



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

EN: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

contrôle optimal d'un système dynamique avec retards

Préparé par : Mezmaï Khaoula
Rouibeh Khaoula

Soutenue devant le jury

Encadré par	Mr . Azi Morad	M. A.A
Président	Mr . Zaidi Ali	M . A.A
Examineur	Mr . Boufalgha Ibrahim	M . A.A

Année Universitaire : 2015/2016

Remerciements

Au terme de ce travail, nous commençons par remercier DIEU pour nous avoir donné la volonté et le courage pour terminer ce modeste travail.

Nous tenons à remercier vivement notre encadreur de ce travail le professeur Mourad Azi qui a accepté de diriger notre travail.

Sa confiance en nous, ses conseils et ses suggestions nous donnaient plus de force et de courage pour aller plus loin, sa compétence scientifique ainsi que ses discussions.

Nous exprimons également notre gratitude à tous les enseignants et professeurs de département de Mathématiques et Informatique du centre universitaire de Mila à notre formation depuis notre premier cycle d'étude jusqu'à la fin de notre cycle universitaire, et on remercie nos familles et nos amis pour leurs grand soutien.

Nos remerciement les plus vifs s'adressent aussi aux monsieurs le président et les membres de jury d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer notre travail.

Table des matières

Introduction Générale	5
1 Théorie de contrôle optimal	6
1.1 Contrôle optimal	6
1.1.1 Formulation générale d'un problème de contrôle optimal . .	6
1.1.2 Classification des problèmes de contrôle optimal	7
1.1.3 Classe des commandes admissibles	7
1.1.4 Stratégie du contrôle	8
1.2 Contrôlabilité des systèmes dynamiques	9
1.2.1 Contrôlabilité des systèmes dynamiques linéaires	9
1.2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes dans le cas sans contrainte sur le contrôle	11
1.2.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	14
1.3 Stabilisation	15
1.3.1 Stabilité des systèmes linéaires	16
1.3.2 Stabilité des systèmes non linéaires	17
1.4 Les systèmes dynamiques avec retard	20
1.4.1 Classification des systèmes avec retards	21
1.5 Stabilité des systèmes avec retards	21
1.5.1 Stabilité au sens de Lyapounov	21
1.5.2 Stabilité des systèmes avec retards par la méthode de Lya- pounov	22
1.5.3 La réduction du système linéaire à entrée retardée	23
1.5.4 Contrôlabilité des systèmes avec retard	24
2 Condition d'optimalité	27
2.1 Équation d'Euler-Lagrange	27
2.2 Principe d'optimalité de Bellman	28
2.3 Principe du maximum de Pontryagin	28
2.3.1 Principe du maximum sans contrainte sur le contrôle	30
2.3.2 Principe du maximum sans contrainte sur l'état	31

2.3.3	Principe du maximum avec contraintes sur l'état	32
2.3.4	Principe du maximum dans le cas linéaire	33
2.3.5	Conditions de transversalité	34
2.4	Élément de calcul de variations	35
2.5	Conditions suffisantes d'optimalité	36
3	Contrôle optimal d'un système dynamique avec retards	39
3.1	Le principe du maximum du contrôle optimal d'un système dynamique avec retard sur l'état sans contraintes	39
3.2	Principe du maximum avec retard mixte	41
3.3	Contrôle optimal d'un système dynamique avec retard mixte avec contraintes	44
3.3.1	Les conditions nécessaires d'optimalité	44
3.4	Contrôle optimal d'un système dynamique avec retard multiple avec contraintes	48
3.4.1	Les conditions nécessaires d'optimalité	48
	Bibliographie	54

Table des figures

1.1	Bouclage statique	8
1.2	L'ensemble accessible	9

Introduction Générale

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

Un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle, pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, aux processus stochastiques.

La théorie moderne du contrôle optimal a commencé à la fin des années 1950 avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin qui généralisé les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations. Les systèmes dynamiques avec des retards dans les deux variables d'état et de contrôle jouent un rôle important dans la modélisation des phénomènes de la vie réelle dans la chimie et processus biologiques, en économie et de la mécanique et de divers autres domaines.

Il existe plusieurs travaux dans la littérature sur les conditions nécessaires d'optimalité pour des problèmes du contrôle optimal avec retard.

En 1961, Kharatishvili [9] a généralisé le principe du maximum de Pontryagin pour un problème de contrôle optimal avec retard, il a été le premier qui fournit un principe de maximum pour les problèmes avec retard constant sur l'état, il a donné des résultats similaires pour des problèmes de contrôle avec retard sur le contrôle.

En 1966, Chyung et Lee ont obtenus le principe du maximum pour un problèmes de contrôle optimal avec retard mixte à la fois sur l'état et le contrôle.

En 1968, Halany a prouvé le principe du maximum pour des problèmes de contrôle optimal avec plusieurs retards constants dans les variables d'état et de contrôle.

Le présent travail est divisé en trois chapitres dont nous présentons dans le premier, la théorie du contrôle et les systèmes dynamiques avec retard. Dans le deuxième chapitre, nous exposons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, où nous traitons les problèmes des contrôles optimal avec et sans contrainte sur l'état et le contrôle.

Finalement, dans le dernier chapitre, nous étudions les conditions nécessaires d'optimalité des systèmes de contrôle optimal avec retard.

Chapitre 1

Théorie de contrôle optimal

Introduction

Un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé contrôle. Dans ce chapitre, nous exposons l'essentiel de la théorie de contrôle optimal et nous discutons les systèmes dynamiques avec retard.

1.1 Contrôle optimal

1.1.1 Formulation générale d'un problème de contrôle optimal

Les aspects importants lors de la formulation mathématique d'un problème de contrôle optimale exigent la description mathématique des processus à contrôler, des contraintes physiques et des critères de performance.

Le but est d'obtenir une description mathématiques simple qui prévoit de manière anticipé la réponse du système pour tout contrôle.

En général, on distingue trois types de problème de contrôle optimale :

Problème de Lagrange : Un problème de contrôle optimal est dit de Lagrange si le système dynamique est :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

où les contrôles $u(\cdot)$ sont des fonctions définies de $[0; t^*]$ dans $\mathbb{R}$. et la fonction coût $F : [0, t^*] \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$, est comme suit :

$$\max Z(x(t), u(t), t) = \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \quad (1.2)$$

avec $x(0) = x_0$ est une condition initiale donné.

Problème de Mayer : Dans ce cas, le critère à optimiser il dépend uniquement de la valeur terminale de l'état. Soit la fonction $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on définit le problème d'optimisation de Mayer par :

$$\begin{cases} \max Z(x(t), u(t), t) = G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Problème de Bolza L'avantage du problème de Bolza est que, il regroupe les deux précédentes formulations (Lagrange et Mayer).

Soient $F : [0, t^*] \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on définit, alors, le problème de Bolza par :

$$\begin{cases} \max Z(x(t), u(t), t) = \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt + G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

1.1.2 Classification des problèmes de contrôle optimal

On peut classer les fonctions objectifs en deux critères de performance.

Temps optimal :

On parle d'un problème en temps optimal lorsque $F(t, x, u) = 1$ et $G(t^*, x(t^*)) = 0$ et le temps final est libre alors le critère s'écrit :

$$\max Z(x(t), u(t), t) = \int_0^{t^*} 1dt.$$

Coût optimal :

On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final est fixe alors le critère s'écrit :

$$\max Z(x(t), u(t), t) = G(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt.$$

1.1.3 Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble admissible des contrôles admissible qui peut être non bornés, borné ou du type Bang-Bang.

Commande bornée

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les $u_j(t)$ par les constantes. Considérons ce type de problème avec $a_j \leq u_j \leq b_j$. Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j en posons $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$. Donc lorsque u est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1 .

Commande Bang-Bang

Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$, on a $|u_j(t)| = 1$. En d'autres termes, une commande Bang-Bang est une commande qui possède au moins un instant de commutation.

1.1.4 Stratégie du contrôle

Bouclage statique

On dit que u est un bouclage statique du système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ si sa valeur $u(t)$ à l'instant t ne dépend que de $x(t)$, c'est à dire $u = R(x)$ où R est une fonction.

Ce système s'écrit tout simplement :

$$\dot{x} = f(x, R(x)), \quad (1.5)$$

qu'est représenté par le diagramme suivant :

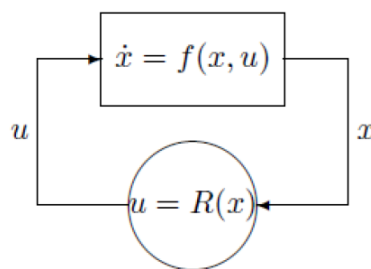


FIGURE 1.1 – Bouclage statique

1.2 Contrôlabilité des systèmes dynamiques

Définition 1.1. *L'ensemble accessible*

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t^* > 0$ est défini par :

$$Acc(x_0, t^*) = \left\{ x_u(t^*) / u \in L^\infty([0, t^*], U) \right\},$$

où $x_u(\cdot)$ est la solution du système associée au contrôle u .

Autrement dit, $Acc(x_0, t^*)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.1) au temps t^* .

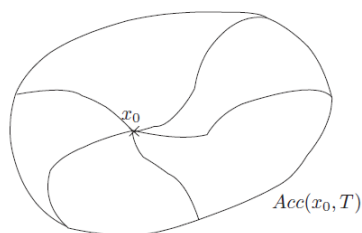


FIGURE 1.2 – L'ensemble accessible

Définition 1.2. (La contrôlabilité)

Le système contrôlé linéaire est dit contrôlable si $\bigcup_{t \geq 0} Acc(x_0, t) = \mathbb{R}^n$.

Il est dit contrôlable en temps t^* si

$$Acc(x_0, t^*) = \mathbb{R}^n.$$

C'est à dire pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps t^* .

Définition 1.3. (Contrôles singuliers)

Soit u un contrôle défini sur $[0, t^*]$ tel que sa trajectoire associée x_u issue de $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, t^*]$. On dit que le contrôle u est singulier sur $[0, t^*]$ si la différentielle de Fréchet $dE_{t^*}(u)$ de l'application entrée-sortie au point u n'est pas surjective, sinon on dit qu'il est régulier.

1.2.1 Contrôlabilité des systèmes dynamiques linéaires

Soient n et m deux entiers naturels non nuls, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient A, B et r trois applications localement intégrables sur I , à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$, et $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Le système de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est :

$$\begin{cases} \forall t \in I : \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

où l'ensemble des contrôles U considérés, est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur I , à valeurs dans le sous-ensemble $U \in \mathbb{R}^m$.

Les théorèmes d'existence de solutions d'équation différentielle nous assurent que, pour tout contrôle u , le système (1.6) admet une unique solution $x(.) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, absolument continue.

Soit $S(.) : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

définit par :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = A(t)S(t), \\ S(0) = Id. \end{cases}$$

Notons que si $A(t) = A$ est constante sur I , alors $S(t) = e^{A \cdot t}$.

La solution $x(t)$ du système (1.6) associée au contrôle u est donnée par :

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t)S(\tau)^{-1}(B(\tau)u(\tau) + r(\tau))d\tau,$$

pour tout $t \in I$.

Proposition 1.1. *Soient x_0 et t^* fixés, si u est un contrôle régulier, alors E_t est ouverte dans un voisinage de u .*

Théorème 1.1 (16). *Le système*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t),$$

est contrôlable en temps t^ si et seulement si la matrice :*

$$C(t^*) = \int_0^{t^*} S(t)^{-1}B(t)B(t)'(S(t)^{-1})'dt, \quad (1.7)$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

1.2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes dans le cas sans contrainte sur le contrôle

Le système (1.6) est dite autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t .

Lemme 1.1 (16). *La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire :*

$$\begin{aligned}\phi : L^\infty([0, t^*], U) &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ u &\rightarrow \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} Bu(t)dt,\end{aligned}$$

est surjective.

