الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :...............

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatiques

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

En: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Préparé par :

- Bounamous Saida
- Bouzeraa Amina

Soutenue devant le jury

Encadré par : Labed Boudjema ....M. A. A
Président : Laouira Widad ....M. A. A
Examinateur : Sakhane Chafika ....M. A. B

Année Universitaire : 2015/2016

Remerciement

Avant tout, nous remercions ALLAH tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener ce travail.

D'une façon toute particulière, On tient à remercier notre encadreur Monsieur LABED Boudjamea, pour nous avoir fait travailler sur un Projet aussi intéressant et riche.

Nous lui sommes reconnaissants tout particulièrement pour la confiance qu'il nous a témoignée et la liberté qui nous a laissé.

Nous remercions Madame LAOUIRA Widad d'avoir accepté présider le Jury de ce travail.

Nous remercions aussi Madame SAKHAN Chafika, pour avoir acceptée d'examiner ce travail.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude aux nombreuses personnes qui nous ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse.

Nous remercions aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadrés, observé, aidé, conseillé et même supporté.

On tient également à remercier ici toutes les personnes, les amis, dont on a croisé le chemin au l'institut des sciences et de technologie de Mila et ailleurs.

Enfin, on souhaite exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes, qui ont contribué largement à son aboutissement.

Amina, Saida

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Du point de vue mathématique, un *système de contrôle* est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

Le développement de ces sciences nécessite résolution ces équations et souvent numériquement afin d'obtenir des propriétés quantitatives des solutions. La phase de la modélisation de ces phénomènes passe en partie en meilleure compréhension les propriétés des solutions et des équations, elle consiste à représenter la phénomène à étudier par des systèmes des équations Mathématiques et à préciser aguerrissement le cadre fonctionnel où l'on travail prenant en compte toutes les données connues concernant le phénomène. L'osque ces systèmes faite apparaitre un variable d'espace s'appellent systèmes distribués.

La notion de la *contrôlabilité* a été inventé dans les années 60 par **Kalman**, **Bertram**, et **Bellman** à propos des systèmes linéaires contiennent un variable d'espace de contrôle, l'état de système dépend du variable de cet espace et d'un variable caractérisant l'espace géométrique sur lequel le système est défini.

Pour les *systèmes de contrôle linéaires*, un système de contrôle est dit contrôlable si on est capable de l'amener d'un point initial arbitraire vers un point final souhaité.

Pour les *systèmes de contrôle non linéaires*, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile. Quand on cherche à étudier la contrôlabilité d'un système de contrôle de dimension finie autour d'un point d'équilibre, la première chose à faire est d'étudier la contrôlabilité du linéarisé autour du point d'équilibre. Si ce linéarisé est contrôlable on en déduit, à l'aide du théorème d'inversion locale, la contrôlabilité locale du système non linéaire autour du point d'équilibre au moins dans le cas d'un système de dimension finie. Ce résultat reste essentiellement vrai en dimension infinie.

Organisation du mémoire

Ce mémoire est organisé en trois chapitres qui sont présenté comme suit :

Le 1^{er} **chapitre,** nous rappelons quelques notions d'espaces et d'inégalités principaux, nous parlerons aussi de l'opérateur maximal monotone et la théorie des semi-groupes sa définition et ses propriétés.

Le $2^{ème}$ **chapitre,** nous présenterons la contrôlabilité des systèmes linéaires, puis on établit des critères pour les caractériser et enfin on illustre les résultats théoriques obtenus par des exemples.

Le $3^{ème}$ **chapitre,** nous présenterons la contrôlabilité des systèmes non linéaires avec ses deux dimensions finies et infinies.

CHAPITRE 1

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1.1 Normes

Définition 1.1. *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Une application $\|.\|$ est une norme si et seulement si

1. $\forall x \in H,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}; \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *(homogénéité).*
2. $\forall x, y \in H; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*
3. $\forall x \in H; \|x\| \geq 0$ *(positivité).*
4. $\forall x \in H; \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Exemples :

a) L'espace vectoriel $H = \mathbb{R}$ muni de l'application «valeur absolue» $x \longmapsto |x|$.

b) L'espace vectoriel $H = \mathbb{C}$ muni de l'application «module» $z \longmapsto |z|$.

c) Tout espace vectoriel euclidien $(H, \langle ., . \rangle)$ muni de la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est un espace vectoriel normé.

d) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'espace vectoriel $H = C^{\infty}([a, b])$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x},$$

ou encore de la norme

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

est un espace vectoriel normé.

Notation 1.1. ***(Les normes usuelles sur*** $\mathbb{R}^n$***)***
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note

$$\begin{array}{rcl} \|x\|_1 & = & |x_1| + |x_2| \cdots + |x_n|, \\ \|x\|_2 & = & \sqrt{x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_n^2}, \\ \|x\|_{\infty} & = & \max(|x_1|, |x_2| \ldots, |x_n|), \end{array}$$

les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2. *Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur H sont dites équivalentes si et seulement si*

$$\exists\, c, c^{'} > 0, \ \textit{tel que} \ \ c\|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq c^{'}\|.\|_1.$$

Proposition 1.1. *La relation définie précédemment entre les normes sur un espace vectoriel est une relation d'équivalence.*

Proposition 1.2. *Sur $\mathbb{R}^n$ les trois normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_{\infty}$ sont équivalentes.*

Définition 1.3. *Si $(H, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, alors l'application*

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{d} & : & H \times H & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & (x, y) & \longmapsto & d(x, y) = \|x - y\|, \end{array}$$

est appelée la distance associée à $\|.\|$.

Proposition 1.3. *On a $\forall x, y, z$ et $a \in H$,*

1. $\mathrm{d}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

2. $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$.
3. $\mathrm{d}(x,z) \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$ *(inégalité triangulaire).*
4. $\mathrm{d}(x+a, y+a) = \mathrm{d}(x,y)$ *(invariance par translation).*

Définition 1.4. *Soit* $(H, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé,* $a \in H$ *et* $r \in]0, +\infty[$.

1. *La boule ouverte de centre* a *et de rayon* r *est*
$$B(a,r) = \{x \in H,\ \mathrm{d}(x,a) < r\}.$$
2. *La boule fermée de centre* a *et de rayon* r *est*
$$\overline{B}(a,r) = \{x \in H,\ \mathrm{d}(x,a) \leq r\}.$$
3. *La boule sphère de centre* a *et de rayon* r *est*
$$B(a,r) = \{x \in H,\ \mathrm{d}(x,a) = r\}.$$

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.5. *Soit* H *un espace vectoriel réel ou complexe. Un produit scalaire est une application* $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ *si* H *un espace vectoriel complexe et* $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ *si* H *un espace vectoriel réel, vérifiant*

i) $\forall y \in H : x \mapsto \langle x,y \rangle$ *est linéaire (en* x*).*

ii) $\overline{\langle x,y \rangle} = \langle y,x \rangle$.

iii) $\langle x,x \rangle \geq 0$ *et si* $\langle x,x \rangle = 0$ *alors* $x = 0$.

Par conséquent $y \mapsto \langle x,y \rangle$ *est anti-linéaire (en* y*) si* H *un espace vectoriel complexe.*

Définition 1.6. *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire.*

Lemme 1.1. *Soit* H *un espace préhilbertien. Alors pour tous* $x, y \in H$ *on a :*
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y \rangle + \|y\|^2.$$

Preuve :

On a

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2.
\end{aligned}$$

Proposition 1.4. ***(Inégalité de Cauchy Schwarz)***
Soit H un espace préhilbertien. Alors pour tout $x, y \in H$ on a :

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Preuve :

Soient $x, y \in H$ et soit $\lambda \in K,\ |\lambda| = 1$ tel que

$$\lambda\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|.$$

On a $\forall \mu \in \mathbb{R}; \langle \lambda x + \mu y,\ \lambda x + \mu y\rangle \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y\rangle &= \lambda\bar{\lambda}\langle x,x\rangle + \lambda\bar{\mu}\langle x,y\rangle + \mu\bar{\lambda}\langle y,x\rangle + \mu\bar{\mu}\langle y,y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + 2Re\lambda\bar{\mu}\langle x,y\rangle + |\mu|^2\langle y,y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + 2\mu|\langle x,y\rangle| + |\mu|^2\langle y,y\rangle \\
&= \mu^2\langle y,y\rangle + 2|\langle x,y\rangle|\mu + \langle x,x\rangle \geq 0, \forall \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Delta \leq 0 \Longleftrightarrow |\langle x,y\rangle|^2 - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0.$$

Alors

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Corollaire 1.1. *Soit H un espace préhilbertien. Alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ défini une norme.*

Définition 1.7. *On dit que deux vecteurs x, y d'un espace vectoriel complexe sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle ., .\rangle$ si $\langle x, y\rangle = 0$.*

Définition 1.8. *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire.*

Définition 1.9. *Soit H un espace de Hilbert et H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels. On dit que H est la somme direct orthogonale de H_1 et H_2, notée $H = H_1 \bigoplus^{\perp} H_2$, si $H = H_1 + H_2,\ H_1 \cap H_2 = 0$ et $\forall x_1 \in H_1,\ \forall x_2 \in H_2;\ \langle x_1, x_2\rangle = 0$.*
Le complémentaire orthogonale d'un sous-espace $F \subset H$ est défini par :

$$F^{\perp} = \{x \in H \backslash F,\ \forall y \in F : \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Théorème 1.1. *Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous espace fermé.*
Soit $x \in H$; alors

i) Il existe un unique $y \in F$ qui satisfait

$$\|x - y\| = d(x, F) = \inf\{\|x - z\|,\ z \in F\}.$$

On note $y = P_F(x)$. Ceci définit alors une application

$$P_F : H \to H.$$

ii) $P_F(x)$ est l'unique vecteur dans F qui satisfait $x - P_F(x) \perp F$.

iii) $\forall x \in H : \|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|P_{F^{\perp}}(x)\|^2$.

iv) L'application $P_F : H \to H$ est linéaire et continue. C'est la projection sur F le long $F^{\perp}$.

v) Le complémentaire orthogonal $F^{\perp}$ est un sous espace fermé de H et $H = F \oplus F^{\perp}$.

Preuve :

Pour i) :

Pour $\varepsilon > 0$, prenons $y,\ z \in F$ et supposons que

$$d(x,y)^2 \leq d(x,F)^2 + \varepsilon \ \text{ et } \ d(x,z)^2 \leq d(x,F)^2 + \varepsilon.$$

Posons $w = \dfrac{y+z}{2},\ u = \dfrac{y-z}{2}$ de telle façon que $w \in F,\ y = w+u,\ z = w-u.$
D'après l'identité du parallélogramme on a :

$$\begin{array}{rcl} \|(x-w)+u\|^2 + \|(x-w)-u\|^2 & = & 2(\|x-w\|^2 + \|u\|^2) \\ \dfrac{\|x-z\|^2 + \|x-y\|^2}{2} & = & d(x,w)^2 + \dfrac{1}{4}d(y,z)^2 \\ d(x,F)^2 + \varepsilon & > & d(x,F)^2 + \dfrac{1}{4}d(y,z)^2 \\ d(y,z) & < & 2\sqrt{\varepsilon}. \end{array}$$

Soit maintenant $(y_n) \in F$ une suite telle que $d(x,y_n) \to d(x,F)$. Alors d'après notre calcul c'est une suite de Cauchy qui doit donc converger vers un $y \in F$ (puisque H est complet et F est ferme).

Nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} d(x,y) & = & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} d(x,y_n) \\ & = & d(x,F). \end{array}$$

Pour unicité supposons que $z \in F$ vérifier lui aussi $d(x,z) = d(x,F)$.
Alors encore d'après le calcule précédent $d(y,z) < 2\sqrt{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui donne

$$d(y,z) = 0 \quad \text{alors} \quad y = z.$$

Ceci montre le première point et donc l'existence de l'application P_F.

Pour ii) :

Supposons que $x - P_F(x)$ n'est pas orthogonale de F.

Il existe donc $z \in F$ tel que $\langle x - P_F(x), z\rangle = s \neq 0$, nous pouvons supposer que

$$\langle x - P_F(x), z\rangle = 1.$$

Soit encore t une variable réelle. Alors $P_F(x) + tz \in F$ et on a

$$\begin{aligned} d(x, P_F(x) + tz)^2 &= \|x - P_F(x) - tz\|^2 \\ &= t^2\|z^2\| - 2t + \|x - P_F(x)\|^2. \end{aligned}$$

Ce polynôme en t atteint son minimum ailleurs qu'à $t = 0$, donc

$$d(x, F) < d(x, P_F(x)),$$

une contradiction au choix de $P_F(x)$.

Nous avons donc bien

$$x - P_F(x) \perp F.$$

Pour l'unicité, supposons que $x - y \perp F$ et $x - z \perp F$, où $y, z \in F$ (par exemple, on pourrait avoir $y = P_F(x)$) alors

$$y - z \in F,$$

d' où

$$\langle x - y, y - z\rangle = \langle x - z, y - z\rangle = 0.$$

Une soustraction donne $\langle y - z, y - z\rangle = 0 \Longrightarrow y - z = 0 \Longrightarrow y = z$.

Pour iii) :

Le troisième point découle du deuxième, alors $x - P_F(x) \perp P_F(x)$.

Pour (iv) :

On vérifier aisément que

$$(x + \lambda y) - (P_F(x) + \lambda P_F(y)) = (x - P_F(x)) + \lambda(y - P_F(y)) \in F^\perp.$$

D'où

$$P_F(x) + \lambda P_F(y) = P_F(x + \lambda y).$$

D'après (ii), et P_F est linéaire. D'après (iii) nous avons $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ donc P_F est continue (de norme ≤ 1).

Pour v) :

Pour tout $x \in H$ nous avons $x = (x - P_F(x)) + P_F(x)$, où $x - P_F(x) \in F^{\perp}$
et $P_F(x) \in F$, ce qui donne bien $F \oplus F^{\perp} = H$.

Corollaire 1.2. *Pour tout sous-espace vectoriel fermé $F \subset H$ on a $(F^{\perp})^{\perp} = F$.*
En particulier l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel non fermé est fermé.
En autre F est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

Corollaire 1.3. ***(Théorème de représentation de Riesz)***
Soit $\varphi : H \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $y \in H$ tel que pour tout x ;

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle.$$

En autre, nous avons $\|\varphi\| = \|y\|$ où

$$\|\varphi\| = \sup\Big\{|\varphi(x)|; |x| \leq 1\Big\}.$$

Corollaire 1.4. *Un espace de Hilbert H est séparable s'il possédé une suite de points qui est dense dans H.*

Définition 1.10. *Soit H un espace de Hilbert séparable. On appelle base orthonormale de H tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie*

i) $\|e_n\| = 1$ *et* $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ *si* $n \neq m, \forall n, m \in \mathbb{N}$.

ii) Le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans H.

Théorème 1.2. ***(Existence des bases orthonormales)***
Tout espace de Hilbert séparable possédé une base orthonormale.

Théorème 1.3. *Soient H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale.*

i) Pour toute $(\lambda_n)_n \in L^2(\mathbb{N})$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda_n e_n$ converge dans H et sa somme $x = \sum\limits_{n\geq 0} \lambda_n e_n$ vérifie

$$\langle x, e_n\rangle = \lambda_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\lambda_n|^2.$$

ii) Pour tout $x \in H$ la série $\sum\limits_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2$ converge et

$$x = \sum_{n\geq 0} \langle x, e_n\rangle e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

Définition 1.11. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert.*
Une isométrie entre H_1 et H_2 est une application linéaire $U : H_1 \to H_2$ qui satisfait

$$\forall x \in H_1, \|U(x)\| = \|x\|.$$

H_1 et H_2 sont d'isomorphes s'il existe une isométrie bijective entre eux.

Proposition 1.5. *Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach. Soit $E \subset X_1$ un sous espace vectoriel dense (non nécessairement complet).*
Soit $u : E \to X_2$ une application linéaire, et supposons en autre qu'elle est continue (ce qui revient à l'existence d'une constante c telle que pour tout $x \in E$: $\|u(x)\| \leq c\|x\|$).
Alors u admet un unique prolongement en une application linéaire continue

$$\tilde{u} : X_1 \to X_2.$$

1.3 Espaces de Lebesgue $L^p, 1 \leq p \leq \infty$

Considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
Les fonctions f seront considérées de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.12. $(L^p(\Omega),\ p \in [1, +\infty])$
On définit $L^p(\Omega)$ $(p \in [1, +\infty])$ par :

1. *Si* $p \in [1, +\infty[$:

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ tel que } \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

On définit sur $L^p(\Omega)$ *la norme*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. *Si* $p = +\infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \textit{ tel que } \exists c \in \mathbb{R} \textit{ vérifie } |f| \leq c \textit{ presque partout sur } \Omega \right\}.$$

On définit sur $L^\infty(\Omega)$ *la norme*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ c \in \mathbb{R}, \textit{ tel que } |f| \leq c, \textit{ presque partout sur } \Omega \right\}.$$

Lemme 1.2. ***(Inégalité de Minkowski)***
Pour tout f, g *mesurables on a :*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Théorème 1.4. $L^p(\Omega)$ *est un espace vectoriel et* $\forall p \in [1, \infty]$; $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ *est une norme.*

Théorème 1.5. ***(De convergence dominée de Lebesgue pour les espaces*** $L^p(\Omega)$***)***
On suppose $p \neq \infty$. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables telle que* $f_n(x) \to f(x)$ *presque partout si* $\exists g \in L^p$, $\forall (x, n)$; $|f_n(x)| \leq g(x)$ *alors* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $f_n \to f$ *en norme de* $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.6. ***(Fischer-Riesz)***
$\forall p \in [1, \infty]$, $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

Théorème 1.7. *Les fonctions en escaliers forment un sous-espace vectoriel dense de* $L^p(\Omega)$ *pour* $p \in [1, \infty[$.

Théorème 1.8. ***(De densité)***
L'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Théorème 1.9. *L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions infiniment dérivables à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, \infty[$.*

Proposition 1.6. *L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans le sous espace de $L^\infty(\Omega)$ des fonctions bornées qui tendent vers 0 à l'infini.*

Définition 1.13. *Un espace est séparable si et seulement si il contient une partie dénombrable dense.*

Théorème 1.10. *$L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Proposition 1.7. *$L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Définition 1.14. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} J : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & J(x) = f =< f, x > . \end{array}$$

Un espace E est dit réflexif si J est bijective de E dans F.

Théorème 1.11. *$L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Proposition 1.8. *$L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflexifs.*

Théorème 1.12. ***(Réciproque du théorème de Lebesgue)***
Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ tels que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Alors il existe une sous suite extraite f_{n_k} telle que

1. *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ presque partout sur Ω.*
2. *$\forall k \in \mathbb{N}, |f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ presque partout sur Ω, avec $h \in L^p(\Omega)$.*

Remarque 1.1. *On peut souvent utiliser une convergence faible pour démontrer une convergence forte.*

Exemple 1.1. *Soit $P > 1$ et $(f_n)_{n\in N}$ une suite dans $L^p(\Omega)$ qui converge faiblement vers $f \in L^p(\Omega)$ et telle que $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|f\|_{L^p(\Omega)}$. Alors $(f_n)_{n\in N}$ converge fortement vers f pour la norme $L^p(\Omega)$.*

Proposition 1.9. *Le produit de deux fonctions de $L^2(\Omega)$ est intégrable.*

Définition 1.15. *On peut définir un produit scalaire euclidien sur $L^2(\Omega)$ par :*

$$(f,g) \mapsto \langle f \setminus g\rangle = \int_\Omega fg dx.$$

On peut définir un produit scalaire hermitien sur $L^2(\mathbb{C})$ par :

$$(f,g) \mapsto \langle f \setminus g\rangle = \int_\Omega \overline{fg} dx.$$

Théorème 1.13. *Muni de son produit scalaire, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

1.4 Espaces de Sobolev : $(W^{m,p}(\Omega); m \in \mathbb{N}, p \in [1,+\infty])$

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels, des fonctions qui appartiennent à $L^p(\Omega)$ telles que leurs dérivées (au sens faible i.e au sens des distribution) appartiennent à $L^p(\Omega)$.

Définition 1.16. *Soient $(m,p) \in \mathbb{N} \times [1,\infty]$. On définit $(W^{m,p}(\Omega))$ par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m, \exists g(x) \in L^p(\Omega) \text{ vérifiant} \\ \\ \int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall \varphi \in D(\Omega) \end{array} \right\}.$$

$D(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; D^\alpha f \in C(\Omega) \text{ avec support def compact } \subset \Omega \Big\}.$

On pose $D^\alpha f = g(x)$.

On définit sur $W^{m,p}(\Omega)$ la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|g(x)\|_{L^p(\Omega)}.$$

Cas particulière :

1- $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

2- $p = 2 : W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Proposition 1.10. $H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert de produit scalaire donnée par :*

$$\forall f,\ g \in H^m(\Omega) : \langle f, g\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha f(x) D^\alpha g(x)\, dx = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha f,\ D^\alpha g\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 1.2. $C^m(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ *mais l'inverse n'est pas vrai.*

Proposition 1.11. $D(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.3. *En générale* $D(\Omega)$ *n'est pas dense dans* $H^1(\Omega)$.

Définition 1.17. $(H_0^m(\Omega))$.
On définit $H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$*(par rapport à la norme de* $H^m(\Omega)$*). C'est-à-dire*

$$H_0^m(\Omega) = \Big\{ f \in H^m(\Omega) / \exists (\varphi_k) \in D(\Omega) \textit{ vérifiant } \|\varphi_k - f\|_{H^m(\Omega)} \to 0 \textit{ tend } k \to +\infty \Big\}.$$

Le même $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ *par rapport à la norme de* $W^{m,p}(\Omega)$.

Définition 1.18. $(H_0^2(\Omega))$

$$H_0^2(\Omega) = \overline{D(\Omega)}\,(\textit{par rapport la norme de } H^2(\Omega)).$$

Proposition 1.12. *Si* Γ *est de classe* C^2*, alors* $H_0^2(\Omega) = \ker \gamma_0 \bigcap \ker \gamma$
(c'est-à-dire $f \in H^2(\Omega)$ *tel que,* $f = 0$ *presque partout sur* Γ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0$ *presque partout sur* Γ*).*

1.5 Inégalité d'interpolation

Soit $m \in \mathbb{N}/\{0,1\}$ et $p_1, p_2, \dots, p_m \in [1, +\infty]$ tel que $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_m} \geq 1$.
On pose $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_m}$.

