]$$

$$P_1(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{5} \\ \text{ou} \\ Q(\lambda) = 0 \end{cases}$$

Tell que :

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + \left(a - \frac{19}{5}\right)\lambda + \left(\frac{6}{5}a - 5\right)$$

On pose :

$$\begin{cases} tr(J) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ det(J) = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

Pour que les parties réelles sont toutes négatives il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} a_1 = \left(a - \frac{19}{5}\right) > 0 \\ \text{et} \\ a_2 = \left(\frac{6}{5}a - 5\right) > 0 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} a > \frac{19}{5} \\ \text{et} \\ a > \frac{25}{6} \end{cases}$$

Donc : $a > \frac{25}{6}$.

Alors p_1 est localement asymptotiquement stable si et seulement si $a > \frac{25}{6}$.

plus précisément les valeurs propres de J_{P_1} sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{5} \\ \lambda_{2,3} = \left(\frac{19}{10} - \frac{1}{2}a\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - \frac{62}{5}a + \frac{86}{25}} \text{ Si } a \in]0, \frac{21}{5}[\cup]\frac{41}{5}, +\infty[\\ \lambda_{2,3} = \left(\frac{19}{10} - \frac{1}{2}a\right) \pm i\frac{1}{2}\sqrt{-a^2 + \frac{62}{5}a - \frac{86}{25}} \text{ Si } a \in]\frac{21}{5}, \frac{41}{5}[\end{cases}$$

La stabilité du point $P_{(2,3)}$

La matrice jacobienne associée est :

$$J_{P_{(2,3)}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \pm\sqrt{\frac{5}{6} - \frac{1}{5}a} & 1 \\ \pm 2\sqrt{\frac{5}{6} - \frac{1}{5}a} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{17}{30}\lambda^2 + \left(\frac{87}{50} - \frac{2}{5}a\right)\lambda + \left(2 - \frac{12}{25}a\right)$$

Les valeurs propres de la matrice $J_{p_{2,3}}$ sont les racines du polynôme $p(\lambda)$.

D'après le critère de Routh-Hurwitz les parties réelles de ces valeurs propres sont tous négatives si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (2 - \frac{12}{25}a) > 0 \\ \frac{17}{30}(\frac{87}{50} - \frac{2}{5}a) - (2 - \frac{12}{25}a) > 0. \end{array} \right.$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} a < \frac{25}{6} \\ a > \frac{507}{100} \end{array} \right.$$

donc : $a \in \emptyset$

Ainsi les parties réelles de ces valeurs propres, ne seront jamais toutes négatives en même temps, par conséquent les deux points fixes $P_{2,3}$ ne seront jamais stables. Notons que le système étudié est symétrique, alors cette symétrie joue un rôle très important pour la bifurcation fourche.

Pour $a \geq \frac{25}{6}$, le système possède alors un point fixe p_1 qui a été asymptotique stable lorsque $a \geq \frac{25}{6}$. Lorsque a atteint la valeur $\frac{25}{6}$, le système se déstabilise : le point fixe perd sa stabilité : il y a donc une bifurcation. On voit apparaître alors deux points fixes instables $p_{2,3}$. Il y a eu en quelque sorte dédoublement du point fixe naissance de deux états symétriques. Le diagramme de bifurcation (figure 4.5) correspondant montre une branche qui bifurque en diminuant la valeur de a à partir de la valeur critique de bifurcation $a = \frac{25}{6}$. Dans ce cas on observe une bifurcation fourche.

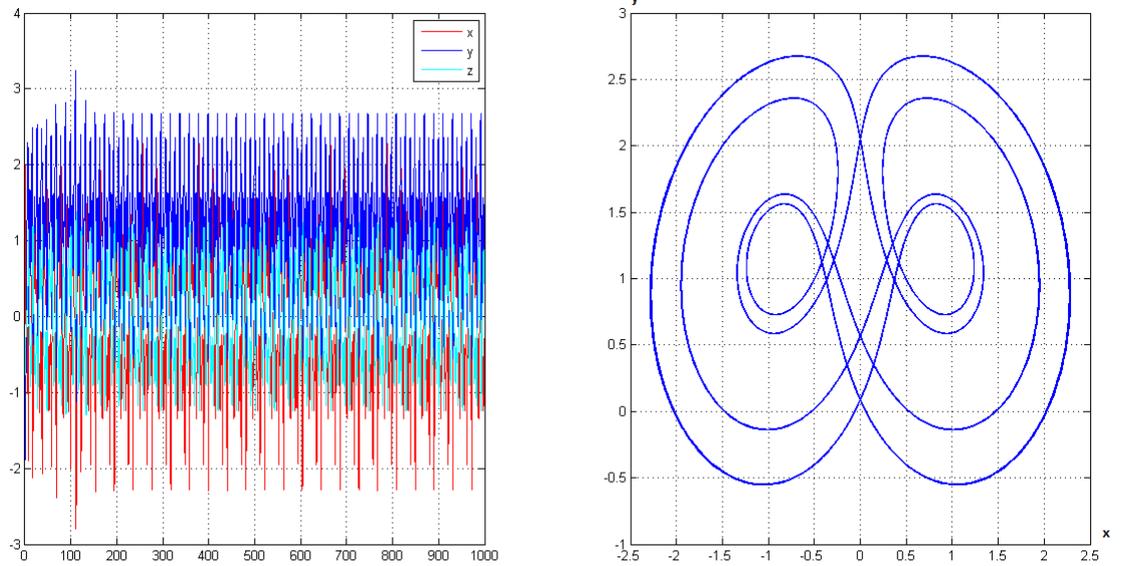


FIGURE 4.1 – Solution du système financier cas $a = 0.45$.

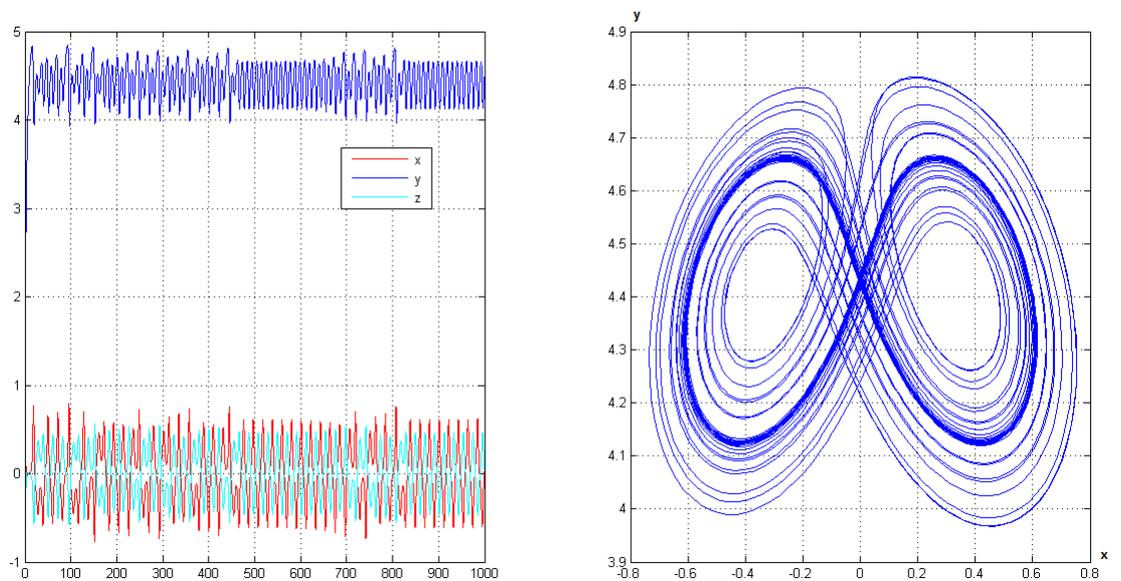


FIGURE 4.2 – Solution du système financier cas $a = 3.6$.

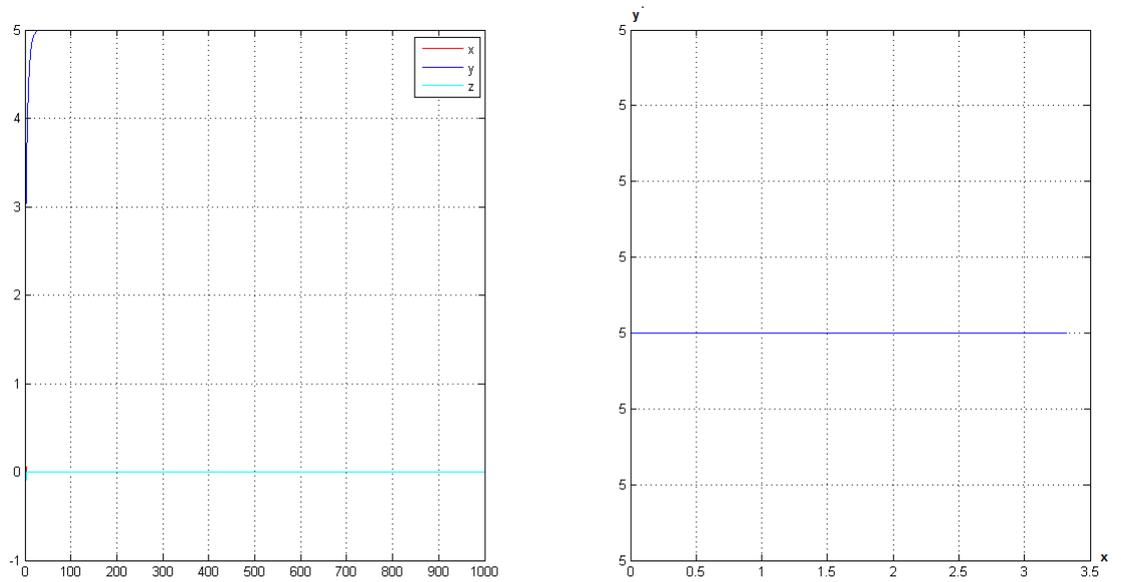


FIGURE 4.3 – Solution du système financier cas $a = 4.17$.