Preuve. : " $\Rightarrow$ " Supposons tout d'abord, que $\text{rang } C < n$, et montrons que ϕ n'est pas surjective. L'application ϕ étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que l'on supposera être un vecteur ligne tel que :

$$\psi C = 0.$$

Par conséquent,

$$\psi B = \psi AB = \dots\dots\dots = \psi A^{n-1}B = 0.$$

Or d'après le théorème d'hamilton-Cayley, il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tel que :

$$A^n = a_0 I + \dots\dots\dots + a_{n-1} A^{n-1},$$

on déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier k :

$$\psi A^k B = 0,$$

en effet, pour tout $t \in [0, t^*]$:

$$\psi e^{At} B = 0,$$

par conséquent, pour tout contrôle u , on a :

$$\psi \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} Bu(t)dt = 0.$$

C'est à dire :

$$\psi \phi(u) = 0,$$

ce qui montre que ϕ n'est pas surjective.

" $\Leftarrow$ " Réciproquement, si ϕ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tel que pour tout contrôle u on ait :

$$\psi \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} Bu(t)dt = 0,$$

ce qui implique que, pour tout $t \in [0, t^*]$:

$$\psi e^{(t^*-t)A} B = 0,$$

en $t = t^*$ on obtient $\psi B = 0$.

En suite, en dérivant par rapport à t , puis en prenant $t = t^*$, on obtient

$$\psi AB = 0.$$

Ans, par dérivation successives, on obtient finalement :

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Donc $\psi C = 0$, et rang $C < n$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas sans contrainte sur le contrôle.

Théorème 1.2 (16). *Le système autonome*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t),$$

est contrôlable en t^* si et seulement si la matrice :

$$C(A, B) = (B | AB | A^2 B | \dots | A^{n-1} B)$$

est de rang n .

Remarque 1.1. La matrice C est appelée matrice de kalman, et la condition rang $C = n$ est appelée condition de kalman.

Preuve. " $\Leftarrow$ " Si la matrice C est de rang n , alors d'après le lemme(1.1) l'application ϕ est surjective, c'est à dire : $\phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. Or pour tout contrôle u , l'extrémité au temps t^* de la trajectoire associée à u est donnée par :

$$x(t^*) = e^{At^*} x_0 + \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} (B(t)u(t) + r(t)) dt,$$

de plus on a :

$$\phi(u) = \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} B u(t) dt.$$

L'ensemble accessible en temps t^* depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est :

$$Acc(t^*, x_0) = e^{At^*} x_0 + \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} r(t) dt + \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

alors

$$Acc(t^*, x_0) = \mathbb{R}^n.$$

Ce qui montre que le système est contrôlable.

" $\Rightarrow$ " Réciproquement, si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable depuis x_0 défini par :

$$x_0 = -e^{-At^*} \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} r(t) dt.$$

Or en ce point l'ensemble accessible en temps t^* s'écrit :

$$Acc(t^*, x_0) = \phi(L^\infty),$$

alors :

$$\phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n.$$

En effet cette application est surjective alors C est de rang $=n$.

Exemple :

Soit le système d'écrit par l'équation :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

en effet la matrice de Kalman est donnée par :

$$C(A, B) = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc $\text{rang} C(A, B) = 2$, par conséquent le système est contrôlable.

Proposition 1.2. *Si u est un contrôle régulier sur $[0, t^*]$, alors le système est localement contrôlable .*

Définition 1.4. *Le contrôle u est dit extrémal sur $[0, t]$ si la trajectoire du système associée à u vérifie $x(t) \in \partial \text{Acc}(x_0, t)$.*

En particulier, tout contrôle temps minimal est extrémal mais la réciproque est évidemment fausse car l'extrémalité ne fait pas la différence entre la minimalité et la maximalité.

Remarque 1.2. *La condition de Kalman ne dépend ni de t^* ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t^* depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes dans le cas avec contrainte sur le contrôle

Corollaire 1.1. *Sous la condition de Kalman précédente, si $r = 0$ et si $0 \in \text{int } U$, alors l'ensemble accessible $\text{Acc}(x_0, t)$ en temps t contient un voisinage du point $e^{At}x_0$.*

Théorème 1.3. *Considérons le système*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

avec $0 \in U$ alors tout point de l'origine x_0 on peut être atteindre en temps fini si et seulement si la paire (A, B) vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.

1.2.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaires, on a tendance à utiliser le système linéarisé pour étudier la contrôlabilité locale. Mais la non contrôlabilité du système linéarisé n'implique pas forcément la non contrôlabilité des systèmes non linéaires.

Considérons le système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Définition 1.5. *Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (1.8) est localement contrôlable au voisinage de x^* en temps t^* depuis x_0 , si $x^* \in \text{Acc}(x_0, t^*)$.*

Autrement dit, il existe un voisinage V dans $V(x^)$ tel que $V \subset \text{Acc}(x_0, t^*)$.*

Proposition 1.3. *Considérons le système (1.8) avec $f(x_0, u_0) = 0$.*

On note $A = \frac{df}{dx}(x_0, u_0)$ et $B = \frac{df}{du}(x_0, u_0)$.

Si

$$\text{rang}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n,$$

alors le système est localement contrôlable en x_0 .

1.3 Stabilisation

Notion de stabilité

La question de la stabilité se pose de la façon suivante :

Si l'on écarte le système de l'équilibre, y reviendra-t-il ? Ou bien une petite perturbation, qui éloigne le système légèrement de son régime stationnaire : A) Instable ; B) Localement stable ; C) Asymptotiquement stable.

Un contrôle en boucle ouverte est une application $t \rightarrow u(t)$ d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles.

Considérons un nouveaux système non linéaire :

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (1.9)$$

Où f est une fonction de classe C^1 , ce système est dit en boucle ouverte .

Un contrôle en boucle ouverte est une application d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles admissibles.

Définition 1.6. *Un contrôle en boucle fermé, appelé aussi un rétroaction ou un bouclage ou encore un feedback est l'application $x \rightarrow u = R(x)$ définie sur l'espace d'état $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans l'ensemble des contrôles admissibles U .*

Le problème de stabilisation consiste à maintenir le système près d'un point d'équilibre x_0 , il s'agit donc de construire une loi de contrôle $u = R(x)$ telle que x_0 soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermé plus précisément.

Définition 1.7. *Le flot du système est la famille avec un paramètre d'applications ϕ_t $t \in \mathbb{R}$ de Ω dans lui même définit par :*

$$\phi_t(x_0) = x(t, x_0),$$

pour tout $x_0 \in \phi$, $x(t, x_0)$ est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\dot{x} = f(t, x), x(0) = x_0. \quad (1.10)$$

Définition 1.8. (Stabilité au sens de Lyapounov) Un point d'équilibre est stable au sens de Lyapounov si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :
 Pour tout x vérifiant $\|x - x_0\| \leq \eta$, on a $\|\phi_t(x) - x_0\| \leq \varepsilon$ pour tout $t > 0$.

Définition 1.9. (Stabilité asymptotique) Un point d'équilibre est asymptotiquement stable au sens de Lyapounov s'il est stable au sens de Lyapounov et de plus pour tout x suffisamment proche de x_0 :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = x_0.$$

1.3.1 Stabilité des systèmes linéaires

Dans le cas des systèmes linéaires, attractif implique stable (donc asymptotiquement stable équivaut à attractif) et asymptotiquement stable équivaut à exponentiellement stable. De plus l'attractivité est toujours globale. Considérons le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.11)$$

où A est une matrice carrée d'ordre n .

La solution de (1.11) s'écrit :

$$x(t) = e^{tA}x(0). \quad (1.12)$$

La matrice exponentielle e^{tA} est définie par la série :

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}. \quad (1.13)$$

Pour calculer cette matrice exponentielle on cherche les valeurs propres de la matrice A , c'est à dire les racines du polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Le polynôme caractéristique est de degré n en λ . Il admet donc s racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de multiplicités algébriques $m(\lambda_i)$ satisfaisant :

$$m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_s) = n.$$

Par conséquent :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m(\lambda_s)}.$$

L'indice $\nu(\lambda)$ d'une valeur propre λ est le premier entier tel que la suite croissante des noyaux :

$$\ker(A - \lambda I)^\nu \subseteq \ker(A - \lambda I)^{\nu+1},$$

soit stationnaire pour $\nu \geq \nu(\lambda)$.

Pour toute valeur propre λ de A on a :

$$1 \leq \nu(\lambda) \leq m(\lambda).$$

Le polynôme minimal $M_A(\lambda)$ de A est donné par :

$$M_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu(\lambda_1)} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\nu(\lambda_s)}.$$

Les valeurs propres de A sont réelles ou complexes.

Si elles sont complexes, alors elles sont conjuguées deux à deux.

Les composantes $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, de la solution (1.11) sont des combinaisons linéaires, à coefficients constants, de termes de la forme :

- 1- $t^j e^{t\lambda}$ où λ est une valeur propre réelle de A et $0 \leq j < \nu(\lambda)$;
- 2- $t^j e^{ta} \cos bt$ et $t^j e^{ta} \sin bt$, c'est à dire les parties réelles et imaginaires de $t^j e^{t\lambda}$, où $\lambda = a + ib$ est une valeur propre complexe de A et $0 \leq j < \nu(\lambda)$.

On en déduit alors le résultat suivant.

Théorème 1.4 (4).

- 1- Si $\exists j, \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ ou si $\exists k, \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ et $\nu(\lambda_k) > 1$ alors $x = 0$ est instable.
- 2- Si $\forall j, \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.
- 3- Si $\forall j, \operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow \nu(\lambda_j) = 1$ et s'il existe k tel que $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ alors $x = 0$ est stable mais non attractif.

Par conséquent pour un système linéaire $\dot{x} = Ax$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) l'origine est attractive ;
- b) l'origine est globalement attractive ;
- c) l'origine est asymptotiquement stable ;
- d) l'origine est globalement asymptotiquement stable ;
- e) l'origine est exponentiellement stable ;
- f) l'origine est globalement exponentiellement stable ;
- g) toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative (on dit que la matrice A est de Hurwitz).

1.3.2 Stabilité des systèmes non linéaires

Pour étudier la stabilité d'un système non linéaire on a deux méthodes :

- Méthode indirecte basé sur la linéarisation de la fonction F ;
- Méthode directe basé sur l'utilisation d'une fonction appelé fonction de lyapunov.

1. Méthode directe

La méthode directe est difficile à mettre en œuvre mais, en contre partie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction de Lyapounov, qui est décroissante le long des trajectoires du système.

Le théorème suivant va résumer cette méthode.

Théorème 1.5 (1). (*Fonction de Lyapounov et stabilité globale*)

Si x_0 est un point d'équilibre du système (1.9) et si la fonction de Lyapounov V est de classe C^1 ,

$$V : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[,$$

telle que :

★ $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \neq x_0$;

★ V décroît le long de toutes les trajectoires ($\frac{dV}{dt} \leq 0$).

Alors x_0 est stable au sens de Lyapounov.

Si de plus pour $x \neq x_0$ $\frac{dV}{dt} < 0$ alors x_0 est asymptotiquement stable au sens de Lyapounov.

Si on suppose encore que V tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x_0 , tendent vers x_0 (on dit que x_0 est globalement asymptotiquement stable), mais si $\frac{dV}{dt} > 0$ pour $x \neq x_0$ alors x_0 est instable.

Il n'y a aucune méthode générale pour déterminer une fonction de Lyapounov, mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapounov.

Exemple

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - xy^2, \\ \dot{y} = -y + 3x^2y. \end{cases}$$

Sa stabilité globale est étudiée à l'aide d'une fonction de Lyapounov qu'il faut déterminer intuitivement .

On vérifié que la fonction :

$$V(x, y) = ax^2 + by^2$$

peut être considéré comme une fonction de Lyapounov, avec a et b deux réelles positive à déterminer.

De plus $V(0, 0) = (0, 0)$ et $V(x, y) > 0$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{dV}{dt} = -2ax^2 - 2ax^2y - 2by^2 + 6bx^2y^2,$$

nous choisissons $a = 3$ et $b = 1$,
alors :

$$\frac{dV}{dt} = -6x^2 - 2y^2 < 0.$$

Par la suite le point fixe $(0, 0)$ est un point asymptotiquement stable au sens de Lyapounov.