On a $\forall f_i \in L^{p_i}(\Omega),\ i = 1, \ldots, m$ alors $f = f_1 f_2 \ldots f_m \in L^p(\Omega)$ et on a :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

1.6 Inégalité de Hölder

Soient $p,\ q \in [1, +\infty]$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ alors

$$\forall f \in L^p(\Omega),\ \forall g \in L^q(\Omega) \Rightarrow\ f.g \in\ L^1(\Omega),$$

et on a :

$$\|f.g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}.\|g\|_{L^q(\Omega)}$$

$$\Big(\text{i.e : } \int_\Omega |f(x).g(x)| \mathrm{d}x \leq \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.\Big(\int_\Omega |g(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big).$$

1.7 Inégalité de Green

Soient $f,\ g \in H^1(\Omega)$ (où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert) de frontière Γ bornée et de classe C^1 alors

$$\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) \mathrm{d}x = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \mathrm{d}x + \int_\Gamma f(x) g(x) v_i(x) \mathrm{d}x.$$

1.8 Inégalité de Poincaré

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, il existe une constant $c > 0$ vérifiant

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $\nabla f = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\Big)$ c'est-à-dire

$$\int_\Omega \Big[f^2(x) + \sum_{i=1}^{n} \Big|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|^2\Big] \mathrm{d}x \leq c \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \Big|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|^2 \mathrm{d}x.$$

1.9 Opérateur maximal monotone

Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \to H$ un opérateur donnée où $D(A)$ est son domaine ($D(A) \subset H$).

Définition 1.19. *Un opérateur est une application entre deux espaces vectoriels normés. Un opérateur $A : D(A) \to H$ est linéaire si et seulement si*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K};\ \forall x_1, x_2 \in H; A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2).$$

Définition 1.20. *On appelle un opérateur borné toute application linéaire continue de $D(A)$ dans H.*
On dit que A est continue (borné) s'il existe $c \geq 0$ tel que

$$\|Ax\| \leq c\|x\|.$$

Sinon A est dit non borné.

Définition 1.21. *Soit $B(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaire borné sur un espace de Hilbert H, et soit $A \in B(H)$.*
On pose :

$$\|A\| = \inf \{c > 0,\ \forall x \in H : \|Ax\|_H \leq c\|x\|_H\};$$

$\|A\|$ est appelée norme de A.

Définition 1.22. *Soit $A \in B(H)$, on a :*

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \\ &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |< Ax, y >|.\end{aligned}$$

Définition 1.23. *Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \to H$ un opérateur donnée où*

$D(A)$ est son domaine ($D(A) \subset H$).
On dit que A est monotone si

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_H \geq 0;\ \forall u, v \in D(A).$$

Remarque 1.4. *Si A linéaire on a $\langle Au, u\rangle_H \geq 0,\ \forall u \in D(A)$.*

Définition 1.24. *On dit que A est maximal si seulement si $I_d + A : D(A) \to H$ est un surjectif c'est-à-dire*

$$\forall f \in H,\ \exists\, u \in D(A) \text{ tel que } u + Au = f.$$

Proposition 1.13. *Soit H un espace de Hilbert (réel). Les propriétés suivants sont équivalents :*

1. *A est maximal monotone dans H.*
2. *$(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction par tout définie de H pour tout $\lambda \geq 0$.*
3. *A est monotone et il existe λ positif tel que $(I + \lambda A)$ est Surjectif.*

Théorème 1.14. *Supposons que A est maximal monotone alors*

1. *Pour tout $u_0 \in D(A)$, on a le système*

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0,\ \forall\, t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

   Admet un solution unique $u \in C(\mathbb{R}_+, H)$ (C'est-à-dire $\forall t_0 \in \mathbb{R}^+ : \|u(t) - u(t_0)\|_H \to 0$ tend $t \to t_0$). La solution u est dit faible.

2. *Si $u_0 \in D(A)$ alors $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, H) \bigcap W^{0,\infty}(\mathbb{R}_+, D(A))$ où sur $D(A)$ on considère la norme du graphe*

$$\|u\|_{D(A)} = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2},\ \forall u \in D(A).$$

   La solution u dit forte (la régularité de u signifie $\sup\limits_{t \geq 0} \|u(t)\|_H < \infty \sup\limits_{t \geq 0} \|u(t)\|_{D(A)} < \infty$ et u est dérivable au sens des distributions).

3. *Si A est linéaire et $u_0 \in D(A)$ alors $u \in C(\mathbb{R}_+, D(A)) \bigcap C^1(\mathbb{R}_+, H)$. La solution u est dite classique.*

Définition 1.25. *Soient H et G deux espaces de Hilbert.*
Un opérateur A^* défini sur $D(A^*) \subset G^*$ à valeur dans H^*, tel que

$$\forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*) \ \langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle,$$

est appelé l'adjoint de A et vérifie de plus

$$(A^*)^* = A \ et \ \|A^*\| = \|A\|.$$

Proposition 1.14. *Soient A, B deux opérateur linéaires et α, β deux scalaires.*
On a :

1. $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$.
2. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$.
3. $(AB)^* = B^* A^*$.
4. $(A^*)^* = A$.
5. *Si A a un inverse bornée A^{-1} alors $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.*
6. $\ker A^* = (Im\, A)^{\perp}$.
7. $(\ker A^*)^{\perp} = \overline{Im\, A}$.
8. *Si $F \subset H$ est un sous espace vectoriel stable par A alors $F^{\perp}$ est stable par A^*.*

Définition 1.26. *Soit H un espace de Hilbert.*
On dit que l'opérateur A est auto-adjoint si seulement si $A^* = A$ c'est-à-dire

$$\forall u, v \in H; \langle Au, v\rangle = \langle u, A^* v\rangle.$$

L'ensemble de tous les opérateurs auto-adjoints sur H est noté par $\delta(H)$.

Théorème 1.15. *Sur un espace de Hilbert on a les propriétés :*

1. $\forall A, B \in \delta(H)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\alpha A + \beta B \in \delta(H)$.
2. $\forall A, B \in \delta(H)$, AB *est un opérateur auto-adjoint* $\Longleftrightarrow AB = BA$.
3. *Si l'opérateur* $A \in \delta(H)$, *alors on a* $\|A\| = \sup_{\|u\| \leqslant 1} |\langle Au, u\rangle|$.

Définition 1.27. *Un opérateur* $A \in \delta(H)$ *est dite positive et noté* $A \geq 0$ *si*

$$\langle Au, u\rangle \geq 0,\ \forall u \in H.$$

Définition 1.28. *Soient* H_1, H_2 *deux espace de Hilbert.*
Un opérateur $A : H_1 \to H_2$ *est dit compact si tout suite borne* (f_n) *de* $D(A)$ *contiennent un sous suite* (f_{n_k}) *pour laquelle* (Af_{n_k}) *est converge et ça c'est équivalent à l'image d'un ensemble borné par l'opérateur* A *est un ensemble relativement compact.*

Théorème 1.16. *Si* A *est compact* $\Longrightarrow \bar{A}$ *est compact.*

1.10 Théorie de semi groupes

H un espace de Hilbert réel ou complexe muni de la norme $x \longrightarrow \|x\|_H$.
$L(H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de H en lui même.
$L(H)$ est un espace de Banach pour la norme $S \longrightarrow \|S\|$ définie par :

$$\begin{aligned} \|S\| &= \sup_{\|x\|_H = 1} \|Sx\|_H \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\|_H}{\|x\|_H}. \end{aligned}$$

Définition 1.29. *On appelle l'application* $S : [0, +\infty[\longrightarrow L(H)$ *semi groupe fortement continu dans* H *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

i) $S(0) = I_d$.

ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$; $\forall t, s \geq 0$.

iii) $\forall x \in H$, *l'application* $S(.)x$ *est continue sur* $[0, +\infty[$. *Dans la suite nous les appellerons* $S(t)$ *est semi-groupe de classe* C_0 *et note par* C_0*-semi groupe.*

Proposition 1.15. *Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0-semi groupe dans H, alors l'application adjoint $(S^*(t))_{t\geq 0}$ est aussi semi groupe de classe C_0 dans H.*

Lemme 1.3. *Pour $S(t)$ est C_0-semi groupe on a :*

$$\exists M \geq 1 \text{ et } w \in \mathbb{R} \text{ tel que } \|S(t)\| \leq Me^{wt}, \ \forall t \geq 0.$$

Preuve :

Considérons le compact $[0,1]$, comme $(S(t))_{t\geq 0}$ est fortement continue alors l'application $t \longrightarrow S(t)x$ est continue. Donc l'image de $[0,1]$ par cette application est compact alors

$$\exists M_x \text{ tel que } \|S(t)x\| \leq M_x, \ \forall t \in [0,1].$$

D'après le théorème Banach-Steinhauss :

$$\exists M \text{ tel que } \|S(t)\| \leq M, \ \forall t \in [0,1].$$

On remarque que le constant $M \geq 1$ $(1 = \|S(0)\| \leq M)$.
Maintenant si $t \notin [0,1]$, on écrit $t = n + \theta$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0,1[$ donc

$$\begin{aligned} S(t) &= S(n+\theta) \\ &= S(n)S(\theta) \\ &= (S(1))^n S(\theta). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &= \|(S(1))^n S(\theta)\| \\ &\leq \|(S(1))^n\| \|S(\theta)\| \\ &\leq M^n M \\ &\leq Me^{n \log M}. \end{aligned}$$

On pose $\log M = w$ donc

$$\begin{aligned}\|S(t)\| &\leq Me^{nw}\\ &\leq Me^{tw}.\end{aligned}$$

Définition 1.30. *On dit que $S(t)$ est un semi-groupe bornée si*

$$\exists M \geq 0 \textit{ tel que } \|S(t)\| \leq M,\ \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.5. *Si $M \leq 1$ on a nous dit que $S(t)$ contraction.*

Définition 1.31. *: Soit $S(t)$ est C_0-semi groupe, et soit $Ax = \lim\limits_{h \longrightarrow 0^+} \dfrac{S(h)x - x}{h}$; l'opérateur A est un opérateur linéaire et continue. On défini domaine l'opérateur A par :*

$$D(A) = \left\{ x \in H,\ \textit{tel que } \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \textit{ existe} \right\}.$$

L'opérateur A est un appelle générateur infinitésimal de semi groupe $S(t)$ sur H.