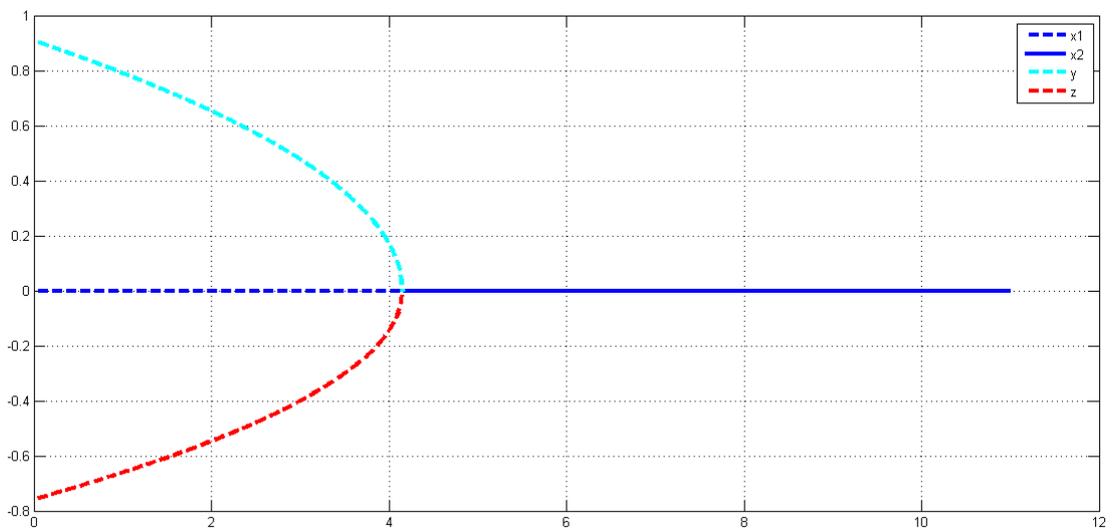


FIGURE 4.4 – Diagramme de bifurcation fourche.

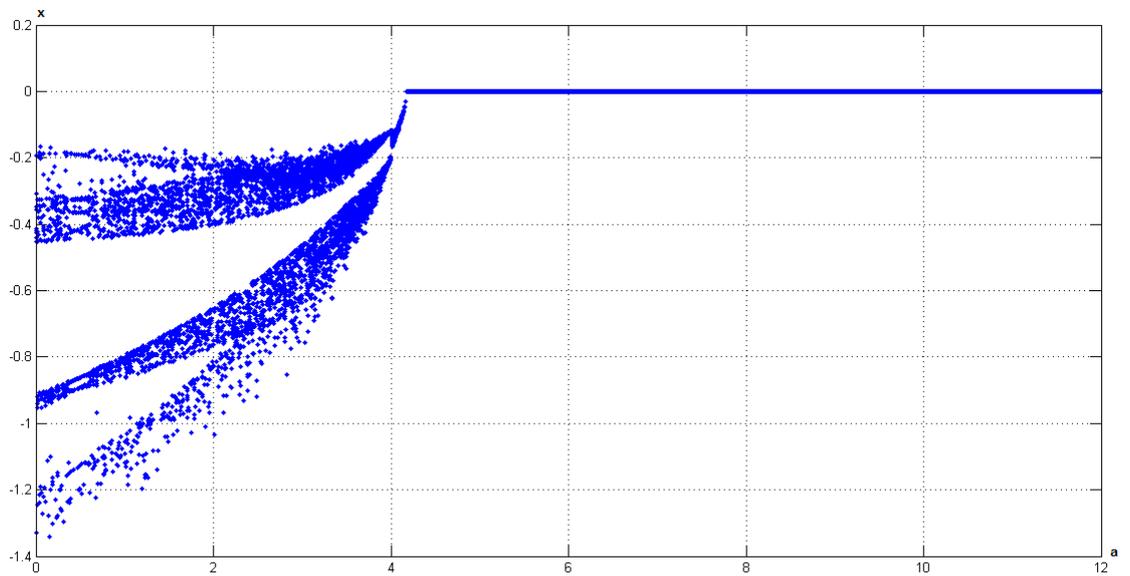


FIGURE 4.5 – Diagramme de bifurcation du système financier.

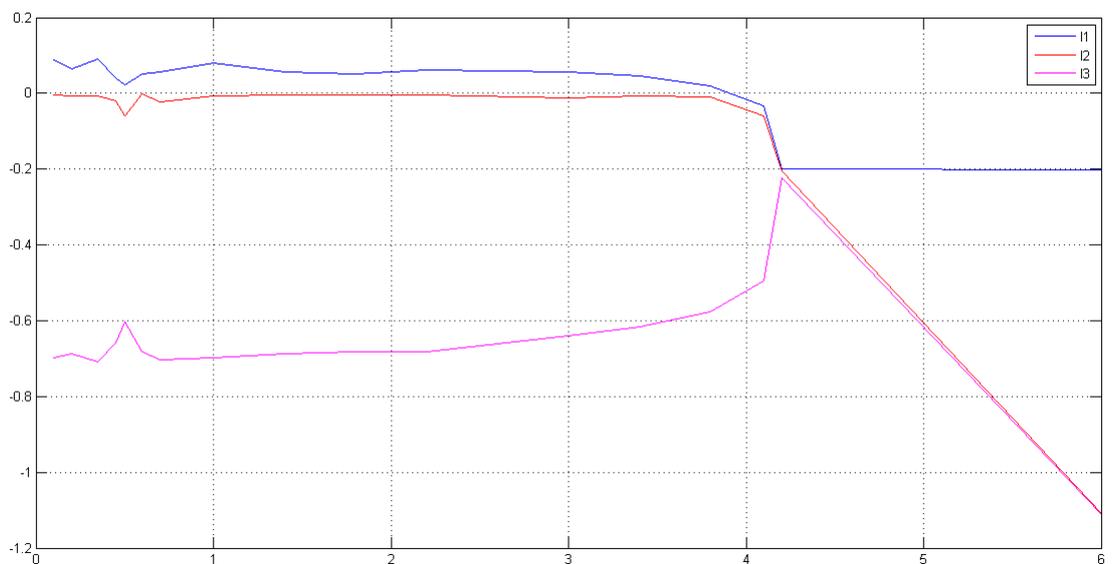


FIGURE 4.6 – L'exposant de Lyapounov.

La construction de diagramme de bifurcation en fait en faisant varier le paramètre $a \in [0, 6]$, et les autre paramètre sont fixés comme suite : $b = \frac{1}{5}$, $c = \frac{6}{5}$.

1- pour $a \in (0, \frac{25}{6})$ il ya trois points d'équilibre p_1 , p_2 et p_3 instable comme il est illustré dans la figure (4,5) dans la quel on remarque trois exposant de Lyapounov le premier exposant est positive ($\lambda_1 > 0$) et le deuxième exposant est proche de 0 ($\lambda_2 \simeq 0$), et le dernière exposant négative ($\lambda_3 < 0$) alors le comportement chaotique interrompte par une petite fenêtre, de périodicité, lorsque $a \in (0.4, 0.57)$ dans cette intervalle on observe un cycle limite de période 4, comme illustre dans la figure (4,1).

2- Lorsque $a = \frac{25}{6}$, les trois points fixes p_1, p_2 et p_3 coïncide.

3- pour $a \in (\frac{25}{6}, +\infty)$ il ya un seul point d'équilibre (p_1), asymptotique stable et on remarque que les trois exposantes de Lyapounov ($\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$) sont négative par suite le comportement est stationnaire.

4.2 Système financier de dimension 4

Description du système

Ce système est basé sur le système financier chaotique de dimension 3, les spécialistes trouvé que les facteurs qui influent sur les taux d'intérêt non seulement lié à la demande d'investissement et de l'indice des prix, mais aussi à la marge bénéficiaire moyenne, et la marge bénéficiaire moyenne et le taux d'intérêt sont proportionnels. Donc, l'amélioration du système de financement chaotique suivant est construit.

Le nouveau système de financement hyperchaotique qui est définie par deux exposants de Lyapunov positifs peut être généré en ajoutant un variable d'état supplémentaire w , qui est la marge bénéficiaire moyenne. Le système de quatre

équations différentielles autonomes dimensionnelles a la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = z + (y - a)x + w \\ y' = 1 - by - x^2 \\ z' = -x - cz \\ w' = -dxy - kw \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où a, b, c, d, k sont les paramètres du système (4,2), et ils sont des constantes positives.