2. Méthode indirecte(linéarisation)

Par un changement de coordonnées, le point x_0 se ramène à l'origine ($f(0) = 0$) et le développement de f en série de Taylor autour de $x = 0$ donne :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) \dots$$

La méthode indirecte de Lyapounov, pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre a , consiste à étudier le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax.$$

avec

$$A = DF(0) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{x=0}.$$

La matrice jacobienne de f en 0 qui s'appelle le linéarisé du système (1.9) au point d'équilibre 0.

Si A possède n valeurs propres distinctes $i, i = 1, 2, \dots, n$ (les valeurs propres de A sont appelées exposants caractéristiques de l'équilibre 0) alors la solution du

$$\dot{x} = Ax$$

est

$$x = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} v_i,$$

v_i le vecteur propre associé à i , d'où le théorème suivant :

Théorème 1.6. *Considérons le système (1.9) avec r valeurs propres distinctes, $p_1, \dots, p_r$ et $x_0 = 0$ point d'équilibre :*

1. Si $\operatorname{Re}(p_j) > 0$, pour $j \in 1, \dots, r$, alors 0 est instable ;
2. Si $\operatorname{Re}(p_j) < 0$, pour tout $j \in 1, \dots, r$, alors 0 est asymptotiquement stable ;
3. Si $\operatorname{Re}(p_j) \leq 0$, avec un pôle de multiplicité 1 est tel que $\operatorname{Re}(p_j) = 0$, pour $j \in 1, \dots, r$, alors 0 est stable.

Théorème 1.7 (1). Soit x_0 un point d'équilibre de (1.9).

1. Si les valeurs propres de $Df(x_0)$ sont toutes à partie réelle strictement négative, alors x_0 est un équilibre asymptotiquement stable au sens de Lyapounov ;
2. Si l'une des valeurs propres de $Df(x_0)$ possède une partie réelle strictement positive alors x_0 n'est pas un équilibre stable au sens de Lyapounov.

Le point d'équilibre a est dit hyperbolique si tous ses exposants caractéristiques ont des parties réelles non nulles.

Exemple 1.1. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= y^2 - x, \\ \dot{y} &= x^3 - 2y - xy, \\ \dot{z} &= -z - xy. \end{cases}$$

L'origine 0 est un point fixe .

Son linéarisé est :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $Df(0)$ sont $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1$, toutes négatives d'où l'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

1.4 Les systèmes dynamiques avec retard

Nous étudions ici des systèmes de contrôle avec retard donnés par :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_m)) \quad , t > t_0, \quad (1.14)$$

où x est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sa valeur à l'instant t est notée par $x(t)$, f une fonction vectorielle, où h_i (retards) sont soit des réels positifs, soit des fonctions positives du temps, continues (ou continues par morceaux) sur $[t_0, \infty]$ bornées, c'est-à-dire, il existe un nombre réel $h > 0$ pour lequel $h_i(t)$ vérifient :

$$0 \leq h_i(t) \leq h.$$

Le vecteur $x(t)$ est appelé l'état instantané ou le vecteur état du système (1.14).

1.4.1 Classification des systèmes avec retards

Les systèmes de type neutre

Les systèmes neutres se différencient des systèmes de type retardés par les arguments du champ de vecteur f .

Ce dernier fait intervenir la dérivée de l'état $x(t+h)$ c'est à dire les dérivées retardées de $x(t+h)$. Ils sont décrits par des équations différentielles de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t), \dot{x}(t+h), u(t+h)), t \geq t_0, \\ x(t_0+h) = \omega(\theta), \quad \text{pour } \theta \in [-h, 0], \\ u(t_0+h) = \zeta(\theta), \quad \text{pour } \theta \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Le terme $x(t+h)$ rend l'analyse de ces systèmes plus complexe et h représenté le retard positif, ω et ζ sont définies sur $[t_0-h, t_0]$ et sont des fonctions continues par morceaux.

Les systèmes de type retardé

Les systèmes retardés sont définis par des équations différentielles fonctionnelles qui sont composées par des valeurs passées et présentes du temps. Ces systèmes sont décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t+h), u(t+h)) \quad t \geq t_0, \\ x(t_0+h) = \omega(\theta), \quad \text{pour } \theta \in [-h, 0], \\ u(t_0+h) = \zeta(\theta), \quad \text{pour } \theta \in [-h, 0]. \end{cases}$$

1.5 Stabilité des systèmes avec retards

1.5.1 Stabilité au sens de Lyapounov

Considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t+h), u(t+h)),$$

où $x(t)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$.

L'instant initial et l'état initial sont respectivement t_0 et ϕ_{t_0} . Le retard est noté h . La solution à l'instant t est notée $x(t, t_0, \phi_0)$ la fonction d'état solution à l'instant t étant $x(t_0, \phi_0)$.

Notion d'état d'équilibre et de point d'équilibre

Un état ϕ_e élément de C , est appelé état d'équilibre du système. Si la solution $x(t, t_0, \phi_e)$ existe et vérifie $x_t(t_0, \phi_e) = \phi_e$ pour $t > t_0$.

Si ϕ_e est un état d'équilibre alors il existe $x_e \in \mathbb{R}^n$ tel que $\phi_e(\theta) = x_e$ pour θ appartenant à l'intervalle $[-h, 0]$. Par définition, x_e est un point d'équilibre.

1.5.2 Stabilité des systèmes avec retards par la méthode de Lyapounov

Dans cette partie, on rappelle quelques résultats concernant la stabilité asymptotique des systèmes à retards par des approches temporelles liées à la méthode de Lyapounov. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \\ x_{t_0}(\theta) = \phi_\theta, \theta \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Et on suppose qu'il admet une solution unique et un état d'équilibre $x(t) = 0$. La méthode de Lyapounov nécessite l'existence d'une fonction V définie positive telle que :

$$\frac{dV}{dt} < 0, \quad \text{si } x \neq 0.$$

Cependant cette méthode présente dans le cas général un inconvénient majeur car on doit imposer des conditions sévères sur le système pour prouver que cette dérivée est négative puisqu'elle n'est plus une fonction ordinaire mais une fonctionnelle qui dépend de certaines valeurs passées de l'argument t .

Pour cela, il y'a une extension a été réalisée par Krasovskii et qui conduit à l'utilisation des fonctionnelles. Son principal inconvénient est lié à la difficulté de la détermination de telles fonctionnelles permettant de démontrer la stabilité de la solution nulle du système.

Approche par fonctionnelle de Krasovskii

L'approche de Krasovskii consiste à rechercher des fonctionnelles $V(t, x_t)$ qui sont décroissante le long des solutions de l'équation.

Soit $V(t_\phi)$ une fonctionnelle, la dérivée supérieure à droite au sens de Dini est définie comme suit :

$$V^\cdot(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow (0^+)} \sup \frac{V(t + \varepsilon, x_{t+\varepsilon}) - V(t, x_t)}{\varepsilon}.$$

Théorème 1.8 (5). *On suppose que la fonction f est bornée pour des valeurs bornées de ses arguments.*

Soient $u, v, w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ des fonctions continues définies positives croissantes telles que :

$u(\theta) > 0, v(\theta) > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$.

• *S'il existe une fonctionnelle continue $V : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :*

1. $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi(0)\|_h),$
2. $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\theta(0)\|)$ pour tout $t \geq t_0$.

Alors la solution nulle est uniformément stable.

• *Si de plus $w(\theta) > 0$ pour tout $\theta > 0$ alors la solution nulle est uniformément asymptotiquement stable.*

• *Si V vérifie les conditions :*

1. $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi(0)\|);$
2. $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$, pour tout $t \geq t_0$ et $w(\theta) > 0$ pour tout $\theta > 0$;
3. V est lipschitzienne par rapport à son second argument, alors la solution nulle est exponentiellement stable.

1.5.3 La réduction du système linéaire à entrée retardée

Reprenons le système général suivant

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + Lu(t - h),$$

et considérons une transformation linéaire de $x(t)$ et $u(t)$ à $z(t)$, $s \in [t - h, t]$.

$$Z(t) = x(t) + \int_{t-h}^t e^{-A(s+h)} Lu(s) ds.$$

Pour un signal de commande arbitraire et bornée, le système linéaire est transformée en un système équivalent sans retard ou système réduit :

$$\dot{Z} = AZ(t) + Ku(t),$$

où

$$K = B + e^{-Ah}L.$$

Cette réduction permet l'utilisation des méthodes de stabilisation bien connues pour les systèmes linéaires sans retard alors, la stabilisation ou la résolution du système original est assurée du système linéaire à entrée retardée.

1.5.4 Contrôlabilité des systèmes avec retard

Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + Lu(t - h).$$

Définition 1.10. *L'état complet du système au temps t est l'ensemble $x(t), u_t(s)$, où $u_t(s) = u(t + s)$ $t \in [-h, 0]$.*

Définition 1.11. *le système précédent est dit contrôlable sur l'intervalle $[t_0, t^*]$ s'il existe un contrôle u tel que $x(t^*) = 0$.*

Définition 1.12. *le système précédent est dit absolument contrôlable sur l'intervalle $[t_0, t^*]$ s'il existe un contrôle u tel que l'état à l'instant t_0 soit nul $x(t_0) = 0$ et $u_{t_0}(s) = 0$.*

Théorème 1.9. *le système est absolument contrôlable sur $[t_0, t^*]$ si et seulement si le système ordinaire $(A, B + e^{-Ah}L)$ est contrôlable sur l'intervalle $[t_0, t^* - h]$.*

Le théorème signifie que la contrôlabilité absolue du système en utilisant le critère algébrique usuel de contrôlabilité c'est à dire $\text{rang}[k, Ak, \dots, A^{n-1}k]$, tel que

$$k = B + e^{-Ah}L.$$

Exemple 1.2. Le contrôle de la réponse immunitaire innée.

Dans la biomédecine, le traitement d'une maladie peut être considéré comme un système dynamique avec retard, car, il faut généralement, un certain temps pour que un médicament devienne efficace, par ailleurs, la réaction biologique à une situation pathologique, par exemple à une attaque de virus peut être semblablement significatif.

Dans cet exemple, nous étudions des stratégies de contrôle optimal.

La variable d'état du problème est de quatre composantes :

x_1 : concentration d'agents pathogènes (Concentration à savoir de l'antigène associé);

x_2 : la concentration des cellules plasmatiques, qui sont des transporteurs et producteurs d'anticorps;

x_3 : concentration d'anticorps, qui tuent les agents pathogènes (Concentration à savoir des immunoglobulines);

x_4 : caractéristique relative d'un organe endommagé (0 = en bonne santé, 1 = mort);

Un traitement de thérapie implique quatre agents de contrôle thérapeutique :

u_1 : agent pathogène tueur;

u_2 : l'activateur du plasma cellulaire ;
 u_3 : l'améliorateur des anticorps ;
 u_4 : l'organe du facteur de guérison .

Les retards éventuels sont les suivants : les retards r_1 dans la concentration d'agent pathogène x_1 et r_3 dans la concentration d'anticorps x_3 , et un retard r_{u1} dans la variable de contrôle u_1 (agent pathogène tueur).

Le système dynamique de ce problème s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1 - x_3(t))x_1(t) - u_1(t - r_{u1}), \\ \dot{x}_2(t) = 3A(x_4(t))x_1(t - r_1)x_3(t - r_3) - x_2(t) + 2 + u_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - (1,5 + 0,5x_1(t))x_3(t) + u_3(t), \\ \dot{x}_4(t) = x_1(t) - x_4(t) - u_4(t). \end{cases}$$

Les valeurs initiales et les fonctions sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} u_1(t) = 0, & -r_{u1} \leq t < 0, \\ x_1(t) = 0, & -r_1 \leq t < 0, \quad x_1(0) = 3, \\ x_3(t) = \frac{4}{3}, & -r_3 \leq t < 0, \\ x_0(t) = 2, & x_4 = 0. \end{cases}$$

Notez que la fonction initiale x_1 est discontinue à $t = 0$.

