الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatiques**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

en: Mathématiques
Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec contraintes d'inégalités

Préparé par :
-Khiter Besma
-Layoune Dounia

Soutenue devant le jury

- Encadré par: M. Azi…………………………M.A.A
-Président: A. Zaidi ………………………..….M.A.A
-Examinateur: B. Boufelgha…………………..M.A.B

Année universitaire : 2015/2016

الإهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

(و قل اعملوا فسيرى الله عملكم والمؤمنون)

إلهي لك أقدم هذا العمل خالصا لوجهك الكريم فتقبله مني بفضلك ومنك وإحسانك

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار إلى من علمني العطاء دون **انتظار...إلى من أحمل اسمه** بكل **افتخار... أرجوا** من الله أن يمد في عمرك لترى ثمارا قد حان قطافها بعد**طول انتظار وستبقى كل**ماتك نجوم أهتدي اليوم وغدا و إلى **الأبد" والدي العزيز"**

إلى ملاكي في الحياة إلى معنى الحب والحنان و التفاني ...إلى بسمة الحياة وسر الوجود...إلى من كان دعائمها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب" **أمي الحبيبة"**

إلى رفيق دربي في الحياة **" زوجي حمزة"**

إلى جدتي الغالية **"ما خديجة"** أطال الله في عمرها

إلى الذين نشأت بينهم في بيت واحد **أخوي" إسماعيل ومحمد" وإلى زوجة أخي وأبناء أخي"خديجة ومحمد"**

إلى من شاركتني في هذا الإنجاز صديقتي العزيزة **" بسمة"**

إلى كل صديقاتي اللواتي تركن في قلبي أجمل الذكريات وعشت ذات يوم في جوارهن أحلى اللحظات:

هداية، زينة، خولة، رقية، هاجر، بسمة

إلى كل من تجمعني به صلة الرحم خاصة **بنات عمي**

إلى أسرة معهد العلوم والتكنولوجيا و إلى من ساندني وشجعني من قريب ومن بعيد

دنيا

الإهـداء

بسم الله الرحمن الرحيم

(و قل اعملوا فسيرى الله عملكم والمؤمنون)

إلهي لك أقدم هذا العمل خالصا لوجهك الكريم فتقبله مني بفضلك ومنك وإحسانك

إلى من كلله الله بالهبة والوقار إلى من علمني العطاء دون انتظار...إلى من أحمل اسمه بكل افتخار... أرجوا من الله أن يمد في عمرك لترى ثمارا قد حان قطافها بعد طول انتظار **وستبقى كلماتك نجوم** أهتدي اليوم وغدا و إلى الأبد" **والدي العزيز**"

إلى ملاكي في الحياة إلى معنى الحب والحنان و التفاني ...إلى بسمة الحياة وسر الوجود...إلى من كان دعائمها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب" **أمي الحبيبة**"

إلى من قاسمني لبن الفطرة أخي "**جمال**" وزوجته رقية وابنتهما" **آلاء الرحمن**"

و اخواتي العزيزتان**" مريم وسميحة** " وأزواجهم **أحمد ورضوان** وأولادهم :

هديل و غفران

إلى أختي الصغيرة الغالية **"فايزة"**

إلى من شاركتني في هذا الإنجاز صديقتي العزيزة**"دنيا!!"**

إلى كل صديقاتي اللواتي تركن في قلبي أجمل الذكريات وعشت ذات يوم في جوارهن **أحلى اللحظات**:

دنيا، هداية، زينة، خولة، رقية

إلى كل من تجمعني به صلة الرحم

إلى أسرة معهد العلوم والتكنولوجيا و إلى منساندني وشجعني من قريب ومن بعيد

بسمة

Remerciement

Nous tenons à remercier en premier et avant tout, notre créateur الله, qui nous aide à réaliser ce travail.

Nous remercions nos très chers parents, frères, sœurs, collègues et amis respectifs qui nous ont encourages, soutenu durant tout notre parcours.

Nous présentons notre grand remerciement à monsieur : *Azi Mourad* sur tous ce qu'il nous a présenté comme conseils et orientations durant la réalisation de notre mémoire.

Nous remercions aussi tout éducateur, maitre et professeur qui nous appris un mot ou un cours, et orienté sur le chemin de la connaissance et du savoir depuis le cycle primaire, jusqu'au cycle universitaire.

Nous souhaitons la réussite à tous les étudiants des sections Mathématique et Informatique.

B.Khiter et D.Layoune

Table des matières

Introduction Générale

La théorie du contrôle optimal est un domaine important des mathématiques appliquées, développé de façon à contrôler les systèmes dynamique d'une manière optimale. L'objectif d'un problème de contrôle est d'amener un système d'un état initial à un certain état final en respectant certaines contraintes. Cette théorie est appliquée dans de nombreux domaines des sciences, notamment l'ingénierie, la physique, la biologie, l'économie et la finance.

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc.

Le problème de contrôle optimal s'inscrit dans la continuité des calculs de variation, une des grandes applications de la commande optimale a été l'application au lanceur Apollo dans les années 1960. La théorie du contrôle optimale est trés liée à la mécaniques classique, en particulier aux variationnels de la mécanique. Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontryagin, formuler par L.S.Pontryagin en 1956 [26] qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de caractériser les trajectoires optimales .

Plusieurs méthodes numériques performantes de résolution des problèmes de contrôle optimal ont vu le jour dans les années 1980, parmi ces méthodes, on distingue la méthode développée par R.Gabassov et F.M.Kirillova, qui consiste comme tout méthode numérique en optimisation, à faire le passage d'une solution réalisable à une autre tout en améliorant la qualité de la solution.