Analyse du système

Propriétés mathématiques

Le système (4.2) est autonome, son espace de phase est de quatre dimension. Il est invariable par la transformation suivante : $(x, y, z, w) \rightarrow (-x, y, -z, -w)$.

On peut noter cette transformation par T , tel que :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ X &\rightarrow AX \end{aligned}$$

qui satisfait

$$f(TX) = Tf(X)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et : $X = (x, y, z, w)$, la symétrie persiste pour toutes les valeurs des paramètres du système.

Dissipation et existence de l'attracteur

La divergence du système est donnée par :

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial w}$$

Ce qui donne :

$$\operatorname{div} f = y - a - b - c - k$$

Pour que le système soit dissipatif, il faut que :

$$\operatorname{div} f < 0$$

Par conséquent (4.2) est dissipatif, pour $y < a + b + c + k$.

Points d'équilibre

Les points fixes sont les solutions de système :

$$\begin{cases} z + (y - a)x + w = 0 \\ 1 - by - x^2 = 0 \\ -x - cz = 0 \\ -dxy - kw = 0 \end{cases}$$

Après un simple calcul, et en posant : $\theta = \sqrt{e}$

tel que $e = 1 + \frac{kb(1+ac)}{c(d-k)}$ on trouve que : $e = 1 + \frac{kb(1+ac)}{c(d-k)}$

- Si $e \leq 0$, on a un seule point fixe : $p_1 = (0, \frac{1}{b}, 0, 0)$
- Si $e > 0$, on a trois points fixes :

$$p_1 = (0, \frac{1}{b}, 0, 0).$$

$$p_2 = \left(\theta, \frac{k(1+ac)}{c(k-d)}, -\frac{\theta}{c}, \frac{d\theta(1+ac)}{c(d-k)} \right).$$

$$p_3 = \left(-\theta, \frac{k(1+ac)}{c(k-d)}, \frac{\theta}{c}, -\frac{d\theta(1+ac)}{c(d-k)} \right).$$

On va étudier ce système :

- **premièrement pour le paramètre 'a' :**

On pose $b = \frac{1}{5}$, $c = \frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{5}$, $k = \frac{17}{100}$ et $a \in \mathbb{R}^+$.

donc : $e = \frac{17}{15}a + \frac{79}{45} > 0$ alors on a trois points fixes :

$$p_1 = (0, 5, 0, 0).$$

$$p_{2,3} = \left(\pm \sqrt{\frac{17}{15}a + \frac{79}{45}}, \left(\frac{17}{3}a + \frac{34}{9} \right), \mp \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{17}{15}a + \frac{79}{45}} \right), \pm \sqrt{\frac{17}{15}a + \frac{79}{45}} \left(\frac{20}{3}a + \frac{40}{9} \right) \right).$$

La Stabilité des points d'équilibre

Nous allons appliquer la méthode de linéarisation pour étudier la stabilité au voisinage des points d'équilibres.

L'expression de la matrice Jacobienne du système est :

$$J = \begin{pmatrix} y - a & x & 1 & 1 \\ -2x & -b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -c & 0 \\ -dy & -dx & 0 & -k \end{pmatrix}$$

Pour le point p_1

La matrice jacobien associée est :

$$J_{p_1} = \begin{pmatrix} 5 - a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{17}{100} \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$P(\lambda) = \left(\frac{1}{5} + \lambda \right) \left(\lambda^3 + \left(a - \frac{333}{100} \right) \lambda^2 + \left(\frac{167}{100}a - \frac{1219}{200} \right) \lambda + \left(\frac{51}{200}a + \frac{79}{200} \right) \right).$$

Les valeurs propres de la matrice J_{p_1} sont les racines du polynôme $P(\lambda)$.

$$P_1(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{5} \\ \text{ou} \\ Q(\lambda) = 0 \end{cases}$$

tell que :

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + \left(a - \frac{333}{100}\right) \lambda^2 + \left(\frac{167}{100}a - \frac{1219}{200}\right) \lambda + \left(\frac{51}{200}a + \frac{79}{200}\right).$$

En appliquant le critère de Routh-Hurwitz sure le polynôme $Q(\lambda)$:

On a :

$$a_1 = \left(a - \frac{333}{100}\right)$$

$$a_2 = \left(\frac{167}{100}a - \frac{1219}{200}\right)$$

$$a_3 = \left(\frac{51}{200}a + \frac{79}{200}\right)$$

On définit les trois matrice d'Hurwitz :

$$H_1 = \left(a - \frac{333}{100}\right)$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} a - \frac{333}{100} & 1 \\ \frac{51}{200}a + \frac{79}{200} & \frac{167}{100}a - \frac{1219}{200} \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} a - \frac{333}{100} & 1 & 0 \\ \frac{51}{200}a + \frac{79}{200} & \frac{167}{100}a - \frac{1219}{200} & a - \frac{333}{100} \\ 0 & 0 & \frac{51}{200}a + \frac{79}{200} \end{pmatrix}$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz les parties réelles de ces valeurs propres sont tous négatives si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \left(a - \frac{333}{100}\right) > 0 \\ a_3 = \left(\frac{51}{200}a + \frac{79}{200}\right) > 0 \\ a_1 a_2 - a_3 = \left(a - \frac{333}{100}\right)\left(\frac{167}{100}a - \frac{1219}{200}\right) - \left(\frac{51}{200}a + \frac{79}{200}\right) > 0 \end{array} \right.$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} a > \frac{333}{100} \simeq 3.33 \\ a > -\frac{79}{51} \simeq -1.54901 \\ a \in] -\infty, \alpha_1[\cup] \alpha_2, +\infty[\end{array} \right.$$

tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{119111}{33400} - \frac{1}{33400}\sqrt{893328521} \simeq 2.6713. \\ \alpha_2 = \left(\frac{1}{33400}\right)\sqrt{893328521} + \frac{119111}{33400} \simeq 4.4611. \end{array} \right.$$

Alors p_1 est localement asymptotiquement stable si et seulement si $a > \alpha_2 \simeq 4.4611$.

pour le point $p_{2,3}$

la matrice jacobien associée est :

$$J_{p_2} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3}a + \frac{34}{9} & \sqrt{\frac{17}{15}a + \frac{79}{45}} & 1 & 1 \\ -2\sqrt{\frac{17}{15}a + \frac{79}{45}} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -(\frac{17}{15}a + \frac{34}{45}) & -\frac{1}{5}\sqrt{\frac{17}{15}a + \frac{79}{45}} & 0 & -\frac{17}{100} \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est donné par :

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \left(\frac{-14}{3}a - \frac{1717}{900}\right) \lambda^3 + \left(\frac{-799}{150}a - \frac{10879}{9000}\right) \lambda^2 + \left(\frac{251}{100}a + \frac{557}{120}\right) \lambda - \frac{9}{100}.$$

Les valeurs propres de la matrice J_{p_2} sont les racines du polynôme $P(\lambda)$. D'après le critère de Routh-Hurwitz les parties réelles des valeurs propres de $p(\lambda)$ sont tous négatives si et seulement si :

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ a_1 a_2 - a_3 > 0 \\ a_3(a_1 a_2 - a_3) > 0 \\ a_4(a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 + a_3^2) > 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} a < -\frac{1717}{4200} \simeq -0.4088 \\ a \in]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[\\ a < \frac{5570}{3012} \simeq -1.84926 \\ a > \gamma \end{cases}$$

tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{2237200} \sqrt{276031437667} \sqrt{3} \simeq -0.67414. \\ \beta = \frac{1}{2237200} \sqrt{276031437667} \sqrt{3} \simeq 0.13937. \\ \gamma \simeq -1.8773. \end{array} \right.$$

donc : $a \in \emptyset$

Ainsi les parties réelles de ces valeurs propres, ne seront jamais toutes négatives en même temps, par conséquent les deux points fixes $P_{2,3}$ ne seront jamais stables.

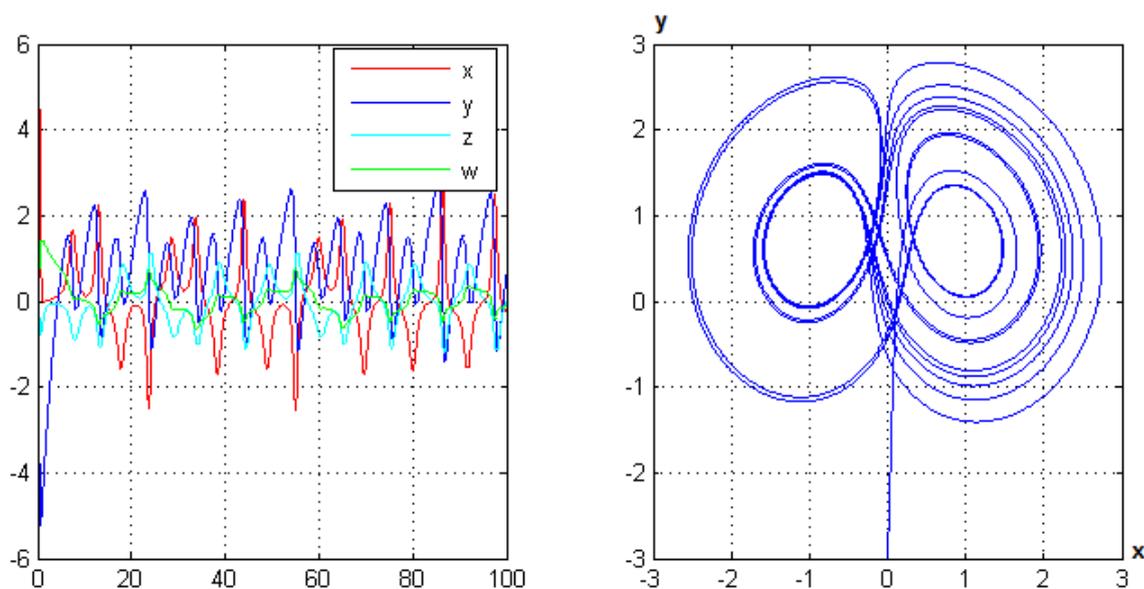


FIGURE 4.7 – Solution du système financier cas $a = 0.1$.