L'idée de ce choix de la fonction initiale est que les cellules plasmatiques peuvent prendre connaissance d'une attaque d'agents pathogènes et commence à produire des anticorps seulement après un temps. À montré que la valeur initiale $x_1(0)$ d'agent pathogène représente le cas mortel, puisque $x_1(t)$ le pathogène divergeant sans contrôle.

L'état final $x(T)$ est libre si un certains composants peuvent être prescrits aussi bien.

La fonction immunitaire de carence $A(x_4)$ déclenchée par des lésions des organes cibles est donné par :

$$A(x_4) = \begin{cases} \cos(\pi x_4) & \text{si } 0 \leq x \leq 0,5, \\ 0 & \text{si } 0,5 \leq x_4. \end{cases}$$

Notons que la fonction $A(x_4)$ ne soit pas différentiable à $x_4 = 0,5$, de sorte que la commande du problème a une dynamique non lisses. Afin d'éviter la non Différentiabilité de la fonction $A(x_4)$ à $x_4 = 0,5$, nous allons écrit les contraintes comme suit :

$$C(x(t), u(t)) = 0,1u_4(t) + x_4(t) \leq \alpha \leq 0,5 \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Les fonctions d'objectives sont :

$$Z_1(x, u) = x_1^2(T) + x_4^2(T) \int_0^T (x_1^2(t) + x_4^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t) + u_4^2(t)) dt. \quad (1.15)$$

$$Z_2 = x_1^2 + x_4^2 + \int_0^T (x_1^2(t) + x_4^2(t) + u_1(t) + u_3(t)) dt. \quad (1.16)$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques définitions et quelques propriétés sur la théorie du contrôle, contrôlabilité, stabilisation, et les systèmes avec retards qui sont présents naturellement dans des nombreux domaines des sciences d'ingénieur.

Après avoir présenté quelques modèles de systèmes avec retards, nous avons donné quelques notions et définitions relatives à l'étude de la stabilité au sens de Lyapounov de tels systèmes.

Chapitre 2

Condition d'optimalité

Introduction

La théorie moderne du contrôle optimal a commencé à la fin des années 1950 avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin qui généralisé les équations d'Euler Lagrange.

Dans ce chapitre, Nous allons donner un ensemble de conditions d'optimalité d'un problème de contrôle optimal, dont les principes du Bellman, et principe du maximum du Pontryagin (sans contrainte et avec contrainte , sur l'état et sur le contrôle). Finalement, nous présentons les conditions suffisantes d'optimalité .

2.1 Équation d'Euler-Lagrange

Considérons une fonction $x(t)$ dépendant d'une variable t et une fonction f à trois variables non indépendantes $f(x(t), \dot{x}(t), t)$, où $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$. La fonction $x(t)$ étant connue, la fonction f prend donc une valeur déterminée pour une valeur de t donnée. Remarquons que la fonction f dépend de t explicitement, mais aussi implicitement à travers $x(t)$ et $\dot{x}(t)$.

La dérivée totale de f par rapport à t est donc :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \ddot{x}.$$

Définissons la fonctionnelle $Z(x)$ par l'intégrale :

$$Z(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), \dot{x}(t), t) dt.$$

La fonctionnelle $Z(x)$ est donc un nombre qui dépend de la fonction $x(t)$. L'approche variationnelle va nous permettre de déterminer la fonction $x(t)$ telle que

$Z(x)$ soit stationnaire (extrémale), sachant que $x(t_1)$ et $x(t_2)$ sont donnés. Nous allons montrer que la fonction $x(t)$ qui remplit cette condition ($Z(x)$ soit stationnaire) doit vérifier l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0.$$

2.2 Principe d'optimalité de Bellman

Soit le critère :

$$Z(x_0, t_0 = 0, u) = G(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x, u, t) dt. \quad (2.1)$$

La trajectoire optimale sur $[0, t^*]$ est $\tilde{u}$ et le critère optimal :

$$\tilde{Z}(x_0, t_0) = \min_{u_{[0, t^*]}} Z(x_0, t_0 = 0, u). \quad (2.2)$$

Soit $t_1 \in [0, t^*]$.

Le principe d'optimalité de Bellman énonce que la trajectoire optimale sur $[0, t^*]$ contient la trajectoire optimale sur $[t_1, t^*]$ avec comme condition initiale $x_1 = x(t_1)$. Autrement dit :

$$\tilde{Z}(x_0, t_0) = \min_{u_{[0, t^*]}, x_1} \left(\int_{t_1}^{t^*} F(x, u, t) dt + \tilde{Z}(x_1) \right). \quad (2.3)$$

Ce principe est un résultat classique de la commande optimale et se trouve souvent utilisé dans la littérature.

Il permet d'obtenir une solution optimale en découpant l'intervalle et en résolvant un problème récursif.

2.3 Principe du maximum de Pontryagin

Définition 2.1. *Considérons le problème :*

$$\begin{cases} \max Z(u) = G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) \in U, t \in [0, t^*]. \end{cases}$$

Soit $t^* > 0$, l'application entrée-sortie en temps t^* du système (1.6) contrôlé initialisé à x_0 est l'application :

$$E_{t^*} : U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$u \rightarrow x_u(t^*),$$

où U est l'ensemble des contrôles admissibles, c'est à dire l'ensemble de contrôles u tels que la trajectoire associée est admissible sur $[0, t^*]$.

Proposition 2.1. *Considérons le système (1.6), soit $U \subset L^\infty([0, t^*], \mathbb{R}^n)$ le domaine de définition de E_{t^*} c'est-à-dire : l'ensemble des contrôles dont la trajectoire associée est admissible sur $[0, t^*]$. Alors U est un ouvert de $L^\infty([0, t^*], \mathbb{R}^n)$, et E_{t^*} est C^p au sens L^∞ . De plus la différentielle (au sens de Fréchet) de L^∞ en un point $u \in U$ est donnée par le système linéarisé en u de la manière suivante : Posons, pour tout $t \in [0, t^*]$:*

$$\begin{cases} A(t) = \frac{df}{dx}(t, x(t), u(t)), \\ B(t) = \frac{df}{du}(t, x(t), u(t)). \end{cases}$$

La différentielle de Fréchet de E_{t^*} en u est alors l'application $dE_{t^*}(u)$ telle que, pour tout $u \in L^\infty([0, t^*], \mathbb{R}^n)$:

$$dE_{t^*}(u).v = x_v(t^*) = S(t^*) \int_0^{t^*} S(\tau)^{-1} B(\tau) v(\tau) d\tau.$$

Définition 2.2 (Fonction Hamiltonien). *L'hamiltonien est une fonction de la forme :*

$$H = H(x(t), u(t), \psi(t), t) = \psi' f(x(t), u(t), t),$$

où ψ c'est le vecteur d'adjoint.

2.3.1 Principe du maximum sans contrainte sur le contrôle

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \max Z(u) = G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

Théorème 2.1. (*Principe du maximum faible*)[16]

Si le contrôle u^* associé au système de contrôle optimal pour le coût, alors il existe une application $\psi(\cdot)$ absolument continue sur $[0, t^*]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et un réel $\psi^* \leq 0$, tels que le couple $(\psi(\cdot), \psi^*)$ est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées presque pour tout $t \in [0, t^*]$:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \psi}(x(t), u^*(t), \psi^*(t), t), & x_0 = 0, \\ \dot{\psi}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \psi(t), t), & \psi(t^*) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t), t) = 0. \end{cases}$$

Preuve : On suppose que le contrôle u associée au système de contrôle (1.6) est optimal pour le coût sur $[0, t^*]$, alors l'application $dE_{t^*}(u)$ n'est pas surjective, donc il existe un vecteur ligne $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que pour tout contrôle v dans L^∞ , on ait :

$$\lambda dE_{t^*}(u)v = 0 \Rightarrow \lambda \int_0^{t^*} S(t^*)S(\tau)^{-1}B(\tau)v(\tau)d\tau = 0,$$

par conséquent

$$\lambda S(t^*)S(\tau)^{-1}B(\tau) = 0 \quad \text{presque par tout sur } [0, t^*].$$

On pose :

$$\psi(t) = \lambda S(t^*)S(t)^{-1}, \quad \text{pour tout } t \in [0, t^*].$$

C'est un vecteur ligne de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\psi(t^*) = \lambda$.

Par dérivation de ψ :

$$\dot{\psi}(t) = \lambda S(t^*)S(t)^{-2}\dot{S}(t),$$

avec

$$A = \frac{\dot{S}(t)}{S(t)},$$

par conséquent :

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)A(t),$$

en effet :

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t) \frac{df}{dx}(x(t), u(t), t),$$

car $A(t) = \frac{df}{dx}(x(t), u(t), t)$.

En utilisant l'hamiltonien défini par

$$H(t, x, \psi, u) = \psi' f(x, u, t),$$

on obtient :

$$\frac{dH}{d\psi}(x(t), u(t), \psi(t), t) = f(x(t), u(t), t),$$

de plus :

$$-\frac{dH}{dx}(x(t), u(t), \psi(t), t) = -\psi(t) \frac{df}{dx}(x(t), u(t), t),$$

alors :

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{dH}{dx}(x(t), u(t), \psi(t), t).$$

Autrement $\psi(t)B(t) = 0$ car $B(t) = \frac{df}{du}(x(t), u(t), t)$,

alors :

$$\psi(t) \frac{df}{du}(x(t), u(t), t) = 0,$$

d'où :

$$\frac{dH}{du}(x(t), u(t), \psi(t), t) = 0.$$

2.3.2 Principe du maximum sans contrainte sur l'état

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \max Z(u) = G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = 0, \quad u \in U. \end{cases} \quad (2.5)$$

Théorème 2.2. *(Principe du maximum de Pontryagin sans contrainte sur l'état)*
 Soit $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible où U un ensemble des contrôles admissibles et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale la solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$, alors il existe un vecteur $\psi^*(t)$ tels que les équations suivantes

sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)), \quad x^*(0) = x_0, \\ \dot{\psi}^*(t) = - \frac{\partial H(x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x} \Big|_{x(t)=x^*(t), u(t)=u^*(t), \psi(t)=\psi^*(t)}, \\ \psi(t^*) = \frac{\partial G(t^*, x(t^*))}{\partial x} \Big|_{x(t^*)=x^*(t^*)}, \\ H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) \geq H(t, x^*(t), u(t), \psi^*(t)), \quad \forall u(t) \in U, \quad t \in [0, t^*]. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

On voit bien que $u^*(t)$ va fournir un maximum global du Hamiltonien $H(t, x^*(t), u(t), \psi^*(t))$ pour $u(t) \in U$. Pour cette raison, les conditions nécessaires (2.6) sont appelées "Principe du maximum".