Proposition 1.16. *$\forall x \in D(A)$ on a :*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(t)x &= AS(t)x\\ &= S(t)Ax.\end{aligned}$$

Preuve :

Soient $x \in D(A)$ et $y(t) = S(t)x \in D(A)$ alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(t)x &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}\\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h}\\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} S(t)\frac{S(h)x - x}{h}\\ &= S(t)Ax.\end{aligned}$$

De la même manière on aussi :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}S(t)x &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(h)-I}{h} S(t)x \\
&= AS(t)x.
\end{aligned}$$

Théorème 1.17. *A générateur infinitésimal de semi-groupe $S(t)$ alors A est un opérateur fermé.*

Proposition 1.17. *Le domaine $D(A)$ de générateur infinitésimal A de semi groupe $S(A)$ est un espace vectoriel dense dans H.*

Corollaire 1.5. *Soit S(t) un C_0-semi groupe sur H de générateur infinitésimal A, alors pour tout $u_0 \in D(A)$ le système*

$$\begin{cases} u^{'}(t) + Au(t) = 0, \ \forall t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

admet un unique solution $u \in C^1([0, +\infty[; H) \bigcap C([0, +\infty[; D(A))$ donnée par

$$u(t) = S(t)u_0.$$

Corollaire 1.6. *Supposons que u_0 et $f(t)$ est continue dans $D(A)$ on a :*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^{+\infty} S(t-s)f(s)ds,$$

est un solution de système non homogène suivant :

$$\begin{cases} u^{'}(t) + Au(t) = f(t), \forall t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Théorème 1.18. *Soit H un espace de Hilbert réel. Soit A générateur infinitésimal de*

semi groupe $S(t)$ Alors l'opérateur $(\lambda I - A)$ inversible $\forall \lambda \in \rho(A)$.
Où

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A)^{-1} \text{ existe et continue } \}.$$

Preuve :

Comme lemme (1.3) on a $\exists M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \forall t \geq 0.$$

Soit

$$R_\lambda(A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt.$$

Pour tout $x_0 \in D(A)$ alors

$$\begin{aligned} R_\lambda(A)Ax_0 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)Ax_0 dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{dS(t)}{dt} x_0 dt \\ &= e^{-\lambda t} S(t)x_0\Big]_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)x_0 dt \\ &= -x_0 + \lambda R_\lambda(A)x_0. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow x_0 = R_\lambda(A)(\lambda I - A)x_0. \tag{1.1}$$

Et autre façon $\forall x \in H$ on a :

$$\begin{aligned} AR_\lambda(A)x &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} R_\lambda(A)x \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[(S(h) - I) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt \right] \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t+h)xdt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt \right] \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\int_h^{+\infty} \left(e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t} \right) S(t)xdt - \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)xdt \right] \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt - x. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow x = (\lambda I - A)R_\lambda(A)x. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2) on a l'opérateur $(\lambda I - A)$ est inversible de $D(A)$ dans H et l'inverse donnée par :

$$(\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda(A).$$

Remarque 1.6. *$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est s'appelle résolvant de A, $\forall \lambda \in \rho(A)$.*

Théorème 1.19. ***(Hill-yosida)***
Soit $S(t)$ est C_0-semi groupe en espace de Hilbert H. Il existe un constant $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $Re\lambda > \omega$ avec $\lambda \in \rho(A)$:

$$\|R_\lambda^m(A)\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^m}, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Alors A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe $S(t)$.

Preuve :

Soit $x \in H$ on a :

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)^{-m}x\| &= \left\| \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t_1} S(t_1) \dots e^{-\lambda t_m} S(t_m) x dt_1 \dots dt_m \right\| \\
&= \left\| \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} e^{-\lambda (t_1 + \dots + t_m)} S(t_1 + \dots + t_m) x dt_1 \dots dt_m \right\| \\
&\leq \|x\| \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} M.e^{-(Re\lambda - \omega)(t_1 + \dots + t_m)} dt_1 \dots dt_m \\
&\leq \|x\| \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^m}, \ \forall m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Exemple 1.2. *Soit H espace de Hilbert, soit A opérateur linéaire continue de H on a :*

$$S(t) = e^{At} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i A^i}{i!}; \ \forall t \geq 0,$$

est un C_0-semi groupe puisque :

i) $S(0) = I$.

ii) $S(t+s) = e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As} = S(t)S(s); \ \forall t, s \geq 0$.

iii) Pour tout $x \in H$; $S(t)x = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{e^{At}x - x}{t} = Ax$ *continue.*

CHAPITRE 2

CONTRÔLABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Dans ce chapitre on va considérer quelques concepts de contrôlabilité du système (I), puis on établit des critères pour les caractériser et enfin on illustre les résultats théoriques obtenus par des exemples.

Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'un contrôle ou d'une commande.

Un modèle simple englobant une large classe des systèmes de contrôle linéaire est décrit par :

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}(t) = Az(t) + Bu(t) \quad , \, t \in]0, T[\\ z(0) = z^0 \in Z \\ y(t) = Cz(t) \quad , \, t \in]0, T[\end{cases} \qquad (I)$$

Où :

$A : D(A) \subseteq Z \longrightarrow Z$, A est un opérateur linéaire fermé, de domaine dense dans Z et engendrant un C_0-Semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur Z. A fournit le dynamique du système.

$B : U \longrightarrow Z$, B est un opérateur linéaire borné. B excite le système pour modifier l'état.

$C : Z \longrightarrow Y$, C est un opérateur linéaire borné. C récupère les informations d'observation.

Z, U, Y sont des espaces de Hilbert munis des produits scalaires et des normes notés par : $\langle .,. \rangle_Z$, $\langle .,. \rangle_U$, $\langle .,. \rangle_Y$ et $\|.\|_Z$, $\|.\|_U$, $\|.\|_Y$ respectivement.

Z désigne l'espace d'état du système (I), U l'espace de contrôle et Y est l'espace d'observation.

La fonction $z(.) \in Z$ est dite l'état du système (I), $u(.) \in U$ est le contrôle (l'entrée) et la fonction $y(.) \in Y$ représente la sortie du système (I).

Le système (I) admet une solution faible unique fortement continue sur $[0, T]$ donnée par :

$$y(T) = CS(T)z^0 + C\int_0^T S(T-s)Bu(s)ds.$$

On introduit les opérateurs suivants :

$$L_T : L^2(0, T; U) \longrightarrow Z,$$

$$L_T u = \int_0^T S(T-s)Bu(s)\mathrm{d}s;\ \forall u \in L^2(0, T; U).$$

L_T est un opérateur linéaire borné.

$$l_T : L^2(0, T; U) \longrightarrow Y,$$

$$l_T u = C\int_0^T S(T-s)Bu(s)\mathrm{d}s;\ \forall u \in L^2(0, T; U).$$

l_T est un opérateur linéaire borné.

Définition 2.1. *Soit H un espace de Hilbert, $\langle .,. \rangle_H$ son produit scalaire et $\|.\|_H$ la norme corresponde.*

On note par $L^2(0, T; H)$ l'espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_{L^2(0,T;H)}$ défini par :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(0,T,H)} = \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle_H \mathrm{d}t.$$

2.1 Contrôlabilité exacte

Définition 2.2. *Le triplet (A, B, C) est dit exactement contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$ si et seulement s'il est possible de trouver une fonction d'entrée $u(t)$ qui puisse transférer tout état initial $z^0 \in Z$ à la sortie désirée $y_d \in Y$ au bout d'un temps fini T.*
Ceci est équivalent à dire :

$$\forall z^0 \in Z,\ \forall y_d \in Y,\ \exists u \in L^2(0, T; U)\ \textit{tel que}\ y(T) = y_d. \tag{2.1}$$

2.1.1 Caractérisation de la contrôlabilité exacte

Théorème 2.1. *Le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$ si et seulement si*

$$Im\, l_T = Y. \tag{2.2}$$

Preuve :

$\Longrightarrow)$
Supposons que le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable alors selon la définition (2.2) on a :

$$\forall z^0 \in Z,\ \forall y_d \in Y, \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } CS(T)z^0 + l_T u = y_d. \tag{2.3}$$

Pour $z^0 = 0$ on a :

$$\forall y_d \in Y,\ \exists u \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } l_T u = y_d. \tag{2.4}$$

Alors

$$Im\, l_T = Y.$$

$\Longleftarrow)$
Supposons que (2.2) est vérifié et soit $z^0 \in Z, y_d \in Y$.

On a aussi $(y_d - CS(T)z^0) \in Y$ et d'après (2.2) on a :

$$\exists u_0 \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } l_T u_0 = y_d - CS(T)z^0.$$

Alors

$$\exists u_0 \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } CS(T)z^0 + l_T u_0 = y_d.$$

Donc on déduit que

$$\forall z^0 \in Z,\ \forall y_d \in Y,\ \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } y(T) = y_d.$$

D'où la contrôlabilité exacte du triplet (A,B,C).

Théorème 2.2. *Le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur l'intervalle de temps $[0,T]$ si et seulement si*

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que } \|l_T^* y\|_{L^2(0,T;U)} \geq \gamma \|y\|_Y,\ \forall y \in Y, \tag{2.5}$$

où l_T^* est l'opérateur adjoint de l_T.

Preuve :

D'après le théorème (2.1) on a :

$$\begin{aligned} \text{Le triplet } (A,B,C) \text{ est exactement contrôlable} &\iff Im\, l_T = Y \\ &\iff \text{l'opérateur } l_T \text{ est surjectif.} \end{aligned}$$

Et on a :

L'opérateur l_T est surjectif $\iff \exists \gamma > 0$ tel que $\|l_T^* y\|_{L^2(0,T;U)} \geq \gamma \|y\|_Y,\ \forall y \in Y.$

Alors

Le triplet (A,B,C) est exactement contrôlable sur l'intervalle de temps $[0,T]$ si et seulement si

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que } \|l_T^* y\|_{L^2(0,T;U)} \geq \gamma \|y\|_Y,\ \forall y \in Y. \tag{2.6}$$

Théorème 2.3. *Le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$ si et seulement si $\ker l_T^* = \{0\}$ et $Im\, l_T^*$ est fermé.*

Preuve :

$\Longrightarrow)$

On suppose que le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ alors selon le théorème (2.2) on a :

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que } \|l_T^* y\|_{L^2(0,T;U)} \geq \gamma \|y\|_Y, \ \forall y \in Y. \tag{2.7}$$

Donc $\ker l_T^* = \{0\}$.

Reste à montrer que $Im\, l_T^*$ est fermé, soit $(z_n = l_T^* y_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $L^2(0, T; U)$.

D'après l'inégalité (2.7) pour $(y_n)_{n\geq 0}$ on obtient :

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que } \|l_T^* y_n\|^2_{L^2(0,T;U)} \geq \gamma \|y_n\|^2_Y, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy et comme l'opérateur l_T^* est linéaire borné alors

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} z_n &= \lim_{n\to+\infty} l_T^* y_n \\ &= l_T^* y \in Im\, l_T^*. \end{aligned}$$

Alors $Im\, l_T^*$ est fermé.

$\Longleftarrow)$

Maintenant on suppose que $\ker l_T^* = \{0\}$ et $Im\, l_T^*$ est fermé alors l'opérateur l_T^* réalise une bijection sur son image cet-à-dire $\exists (l_T^*)^{-1} : Im\, l_T^* \longrightarrow Y$ et comme l_T^* est borné et $Im\, l_T^*$ est de Hilbert alors $(l_T^*)^{-1}$ est borné. Donc

$$\begin{cases} \exists k > 0 \text{ tel que } \|(l_T^*)^{-1} u\|_Y \leq k \|u\|_{L^2(0,T;U)}, \\ \forall u \in Im\, l_T^*. \end{cases}$$

Pour $u = l_T^* y \in D((l_T^*)^{-1}) = Im\,(l_T^*)$ on obtient :

$$\exists k > 0 \text{ tel que } \|y\|_Y \leq k \|l_T^* y\|_{L^2(0,T;U)}.$$

Alors

$$\exists \gamma = \frac{1}{k} > 0 \text{ tel que } \|l_T^* y\|_{L^2(0,T;U)} \geq \gamma \|y\|_Y.$$

Donc d'après le théorème (2.2) le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable.

Corollaire 2.1. *Si le triplet (A, B, C) soit exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ alors l'opérateur C est surjective.*

Preuve :

On suppose que le triplet (A, B, C) soit exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$.
Alors selon le théorème (2.1) on a :

$$Im\, l_T = Y.$$

Et selon la structure de l'opérateur l_T on obtient :

$$Im\, l_T \subset Im\, C \subset Y.$$

Alors

$$Im\, C = Y.$$

Donc l'opérateur C est surjectif.