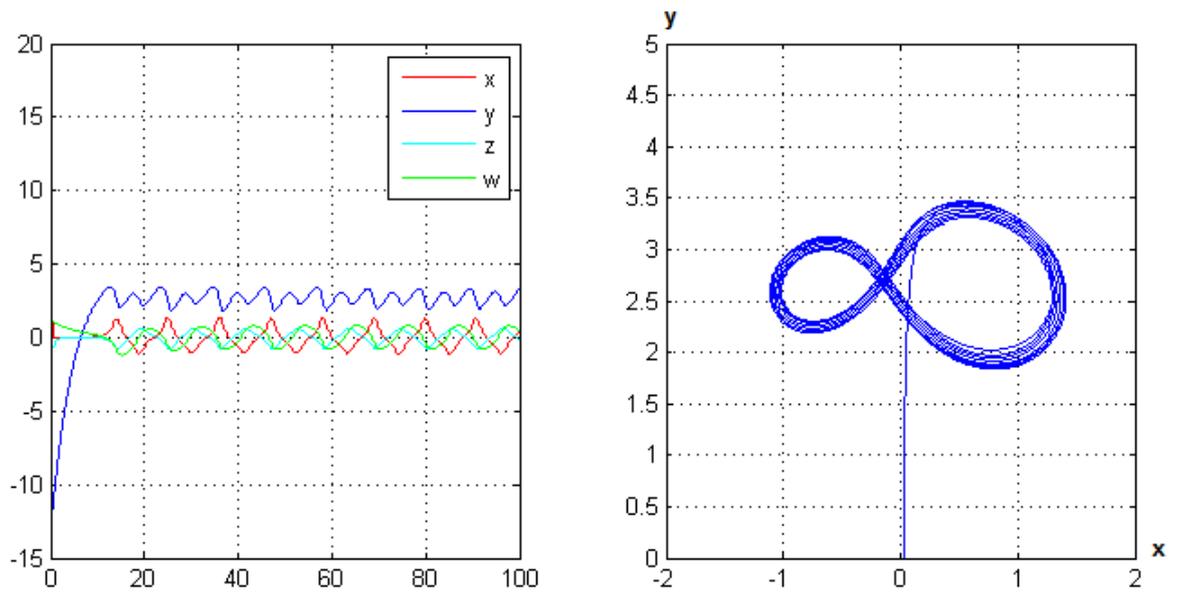


FIGURE 4.8 – Solution du système financier cas $a = 2$.

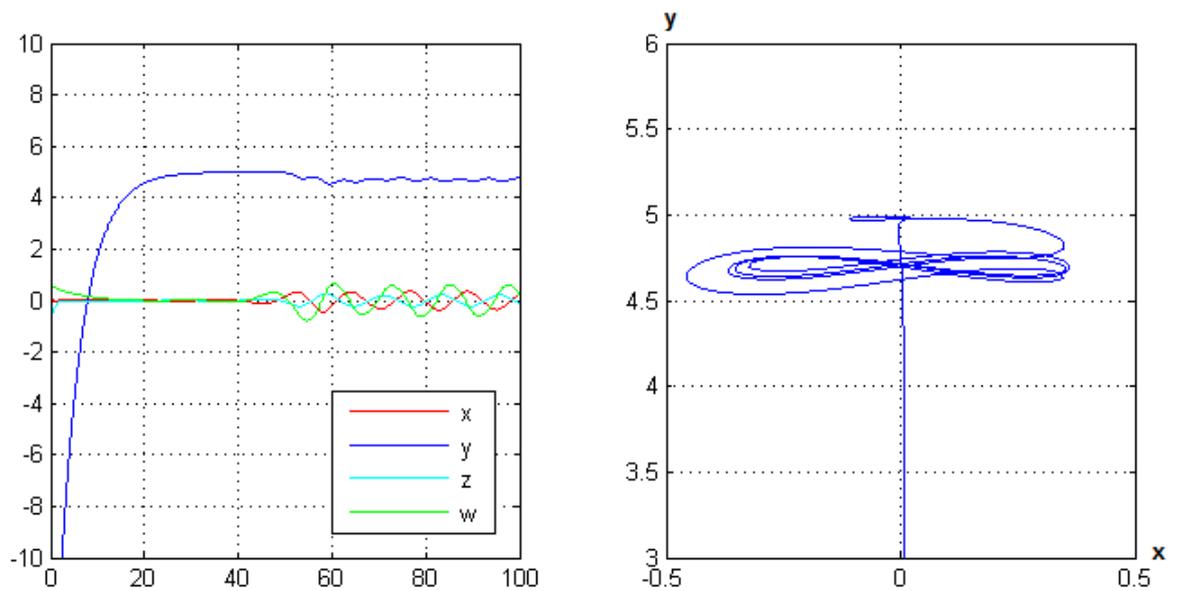


FIGURE 4.9 – Solution du système financier cas $a = 4$.

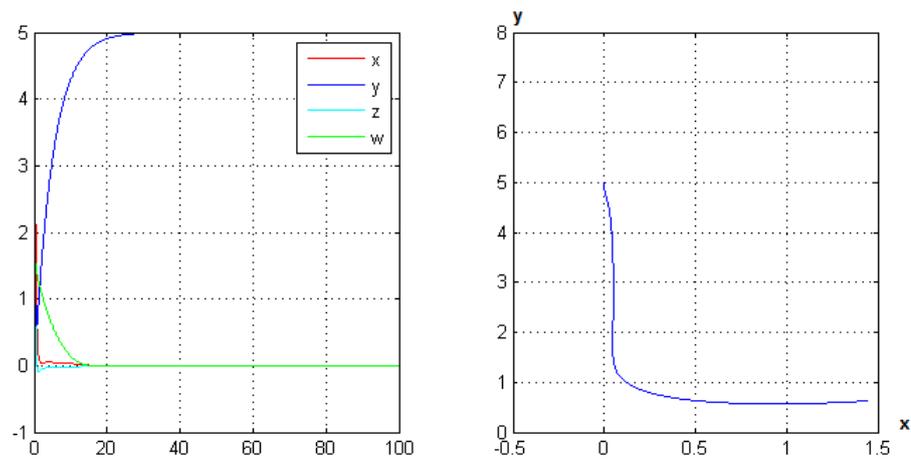


FIGURE 4.10 – Solution du système financier cas $a = 4.4611$.

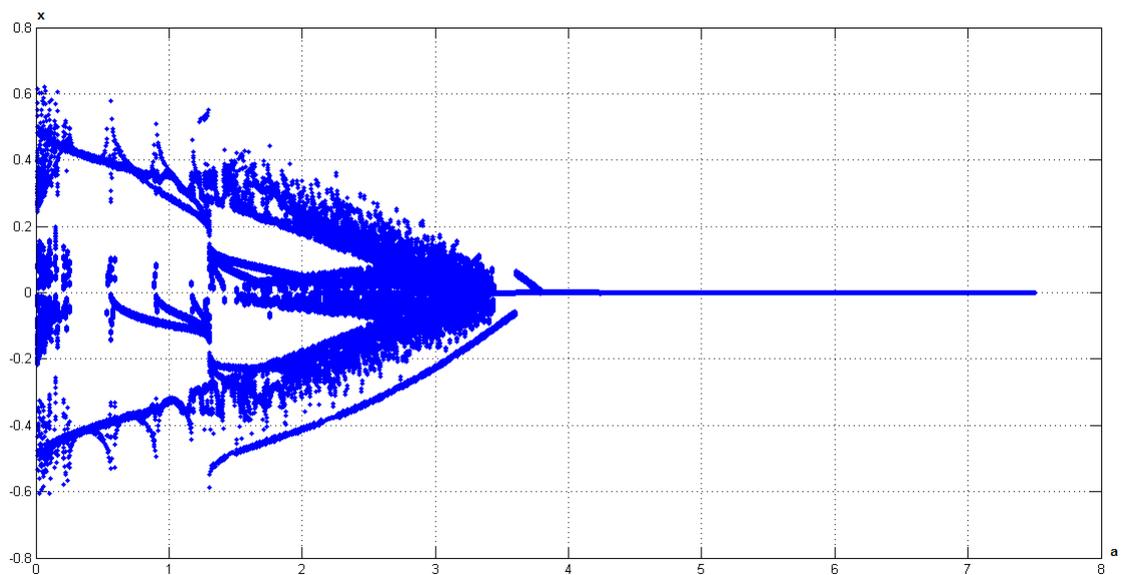


FIGURE 4.11 – Diagramme de bifurcation du système financier.