2.3.3 Principe du maximum avec contraintes sur l'état

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{aligned} Z(u) &= G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t \in [0, t^*]. \end{aligned}$$

Ici nous imposons au problème des contraintes sur l'état et les variables de contrôle. Plus précisément, pour chaque instant $t \in T$, $x(t)$ et $u(t)$ doivent satisfaire la contrainte

$$g(x, u, t) \geq 0, \quad g \in \mathbb{R}^p, \quad t \in T. \quad (2.7)$$

Ainsi, nous introduisons la fonction Lagrangien, qui s'écrit

$$\overline{H}(x, u, \psi, \lambda, t) = H(x, u, \psi, t) + \lambda' g(x, u, t), \quad (2.8)$$

le vecteur λ est appelé multiplicateur de Lagrange. Ce multiplicateur de Lagrange doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$\lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i g_i(x, u, t) = 0, \quad \forall i \in I \quad (2.9)$$

Le vecteur adjoint satisfait l'équation différentielle suivant :

$$\dot{\psi}(t) = - \frac{\partial \overline{H}}{\partial x}(t, x(t), u(t), \psi(t)), \quad \psi(t^*) = \frac{\partial G}{\partial x}(t^*, x(t^*)). \quad (2.10)$$

Théorème 2.3. (*Principe du maximum de Pontryagin avec contrainte sur l'état*) Soient $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible où U un ensemble des contrôles admissibles et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimal solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$, alors il existe un vecteur adjoint $\psi^*(t)$ et un multiplicateur de Lagrange λ^* tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)), \quad x^*(0) = x_0, \\ \dot{\psi}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)), \\ \psi(t^*) = \frac{\partial G}{\partial x}(t^*, x(t^*)), \\ \bar{H}(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) \geq \bar{H}(t, x^*(t), u(t), \psi^*(t)), \quad \forall u(t) \in U, \quad t \in [0, t^*], \\ g(x^*(t), u^*, t) \geq 0, \quad t \in T, \\ \lambda^*(t) \geq 0, \lambda_i^* g_i(x^*, u^*, t) = 0, \quad \forall i \in I. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Avec :

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial u} \Big|_{u(t)=u^*(t)} = \frac{\partial (H + \lambda g)}{\partial u} \Big|_{u(t)=u^*(t)} = 0,$$

Preuve voir [14]

2.3.4 Principe du maximum dans le cas linéaire

Considérons le problème de contrôle linéaire :

$$\max Z(u) = G(x(t^*), t^*),$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0.$$

Définition 2.3.

Le contrôle u est dit extrémal sur $[0, t]$ si la trajectoire du problème de contrôle (1.3) associée à u vérifie :

$$x(t) \in \partial \text{Acc}(x_0, t), \quad t \in [0, t^*].$$

Définition 2.4.

Un contrôle $u^*(t)$, $t \in [0, t^*]$ est dit optimal si $u^*(.)$ est extrémal et $Z(u^*(t)) < Z(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, t^*]$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrémal. C'est un cas particulier du principe du maximum de Pontryagin.

Théorème 2.4 (4). *Considérons le problème président, où le domaine des contraintes $U \in \mathbb{R}^m$ est compact, convexe. Soit $t^* > 0$, le contrôle u est extrémal sur $T = [0, t^*]$ si et seulement s'il existe une solution non triviale $\psi(t)$ de l'équation $\dot{\psi}(t) = -\psi(t)A(t)$ telle que :*

$$\psi(t)B(t)u(t) = \max_{V \in U} \psi(t)B(t)V, \quad (2.12)$$

pour presque tout $t \in [0, t^]$.*

Remarque 2.1. *Dans le cas mono-entrée (contrôle scalaire), et si de plus $U = [-\alpha, \alpha]$ où $\alpha > 0$, la condition de maximisation implique immédiatement que $u(t) = \alpha \operatorname{signe}(\psi(t)B(t))$. La fonction $\varphi(t) = \psi(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation, le temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$ change de signe est appelé un temps de commutation. C'est en particulier un zéro de la fonction φ .*

2.3.5 Conditions de transversalité

La condition de transversalité est donnée par la formule suivante :

$$\left[H^* + \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right) \right]_{t^*} \delta t^* + \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^* - \psi^*(t) \right]_{t^*} \delta x_1 = 0. \quad (2.13)$$

Nous obtenons différents cas selon la nature de t^* et $x(t^*)$ que on peut considérer libre ou fixe.

Type (1) : Si t^* et $x(t^*)$ sont fixes alors, δt^* et δx_1 sont nuls dans la condition de transversalité, donc, on aura aucune condition supplémentaire.

Type (2) : Si t^* le temps final libre et $\delta x(t^*)$ est fixe, alors δt^* est arbitraire, et comme $x(t^*)$ est fixe, δx_1 est nul. Le coefficient de δt^* dans la condition de transversalité est nul, et on aura :

$$\left[H^* + \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right) \right]_{t^*} = 0.$$

Type (3) : Si t^* est fixe et $x(t^*)$ est libre. Donc δt^* est nul et δx_1 est arbitraire. Alors le coefficient de δx_1 dans la condition de transversalité (2.11) est nul. Ce qui nous donne la relation suivante :

$$\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^* - \psi(t)^* \right]_{t^*} = 0.$$

Type (4) : Si t^* et $x(t^*)$ sont libres, alors les coefficients de δt^* et de δx_1 dans la condition de transversalité sont nuls :

$$[H^* + (\frac{\partial G}{\partial t})]_{t^*} = 0,$$

$$[(\frac{\partial G}{\partial x})^* - \psi(t)^*]_{t^*} = 0.$$

2.4 Élément de calcul de variations

Définition 2.5. : Lorsque J est une fonctionnelle définie sur un ouvert d'un espace vectoriel normé E , on appelle variation de la fonctionnelle J en y dans la direction, $z \in E$, la limite, si elle existe, suivante :

$$\delta J(y, z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(y + \epsilon z) - J(y)}{\epsilon}.$$

Définition 2.6. : L'accroissement d'une fonctionnelle, noté ΔJ est définie par :

$$\Delta J = J(y(t) + \delta y(t)) - J(y(t)),$$

où $\delta y(t)$ est la variation de la fonction $y(t)$.

Ainsi l'accroissement $\Delta J((y(t), \delta y(t)))$ de la fonctionnelle dépend de la fonction $y(t)$ et de sa variation $\delta y(t)$.

Considérons le critère suivant :

$$\begin{cases} Z = G(x(t^*), t^*) + \int_{t_0}^{t^*} F(t, x, u), \\ \dot{x} = f(t, x, u) \quad x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Soient δZ est la première variation de Z et $\lambda(t) \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ le multiplicateur de Lagrange.

Proposition 2.2. La condition nécessaire de l'extremum u^* est

$$\delta z^*(u^*, \delta u) = 0$$

pour tout δu .

Définissons la fonction augmentée Z^* s'écrit comme suit :

$$Z^* = G(x(t^*), t^*) + \int_{t_0}^{t^*} (F(t, x, u) + \psi'(f - \dot{x})) dt.$$

En intégrant par partie dernier terme on aura :

$$Z^* = G(x(t^*), t^*) + \int_{t_0}^{t^*} (F + \psi' f + \dot{\psi} x) dt - \psi x \Big|_{t_0}^{t^*},$$

Soit a fonction d'hamiltonien définie comme suit :

$$H(t, \psi, x, u) = F(t, x, u) + \psi f(t, x, u).$$

En effet la première variation est donnée par :

$$\delta Z^* = \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \psi \right) \delta x \right]_{t=t^*} + \int_{t_0}^{t^*} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \dot{\psi} \delta x \right) dt.$$

2.5 Conditions suffisantes d'optimalité

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \max Z = \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t), \\ \dot{x} = f(t, x, u). \end{cases} \quad (2.14)$$

Définition 2.7. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. $f(t)$ est une fonction concave sur $[a, b]$ si

$$\alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) \leq f(\alpha x + (1 - \alpha)y)$$

$\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ et pour $a \leq x, y \leq b$.

La fonction f sera dite convexe sur $[a, b]$ si $(-f)$ est concave.

Théorème 2.5 (13). Supposons que $F(t, x, u)$ et $f(t, x, u)$ sont des fonctions continuellement différentiables et concaves .

Si le triplet $(x(t), u(t), \psi(t))$ satisfait les conditions :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{dH}{d\psi}(x(t), u(t), \psi(t), t), & x(0) = 0, \\ \dot{\psi}(t) = -\frac{dH}{dx}(x(t), u(t), \psi(t), t), & \psi(t^*) = 0, \\ H(x(t), u(t), \psi(t), t) = \max_{v \in K} (x(t), v, \psi(t)), \end{cases} \quad (2.15)$$

$$H(t, x, u, \psi) = F(t, x, u) + \psi' f(t, x, u)$$

est l'hamiltonien du système, et K est un sous-ensemble convexe, alors la paire $(x(t), u(t))$ est une solution optimale du problème de contrôle optimal correspondant.

La condition sur le maximum signifie que :

$$g(s) = H(t, x(t), u(t) + s(v - u(t)), \psi(t)), s \in [0, 1],$$

en fonction de s , pour t fixe et $v \in K$, à un maximum à $s = 0$.

Remarque que les vecteurs $sv + (1 - s)u(t)$ appartient à K (car K est un ensemble est concave).

Dans cette situation tout ce que nous pouvons faire en sorte est $\dot{g}(0) \geq 0$ (maximum à sens unique).

Donc

$$\dot{g}(0) = \frac{dH}{du}(x(t), u(t), \psi(t), t)(v - u(t)) \geq 0 \quad , \quad v \in K.$$

Preuve On utilise le vecteur adjoint $\psi(t)$, équivalent la fonction objectif

$$Z = \int_{t_0}^{t^*} F(t, x(t), u(t)) - \psi'(t)(\dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t)))dt. \quad (2.16)$$

Soient $(x(t), u(t))$ la solution réalisable quelconque du problème et $(x^*(t), u^*(t))$ la solution réalisable vérifiant les relations (2.15) alors :

$$\begin{aligned} Z(x^*(t), u^*(t)) - Z(x(t), u(t)) &= \int_0^{t^*} F(x^*(t), u^*(t), t) - \psi'(t)[\dot{x}^*(t) - f(t, x^*(t), u^*(t))]dt \\ &\quad - \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) - \psi'(t)[\dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t))]dt \\ &= \int_0^{t^*} [H(x^*(t), u^*(t), \psi(t), t) - H(x(t), u(t), \psi(t), t) \\ &\quad + \psi'(t)(\dot{x}^*(t) - \dot{x}(t))]dt \\ &\geq \int_0^{t^*} [\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), u(t), \psi(t), t)(x^*(t) - x(t)) + \\ &\quad \frac{\partial H}{\partial u}(x(t), u(t), \psi(t), t)(u^*(t) - u(t)) + \psi'(x^*(t) - x(t))]dt \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

donc $(x^*(t), u^*(t))$ est une solution optimale du problème (2.14).

Théorème 2.6. *On se remplace dans le cadre du théorème 2.5. Si f et g sont concaves par rapport à x et u , et que $\psi \geq 0$, alors les conditions nécessaires sont aussi suffisantes.*

Exemple : Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min Z(x, u) = \int_0^{0.5} u(t)^2, \\ \dot{x}(t) = u(t) + 2, \\ x(0) = 0, \\ x(0.5) = 1. \end{cases}$$

L'hamiltonien H est définie par :

$$H(x(t), u(t), \psi(t), t) = u^2(t) + \psi'[u + 2].$$

Comme F est convexe et f est linéaire alors, on peut utiliser les conditions nécessaires comme des conditions suffisantes alors on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial \psi} = (u + 2), \\ \dot{\psi}^* = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \psi(t^*) \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 2u(t) + \psi^* = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \psi} = u + 2, \\ \dot{\psi}^* = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \psi^*(t) = -2u^*(t). \end{cases}$$

La résolution des équation d'état et le vecteur adjoint est donnée par :

$$\psi^*(t) = \psi^*(t_f) = \psi^*(0.5),$$

$$x^* = ut + 2t + x(0) = t(u + 2),$$

on a : $\psi^*(t) = -2u^*$.

D'autre part : $u^* = \begin{cases} 0.5 & \text{si } \psi(t) < 0 \\ 0 & \text{si } \psi(t) > 0 \end{cases}$ donc : $u^* = 0.5$,

ce qui implique : $\psi^* = -1$.

Finalement, la trajectoire optimale est donnée par : $x^* = \frac{5}{2}t$.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé les conditions d'optimalité d'un problème de contrôle optimal avec et sans contraintes.

Par la suite nous avons présenté les conditions suffisantes d'optimalité dans le cas où les fonctionnelles sont concaves.

Chapitre 3

Contrôle optimal d'un système dynamique avec retards

Introduction

Le contrôle optimal des systèmes dynamiques avec retard joue un rôle important dans la modélisation de plusieurs phénomènes de la chimie, la biologie et dans plusieurs domaines.

Dans ce chapitre, nous présentons un ensemble de conditions nécessaire pour l'optimalité des systèmes dynamiques avec retard sur l'état, mixte, multiple sans et avec contraintes.