Corollaire 2.2. *Le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ si et seulement si*

i) L'opérateur C est surjectif.

ii) $\exists \gamma > 0$ tel que

$$\int_0^T \|B^* \varphi\|_U^2 dt \geq \gamma \|\varphi_0\|_Z^2, \tag{2.8}$$

pour chaque φ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} + A^*\varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi^0 \in (\ker C)^{\perp}. \end{cases}$$

Preuve :

Selon le théorème (2.2) le triplet (A, B, C) est exactement contrô-lable sur l'intervalle $[0, T]$ si et seulement si

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que } \int_0^T \|B^* S^*(T-t) C^* y\|_U^2 dt \geq \gamma \|y\|_Y^2, \ \forall y \in Y.$$

Comme l'opérateur C^* est borné on obtient :

$$\exists \gamma_0 > 0 \text{ tel que } \int_0^T \|B^* S^*(T-t) C^* y\|_U^2 dt \geq \gamma_0 \|C^* y\|_Z^2, \ \forall y \in Y.$$

Si on pose $\varphi_0 = C^* y, \ \forall y \in Y$ alors

$$\exists \gamma_0 > 0 \text{ tel que } \int_0^T \|B^* S^*(T-t) \varphi_0\|_U^2 dt \geq \gamma_0 \|\varphi_0\|_Z^2 \ \forall \varphi_0 \in \overline{Im\, C^*} = (\ker C)^{\perp}.$$

Si on pose $\varphi = S^*(T-t)\varphi_0$ alors

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} + A^*\varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi^0 \in (\ker C)^{\perp}. \end{cases}$$

Donc on obtient :

$$\exists \gamma_0 > 0 \text{ tel que } \int_0^T \|B^* \varphi\|_U^2 dt \geq \gamma_0 \|\varphi_0\|_Z^2.$$

Pour chaque φ solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} + A^*\varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi^0 \in (\ker C)^{\perp}. \end{cases}$$

Corollaire 2.3. *Si le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$ alors le triplet $(A - \lambda Id, B, C)(\lambda \in \mathbb{R})$ est exactement contrôlable.*

Preuve :

Supposons que le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable alors d'après le théorème (2.2) on a :

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que } \int_0^T \|B^* S^*(T-t) C^* y\|_U^2 dt \geq \gamma \|y\|_Y^2, \ \forall y \in Y.$$

L'opérateur $(A - \lambda Id)$ engendre un C_0-semi groupe $(S_1(t))_{t \geq 0}$ défini par :

$$S_1(t) z = e^{-\lambda t} S(t) z, \ \forall z \in Z.$$

Soit $y \in Y$ on a :

- Pour $\lambda < 0$ on a :

$$e^{-\lambda(T-t)} \geq 1, \ \forall t \in [0, T].$$

  Alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \|B^* S_1^*(T-t) C^* y\|_U^2 dt &= \int_0^T \|B^* S^*(T-t) e^{-\lambda(T-t)} C^* y\|_U^2 dt \\ &\geq \gamma_0 \|y\|_Y^2. \end{aligned}$$

- Pour $\lambda > 0$ on a :

$$e^{-\lambda(T-t)} \geq e^{-\lambda T}, \ \forall t \in [0, T].$$

  Alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \|B^* S_1^*(T-t) C^* y\|_u^2 dt &= \int_0^T \|B^* S^*(T-t) e^{-\lambda(T-t)} C^* y\|_U^2 dt \\ &\geq \gamma \|e^{-\lambda T} y\|_Y^2 \\ &= \gamma_0 \|y\|_Y^2. \end{aligned}$$

Donc $\exists \gamma_0 = \gamma e^{-\lambda T}$ tel que

$$\int_0^T \|B^* S_1^*(T-t)C^* y\|_U dt \geq \gamma_0 \|y\|_Y, \ \forall y \in Y.$$

Alors le triplet $(A - \lambda Id, B, C)(\lambda \in \mathbb{R})$ est exactement contrôlable.

Remarque 2.1. *Pour $Y = Z, C = Id$ (Id l'opérateur identique dans Z), on dit que le couple (A, B) est contrôlable au lieu de dire que le triplet (A, B, Id) est contrôlable.*

2.1.1.1 Relation entre la contrôlabilité exacte du triplet (A, B, C) et du couple (A, B)

- Le couple (A, B) est exactement contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$ si et seulement si

$$Im\, L_T = Z. \tag{2.9}$$

- Le couple (A, B) est approximativement contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ si et seulement si

$$\ker L_T^* = \{0\}. \tag{2.10}$$

Corollaire 2.4. *Si le couple (A, B) est exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ et si l'opérateur C est surjectif alors le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable sur $[0, T]$.*

Preuve :

Comme l'opérateur C est surjectif alors

$$\forall y \in Y, \ \exists z \in Z \text{ tel que } Cz = y. \tag{2.11}$$

Comme $Im\, L_T = Z$ alors

$$\forall z \in Z,\ \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } L_T u = z. \tag{2.12}$$

Insérant (2.11) et (2.12) on obtient :

$$\forall y \in Y,\ \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } CL_T u = y.$$

D'où

$$\forall y \in Y\ \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que : } l_T u = y.$$

Alors

$$Im\, l_T = Y.$$

Donc la contrôlabilité exacte du triplet (A, B, C).

Corollaire 2.5. *Si le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ et que l'opérateur C est injectif alors le couple (A, B) est exactement contrôlable sur $[0, T]$.*

Preuve :

Soit $z \in Z$ alors on a :

$$\exists y \in Y \text{ tel que } Cz = y. \tag{2.13}$$

Comme $Im\, l_T = Y$ alors

$$(2.13) \Longrightarrow \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } Cz = CL_T u.$$

Alors selon l'injectivité de l'opérateur C on obtient :

$$\exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } L_T u = z.$$

Alors :

$$\forall z \in Z,\ \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } L_T u = z.$$

Donc

$$Im\, L_T = Z.$$

D'où la contrôlabilité exacte du couple (A, B).

2.2 Contrôlabilité exacte nulle

Définition 2.3. *Le triplet (A, B, C) est dit exactement nul contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$ si et seulement s'il est possible de ramener tous les points dans l'espace Z à l'origine au temps T via un contrôle u c'est-à-dire*

$$\forall z^0 \in Z,\ \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } y(T) = 0. \tag{2.14}$$

2.2.1 Caractérisation de la contrôlabilité exacte nulle

Théorème 2.4. *Le triplet (A, B, C) est exactement nul contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ si et seulement si*

$$Im\, CS(T) \subset Im\, l_T. \tag{2.15}$$

Preuve :

$\Longrightarrow$)

Supposons que le triplet (A, B, C) est exactement nul contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ alors selon la définition (2.3) on a :

$$\forall z^0 \in Z,\ \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } CS(T)z^0 + l_T u = 0. \tag{2.16}$$

Soit $y \in Im\, CS(T)$ alors

$$\exists z_1 \in Z \text{ tel que } CS(T)z_1 = y.$$

On applique (2.16) pour $z_1 \in Z$ on obtient :

$$\exists u_1 \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } CS(T)z_1 + l_T u_1 = 0.$$

Alors

$$\exists u_2 \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } CS(T)z_1 = l_T u_2.$$

Donc

$$\forall y \in Im\, CS(T)\ \exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } y = l_T u.$$

D'où

$$y \in Im\, l_T.$$

Alors

$$Im\, CS(T) \subset Im\, l_T.$$

$\Longleftarrow$)

Maintenant supposons que (2.15) est vérifié et soit $z^0 \in Z$ alors

$$CS(T)z^0 \in Im\, CS(T).$$

Et selon l'hypothèse on a :

$$CS(T)z^0 \in Im(l_T).$$

Alors

$$\exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } CS(T)z^0 + l_T u = 0.$$

D'où

$$\exists u \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } y(T) = 0.$$

Donc le triplet (A, B, C) est exactement nul contrôlable.

Théorème 2.5. *Le triplet (A, B, C) exactement nul contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ si* *et seulement si*

$$\exists\gamma > 0 \text{ tel que } \|l_T^* y\|_{L^2(0,T;U)} \geq \gamma \|S^*(T)C^*y\|_Z, \ \forall y \in Y. \tag{2.17}$$

Preuve :

D'après le théorème (2.4) le triplet (A, B, C) est exactement nul contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ si et seulement si

$$ImCS(T) \subset Iml_T.$$

D'autre parte on a :

$$ImCS(T) \subset Iml_T \Longleftrightarrow \exists\gamma > 0 \text{ tel que } \|l_T^* y\|_{L^2(0,T;U)} \geq \gamma \|S^*(T)C^*y\|_Z, \ \forall y \in Y.$$

Corollaire 2.6. *Si le triplet (A, B, C) est exactement nul contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$ alors le triplet $(A - \lambda Id, B, C)(\lambda \in \mathbb{R})$ est exactement nul contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$.*

Preuve :

Supposons que le triplet (A, B, C) est exactement nul contrôlable alors d'après le théorème (2.5) on a :

$$\exists\gamma > 0 \text{ tel que } \int_0^T \|B^*S^*(T-t)C^*y\|_U dt \geq \gamma \|S^*(T)C^*y\|_Z, \ \forall y \in Y.$$

Soit $y \in Y$ et soit l'opérateur $(A - \lambda Id)$ engendre un C_0-semi groupe $(S_1(t))_{t\geq 0}$ défini par :

$$S_1(t)z = (e^{-\lambda t})S(t)z, \ \forall z \in Z.$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\int_0^T \|B^*S_1^*(T-t)C^*y\|_U dt &= \int_0^T \|B^*S^*(T-t)e^{-\lambda(T-t)}C^*y\|_U dt\\ &\geq \gamma\|S^*(T)e^{-\lambda(T-t)}C^*y\|_Z\\ &\geq \gamma\|S^*(T)e^{-\lambda T}C^*y\|_Z\\ &= \gamma\|S_1^*(T)C^*y\|_Z.\end{aligned}$$

Alors le triplet $(A-\lambda Id, B, C)(\lambda \in \mathbb{R})$ est exactement nul contrôlable sur l'intervalle de temps $[0,T]$.

2.3 Contrôlabilité approchée

Définition 2.4. *Le triplet* (A,B,C) *est dit approximativement contrôlable sur l'intervalle de temps* $[0,T]$ *si et seulement si*

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall z^0\in Z,\ \forall y_d\in Y,\ \exists u\in L^2(0,T;U)\ \textit{tel que}\ \|y_d-y(T)\|_Y\leq\varepsilon. \tag{2.18}$$

2.3.1 Caractérisation de la contrôlabilité approchée

Théorème 2.6. *Le triplet* (A,B,C) *est approximativement contrôlable sur l'intervalle* $[0,T]$ *si et seulement si*

$$\overline{Im\, l_T} = Y. \tag{2.19}$$

Preuve :

$\Longrightarrow)$

Supposons que le triplet (A,B,C) est approximativement contrôlable alors selon la définition (2.4) on a :

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall z^0\in Z \text{ et } \forall y_d\in Y,\ \exists u_\varepsilon\in L^2(0,T;U) \text{ tel que } \|y_d-y(T)\|_Y\leq\varepsilon. \tag{2.20}$$

Pour $y \in Y$ et $z^0 = 0$ (2.20) implique

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists u_\varepsilon \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } \|l_T u_\varepsilon - y\|_Y \leq \varepsilon. \tag{2.21}$$

Si on passe à la limite dans (2.21) quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient

$$\exists u_\varepsilon \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } \lim_{\varepsilon \to 0} \|l_T u_\varepsilon - y\|_Y = 0.$$

Alors

$$\exists u_\varepsilon \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } l_T u_\varepsilon = y.$$

Donc on déduit que :

$$\overline{Im\, l_T} = Y.$$

$\Longleftarrow$)

Maintenant on suppose que (2.20) est vérifié et soient $z^0 \in Z, y \in Y$, on a aussi

$$y - CS(T)z^0 \in Y.$$

Alors

$$\exists (u_n)_{n \geq 1} \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } \lim_{n \to +\infty} l_T u_n = y - CS(T)z^0.$$

Par définition de la limite d'une suite on obtient

$$\exists (u_n)_{n \geq 1} \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } \forall \tau > 0,\ \exists n_\tau \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_\tau; \|CS(T)z^0 + l_T u_n - y\|_Y \leq \tau.$$

Pour $\tau = \varepsilon > 0$ on a :

$$\exists (u_n)_{n \geq 1} \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_\varepsilon; \|CS(T)z^0 + l_T u_n - y\|_Y \leq \varepsilon.$$

Pour $n_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}$, $n = n_\varepsilon$ on a :

$$\exists (u_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 1} \in L^2(0, T; U) \text{ tel que } \|CS(T)z^0 + l_T u_\varepsilon - y\|_Y \leq \varepsilon.$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall z^0 \in Z \text{ et } \forall y_d \in Y,\ \exists u_\varepsilon \in L^2(0,T;U) \text{ tel que } \|y_d - y(T)\|_Y \leq \varepsilon.$$

d'où la contrôlabilité approchée du triplet (A, B, C).