• deuxièmement pour le paramètre 'c' :

On pose $a = \frac{9}{10}$, $b = \frac{1}{5}$, $d = \frac{1}{5}$, $k = \frac{17}{100}$ et $c \in \mathbb{R}^+$

donc : $e = \frac{101}{50} + \frac{17}{15c} > 0$ alors on a trois points fixes :

$$p_1 = (0, 5, 0, 0).$$

$$p_{2,3} = \left(\pm \sqrt{\frac{101}{50} + \frac{17}{15c}}, -\frac{51}{10} - \frac{17}{3c}, \mp \frac{1}{c} \sqrt{\frac{101}{50} + \frac{17}{15c}}, \pm \sqrt{\frac{101}{50} + \frac{17}{15c}} \left(6 + \frac{20}{3c} \right) \right).$$

La stabilité des points d'équilibre

Nous allons appliquer la méthode de linéarisation pour étudier la stabilité au voisinage des points d'équilibres.

L'expression de la matrice Jacobienne du système est :

$$J = \begin{pmatrix} y - a & x & 1 & 1 \\ -2x & -b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -c & 0 \\ -dy & -dx & 0 & -k \end{pmatrix}$$

Pour le point p_1

la matrice jacobien associée est :

$$J_{p_1} = \begin{pmatrix} \frac{41}{10} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -c & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{17}{100} \end{pmatrix}$$

son polynôme caractéristique est donné par :

$$P(\lambda) = \left(\frac{1}{5} + \lambda \right) \left(\lambda^3 + \left(c - \frac{393}{100} \right) \lambda^2 + \left(\frac{1303}{1000} - \frac{393}{100} c \right) \lambda + \left(\frac{303}{1000} c + \frac{17}{100} \right) \right).$$

Les valeurs propres de la matrice J_{p_1} sont les racines du polynôme $P(\lambda)$.

$$P_1(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{5} \\ \text{ou} \\ Q(\lambda) = 0 \end{cases}$$

tell que :

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + \left(c - \frac{393}{100}\right)\lambda^2 + \left(\frac{1303}{1000} - \frac{393}{100}c\right)\lambda + \left(\frac{303}{1000}c + \frac{17}{100}\right).$$

En appliquant le critère de Routh-Hurwitz sure le polynôme $Q(\lambda)$:

On a :

$$a_1 = c - \frac{393}{100}$$

$$a_2 = \frac{1303}{1000} - \frac{393}{100}c$$

$$a_3 = \frac{303}{1000}c + \frac{17}{100}$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz les parties réelles de ces valeurs propres sont tous négatives si et seulement si :

$$\begin{cases} c > \frac{393}{100} \simeq 3.93 \\ c < \frac{79}{51} \simeq 0.3316 \\ c \in]\alpha_1, \alpha_2[\end{cases}$$

tel que :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{164449}{78600} - \frac{1}{78600} \sqrt{18726351721} \simeq 0.35121. \\ \alpha_2 = \frac{1}{78600} \sqrt{18726351721} + \frac{164449}{78600} \simeq 3.8332. \end{cases}$$

Donc : $c \in \emptyset$

Ainsi les parties réelles de ces valeurs propres, ne seront jamais toutes négatives en même temps, par conséquent le point fixe P_1 est instables.

pour le point $p_{2,3}$

la matrice jacobien associée est :

$$J_{p_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30c}(153c+170) - \frac{9}{10} & \sqrt[2]{\frac{1}{150c}(303c+170)} & 1 & 1 \\ -2\sqrt[2]{\frac{1}{150c}(303c+170)} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -c & 0 \\ \frac{1}{150c}(153c+170) & -\frac{1}{5}\sqrt[2]{\frac{1}{150c}(303c+170)} & 0 & -\frac{17}{100} \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \left(c + \frac{17}{3c} + \frac{637}{100}\right) \lambda^3 + \left(\frac{637c}{100} + \frac{17911}{1500} + \frac{323}{100c}\right) \lambda^2 + \left(\frac{2637c}{500} + \frac{2697}{2500} - \frac{51}{500c}\right) \lambda - \frac{303}{2500}c - \frac{17}{250}.$$

Les valeurs propres de la matrice J_{p_2} sont les racines du polynôme $P(\lambda)$.

D'après le critère de Routh-Hurwitz les parties réelles des valeurs propres de $p(\lambda)$ sont tous négatives si et seulement si :

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ a_1 a_2 - a_3 > 0 \\ a_3(a_1 a_2 - a_3) > 0 \\ a_4(a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 + a_3^2) > 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} c \in] - \infty, \alpha[\cup] \beta, +\infty[\\ c \in] - \infty, \alpha_1[\cup] \beta_1, +\infty[\\ c \in] - \infty, \alpha_2[\cup] \beta_2, +\infty[\\ c \in] - \infty, \gamma_1[\cup] \gamma_2, \gamma_3[\cup] \gamma_4, \gamma_5[\cup] \gamma_6, \gamma_7[\end{array} \right.$$

tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \simeq -5.301 \text{ et } \beta \simeq -1.0690 \\ \alpha_1 \simeq -5.5621 \text{ et } \beta_1 \simeq -0.32428 \\ \alpha_2 \simeq -0.2749 \text{ et } \beta_2 \simeq 0.0704 \\ \gamma_1 \simeq -4.9869 \text{ et } \gamma_2 \simeq -2.1043 \\ \gamma_3 \simeq -0.8198 \text{ et } \gamma_4 \simeq -0.5611 \\ \gamma_5 \simeq -0.3787 \text{ et } \gamma_6 \simeq -0.14199 \\ \gamma_7 \simeq -0.0210 \end{array} \right.$$

donc : $a \in \emptyset$

Ainsi les parties réelles de ces valeurs propres, ne seront jamais toutes négatives en même temps, par conséquent les deux points fixes $P_{2,3}$ ne seront jamais stables.

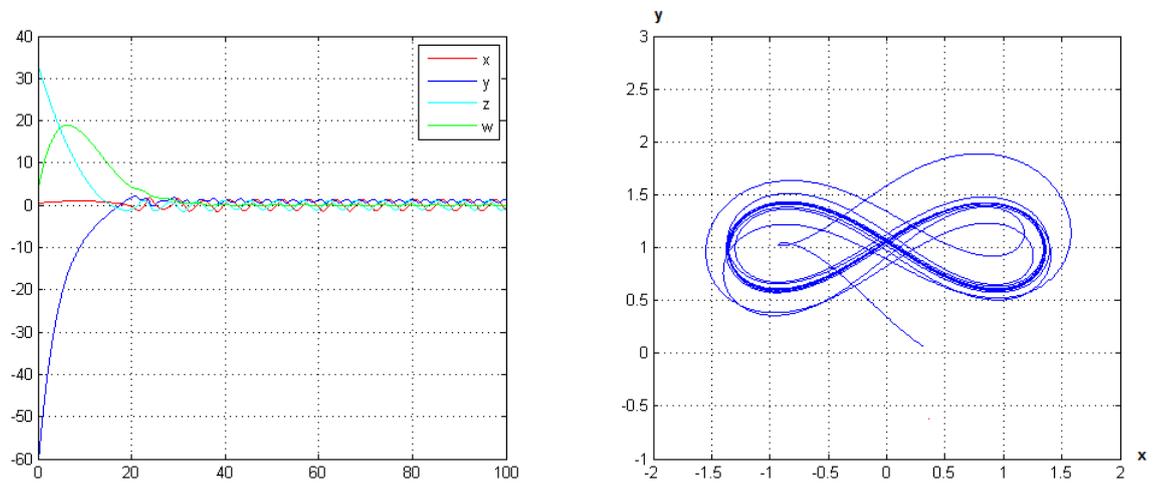


FIGURE 4.12 – Solution du système financier cas $c = 0.1$.

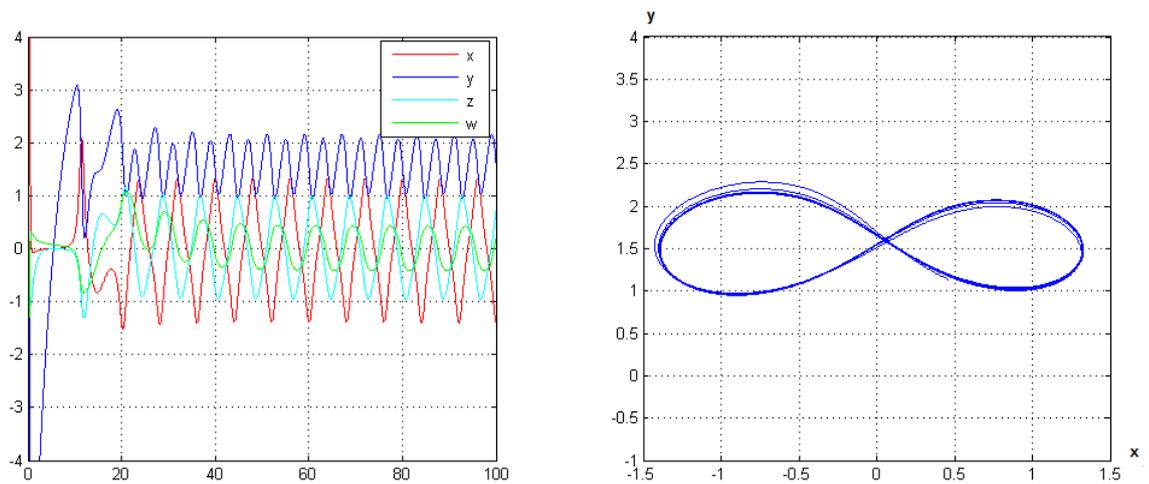


FIGURE 4.13 – Solution du système financier cas $c = 1$.