3.1 Le principe du maximum du contrôle optimal d'un système dynamique avec retard sur l'état sans contraintes

Le principe de maximum de Pontryagin est une approche élégante, pour obtenir une solution optimale d'un système dynamique en général, mais on utilise pas ce dernier pour les systèmes dynamiques avec retard, dans ce cas on utilise généralement, la dérive d'équation canonique d'hamiltonien pour déterminer la solution optimale.

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x(t), x(t-h), u(t), t), \quad x(t_0) = 0.$$

$x(t)$ est un n vecteur d'état, $u(t)$ est un p vecteur de commande et h est le retard. Pour déterminer le contrôle optimale $u(t)$ on doit maximiser le critère

$$Z(x(t), u) = G(x^*, t^*) + \int_{t_0}^{t^*} F(t, x(t), x(t-h), u(t)) dt.$$

Théorème 3.1 (11). *Soit $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible où U est un ensemble des contrôles admissibles et $x^*(t)$ la trajectoire optimale du solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$ alors il existe un vecteur adjoint $\psi(t)$ tel que les conditions nécessaires d'optimalité s'écrit :*

$$\begin{cases} \dot{\psi}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)} - \frac{\partial H}{\partial x(t-h)}(t+h), & \psi(t^*) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

L'hamiltonien H est définie par :

$$H(t, x, y, u, \psi) = F(t, x(t), x(t-h), u(t)) + \psi'(t)f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad (3.1)$$

Preuve

En utilisant le vecteur adjoint $\psi(t)$, le critère de performance Z^* s'écrit :

$$Z^* = \int_{t_0}^{t^*} F[x(t), u(t), t] - \psi'(t)[\dot{x}(t) - f[x(t), x(t-h), u(t)]] dt. \quad (3.2)$$

En introduisant l' Hamiltonien

$$H[x(t), x(t-h), \psi(t), u(t), u(t-s), t] = F[x(t), u(t), t] + \psi'(t)f[x(t), x(t-h), u(t), t], \quad (3.3)$$

La fonctionnelle Z^* devient :

$$Z^* = \int_0^{t^*} H[x(t), x(t-h), u(t), \psi(t), t] - \psi'(t)\dot{x}(t) dt.$$

Par intégration du dernier terme on aura :

$$Z^* = \int_0^{t^*} H[x(t), x(t-h), u(t), \psi(t), t] + \dot{\psi}(t)x(t) dt + \psi'(0)x(0) - \psi'(t^*)x(t^*). \quad (3.4)$$

En effet, la variation de Z^* nous donne :

$$\begin{aligned} \delta Z^* = & \int_0^{t^*} \left[\delta x'(t) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)} \right] + \delta x'(t-h) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial x(t-h)} \right] + \delta u'(t) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} \right] + \delta x'(t) \dot{\psi}(t) \right] dt \\ & + \delta x'(0)\psi(0) - \delta x'(t^*)\psi(t^*). \end{aligned}$$

Posons

$$\phi(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial x(t-h)},$$

Par conséquent on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{t^*} \delta x'(t-h) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial x(t-h)} \right] dt &= \int_0^{t^*} \delta x'(t-h) \phi(t) dt \\ &= \int_h^{t^*} \delta x'(t-h) \phi(t) dt \\ &= \int_0^{t-h} \delta x'(t) \phi(t+h) dt \\ &= \int_0^{t^*} \delta x'(t) \phi(t+h) dt, \end{aligned}$$

en effet $\delta Z^* = \int_0^{t^*} \left[\delta x'(t) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)} \right] + \delta x'(t) \phi(t+h) + \delta x'(t) \dot{\psi}(t) \right] dt + \int_0^{t^*} \left[\left[\frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} \right] \delta u' \right] dt$
 $+ \delta x'(0) \psi(0) - \delta x'(t^*) \psi(t^*),$

on obtient Le système des conditions nécessaires d'optimalité comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}^*(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)} - \phi(t+h) \quad \phi(t) = 0 \quad \text{pour } t > 0, \\ \frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} = 0, \\ \psi^*(0) = 0, \\ \psi^*(t^*) = 0 \quad \text{si } x(t^*) \text{ et } x(0) \text{ sont libres,} \\ \dot{x}^*(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial \psi(t)}. \end{array} \right.$$

3.2 Principe du maximum avec retard mixte

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f[x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t], x(t) = 0 \quad \text{pour } t > 0, \quad (3.5)$$

avec $x(t)$ est un n vecteur d'état, $u(t)$ est un p vecteur de commande et h est le temps retard.

Pour déterminer le contrôle $u(t)$ on doit à maximiser le critère

$$Z = G(x(t^*), t^*) + \int_{t_0}^{t^*} F[t, x(t), x(t-h), u(t), u(t-s)] dt. \quad (3.6)$$

Théorème 3.2 (11). Soit $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible où U est un ensemble des contrôles admissibles et $x^*(t)$ la trajectoire optimale du solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$ alors il existe un vecteur adjoint ψ et soit l'hamiltonien définit par :

$$H(t, x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), \psi(t)) = F(t, x(t), x(t-h), u(t), u(t-s)) + \psi'(t)f(t, x(t), x(t-h), u(t), u(t-s)),$$

alors le système des conditions nécessaires d'optimalité s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\psi}^* = -\frac{\partial H}{\partial x}(t) - \phi(t+h) & \phi(t) = 0 \quad \text{pour } t > 0, \\ \psi^*(0) = 0, \\ \psi^*(t^*) = 0 & \text{pour } x(0) \text{ et } x(t^*) \text{ sont libres,} \\ \frac{\partial H}{\partial u} + \Upsilon(t+s) = 0. \end{cases}$$

Preuve. En utilisant le vecteur adjoint $\psi(t)$, et le critère de performance prend la forme suivante :

$$Z^* = \int_{t_0}^{t^*} F[x(t), u(t), t] - \psi'(t)[\dot{x}(t) - f[x(t), x(t-h), u(t), u(t-s)]]dt. \quad (3.7)$$

En introduisant l'hamiltonien

$$H[x(t), x(t-h), \psi(t), u(t), u(t-s), t] = F[x(t), u(t), t] + \psi'(t)f[x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t]. \quad (3.8)$$

La fonctionnelle Z^* devient :

$$Z^* = \int_0^{t^*} H[x(t), x(t-h), u(t), \psi(t), u(t-s), t] - \psi'(t)\dot{x}(t)dt.$$

Par intégration du dernier terme on aura :

$$Z^* = \int_0^{t^*} H[x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), \psi(t), t] + \dot{\psi}'(t)x(t)dt + \psi'(0)x(0) - \psi'(t^*)x(t^*). \quad (3.9)$$

En effet, la variation de Z^* qui donne par :

$$\delta Z^* = \int_0^{t^*} \delta x'(t) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)} \right] + \delta x'(t-h) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial x(t-h)} \right] + \delta u'(t) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} \right] + \delta u'(t-s) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial u(t-s)} \right] + \delta x'(t)\dot{\psi}(t)dt + \delta x'(0)\psi(0) - \delta x'(t^*)\psi(t^*).$$

Posons

$$\phi(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial x(t-h)},$$

et

$$\Upsilon(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial u(t-s)},$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^{t^*} \delta x'(t-h) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial x(t-h)} \right] dt &= \int_0^{t^*} \delta x'(t-h) \phi(t) dt \\ &= \int_h^{t^*} \delta x'(t-h) \phi(t) dt \\ &= \int_0^{t^*-h} \delta x'(t) \phi(t+h) dt \\ &= \int_0^{t^*} \delta x'(t) \phi(t+h) dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{t^*} \delta u'(t-s) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial u(t-s)} \right] dt &= \int_0^{t^*} \delta u'(t-s) \Upsilon(t) dt \\ &= \int_h^{t^*} \delta u'(t-s) \Upsilon(t) dt \\ &= \int_0^{t^*-s} \delta u'(t) \Upsilon(t+s) dt \\ &= \int_0^{t^*} \delta u'(t) \Upsilon(t+s) dt, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \delta Z^* &= \int_0^{t^*} \delta x'(t) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)} \right] + \delta x'(t-h) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial x(t-h)} \right] + \delta u'(t) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} \right] + \delta u'(t-s) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial u(t-s)} \right] \\ &\quad + \delta x'(t) \dot{\psi}(t) dt + \delta x'(0) \psi(0) - \delta x'(t^*) \psi(t^*). \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \delta Z^* &= \int_0^{t^*} \left[\delta x'(t) \left[\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)} \right] + \delta x'(t) \phi(t+h) + \delta x'(t) \dot{\psi}(t) \right] dt \\ &\quad + \int_0^{t^*} \left[\left[\frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} \right] \delta u'(t) + \delta u'(t) \Upsilon(t+s) \right] dt + \delta x'(0) \psi(0) - \delta x'(t^*) \psi(t^*), \end{aligned}$$

On obtient les conditions nécessaires d'optimalité suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)} - \phi(t+h) \quad \phi(t) = 0 \quad \text{pour } t > 0, \\ \frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} + \Upsilon(t+s) = 0, \\ \psi(0) = 0, \\ \psi(t^*) = 0 \quad \text{si } x(t^*) \text{ et } x(0) \text{ sont libres,} \\ \dot{x}(t) = \frac{\partial H(t)}{\partial \psi(t)}. \end{array} \right.$$

3.3 Contrôle optimal d'un système dynamique avec retard mixte avec contraintes

Considérons le problème de contrôle optimal avec retard constant, $h \geq 0$ dans $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $s \geq 0$ dans $u(t) \in \mathbb{R}^m$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(x(t), u(t)) = G(x(t^*), t^*) + F(t, x(t), x(t-h), u(t), u(t-s)), \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h), u(t), u(t-s)) \quad t \in [t_0, t^*] \\ x(t) = x_0(t), t \in [t_0-h, t^*] \\ u(t) = u_0(t), t \in [t_0-s, t^*] \\ \omega(t^*) = 0, \\ C(t, x(t), x(t-h), u(t), u(t-s)) \leq 0, \quad t \in [t_0, t^*]. \end{array} \right.$$

où les fonction : $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$f : [t_0, t^*] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$F : [t_0, t^*] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$,

$\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q, 0 \leq q \leq n$,

$C : [t_0, t^*] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont continument différentiable .

Le couple $(x^*(t), u^*(t))$ est une solution optimale si

$$Z(x^*(t), u^*(t)) \geq Z(x(t), u(t)).$$

3.3.1 Les conditions nécessaires d'optimalité

posons $h, s \geq 0$ $(h, s) \neq (0, 0)$,et $\frac{h}{s} \in Q$ pour $s > 0$ $\frac{s}{h} \in Q$ pour $h > 0$

0. On définit l' Hamiltonien H et Hamiltonien augmenté $\bar{H}$ comme suit :

$$H(t, x, y, u, v, \psi) = F(t, x, y, u, v) + \psi'(t)f(t, x, y, u, v), \quad (3.10)$$

$$\bar{H}(t, x, y, u, v, \psi, \lambda) = H(t, x, y, u, v, \psi) + \lambda' C(x, u, t), \quad (3.11)$$

où ψ dans $\mathbb{R}^n$ et λ dans $\mathbb{R}^p$.