Théorème 2.7. *Le triplet (A, B, C) est approximativement contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ si et seulement si*

$$\ker l_T^* = \{0\}. \tag{2.22}$$

Preuve :

Selon le théorème (2.6) on a :

$$\begin{aligned} \text{Le triplet } (A, B, C) \text{ est approximativement contrôlable} \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{Im\, l_T} = Y \\ &\Longleftrightarrow \quad [\ker l_T^*]^\perp = Y \\ &\Longleftrightarrow \quad \ker l_T^* = \{0\}. \end{aligned}$$

Corollaire 2.7. *Si triplet (A, B, C) soit approximativement contrôlable sur $[0, T]$ alors*

$$\overline{Im\, C} = Y. \tag{2.23}$$

Preuve :

Supposons que le triplet (A, B, C) soit approximativement contrôlable.
Alors selon le théorème (2.6) on a

$$\overline{Iml_T} = Y.$$

Mais comme

$$l_T = CL_T.$$

Alors

$$\overline{Im\, l_T} \subset \overline{ImC} \subset Y.$$

Donc

$$\overline{Im\, C} = Y.$$

Corollaire 2.8. *Si le triplet* (A, B, C) *est approximativement contrôlable alors le triplet* $(A - \lambda Id, B, C)(\lambda \in \mathbb{R})$ *est approximativement contrôlable sur l'intervalle de temps* $[0, T]$.

Preuve :

Supposons que le triplet (A, B, C) est approximativement contrôlable alors

$$\ker l_T^* = \{0\}.$$

Alors

$$\forall y \in Y ; B^* S^*(T - t) C^* y = 0 \Longrightarrow y = 0, \ \forall t \in [0, T]. \tag{2.24}$$

Soit $y \in Y$ tel que

$$B^* S^*(T - t) e^{-\lambda(T-t)} C^* y = 0.$$

D'après (2.24) on a :

$$e^{-\lambda(T-t)} y = 0, \ \forall t \in [0, T].$$

Pour $t = T$ on obtient $y = 0$.
Alors le triplet $(A - \lambda Id, B, C)(\lambda \in \mathbb{R})$ est approximativement contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

2.3.1.1 Relation entre la contrôlabilité approchée du triplet (A, B, C) et du couple (A, B)

Corollaire 2.9. *Si le couple* (A, B) *est approximativement contrôlable sur l'intervalle* $[0, T]$ *et* $\ker C^* = \{0\}$ *alors le triplet* (A, B, C) *est approximativement contrôlable sur* $[0, T]$.

Preuve :

Supposons que le couple (A, B) est approximativement contrôlable alors

$$\overline{Im\, L_T} = Z.$$

Alors

$$\ker L_T^* = \{0\}. \tag{2.25}$$

Soit $y \in \ker l_T^*$ alors

$$L_T^* C^* y = 0.$$

Selon (2.25) on a

$$C^* y = 0.$$

Et comme $\ker C^* = \{0\}$ alors

$$y = 0.$$

Donc on déduit que

$$\ker l_T^* = \{0\}.$$

Alors le triplet (A, B, C) est approximativement contrôlable sur $[0, T]$.

Corollaire 2.10. *Si le triplet (A, B, C) est approximativement contrôlable sur $[0, T]$ et si l'opérateur C^* est surjectif alors le couple (A, B) est approximativement contrôlable sur $[0, T]$.*

Preuve :

Selon le théorème (2.7) on a

$$\ker l_T^* = \{0\}.$$

Soit $z \in Z$ tel que

$$L_T^* z = 0.$$

Comme l'opérateur C^* est surjectif alors

$$\exists y \in Y \text{ tel que } C^* y = z.$$

Donc

$$L_T^* C^* y = 0.$$

Et comme le triplet (A, B, C) est approximativement contrôlable alors $y = 0$.

Donc on déduit que $z = 0$.

Alors le couple (A, B) est approximativement contrôlable sur $[0, T]$.

2.4 La relation entre les trois contrôlabilités

Théorème 2.8. *Si l'opérateur A du système (I) engendre un C_0-semi groupe $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ alors le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ si et seulement s'il est exactement nul contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$.*

Théorème 2.9. *Si le triplet (A, B, C) est exactement contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ alors le triplet (A, B, C) est approximativement contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$.*

Théorème 2.10. *Si le triplet (A, B, C) est exactement nul contrôlable sur l'intervalle $[0, T]$ et si $\overline{Im\, CS(t)} = Y$ alors le triplet (A, B, C) est approximativement contrôlable.*

Preuve :

Supposons que $\overline{Im\, CS(t)} = Y$ et que le triplet (A, B, C) est exactement nul contrôlable alors d'après le théorème (2.4) on a :

$$Y = \overline{Im\, CS(T)} \subset \overline{Im\, l_T}.$$

Alors

$$\overline{Im\, l_T} = Y.$$

Alors le triplet (A, B, C) est approximativement contrôlable.

2.5 Exemple

On considère le système (entrée, sortie) suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) \quad ; t \in]0,T[, x \in]0,1[\\ z(x,0) = z^0(x) \quad ; x \in]0,1[\\ z(0,t) = z(1,t) = 0 \quad ; t \in]0,T[\\ y(x,t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \langle z, \varphi_j \rangle_{L^2}(0,1) \quad ; t \in]0,T[\end{cases} \tag{1}$$

Tel que

$$\varphi_j(x) = \sqrt{2} \sin j\pi x \; \forall j \geq 1.$$

Le système (1) est sous la forme (I) avec :

$$Z = L^2(0,T), U = L^2(0,1), Y = \mathbb{R}.$$

$$Az = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \; \forall z \in D(A).$$

Tel que :

$$D(A) = H^2(0,1) \bigcap H_0^1(0,1).$$

A est un opérateur linéaire engendrant un C_0-semi groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur Z défini par :

$$\forall z \in Z; S(t)z = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2 t} \langle z, \varphi_j \rangle_{L^2(0,1)} \varphi_j.$$

La famille $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ représente les fonctions propres associées aux valeurs propres $\lambda_j = -j^2\pi^2, j \geq 1$ de l'opérateur A et cette dernière forme une base orthonormale dans $L^2(0,1)$.

$B : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ $B = Id$ (opérateur identique dans $L^2(0,1)$).

B est un opérateur linéaire borné.

$$\begin{aligned} C : L^2(0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto Cz = \sum_{j=1}^{m} \langle z, \varphi_j \rangle_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

C est un opérateur linéaire borné.

<u>En effet</u> :

$$\begin{aligned} |Cz|_{\mathbb{R}} &= \Big| \sum_{j=1}^{m} \langle z, \varphi_j \rangle \Big|_{\mathbb{R}} \\ &\leq \Big\| \sum_{j=1}^{m} \langle z, \varphi_j \rangle \Big\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \|z\|_{L^2(0,1)} \|\varphi_j\|_{L^2(0,1)} \\ &= m \|z\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^* : \mathbb{R} &\longrightarrow L^2(0,1) \\ y &\longmapsto C^* y = \sum_{j=1}^{m} y \varphi_j. \end{aligned}$$

On définit l'opérateur l_T comme suit :

$$\begin{aligned} l_T : L^2(0,T; L^2(0,1)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto l_T u. \end{aligned}$$

Tel que

$$\begin{aligned} l_T u &= \int_0^T CS(T-s)Bu(s)ds \\ &= \int_0^T CS(T-s)u(s)ds \\ &= \int_0^T C\sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-s)}\langle u(s),\varphi_j\rangle\varphi_j ds \\ &= \int_0^T \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-s)}\langle u(s),\varphi_j\rangle C\varphi_j ds \\ &= \int_0^T \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-s)}\langle u(s),\varphi_j\rangle \sum_{k=1}^{m}\langle \varphi_j,\varphi_k\rangle_{L^2(0,1)} ds \\ &= \int_0^T \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-s)}\langle u(s),\varphi_j\rangle\langle \varphi_j,\varphi_k\rangle_{L^2(0,1)} ds \\ &= \sum_{k=1}^{m}\int_0^T e^{-k^2\pi^2(T-s)}\langle u(s),\varphi_k\rangle_{L^2(0,1)} ds. \end{aligned}$$

L'opérateur l_T^* est défini par :

$$\begin{aligned} l_T^* : \mathbb{R} &\longrightarrow L^2(0,T;L^2(0,1)) \\ y &\longmapsto l_T^* y. \end{aligned}$$

Tel que

$$\begin{aligned} l_T^* y(t) &= B^*S^*(T-t)C^*y \\ &= S^*(T-t)C^*y \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-t)}\langle C^*y,\varphi_j\rangle\varphi_j \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-t)}\langle \sum_{k=1}^{m}\langle y,\varphi_k\rangle,\varphi_j\rangle\varphi_j \\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2\pi^2(T-t)} y\langle \varphi_k,\varphi_j\rangle_{L^2(0,1)}\varphi_j \\ &= \sum_{k=1}^{m} e^{-k^2\pi^2(T-t)} y\varphi_k \\ &= \sum_{k=1}^{m} e^{-k^2\pi^2(T-t)} y\sqrt{2}\sin(k\pi x). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\|l_T^* y\|^2_{L^2(0,1)} &= \Big\| \sum_{j=1}^{m} e^{-j^2\pi^2(T)} y\varphi_j \Big\|_{L^2(0,1)} \\
&= \langle \sum_{j=1}^{m} e^{-j^2\pi^2(T)} y\varphi_j, \sum_{j=1}^{m} e^{-j^2\pi^2(T)} y\varphi_j \rangle_{L^2(0,1)} \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} y^2 e^{-j^2\pi^2(T)} e^{-k^2\pi^2(T)} \langle \varphi_j(x), \varphi_k(x) \rangle_{L^2(0,1)} \\
&= \sum_{j=1}^{m} y^2 e^{-2j^2\pi^2(T)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} y^2 e^{-2j^2\pi^2(T-t)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|l_T^* y\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))} &= \int_0^T \|l_T^* y\|^2_{L^2(0,1)} dt \\
&= \int_0^T \sum_{j=1}^{m} y^2 e^{-2j^2\pi^2(T-t)} dt \\
&\geq \int_0^T \sum_{j=1}^{m} y^2 e^{-2j^2\pi^2(T)} dt \\
&= y^2 T \sum_{j=1}^{m} e^{-2j^2\pi^2(T)}.
\end{aligned}$$

On pose $M = \sum_{j=1}^{m} e^{-2j^2\pi^2(T)}$.
Alors $\exists \gamma (\gamma = TM) > 0$ tel que

$$\|l_T^* y\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \geq \gamma \|y\|^2_{\mathbb{R}} \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

d'où **la contrôlabilité exacte du triplet** (A, B, C).