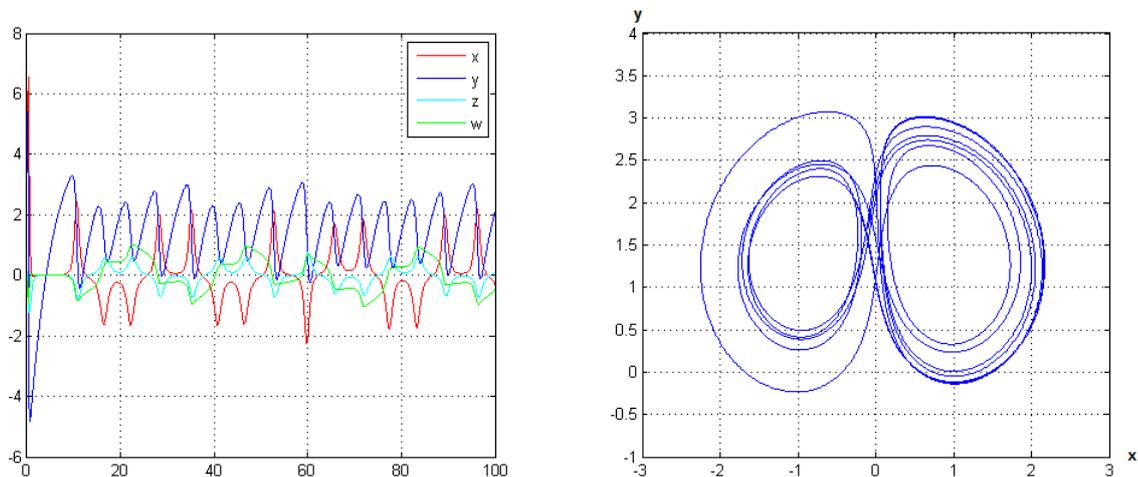


FIGURE 4.14 – Solution du système financier cas $c = 2.5$.

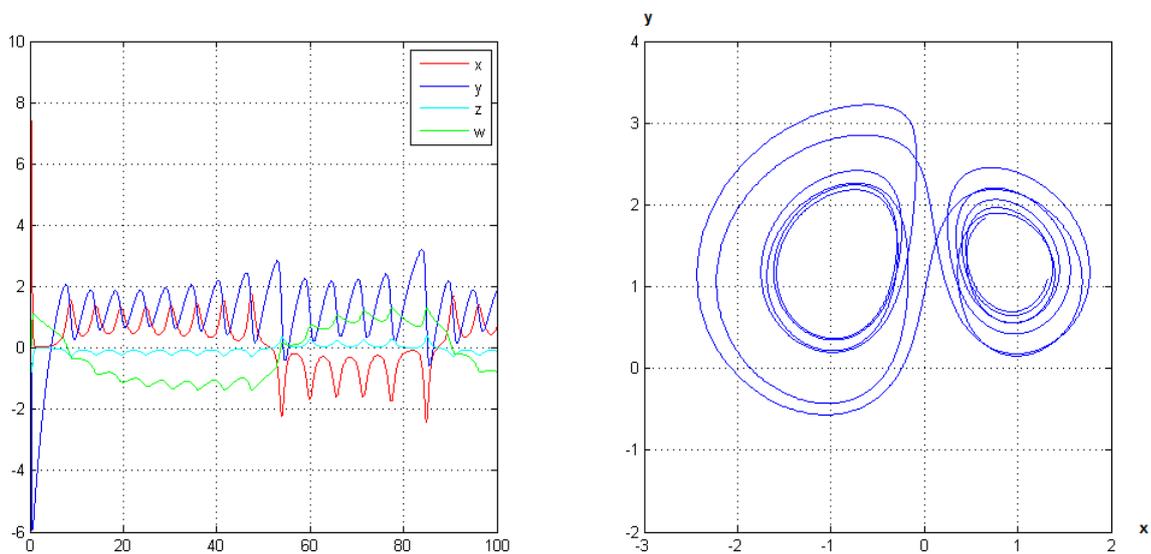


FIGURE 4.15 – Solution du système financier cas $c = 6$.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le but de ce mémoire été l'étude d'un système financier continu.

Dans les deux premiers chapitres nous avons rassemblé les outils nécessaires pour cette étude (les notions des systèmes dynamiques, stabilité, bifurcation), et dans le troisiem chapitre nous avons donné les caractéristiques les plus importantes d'un système chaotique et quelques exemples.

Le dernier chapitre comprend une étude qualitative d'un modèle financier.

Deux versions ont été pris en considération :

La premiere version concerne le modèle en dimension 3 dans lequel nous avons montré l'existence d'un comportement très riche (existence de cycle limite et chaos).

La deuxième version concerne le modèle en dimension 4 dans lequel nous avons montré l'existence d'un comportement plus complexe et l'hyperchaos est confirmé par l'existence de deux exposant de lyapunov positifs.

ANNEXE

Dans cette partie, nous introduisons quelques méthodes de la résolution numérique des équations différentielles et les algorithmes en Matlab.

Résolution Numérique des équations différentielles :

Nous considérons une équation différentielle résolue du premier ordre. C'est-à-dire le problème :

$$x' = f(x, t)$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}^n \times R \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x \in R \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Méthodes d'Euler

La méthode d'Euler est l'une des plus ancienne méthode de résolution des équations différentielles. Elle est introduite par Leonhard Paul Euler au 18^{ème} siècle. Elle consiste, en pratique, pour une valeur initiale donnée, à tracer un graphe à partir d'une approximation successive des dérivées, en utilisant la fonction f . En choisissant un pas h telle que $h = t_{i+1} - t_i$, et une valeur initiale x_{t_0} à un temps t_0 , on peut approximer la dérivée en ce point par $f(x_{t_0}, t_0)$ et ainsi le prochain point de la courbe au temps $h + t_0$ par $x_{t_0} + hf(x_{t_0}, t_0)$. Cela revient à tracer un



segment de la tangente en ce point. En répétant ce processus, on obtient :

$$x_{t_{i+1}} = x_{t_i} + hf(x_{t_i}, t_i) = x_i + hf(x_{t_i}, t_0 + h_i)$$

Elle correspond exactement au développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $x(t)$, c'est-à-dire :

$$x(t) = x_{t_0} + hx_{t_0}^* + O(h^2) = x_{t_0} + hf(x_{t_0}) + O(h^2)$$

et converge donc bien vers la solution pour $h \rightarrow 0$. L'erreur locale est en $O(h^2)$ et l'erreur globale, c'est-à-dire après sommation d'un grand nombre de pas, est donc en $O(h)$. On dira alors que cette méthode est d'ordre 1. La méthode d'Euler fournit une méthode pour résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire dans \mathbb{R}^d qui est sous la forme $x^* = F(x)$, mais elle montre aussi que celle-ci a une solution unique. En terme physique, on dit que l'équation différentielle ordinaire modélise une loi d'évolution déterministe car l'état présent $x(0)$ et la loi $x^* = F(x)$ déterminent de façon unique les états passés et futurs $x(t)$. La méthode d'Euler est relativement imprécise. Pour en trouver de plus précise, nous allons nous intéresser à une méthode particulière.

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

C'est, comme la méthode d'Euler, une méthode pas à pas permettant de calculer une valeur approchée de $x(t+h)$ à partir de celle de $x(t)$. La formule d'itération est plus compliquée que celle de la méthode d'Euler mais l'approximation est meilleure pour une même valeur du pas. Elle s'applique aux systèmes de même type que ceux étudiés par la méthode d'Euler :

$$x^* = f(t, x(t))$$



Les formules d'itération sont les suivantes :

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4)$$

avec :

$$p_1 = f(t, x(t))$$

$$p_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}p_1\right)$$

$$p_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, x(t) + \frac{h}{2}p_2\right)$$

$$p_4 = f\left(t + h, x(t) + hp_3\right)$$

Il y a donc quatre quantités intermédiaires à calculer (p_1, p_2, p_3, p_4) pour obtenir $x(t+h)$. On calcule $x(t+h)$ en fonction de $x(t)$ à. Et on la nomme RK4 (f, x, t, h, n) et s'emploie exactement comme Euler (f, x, t, h, n) . A chaque appel, les valeurs de $x(t)$, contenues dans le tableau x , sont remplacées par les valeurs de $x(t, h)$, f étant la fonction qui définit le système différentiel.