Théorème 3.3 (6). *principe du maximum*

Soit $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible où U un ensemble des contrôles admissibles et $x^*(t)$ la trajectoire optimale est une solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$. alors il existe un vecteur adjoint $\psi(t)$ et un multiplicateur de Lagrange $\lambda(t)$ et $\varsigma \in \mathbb{R}^q$ tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{\psi}^*(t) = -\bar{H}_x - \chi_{[t_0, t^*-h]}(t) \bar{H}_y(t+h), \\ \psi(t^*) = G_x(x(t^*)) + \varsigma \omega_x(x(t^*)), \\ \bar{H}_u + \chi_{[t_0, t^*-s]}(t) \bar{H}_v(t+s) = 0. \\ \lambda^*(t) \geq 0 \quad \lambda_i^*(t) C_i(t, x^*, u^*) = 0, i = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Exemple

Considérons le problème d'exemple (1.2)

La condition régulière

$$\frac{\partial C}{\partial u} = (0, 0, 0, 0, 1) \neq (0, 0, 0, 0)$$

est évidemment satisfait la fonction objectif suivante :

$$Z_1 = x_1^2(T) + x_4^2(T) + \int_0^T (x_1^2(t) + x_4^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t) + u_4^2(t)) dt.$$

On pose : $y_1 = x_1(t - r_1), y_3 = x_3(t - r_3), v_1 = u_1(t - r_{u_1})$,

de plus l'hamiltonien pour le problème de contrôle retardé est donné par :

$H(x, y_1, y_3, u, v_1, \psi) = x_1^2 + x_4^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + \psi_1((1-x_3)x_1 - v_1) + \psi_2(3A(x_4)y_1y_3 + u_2 - (x_2 - 2)) + \psi_3(x_2 - (1, 5 + 0, 5x_1)x_3 + u_3) + \psi_4(x_1 - x_4 - u_4)$, et l'hamiltonien augmentée est :

$$H(t, x, y_1, y_3, u, v_1, \psi, \lambda) = H(x, y_1, y_3, u, v_1, \psi) + \lambda'(0, 1u_4 + x_4 - \alpha),$$

Le vecteur adjoint satisfait l'équation suivante :

$$\dot{\psi}^*(t) = -\bar{H}_x - \chi_{[a, b-h]}(t) \bar{H}_y(t+h),$$

alors

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = -2x_1(t) - \psi_1(t)(1 - x_3(t)) + 0, 5\psi_3(t)x_1(t) \\ -\psi_4(t) - \chi_{[0, T-r_1]}(t)3\psi_2(t+r_1)A(x_4(t+r_1))x_3(t+r_1-r_3), \\ \dot{\psi}_2(t) = \psi_2(t) - \psi_3(t), \\ \dot{\psi}_3(t) = \psi_1(t)x_1(t) + \psi_3(t)(1, 5 + 0, 5x_1) \\ -\chi_{[0, T-r_3]}(t)3\psi_2(t+r_3)A(x_4(t+r_1))x_3(t+r_1-r_3), \\ \dot{\psi}_4(t) = -2x_4(t) - 3\psi_2(t)A'(x_4(t))x_1(t-r_1)x_3(t-r_3) + \psi_4(t) - \lambda(t). \end{cases}$$

Donc on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (1 - x_3(t))x_1(t) - u_1(t - r_{u_1}), \\ \dot{x}_2(t) = 3A(x_4(t))x_1(t - r_1)x_3(t - r_3) - x_2(t) - 2 + u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - (1, 5 + 0, 5x_1(t))x_3(t) + u_3(t), \\ \dot{x}_4(t) = x_1(t) - x_4(t) - u_4(t), \\ \dot{\psi}_1(t) = -2x_1(t) - \psi_1(t)(1 - x_3(t)) + 0, 5\psi_3(t)x_1(t) \\ -\psi_4(t) - \chi_{[0, T-r_1]}(t)3\psi_2(t+r_1)A(x_4(t+r_1))x_3(t+r_1-r_3), \\ \dot{\psi}_2(t) = \psi_2(t) - \psi_3(t), \\ \dot{\psi}_3(t) = \psi_1(t)x_1(t) + \psi_3(t)(1, 5 + 0, 5x_1) \\ -\chi_{[0, T-r_3]}(t)3\psi_2(t+r_3)A(x_4(t+r_1))x_3(t+r_1-r_3), \\ \dot{\psi}_4(t) = -2x_4(t) - 3\psi_2(t)A'(x_4(t))x_1(t-r_1)x_3(t-r_3) + \psi_4(t) - \lambda(t). \end{cases}$$

La Condition Local maximal de la fonction d'hamiltonien donne :

$$\begin{cases} H_{u_1}(t) + \chi_{[0, T-r_{u_1}]}(t)H_{v_1}[t+r_{u_1}] = 2u_1(t) + \chi_{(0, T-r_{u_1})}(t)\psi_1(t+r_{u_1}) = 0, \\ H_{u_2}(t) = 2u_2(t) + \psi_2(t) = 0, \\ H_{u_3}(t) = 2u_3(t) + \psi_3(t) = 0, \\ H_{u_4}(t) = 2u_4(t) - \psi_4(t) + 0, 1\lambda(t) = 0. \end{cases}$$

Tel que $0 \leq u \leq 2$.

Pour les arcs intérieurs on a $0, 1u_4(t) + x_4(t) < 0$, et $\lambda(t) = 0$

et donc on obtient le loi du contrôle,

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{\psi_1(t+r_{u_1})}{2} \quad si \quad 0 \leq t < T - r_{u_1}, \\ u_1(t) = 0 \quad si \quad T - r_{u_1} \leq t \leq T, \\ u_2(t) = -\frac{\psi_2(t)}{2}, \\ u_3(t) = -\frac{\psi_3(t)}{2}, \\ u_4(t) = \frac{\psi_4(t)}{2}. \end{cases}$$

Lorsque la contrainte étatique de contrôle mixte est active, à savoir,

$$0, 1u_4(t) + x_4(t) = \alpha$$

donc

$$u_4(t) = 10(\alpha - x_4(t)),$$

alors

$$\lambda(t) = 10(\psi_4(t) - 2u_4(t)) = 10(\psi_4(t) - 20(\alpha - x_4(t))).$$

Après la résolution numérique du système dynamique avec la méthode de discrétisation d'Euler(voir [6]) et $N = 10000$,
et comme F est une fonction convexe alors la solution optimale est comme suit :

$$Z_1(x, u) = 7,142, x_1(T) = 5,03410^{-9}, x_4(T) = 4,2855 \times 10^{-6}.$$

$$\psi(T) = (2x_1(T), 0, 0, 2x_4(T)).$$

On a :

$$Z_2 = x_1^2 + x_4^2 + \int_0^T (x_1^2 + x_4^2 + u_1 + u_3)dt,$$

Alors on obtient le loi de contrôle comme suit :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= H_{u_1} + \chi_{[0, T-r_{u_1}]} H_{v_1}(t + r_{u_1}) &= 1 - \chi_{[0, T-r_{u_1}]} \psi(t + r_{u_1}), \\ \rho_2 &= H_{u_2} &= 1 + \psi_2, \\ \rho_3 &= H_{u_3} &= 1 + \psi_3, \\ \rho_4 &= H_{u_4} &= 1 - \psi_4. \end{aligned}$$

$$u_k = \begin{cases} 2 & \text{si } \rho_k < 0, \\ 0 & \text{si } \rho_k > 0, \\ \text{singulier} & \rho_k = 0. \end{cases}$$

Pour $N = 4000$, et de même méthode et comme F est linéaire par rapport à u on obtient la solution optimale comme suit :

$$x_1(T) = 9,184314 \times 10^{-4}, x_2 = 1,547 \times 10^{-3}, Z_2 = 6,037.$$

3.4 Contrôle optimal d'un système dynamique avec retard multiple avec contraintes

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(x, u) = G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t - h_0), \dots, x(t - h_d), u(t - s_0), \dots, u(t - s_d)) \quad t \in [0, t^*], \\ x(t) = x_0(t), t \in [-h_d, 0], \\ u(t) = u_0(t), t \in [-s_d, 0], \\ \omega(t^*) = 0, \\ C(t, x(t - h_0), \dots, x(t - h_d), u(t - s_0), \dots, u(t - s_d)) \leq 0, t \in [0, t^*]. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Les fonctions : $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, t^*] \times \mathbb{R}^{(d+1)n} \times \mathbb{R}^{(d+1)m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$, $0 \leq q \leq n$, et $C : [0, t^*] \times \mathbb{R}^{(d+1)n} \times \mathbb{R}^{(d+1)m} \rightarrow \mathbb{R}^q$ sont continues, et les deux fonction $x_0 : [-h_d, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $u_0 : [-s_d, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, Si on considère la forme de BOLZA :

$$Z(x, u) = G(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(t, x(t - h_0), \dots, x(t - h_d), u(t - s_0), \dots, u(t - s_d)) dt,$$

$$F : [0, t^*] \times \mathbb{R}^{(d+1)n} \times \mathbb{R}^{(d+1)m} \rightarrow \mathbb{R},$$

on peut faire le passage à celle de Mayer en utilisant la forme de Mayer croisé suivante :

$$\dot{x}_{n+1} = F(t, x(t - h_0), \dots, x(t - h_d), u(t - s_0), \dots, u(t - s_d)). \quad (3.13)$$

Par conséquent on retrouve le critère suivant :

$$Z(x, u) = G(x(t^*), t^*) + x_{n+1}(t^*). \quad (3.14)$$

Car $x_{n+1}(0) = 0$, posons :

$$v = u(t - s), y = x(t - h), H_x = \frac{\partial H}{\partial x}, G_x = \frac{\partial G}{\partial x}, \omega_x = \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

3.4.1 Les conditions nécessaires d'optimalité

L'Hamiltonien augmenté du problème est donnée par :

$$\bar{H}(t, y_0, \dots, y_d, v_0, \dots, v_d, \psi, \lambda) = \psi'(t) f(t, y_0, \dots, y_d, v_0, \dots, v_d) + \lambda' C(t, y_0, \dots, y_d, v_0, \dots, v_d), \quad (3.15)$$

avec ψ dans $\mathbb{R}^n$ et λ dans $\mathbb{R}^p$.

La condition de régularité

Pour tous couples optimales (x^*, u^*) et $t \in [0, t^*]$ on a :

$$j_0(t) = \{j \in 1, \dots, p / C_j(t, x^*(t - h_0), \dots, x^*(t - h_d), u^*(t - s_0), \dots, u^*(t - s_d)) = 0\} \quad (3.16)$$

$$\text{rang}\left(\frac{\partial C_j(t, x^*(t - h_0), \dots, x^*(t - h_d), u^*(t - h_0), \dots, u^*(t - h_d))}{\partial(v_0, \dots, v_d)}\right) = \sharp j_0(t). \quad (3.17)$$

Théorème 3.4. Soit $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible où U est un ensemble des contrôles admissibles et $x^*(t)$ la trajectoire optimale du solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$ alors il existe un vecteur adjoint $\psi(t)$ et un multiplicateur de Lagrange $\lambda(t)$ et $\varsigma(t) \in \mathbb{R}^q$ sur $[t_0, t^*]$ tels que les équations suivantes sont vérifiées :

1-Vecteur adjoint

$$\dot{\psi}^*(t) = - \sum_{\delta=0}^d \chi_{[t_0, t^*-h_\delta]}(t) \overline{H}_{y_\delta}(t + h_\delta). \quad (3.18)$$

2-Conditions de transversalité :

$$\psi(t^*) = \lambda_0 G_x(x^*(t^*)) + \varsigma \omega_x(x(t^*)). \quad (3.19)$$

3-Condition d'optimalité de la fonction d'hamiltonien :

$$\sum_{\delta=0}^d \chi_{[t_0, t^*-s_\delta]}(t) \overline{H}_{v_\delta}(t + s_\delta) = 0. \quad (3.20)$$

4. Les conditions complémentaires et non négativité de multiplicateur de Lagrange

$$\lambda^*(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_i^*(t) C_i(t, x^*(t - h_0), \dots, x^*(t - h_d), u^*(t - s_0), \dots, u^*(t - s_d)) = 0, i = 1, \dots, p. \quad (3.21)$$

Preuve : voir [6]

Exemple :

Considérons le problème suivant avec les retards $h_1 = 1$, $h_2 = 2$ dans l'état et $s = 2$ dans la variable de contrôle :

$$\begin{cases} \text{Min} Z(x(t), t) = \int_0^3 ((x^2) + (u^2)) dt, \\ \dot{x} = x(t - 1)x(t - 2)u(t - 2), \\ x(t) = 1 \quad t \in [-2, 0], \\ u(t) = 0 \quad t \in [-2, 0]. \end{cases}$$

Pour plus de simplicité, nous gardons la notation x et u pour la variable d'état et de contrôle sans retard et désignons par y_k , respectivement, v_k , avec $k = 1, 2$ les retards de l'état et du contrôle.