CHAPITRE 3

CONTRÔLABILITÉ DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Dans ce chapitre on étudie la contrôlabilité des systèmes non linéaires avec ses deux dimensions finies et infinies.

Un système non linéaire contrôlable est un ensemble d'équations (différentielles par exemple) non linéaires décrivant l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou variables de contrôle.

Considérons un système de contrôle non linéaire :

$$\dot{x} = f(x,u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x). \tag{3.1}$$

Où l'état est $x \in \mathbb{R}^n$.

Le contrôle est $u = (u_1, \ldots, u_m)^{tr} \in \mathbb{R}^m$.

Les fonctions $f_i,\ i = \{1, \ldots, m\}$ sont de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

On suppose que

$$f_0(0) = 0, \tag{3.2}$$

de sorte $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est un zéro de f autrement dit un point d'équilibre du système (3.1).

3.1 Contrôlabilité locale

Définition 3.1. *On dit que le système* (3.1) *est localement contrôlable autour de* $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\mu > 0$ *et pour tout* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *tels que* $|a| + |b| < \mu$*, il existe* $u \in L^\infty((0,\varepsilon); \mathbb{R}^m)$ *tel que*

$$|u(t)| < \varepsilon, \ t \in (0,\varepsilon), \tag{3.3}$$

$$(\dot{x} = f(x, u(t)) \ \textit{et} \ x(0) = a) \Rightarrow x(\varepsilon) = b. \tag{3.4}$$

Définition 3.2. ***(Linéarisation)***
La linéarisation de système (3.1) *autour de* $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \ \mathbb{R}^m$ *c'est le système de contrôle linéaire suivante :*

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3.5}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ *est l'état,* $u \in \mathbb{R}^m$ *est le contrôle et*

$$\begin{cases} A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \\ \\ B = \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0). \end{cases}$$

3.2 Contrôlabilité en dimension fini (Crochets de Lie)

Théorème 3.1. *Si le système linéaire* (3.5) *est contrôlable, alors le système non linéaire* (3.1) *est localement contrôlable autour de* $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Théorème 3.2. *Le système linéaire* $\dot{x} = Ax + Bu$*, où l'état est* $x \in \mathbb{R}^n$ *et le contrôle est* $u \in \mathbb{R}^m$*, est contrôlable si et seulement si l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des* $A^i Bu; \ u \in \mathbb{R}^m, \ i \in \{0, \dots, n-1\}$ *est égal à* $\mathbb{R}^n$.
Avec

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \ \textit{et} \ B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0).$$

Les difficultés débutent quand (3.5) *n'est pas contrôlable. On ne peut alors rien conclure quant à la contrôlabilité locale du système* (3.1) *autour de* $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Définition 3.3. *Soient*

$$X = (X^1, \ldots, X^n)^{tr} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n),$$

$$Y = (Y^1, \ldots, Y^n)^{tr} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

Le crochet de Lie $[X,Y] = ([X,Y]^1, \ldots, [X,Y]^n)$ *de* X *et* Y *est l'élément de* $C^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ *défini par :*

$$[X,Y]^j(x) = \sum_{k=1}^{n} X^k(x)\frac{\partial Y^j}{\partial x_k}(x) - Y^k(x)\frac{\partial X^j}{\partial x_k}(x), \tag{3.6}$$

pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 3.4. *Soient*

$$X \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \text{ et } Y \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

On définit, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ad}_X^k \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ *par :*

$$\begin{cases} \mathrm{ad}_X^0 Y &= Y, \\ \mathrm{ad}_X^{k+1} Y &= [X, \mathrm{ad}_X^k Y], \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Théorème 3.3. *Soit* $Lie\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ *l'algèbre de Lie engendrée par* $f_1, f_2, \ldots, f_m$, *c'est-à-dire le plus petit des sous espaces* E *de* $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *vérifiant les deux propriétés suivantes :*

$$[X,Y] \in E, \ \forall (X,Y) \in E^2,$$

$$f_i \in E, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Supposons que

$$\{h(0);\ h \in Lie\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}\} = \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Alors le système de contrôle

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x), \tag{3.8}$$

est localement contrôlable autour de $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

3.2.1 Exemple

On prend $n = 3,\ m = 2$, et pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)^{tr} \in \mathbb{R}^3$

$$f_1(x) = (1, 0, -x_2)^{tr},$$

$$f_2(x) = (0, 1, x_1)^{tr}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ &= f_0(0) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x) \\ &= u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) \\ &= (u_1, u_2, -u_1 x_2 + u_2 x_1). \end{aligned}$$

Notre système de contrôle est donc

$$\dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ \dot{x}_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1. \tag{3.9}$$

Le linéarisé autour de $(0,0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ de ce système est

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \\ \dot{x}_3 &= 0, \end{aligned}$$

système linéaire qui n'est pas contrôlable. Toutefois on a :

$$[f_1, f_2](x) = (0, 0, 2)^{tr};\ \forall x \in \mathbb{R}^3. \tag{3.10}$$

Donc, $f_1(0)$, $f_2(0)$ et $[f_1, f_2](0)$ engendrent $\mathbb{R}^3$. Le théorème (3.3) nous assure alors que le système (3.9) est localement contrôlable autour de $(0, 0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$.
Notons aussi que le critère de Kalman de contrôlabilité des systèmes linéaires

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3.11}$$

fait aussi intervenir les crochets de Lie.
Dans (3.11), A est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, B est une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, l'état est $x \in \mathbb{R}^n$ et le contrôle est $u \in \mathbb{R}^m$.
Le système (3.11) est bien de la forme (3.1) avec

$$f_0(x) = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.12}$$

$$f_i(x) = Be_i,\ i \in \{1, \dots, m\},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.13}$$

où $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$.
On vérifie facilement que

$$A^k Be_i = (-1)^k \mathrm{ad}_{f_0}^k f_i,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Donc la condition de contrôlabilité de Kalman, à savoir

$$\mathrm{ev}\left\{A^k Bu; k \in \{1, \dots, n-1\}, u \in \mathbb{R}^m\right\} = \mathbb{R}^n. \tag{3.14}$$

Alors le système linéarisé est contrôlable donc le système non linéaire est localement contrôlable.

3.3 Contrôlabilité en dimension infinie (Crochets de Lie)

Considérons le système suivant, qui est probablement le plus simple des systèmes de contrôle modélisé par une équation aux dérivées partielles,

$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x} = 0;\ \forall t\in[0,T],\ \forall x\in[0,L], \tag{3.15}$$

$$y(t,0) = u(t);\ \forall t\in[0,T]. \tag{3.16}$$

Pour ce système, $T>0, L>0$ sont donnés, le temps $t\in[0,T]$, l'état du système est $y(t,.) : (0,L)\to\mathbb{R}$ et le contrôle est $u(t)\in\mathbb{R}$.
Le système de Cauchy associé à (3.15), c'est-à-dire le problème suivant :
étant donnés $T>0,\ y^0 : (0,L)\to\mathbb{R}$ et $u : (0,T)\to\mathbb{R}$, trouver $y : (0,T)\times(0,L)\to\mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x} = 0;\ t\in[0,T],\ x\in[0,L], \tag{3.17}$$

$$y(t,0) = u(t);\ t\in[0,T], \tag{3.18}$$

$$y(0,x) = y^0(x);\ x\in(0,L). \tag{3.19}$$

• Nous cherchons sur la solution à ce problème de Cauchy :
D'abord supposons que y est une fonction de classe C^1 sur $[0,T]\times[0,L]$ et satisfaisant (3.17), (3.18) et (3.19) au sens habituel.
Soient $\phi\in C^1([0,T]\times[0,L]);\tau\in[0,T]$.
Multiplions (3.17) par $\phi(t,x)$ on trouve :

$$\phi(t,x)\Big(\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x}\Big)=0;\ t\in[0,T],\ x\in[0,L],$$

on intégrons cette l'égalité sur $[0,\tau]\times[0,L]$:

$$\int_0^\tau\int_0^L \phi(t,x)\Big(\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

Utilisant (3.18) et (3.19) et des intégrations par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau \int_0^L \phi(t,x)\Big(\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_0^\tau \int_0^L \phi(t,x)\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\tau \int_0^L \phi(t,x)\frac{\partial y}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \Big[\int_0^L \phi(T,x)y(T,x)\mathrm{d}x - \int_0^L \phi(0,x)y(0,x)\mathrm{d}x \\
&- \int_0^\tau \int_0^L \phi_t y\mathrm{d}t\mathrm{d}x\Big] + \Big[\int_0^\tau \phi(t,L)y(T,L)\mathrm{d}t \\
&- \int_0^\tau \phi(t,0)y(t,0)\mathrm{d}t - \int_0^\tau \int_0^L \phi_x y\mathrm{d}t\mathrm{d}x\Big].
\end{aligned}$$

Alors on trouve :

$$-\int_0^\tau \int_0^L (\phi_t+\phi_x)ydxdt + \int_0^\tau y(t,L)\phi(t,L)dt - \int_0^\tau u(t)\phi(t,0)dt + \int_0^L y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx$$

$$-\int_0^L y^0(x)\phi(0,x)dx = 0.$$

Définition 3.5. *Soient* $T>0,\ y^0\in L^2(0,L)$ *et* $u\in L^2(0,T)$.
Une solution du problème de Cauchy $(3.17),(3.18)$ *et* (3.19) *est une fonction* $y\in C^0([0,T];\ L^2(0,L))$ *telle que, pour toute fonction* $\phi\in C^1([0,T]\times[0,L])$ *telle que :*

$$\phi(t,L)=0,\ \forall t\in[0,T], \tag{3.20}$$

on a, pour tout $\tau\in[0,T]$,

$$-\int_0^\tau \int_0^L (\phi_t+\phi_x)ydxdt - \int_0^\tau u(t)\phi(t,0)dt + \int_0^L y(\tau,x)\phi(\tau,x)dx - \int_0^L y^0(x)\phi(0,x)dx = 0.$$

Théorème 3.4. *Soient* $T>0,\ y^0\in L^2(0,L)$ *et* $u\in L^2(0,T)$.
Alors le problème de Cauchy $(3.17),(3.18)$ *et* (3.19) *à une solution et un seule. Cette solution satisfait :*

$$\|y(\tau,.)\|_{L^2(0,L)} \le \|y^0\|_{L^2(0,L)} + \|u\|_{L^2(0,T)},\ \forall\tau\in[0,T]. \tag{3.21}$$

En fait pour ce problème de Cauchy très simple on peut donner explicitement la solution.

On effet on vérifie facilement que la fonction $y \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$

$$y(t,x) = y^0(x-t);\ \forall (t,x) \in [0,T] \times (0,L) \text{ tels que } t \leq x, \tag{3.22}$$

$$y(t,x) = u(t-x);\ \forall (t,x) \in [0,T] \times (0,L) \text{ tels que } t > x, \tag{3.23}$$

est bien solution du problème de Cauchy (3.17), (3.18) *et* (3.19).
Occupons nous maintenant de la contrôlabilité du système de contrôle (3.15), (3.16).