Système financier hyperchaotique de dimension

3 :

Résolution du système (4.1) on utilisons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

```
clear all;  
close all;  
clc;  
T=1000;  
a= 4.17;  
b=0.2;  
c=1.2;
```



```
x(1)= 1 ;
y(1)= 3 ;
z(1)= 2 ;
N=9999 ;
h=T/N ;
t=0 :h :T ;
jj=1 ;
for i=1 :N
k1=h*(z(i)+(y(i)-a)*x(i)) ;
l1=h*(1-b*y(i)-(x(i)*x(i))) ;
p1=h*(-x(i)-(c*z(i))) ;
k2=h*((z(i)+p1/2)+((y(i)+l1/2)-a)*(x(i)+k1/2)) ;
l2=h*(1-(b*(y(i)+l1/2))-(x(i)+k1/2)*(x(i)+k1/2)) ;
p2=h*(-(x(i)+k1/2)-(c*(z(i)+p1/2))) ;
k3=h*((z(i)+p2/2)+((y(i)+l2/2)-a)*(x(i)+k2/2)) ;
l3=h*(1-(b*(y(i)+l2/2))-(x(i)+k2/2)*(x(i)+k2/2)) ;
p3=h*(-(x(i)+k2/2)-(c*(z(i)+p2/2))) ;
k4=h*((z(i)+p3)+((y(i)+l3-a)*(x(i)+k3))) ;
l4=h*(1-(b*(y(i)+l3))-(x(i)+k3)*(x(i)+k3)) ;
p4=h*(-(x(i)+k3)-(c*(z(i)+p3))) ;
x(i+1)=x(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4) ;
y(i+1)=y(i)+(1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4) ;
z(i+1)=z(i)+(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4) ;
if(i>3000)
xx(jj)=x(i+1) ;
yy(jj)=y(i+1) ;
zz(jj)=z(i+1) ;
jj=jj+1 ;
end
end
```



```
subplot(1,2,1)
plot(t,x,'r',t,y,'b',t,z,'c')
grid on
subplot(1,2,2)
plot(xx,yy)
grid on
```

Solution du système (4.1) pour avoir le diagramme de la bifurcation fourche :

```
clear all ;
clc ;
a=0.01 ;
j=1 ;
for i=1 :1100
if (a<4.17)
a1(i)=a ;
p1(i)=0 ;
p2(i)=sqrt((25-6*a)/30) ;
p3(i)=-sqrt((25-6*a)/30) ;
else
a2(j)=a ;
p4(j)=0 ;
title('Bifurcation')
j=j+1 ;
end
a=a+0.01 ;
end
plot(a1,p1','b','MarkerSize',0.5)
```



```
hold on;grid on
plot(a2,p4','b','MarkerSize',0.5)
hold on ; grid on
plot(a1,p2','c','MarkerSize',0.5)
hold on;grid on
plot(a1,p3','r','MarkerSize',0.5)
hold on ; grid on
```

Solution du système (4.2) pour avoir le diagramme de bifurcation :

```
clear all;
close all;
clc;
T=100;
a=0.01;
b=0.2;
c=1.2;
jj=1;
for j=1 :1200
x(1)= 0.9; y(1)=5/6; z(1)=-0.9;N=999;
h=T/N;
t=0 :h :T;
if (a>4.17)
N=1010;
else
N=20000;
end
for i=1 :N
```



```
k1=h*(z(i)+(y(i)-a)*x(i));
l1=h*(1-b*y(i)-(x(i)*x(i)));
p1=h*(-x(i)-(c*z(i)));
k2=h*((z(i)+p1/2)+((y(i)+l1/2)-a)*(x(i)+k1/2));
l2=h*(1-(b*(y(i)+l1/2))-(x(i)+k1/2)*(x(i)+k1/2));
p2=h*(-(x(i)+k1/2)-(c*(z(i)+p1/2)));
k3=h*((z(i)+p2/2)+((y(i)+l2/2)-a)*(x(i)+k2/2));
l3=h*(1-(b*(y(i)+l2/2))-(x(i)+k2/2)*(x(i)+k2/2));
p3=h*(-(x(i)+k2/2)-(c*(z(i)+p2/2)));
k4=h*((z(i)+p3)+((y(i)+l3-a)*(x(i)+k3)));
l4=h*(1-(b*(y(i)+l3))-(x(i)+k3)*(x(i)+k3));
p4=h*(-(x(i)+k3)-(c*(z(i)+p3)));
x(i+1)=x(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
y(i+1)=y(i)+(1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4);
z(i+1)=z(i)+(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
if (i>1000)
if(a<4.17)
if (abs(x(i+1)-sqrt((25-6*a)/30))<0.001)
yy(jj)=y(i);
zz(jj)=z(i);
aa(jj)=a;
jj=jj+1;
end
else
if (abs(x(i+1))<0.001)
yy(jj)=y(i);
zz(jj)=z(i);
aa(jj)=a;
jj=jj+1;
end
```



```
end
end
end
a=a+0.01;
end
figure(1)
plot(aa,yy,''); grid on
figure(2)
plot(aa,zz,''); grid on
```

Système financier hyperchaotique de dimension

4 :

Résolution du système (4.1) on utilisons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

```
clear all;
close all;
clc;
T=100;
a=4.17;
b=0.2;
c=1.5;
d=0.2;
m=0.17;
x(1)=1;
y(1)=2;
z(1)=0.5;
w(1)=0.5;
```



```
N=999;
h=T/N; t=0 :h :T;
jj=1;
for i=1 :N
k1=h*(z(i)+(y(i)-a)*x(i)+w(i));
l1=h*(1-b*y(i)-(x(i)*x(i)));
p1=h*(-x(i)-(c*z(i)));
R1=h*(-d*x(i)*y(i)-m*w(i));
k2=h*((z(i)+p1/2)+((y(i)+l1/2)-a)*(x(i)+k1/2));
l2=h*(1-(b*(y(i)+l1/2))-(x(i)+k1/2)*(x(i)+k1/2));
p2=h*(-(x(i)+k1/2)-(c*(z(i)+p1/2)));
R2=h*(-d*(x(i)+k1/2)*(y(i)+l1/2)-m*(w(i)+R1/2));
k3=h*((z(i)+p2/2)+((y(i)+l2/2)-a)*(x(i)+k2/2));
l3=h*(1-(b*(y(i)+l2/2))-(x(i)+k2/2)*(x(i)+k2/2));
p3=h*(-(x(i)+k2/2)-(c*(z(i)+p2/2)));
R3=h*(-d*(x(i)+k2/2)*(y(i)+l2/2)-m*(w(i)+R2/2));
k4=h*((z(i)+p3)+((y(i)+l3-a)*(x(i)+k3)));
l4=h*(1-(b*(y(i)+l3))-(x(i)+k3)*(x(i)+k3));
p4=h*(-(x(i)+k3)-(c*(z(i)+p3)));
R4=h*(-d*(x(i)+k3)*(y(i)+l3)-m*(w(i)+R3));
x(i+1)=x(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
y(i+1)=y(i)+(1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4);
z(i+1)=z(i)+(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
w(i+1)=w(i)+(1/6)*(R1+2*R2+2*R3+R4);
if(i>300)
xx(jj)=x(i+1);
yy(jj)=y(i+1);
zz(jj)=z(i+1);
ww(jj)=w(i+1);
jj=jj+1;
```



```
end
end
subplot(1,2,1)
plot(t,x,'r',t,y,'b',t,z,'c',t,w,'g')
grid on
subplot(1,2,2)
plot(xx,yy)
grid on
```