Puis l'hamiltonien est donnée par :

$$H(t, x, y_1, y_2, u, v_1, v_2, \psi) = x^2 + u^2 + \psi y_1 y_2 v_2.$$

En effet, les systèmes adjoint est comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -H_x(t, x(t-1), x(t-2), u(t), u(t-1), u(t-2), \psi(t)) \\ -\chi_{[0,2]}(t)H_{y_1}(t+1, x(t+1), x(t), x(t-1), u(t-1), u(t), u(t+1), \psi(t+1)) \\ -\chi_{[0,1]}(t)H_{y_2}(t+2, x(t+2), x(t+1), x(t), u(t+2), u(t+1), u(t), \psi(t+2)) \\ = -2x(t) - \chi_{[0,2]}(t)\psi(t+1)x(t-1)u(t-1) - \chi_{[0,1]}(t)\psi(t+2)x(t+1)u(t), \\ \psi(3) = 0. \end{cases}$$

La variable d'état peut être influence par rapport la commande $u(t-2)$ sur l'intervalle terminale $[2, 3]$.

Par conséquent, il suffit de déterminer le contrôle optimal $u(t)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

En déduit que

$$\begin{aligned} & H(t, x(t), x(t-1), x(t-2), u(t), u(t-1), u(t-2)) \\ & + \chi_{[0,1]}(t)H(t+2, x(t+2), x(t+1), x(t), u(t+2), u(t+1), u(t)) \\ & = (x(t))^2 + u^2 + \psi(t)x(t-1)x(t-2)u(t-2) \\ & + \chi_{[0,1]}(t)(x(t+2))^2 + (u(t+2))^2 + \psi(t+2)x(t+1)x(t)u(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, le gradient de cette expression par rapport à u disparaît :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u(t) + \chi_{[0,1]}(t)\psi(t+2)x(t+1)x(t) = 0,$$

où $x(t) = 1$, pour $t \in [0, 2]$ car d'après la solution du système dynamique et les conditions initiales $x(t) = 1$ sur l'intervalle $[-2, 0]$, pour $t \in [0, 1]$, nous obtenons le contrôle $u(t)$ comme suit :

$$u(t) = -0.5\psi(t+2)x(t+1) = -0.5\psi(t+2) \quad t \in [0, 1], \quad (3.22)$$

sur l'intervalle $[1, 3]$, $u(t)$ s'écrit comme suit :

$$u(t) = 0. \quad (3.23)$$

Sur l'intervalle $[2, 3]$,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -2x(t), \\ \dot{x}(t) &= x(t-1)x(t)u(t-2) = u(t-2) = -0.5\psi(t). \end{aligned}$$

On obtient ainsi un équation du seconde ordre

$$\ddot{\psi}(t) = -2\dot{x}(t) = \psi(t) \quad \text{pour } t \in [2, 3]. \quad (3.24)$$

En effet la solution générale est donné par :

$$\psi(t) = Ae^t + Be^{-t},$$

et

$$x(t) = -0.5(Ae^t - Be^{-t}).$$

Les constants A et B peuvent être déterminés à partir de la condition de transversalité et la continuité de l'état $x(t)$ à $t = 2$, $\psi(3) = 0$, $x(2) = 1$, alors :

$$A = \frac{-2e^{-2}}{e^2 + 1}, B = \frac{2e^4}{e^2 + 1},$$

en effet

$$\psi(t) = \frac{-2e^{-2}}{e^2 + 1}e^t + \frac{2e^4}{e^2 + 1}e^{-t}.$$

Ensuite, la commande u sur le premier segment $[0, 1]$ est donnée par :

$$u(t) = \frac{-e^{-2}}{e^2 + 1}e^{t+2} + \frac{2e^4}{e^2 + 1}e^{-(t+2)}. \quad (3.25)$$

Maintenant, nous calculons le vecteur adjoint ψ sur le deuxième intervalle $[1, 2]$.

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -2x(t) - \psi(t+1)x(t-1)u(t-1) \\ &= -2 + \frac{1}{2}(\psi(t+1))^2 \\ &= -2 + \frac{1}{2}\left(-2\frac{e^{-2}}{e^2 + 1}e^{t+1} + \frac{2e^4}{e^2 + 1}e^{-(t+1)}\right)^2. \end{aligned}$$

De la continuité du ψ on aura :

$$\psi(2^+) = \psi(2^-) = \frac{2(e^2 - 1)}{e^2 + 1}.$$

La solution explicite si $t \in [1, 2]$ est donné par :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi(2^+) + \int_2^t -2 + \frac{1}{2}(\psi(\tau+1))^2 d\tau \\ &= \frac{e^{2t-2} - e^{\frac{2}{e^2+1}-2t}}{(e^2 + 1)^2} - t\left(\frac{4e^2}{(e^2 + 1)^2} + 2\right) + \frac{4(e^2 - 1)}{(e^2 + 1)^2} + 6. \end{aligned}$$

De la même manière, on peut calculer $\psi(t)$ sur le premier intervalle $[0, 1]$, puisque $x(t) = 1$ et $u(t) = 0$ sur $[0, 1]$, l'équation se réduit à :

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -2x(t) - \psi(t+1)x(t-1)u(t-1) - \psi(t+2)x(t+1)u(t) \\ &= -2 - \psi(t+2)u(t) = 2\left(\frac{e^{2-t} - e^t}{(e^2 + 1)^2} - 1\right).\end{aligned}$$

Ensuite, la continuité de ψ à $t = 1$, nous donne

$$\psi(1^+) = \psi(1^-) = \frac{2(e^2 - 1)}{(e^2 + 1)^2} + 3,$$

alors

$$\psi(t) = \frac{e^{2t} - (2e^4 + 8e^2 - 2)t + 5e^4 + 16e^2 + 3 - e^{4-2t}}{(e^2 + 1)^2}. \quad (3.26)$$

Pour résumer, nous avons obtenu la solution optimale (x, u, ψ) :

Si $t \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} u(t) = \frac{e^{-2}}{e^2 + 1}e^{t+2} - \frac{e^4}{e^2 + 1}e^{-(t+2)}, \\ x(t) = 1, \\ \psi(t) = \frac{e^{2t} - (2e^4 + 8e^2 - 2)t + 5e^4 + 16e^2 + 3 - e^{4-2t}}{(e^2 + 1)^2}. \end{cases} \quad \text{Si } t \in [1, 2] :$$

$$\begin{cases} x(t) = 1, \\ u(t) = 0, \\ \psi(t) = \frac{e^{2t-2} - e^{6-2t}}{(e^2 + 1)^2} - t\left(\frac{4e^2}{(e^2 + 1)^2} + 2\right) + \frac{4(e^2 - 1)}{(e^2 + 1)^2} + 6. \end{cases}$$

Si $t \in [2, 3]$:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{e^{-2}}{e^2 + 1}e^t + \frac{2e^4}{e^2 + 1}e^{-t}, \\ u(t) = 0, \\ \psi(t) = \frac{-2e^{-2}}{e^2 + 1}e^t + \frac{2e^4}{e^2 + 1}e^{-t}. \end{cases}$$

La solution optimale du critère optimal :

$$Z = \int_0^3 (x^2(t) + u^2(t))dt = 3 - \frac{2}{e^2 + 1} = 2,761594156.$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les conditions nécessaires d'optimalité d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique avec retard, dont nous avons étudié le problème de contrôle optimal avec retard sur l'état, puis mixtes et finalement le cas d'un problème avec retard multiple.

Conclusion générale

Le but de ce mémoire est l'étude du problème du contrôle optimal des systèmes dynamiques avec retard.

Tout d'abord, nous avons donnée quelques principes sur la théorie de contrôle, en portant un intérêt particulier à la contrôlabilité et la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires, les systèmes dynamiques avec retard et leurs stabilité.

Après ça, nous avons étudiée les conditions nécessaires d'optimalités qui se base sur le principes du maximum de Pontryagin, et nous avons parlée aussi sur les conditions suffisantes.

Finalement, nous avons exposé les conditions nécessaires de contrôle optimal avec retard multiple, mixte, sur l'état, multiple avec et sans contraintes.

Bibliographie

- [1] M.Abd Elouahab, Les systèmes chaotiques à dérivé fractionnaires, Memoire de magistère, Université Mentourie, Constantine, 2009.
- [2] A.Boccia, P.Falugi, R. B. Vinter, H. Maurer, Optimal Control Problems with Time Delays, Department of Electrical and Electronic Engineering, Imperial College London Institut fur Numerische und Angewandte Mathematik, University unster, 2003.
- [3] S.Boukoura, I. Metaai, Optimisation D'un Système Dynamique Linéaire, Mémoire mater 2, Centre Universitaire de Mila, 2013.
- [4] A.Bouteffous, I.Guessoum, Méthode adaptée pour la résolution d'un problème de Contrôle optimal, Mémoire de master, Centre universitaire de Mila, 2015.
- [5] R.Farkh, Commande Pid des Système à retard, Thèse de doctorat, Ministère de L'enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique Université de Tunis-El Manar, 26 Janvier 2011.
- [6] L.Gollman et Helmut Maurer, Theory and application of optimal Problem with multiple time-delay, Department of Mechanical Engineering Munster University of Applied Sciences Germany, April 2014.
- [7] T.Guinn, Reduction of delayed optimal control problems to nondelayed problems. Journal of Optimization Theory and Applications 1976.
- [8] A.Halanay, Optimal controls for systems with time lag. SIAM Journal on Control, 1968.
- [9] GL.Kharatishvili . A Maximum Principle in External Problems with Delays, Mathematical Theory on Control, Academic Press : New York, 1967.
- [10] GL.Kharatishvili, Maximum principle in the theory of optimal time-delay processes. Doklady Akademii Nauk USSR 1961.
- [11] C.S.LALWANI et R.C.DESAI, The maximum principle for system with time delay, Electrical Engineering Department, Faculty of Technology and Engineering, M.S. University of Baroda , Baroda, India Published online, 06 Apr 2007.
- [12] D.Ouidja, Principe du maximum Pontryagin et méthode de tir, Mémoire de Magister, TIZI-OUIZOU, 2011.

- [13] P.Pedregal, Introduction to Optimisation, University de Castilla-La Mancha,editor spring, 1963.
- [14] L.Pontryagin, V. Boltyanski, R. Gamkrelidze, E. Michtchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, L. W. Neustadt, New York, 1962.
- [15] M.Soliman , Ray WH. On the optimal control of systems having pure time delays and singular arcs. International Journal of Control 1972.
- [16] E. Trelat, Contrôle optimal Vuibert, Master de Mathématiques, Université d'Orléans 2007/2008.

Résumé :

L'objectif principal de ce mémoire est d'étude le contrôle optimale des systèmes dynamiques avec retard, il existe plusieurs variantes : un retard sur l'état, sur le contrôle, mixte et multiples. Pour cela, nous avons commencé par la présentation de la théorie de contrôle et les systèmes dynamiques avec retard, par la suite, nous avons exposé les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité d'un système dynamique sans retard et finalement, nous avons étudiée les conditions nécessaires d'optimalité des systèmes dynamiques avec retard dans différents cas.

Les mots clés : Contrôle optimal, Système dynamique avec retard, Principe du maximum, Contrôlabilité.

Abstract The aim of this work is to study the optimal control of dynamic system with time delay, witch exist in much variant : the delay in the state, in the control, mix and multiple, and for this, we started with the présentation of theory of control and the dynamic system with time delay, then we have talking about the necessairy and sufficient conditions of optimality of dynamic system without delay and finally, we have stuted the necessary condition of optimal control with time delay in the différent case.

Key words : Optimal control, Dynamic system with time delay, Maximum principle, controllability.