Définition 3.6. *Soit* $T > 0$. *Le système de contrôle* (3.15), (3.16) *est contrôlable en temps* T *si* $\forall y^0 \in L^2(0,L)$, $\forall y^1 \in L^2(0,L)$, $\exists u \in L^2(0,T)$ *telle que la solution* y *du problème de Cauchy* (3.17), (3.18) *et* (3.19) *satisfasse :*

$$y(T,.) = y^1.$$

Théorème 3.5. *Le système de contrôle* (3.15), (3.16) *est contrôlable en temps* T *si et seulement si* $T \geq L$.

Remarque 3.1. *On voit ici un point nouveau par rapport au cas des systèmes de contrôle linéaires de dimension finie il y a des systèmes linéaires de dimension infinie qui sont contrôlables pour un temps* $T_1 > 0$ *mais qui ne sont pas contrôlables pour des temps plus petits.*

Lemme 3.1. *Le système de contrôle* (3.15), (3.16) *est contrôlable en* $T > 0$ *si et seulement si* F_T *est surjective, tel que l'application* $F_T : L^2(0,T) \to L^2(0,L)$, *définissons de la façon suivante :*
pour $u \in L^2(0,T)$, *soit* $y \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$ *la solution du problème de Cauchy* (3.17), (3.18) *et* (3.19) *avec* $y^0 = 0$, *alors :*

$$F_T(u) = y(T,.).$$

Preuve :

$\Longrightarrow$) est évidente.

$\Longleftarrow$)

Supposons que F_T est surjective et montrons que le système de contrôle (3.15), (3.16) est contrôlable en $T > 0$. Soient $y^0 \in L^2(0, L)$ et $y^1 \in L^2(0, L)$.

Soit $\tilde{y}$ la solution du problème de Cauchy (3.17), (3.18) et (3.19) avec $u = 0$.

Comme F_T est surjective, il existe $u \in L^2(0, T)$ telle que $F_T(u) = y^1 - \tilde{y}(T, .)$.

Alors, la solution y du problème de Cauchy (3.17), (3.18) et (3.19) satisfait :

$$\begin{aligned} y(T, .) &= \tilde{y}(T, .) + y^1 - \tilde{y}(T, .) && (3.24) \\ &= y^1. && (3.25) \end{aligned}$$

Alors le système de contrôle (3.15) et (3.16) est contrôlable en $T > 0$

Proposition 3.1. *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Soit F une application linéaire de H_1 dans H_2. Alors F est surjective si et seulement si*

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \|F^*(x_2)\|_{H_1} \geq c\|x_2\|_{H_2}, \ \forall x_2 \in H_2. \tag{3.26}$$

En théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles, l'inégalité (3.26) *est appelée une «inégalité d'observabilité».*

Lemme 3.2. *Soit $z^T \in C^1(0, L)$ tel que :*

$$z^T(L) = \frac{dz^T}{dx}(L) = 0. \tag{3.27}$$

Soit $z \in C^1([0, T] \times [0, L])$ la solution de :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{3.28}$$

$$z(t, L) = 0, \ \forall t \in [0, T], \tag{3.29}$$

$$z(T, .) = z^T. \tag{3.30}$$

Alors

$$F_T^*(z^T) = z(.,0). \tag{3.31}$$

Preuve :

On note d'abord que les conditions de compatibilité (3.27) assurent bien l'existence de z : changer t en $T-t,\ x$ en $L-x$ et voir l'expression $(3.22),(3.23)$ explicite donnée pour y, c'est-à-dire :

$$z(t,x) = y(T-t, L-x).$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} z(t,L) &= y(T-t,0) \\ &= u(T-t). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} z(T,x) &= y(0,L-x) \\ &= y^0(L-x) \\ &= y^0(x). \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} u(T-t) &= 0. \\ y^0(x) &= z^T(L-x). \end{cases}$$

Alors l'existence de z et de plus vérifie le problème de Cauchy.

Soit $u \in C^1([0,T])$ tel que

$$u(0) = \frac{du}{dx}(0) = 0 \tag{3.32}$$

Soit $y \in C^0([0,T]; L^2(0,L))$ la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} = 0,\ t \in (0,T),\ x \in (0,L), \tag{3.33}$$

$$y(t,0) = u(t),\ t \in (0,T), \tag{3.34}$$

$$y(0,x) = 0,\ x \in (0,L). \tag{3.35}$$

L'expression $(3.22), (33.23), (3.32)$ et (3.35) montrent que y est de classe C^1 sur $[0,T] \times [0,L]$.

Alors utilisant $(3.28), (3.29), (3.30), (3.33), (3.34)$ et (3.35), on obtient, après des intégrations par parties,

$$\begin{aligned}
\langle F_T(z^T), u\rangle &= \langle z^T, F_T^*(u))\rangle \\
&= \int_0^L z^T F_T^*(u)dx \\
&= \int_0^L z^T y(T,x)dx \\
&= \int_0^T \int_0^L (zy)_t dxdt \\
&= -\int_0^T \int_0^L z_x y + zy_x dxdt \\
&= \int_0^T z(t,0)u(t)dt \\
&= \langle z(t,0), u\rangle.
\end{aligned}$$

Donc

$$\langle F_T^*(z^T), u\rangle = \langle z(t,0), u\rangle,\ \forall u \in C^2(0,T)$$

Et comme l'ensemble des $u \in C^2([0,T])$ satisfaisant (3.32) est dense dans $L^2(0,L)$. Alors on a :

$$\langle u, F_T^* - z(.,0)\rangle = 0,\ \forall u \in L^2(0,T)$$

On pose $u = F_T^*(z^T) - z(.,0)$. Donc

$$u = F_T^*(z^T) - z(.,0)$$

Alors

$$\|u\|^2 = \|F_T^*(z^T) - z(.,0)\|^2_{L^2(0,T)} = 0.$$

Par suit

$$F_T^*(z^T) = z(.,0).$$

Corollaire 3.1. *L'inégalité*

$$\exists c > 0 \text{ tel que } \|F^*(x_2)\|_{H_1} \geq c\|x_2\|_{H_2},\ \forall x_2 \in H_2, \tag{3.36}$$

est équivalente à l'inégalité suivant :

$$\int_0^T z(t,0)^2 dt \geq c \int_0^T z^T(x)^2 dx. \tag{3.37}$$

3.4 La méthode du retour

C'est une méthode que nous avons introduite en dimension finie pour un problème de stabilisation et que nous avons utilisé pour la première fois pour la contrôlabilité d'une équation dérivées partielles.

Comme annoncé dans la section précédente, on va la présenter sur des systèmes de contrôle de dimension finie.

Soit le système de contrôle

$$\dot{x} = f(x,u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x), \tag{3.38}$$

Où $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

L'état est $x \in \mathbb{R}^n$.

Le contrôle est $u = (u_1, \ldots, u_m)^{tr} \in \mathbb{R}^m$.

On suppose que $f_0(0) = 0$.

D'après le théorème (3.1) on a si le linéarisé du système (3.41) autour de $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est contrôlable, alors le système non linéaire (3.41) est localement contrôlable autour de $(0,0) \in \mathbb{R}^n \in \mathbb{R}^m$.

Supposons maintenant que le linéarisé autour de $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ne soit pas contrôlable.

3.4.1 L'idée de la méthode du retour

L'idée de la méthode du retour est la suivante : au lieu de regarder le linéarisé autour de la trajectoire $(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, étudier le linéarisé autour d'autres trajectoires $(\bar{x}, \bar{u})$ avec

$$\begin{cases} \bar{x}(0) = \bar{x}(\varepsilon) = 0, \\ |u(t)| < \varepsilon, \ \forall t \in [0, \varepsilon] \text{ pour } \varepsilon > 0 \text{ donné .} \end{cases}$$

Supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe de telles trajectoires ayant un linéarisé contrôlable.
Le système non linéaire (3.41) est localement contrôlable le long de ces trajectoires, c'est-à-dire que pour chacune de ces trajectoires, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, il existe $\mu_1 > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $b \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$|a - \bar{x}(0)| + |b - \bar{x}(\varepsilon)| = |a| + |b| < \mu_1,$$

il existe $u \in L^\infty((0, \varepsilon); \mathbb{R}^m)$ tel que la solution de :

$$\begin{cases} \bar{x} & = & f(x, u(t)), \\ x(0) & = & a. \end{cases}$$

satisfasse $x(\varepsilon) = b$ et tel que

$$|u(t) - \bar{u}(t)| < \varepsilon_1, \ t \in (0, \varepsilon).$$

On en déduit alors la contrôlabilité locale du système non linéaire (3.41) autour de $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Pazy ; *Semi Groupe of linear operator and application to partial differential equation.* Springer, (1983).

[2] A. Bensoussan, Giuseppe Da Prato, Michel C. Delfour et Sanjoy K. Mitter, *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems*. Birkhäuser Boston, (2007).

[3] Jean-Michel Coron ; *Control and Nonlinearity.* American Mathematical Society, (2007).

[4] Jean-Michel Coron ; *Analysis, Control and Optimal Operations in Hybrid Power Systems.* Springer-Verlag London, (2013).

[5] Jean-Michel Coron ; *H^∞-Optimal Control and Related Minimax Design Problems.* Springer Science+Business Media New York, (1991).

[6] J.E. Marsden, L. Sirovich et M. Golubitsky ; *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory.* Springer-Verlag New York, (1995).

[7] J. L. Lions ; *Contrôlabilité exacte perturbation et stabilisation de systèmes distribues*, Paris, (1988).

[8] H. A. Bensoussan, G. Da Prato, M. C. Delfour et S. K. Mitter ; *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems.* Birkhauser, Boston, (1993).

[9] H. Brézis ; *Analyse fonctionnelle. Théorie et application.* Masson, Paris, (1983).

[10] H. Brézis et T. Cazenave ;*Linear semi-groups of contractions.* Paris, (1992).

[11] Hermann (Robert) ; *Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics.* New York, Academic Press, (1963).

[12] I. Lasiecka et R. Triggiani ; *Exact Controllability of the Wave Equation with Neumann Boundary Control.* paris, (1989).

[13] Nagano (Tadashi) ; *Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras.* Japan, (1966).

[14] R. F. Curtain et H. J. Zwart ; *An introduction to infinite dimensional linear systems theory.* Springer-Verlag, New York, (1995).

[15] R. F. Curtain et A. J. Pritchard ; *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, Berlin, (1978).

[16] V. Trenoguine ; *Analyse fonctionnelle.* Traduction française KOLIAR, édition Mir, (1985).

[17] Yury V. Orlov et Luis T. Aguilar ; *Advanced* H_∞ *Control.* Springer Science+Business Media New York, (2014).

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié la contrôlabilité des systèmes linéaires de dimension infinie, et les caractéristiques les plus importantes liées, de plus nous étudions la contrôlabilité des systèmes non linéaires de dimension fini et infini.

Mots clés: Contrôlabilité, système de contrôle linéaire, système de contrôle non linéaire.

Abstract

In this note we are going to study the linear control systeme with a non-expired dimension ,and the most important characteristics related In addition to the non-linear control systems with a dimension ended and non-finished study.

Key words: Controlability, Linear Control System, Non-linear control system.

ملخص

نقوم في هذه المذكرة بدراسة مراقبة الأنظمة الخطية ذات البعد الغير منتهي وأهم الخصائص المتعلقة بها بالإضافة إلى دراسة مراقبة الأنظمة الغير الخطية ذات البعد المنتهي والغير منتهي.

الكلمات الأساسية: المراقبة، نظام المراقبة الخطي، نظام المراقبة الغير الخطي.