Solution du système (4.2) pour avoir le diagramme de bifurcation :

```
clear all;
close all;
clc;
T=100;
a=0.01;
b=0.2;
c=1.5;
d=0.2;
m=0.17;
jj=1;
for j=1 :1500
x(1)=sqrt((17*a/15)+(79/45));
y(1)=(17*a/3)+(34/9);
z(1)=-2/3*(sqrt((17*a/15)+(79/45)));
w(1)=((20*a/3)+40/9)*sqrt((17*a/15)+(79/45));
N=999;
if (a>4.46)
```



```
T=20;
else
T=200;
N=10000
end
h=T/N;
t=0 :h :T;
for i=1 :N
k1=h*(z(i)+(y(i)-a)*x(i));
l1=h*(1-b*y(i)-(x(i)*x(i)));
p1=h*(-x(i)-(c*z(i)));
R1=h*(-d*x(i)*y(i)-m*w(i));
k2=h*((z(i)+p1/2)+((y(i)+l1/2)-a)*(x(i)+k1/2));
l2=h*(1-(b*(y(i)+l1/2))-(x(i)+k1/2)*(x(i)+k1/2));
p2=h*(-(x(i)+k1/2)-(c*(z(i)+p1/2)));
R2=h*(-d*(x(i)+k1/2)*(y(i)+l1/2)-m*(w(i)+R1/2));
k3=h*((z(i)+p2/2)+((y(i)+l2/2)-a)*(x(i)+k2/2));
l3=h*(1-(b*(y(i)+l2/2))-(x(i)+k2/2)*(x(i)+k2/2));
p3=h*(-(x(i)+k2/2)-(c*(z(i)+p2/2)));
R3=h*(-d*(x(i)+k2/2)*(y(i)+l2/2)-m*(w(i)+R2/2));
k4=h*((z(i)+p3)+((y(i)+l3-a)*(x(i)+k3)));
l4=h*(1-(b*(y(i)+l3))-(x(i)+k3)*(x(i)+k3));
p4=h*(-(x(i)+k3)-(c*(z(i)+p3)));
R4=h*(-d*(x(i)+k3)*(y(i)+l3)-m*(w(i)+R3));
x(i+1)=x(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
y(i+1)=y(i)+(1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4);
z(i+1)=z(i)+(1/6)*(p1+2*p2+2*p3+p4);
w(i+1)=w(i)+(1/6)*(R1+2*R2+2*R3+R4);
if (i>800)
if(a<4.46)
```



```
if (abs(x(i+1))<0.005)
yy(jj)=y(i);
zz(jj)=z(i);
ww(jj)=w(i);
aa(jj)=a;
jj=jj+1;
end
else
if (abs(x(i+1))<0.005)
yy(jj)=y(i);
zz(jj)=z(i);
aa(jj)=a;
jj=jj+1;
end
end
end
end
end
a=a+0.005;
end
figure(2)
plot(aa,zz,'); grid on
```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **A. Arama, F. Loucif.** *Etude de la dynamique d'un modèle écologique.* Mémoire de master, Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila, (2015).
- [2] **J. Bricmont.** *Introduction a la dynamique non lineaire.* Chemin du Cyclotron 2, B-1348 LLN, (2010).
- [3] **S. Cherafa, K. Djoudi.** *Stabilité et bifurcation d'un modèle Electrique.* Mémoire de master, Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila, (2015).
- [4] **I. Ellouze.** *Étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs.* Mémoire pour l'obtention du Doctorat de l'Université Paul Verlaine de Metz et de l'Université de Sfax. 15 décembre 2010.
- [5] **C. Gomez.** *Systèmes dynamiques.* Février 2007.
- [6] **S. Hayes, C. Wolf.** *Dynamics of a one-parameter family of Henon maps Dynamical Systems,* Vol 21(4), 399-407, (2006).
- [7] **J.G. Jian, X.L. Deng, J.F. Wang.** *In : Globally Exponentially Qtttractive Set and Synchronization of a class of Chaotic Finance Systeme.,* lect. Notes Comput. Sci. vol 5551, 253-261, (2009).
- [8] **M. KESMIA.** *phénomènes chaotiques dissipatifs..* Mémoire de magistère, Mai (2007).
- [9] **J. Le Bourlot.** *Introduction aux systèmes dynamiques dissipatifs.* Mastère "Astronomie et Astrophysique", Paris, (2009).



-
-
- [10] **J. Louis Pac.** *Système dynamique cours et exercices corrigés.* Dunod, Paris, (2012).
- [11] **M. Mammeri.** *Sur la stabilité Structurelle des Difféomorphismes Quadratiques en Dimension 2.* Mémoire de magistère, Université kasdi merbah, Ouargla, (2011).
- [12] **L. Pastur.** *Système dynamique.* Master de physique Appliquée et Mécanique, Université Paris-Sud 11, (2011).
- [13] **I. Talbi** *Systèmes dynamiques non linéaire et phénomènes de chaos.* Mémoire de magistère, Université de Mentouri, Constantine, (2010).
- [14] **A.Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, and J.A.Vastano,** *Determining Lyapunov Exponents from a time Series,* Physica 16D,17D, 285-317 (1985).
- [15] **L. Yao, G. Cai.** *Chaos Synchronization of a New Hyperchaotic Finance System Via a Novel Chatter Free Sliding Mode Control Strategy.,* International Journal of Nonlinear Science, Vol.17 No.2, 176-181 (2014).
- [16] **H. Yu, G. Cai, Y. Li.** *Dynamic analysis and control of a new hyperchaotic finance System.* vol 67 :2171–2182, (2012).
- [17] **D. Zengru, M. Sanglier.** *A two-dimensional logistic model for the interaction of demand and supply and its bifurcations,* Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 7 No. 12, 2259-2266, (1996).
- [18] **H.Zeraoulia, J.C. Sprott.** *On the robustness of chaos in dynamical systems : Theories and applications.* Mémoire de magistère, Mai.
- [19] **X.S. Zhaos, Z.B. Li, S. Li.** *Synchronization of a chaotic finance system.* Appl. Math., Comput. 217(13), 6031–6039 (2011).

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous avons présenté certains outils et concepts pour l'étude d'un système dynamique continue (Stabilité, points d'équilibre, bifurcations, chaos, exposants de Lyapunov), comme une application de ces concepts nous avons étudié deux systèmes financiers chaotique et hyperchaotique.

Le premier système est composé de trois équations différentielles lié aux taux d'intérêt, la demande d'investissement et l'indice des prix, contrôlé par les facteurs suivant: l'épargne, le coût d'investissement et la demande de marchandises, et pour étudié le comportement dynamique de ce système nous avons considéré le facteur d'épargne comme paramètre de bifurcation, et nous avons analysé les points d'équilibres, nous avons remarqué que:

Lorsque l'épargne est supérieure à une certaine valeur qu'on a déterminé on trouve un seul point d'équilibre qui est stable pour certains conditions et lorsque l'épargne est inférieure à cette valeur on trouve trois points d'équilibre qui sont toujours instables.

Dans le second système après avoir analysé les points d'équilibre selon le facteur d'épargne, nous avons trouvé trois points d'équilibre, le premier est stable lorsque l'épargne est supérieure à une valeur bien déterminé, et si l'épargne est inférieure à cette valeur ce point d'équilibre perd sa stabilité, et les autres points restent toujours instables, mais après avoir analysé les points d'équilibre selon le facteur de la demande de marchandises nous avons trouvé trois points d'équilibre qui sont toujours instables.

Enfin, nous avons utilisé des simulations numériques pour illustrer les comportements dynamiques complexes de l'évolution des deux systèmes. La présence de bifurcations du chaos a été prouvé par l'existence d'un exposant de Lyapunov positif.

MOTS-CLÉS

Système financier Chaotique, Système dynamique, Stabilité, Bifurcation, Chaos.

ABSTRACT

In this thesis, we talked about some concepts for the study of continuous dynamical system, (Stability, equilibrium points, bifurcations, chaos, Lyapunov exponent), as application of these concepts we studied two hyper chaotic financial systems.

The first system is composed of three differential equations related to interest rates, investment demand and the price exponent controlled by the following factors: Saving, the per investment cost, and elasticity of demands of commercials, and to study the dynamic behavior of this system we have considered factors such variable saving, and by analyzing the equilibrium points, we noticed that:

When saving is greater than a certain value then we have one equilibrium which is stable under certain conditions, if saving is below this value then there are three points of unstable equilibrium.

In the second system after analyzing the equilibrium points by saving factor, we found three equilibrium points, the first is stable when the savings is greater than a determined value, and when the saving is less than this value, the equilibrium becomes unstable, and the others are still unstable points, but after analyzing the equilibrium points by the elasticity of demands of commercials, we found three equilibrium points which are unstable.

Finally we use computer simulations to illustrate the complex dynamic behavior of the evolution of both systems where the presence of bifurcations and chaos are carried out using a positive Lyapunov exponent.

KEY WORDS

Chaotic financial system, Dynamic system, Stability, Bifurcation, Chaos.

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا إلى بعض المفاهيم لدراسة نظام ديناميكي مستمر (الاستقرار, نقاط التوازن, التشعبات, الفوضى, أسس لياينوف), وكتطبيق لهذه المفاهيم درسنا نظامين ماليين فوضويين.

يتألف الأول من ثلاث معادلات تفاضلية ترتبط بمعدل الفائدة الطلب على الاستثمار ومؤشر الأسعار وتتحكم فيها ثلاث عوامل هي الادخار تكلفة الاستثمار والطلب على السلع, ودراسة السلوك الديناميكي له أخذنا عامل الادخار كعنصر مؤثر وقمنا بتحليل نقاط التوازن فلاحظنا أنه عندما يكون الادخار أكبر من قيمة معينة تم تحديدها يكون لدينا نقطة توازن واحدة مستقرة تحت بعض الشروط, وعندما يكون الادخار أقل من هذه القيمة نجد ثلاث نقط توازن غير مستقرة.

أما النظام الثاني وبعد تحليل نقاط التوازن باعتبار عامل الادخار وجدنا ثلاث نقط توازن, النقطة الأولى تكون مستقرة عندما يكون الادخار أكبر من قيمة معينة قمنا بتحديددها وعندما يقل عن هذه القيمة تفقد النقطة استقرارها أما باقي النقط فتكون دائماً غير مستقرة. أما عند تحليل نقاط التوازن باعتبار عامل الطلب على البضائع هو العنصر المؤثر وجدنا ثلاث نقط توازن غير مستقرة.

كما تم استعمال المحاكاة العددية لتوضيح السلوكيات الدينامكية المعقدة لتطور النظامين حيث تم الكشف عن وجود التشعبات والفوضى من خلال وجود أس لياينوف موجب.

الكلمات المفتاحية

النظام المالي الفوضوي, النظام الديناميكي, الاستقرار, التشعب, الفوضى.