Dans ce travail, nous présentons la méthode adaptée pour un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec contrôle vectoriel et contraintes d'inégalité. Cette méthode numérique itérative est basée sur le passage d'une solution admissible à une autre, tout en améliorant la qualité de la solution. Cette qualité est mesurée à l'aide de l'estimation de suboptimalité qui permet de calculer l'écart maximal entre la valeur actuelle et la valeur optimale de la fonction de coût.

Le présent travail est divisé en trois chapitres.
Dans le premier chapitre, nous présentons les notions préliminaires sur le contôle optimal et la contrôlabilité.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons un ensemble de conditions d'optimalité pour différents problèmes de contrôle optimal, ces conditions se base essentiellement sur le principe de maximum de Pontryagin.
Dans la troisième chapitre, nous exposons une méthode de résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec des contraintes d'inégalités et commande vectorielle. Cette méthode constituée trois procèdures : le changement de commande, le changement de support, et la procèdure finale.
Finalement, ce mémoire s'achève par une conclusion générale, une annexe et une bibliographie.

Chapitre 1

La théorie de contrôle optimal

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts de base de la théorie du contrôle optimale, et les notion de contrôlabilité et la stabilisation.

1.1 Théorie du contrôle optimal

La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande. La théorie de contrôle optimal permet alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard, etc.
Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie,etc. Ainsi les domaines d'application sont multiples : aérospatiale, automobile, robotique, aéronautique, internet, etc.

1.1.1 Objet du contrôle

Le système de contrôle peut comporter beaucoup de variables ou paramètres. On suppose que n variables sont nécessaires pour décrire son comportement. L'identification de ces variables et la description du système est une tache très importants : c'est l'étape de modélisation mathématique.
Les variables, nommés variables d'état seront notées x_i, $i = 1, \ldots, n$. Le système évolue dans le temps, donc les x_i sont des fonctions de t : $x_i(t)$. Les n variables d'états vont être gouvernées par n équations différentielles du premier ordre sur

l'intervalle de temps $[0, t^*]$, ce sont des équations de forme générale :

$$\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t)),\ i = 1, \ldots, n,\ t \in [0, t^*]$$

Les variables de contrôle seront notées $u_j(t),\ j = 1, \ldots, m$.

Définition 1.1.

Un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé contrôle.

1.1.2 Condition initiale du système

La condition initiale du système, $x_0 = x(0)$ est un vecteur donné dans un plan de phase. En réalité, les composantes de $x(t)$ et de x_0 peuvent représenter physiquement : la position, la vitesse, la température et d'autre paramètre mesurables.

1.1.3 Le but de la commande

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener le système de la position initiale $x_0 = x(0)$, $(x_0 \in M_0)$ à une autre position $x^* = x(t^*)$, $(x \in M_1)$ où M_0 est l'ensemble de départ, et M_1 l'ensemble d'arrivé.

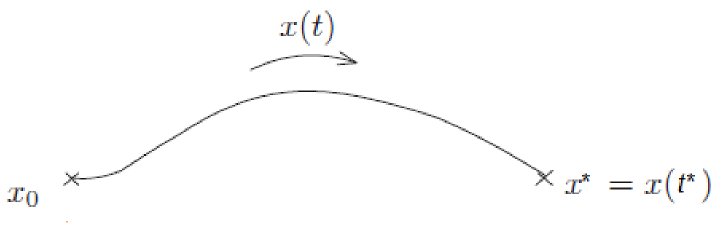

Figure 1.1 – Le but de la commande

1.1.4 Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble admissible des contrôles admissible qui peut être non bornés, borné ou de type Bang-Bang.

Commande bornée

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les $u_j(t)$ par des constantes. Considérons pour ce type de problème la contrainte $a_j \leq u_j \leq b_j$. Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j en posons $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$. Donc lorsque u est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commendes entre -1 et 1.

Commande Bang-Bang
Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \ldots, m$, on a $\mid u_j(t) \mid= 1$. En d'autre termes, une commande Bang-Bang est une commande qui possède au moins un instant de commutation.

1.1.5 Différents types de problèmes de contrôle optimal

Généralement, on distingue trois types de problème de contrôle optimale :

Problème de Lagrange.

Un problème de contrôle optimal est dit de Lagrange si le système dynamique est :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

où les contrôles $u(.)$ sont des fonctions définies de $[0; t^*]$ dans $\mathbb{R}$. Et la fonction coût $F : [0, t^*] \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$, est comme suit :

$$\max \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt, \tag{1.2}$$

avec $x(0) = x_0$ est une condition initiale donné.

Problème de Mayer.

Dans ce cas, le critère à optimiser il dépend uniquement de la valeur terminale de l'état. Soit la fonction $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on définit le problème d'optimisation de Mayer par :

$$\begin{cases} \max G(x(t^*), t^*)), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Problème de Bolza (Lagrange et Mayer)**.**

L'avantage du problème de Bolza est que, il regroupe les deux précédentes formulations (Lagrange et Mayer).
Soient $F : [0, t^*] \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on définit, alors, le problème de Bolza par :

$$\begin{cases} \max \int\limits_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) + G(x(t^*), t^*))dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

1.1.6 Problème de contrôle optimal linéaire

Le problème général étudié dans cette partie est celui de Bolza. Soient n et m deux entiers naturels non nuls, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient A, B et r trois applications localement intégrables sur I, à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$, et $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Le système de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \ \forall t \in I \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

où U est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur I.
Donc le problème de contrôle optimale s'écrit par :

$$\begin{cases} \max Z(u) = G(x(t^*), t^*) + \int\limits_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt, \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = x_0, \\ x(t^*) = x^*, \end{cases} \tag{1.6}$$

où G et F sont, au moins, de classe C^2 par rapport à leurs arguments.

1.1.7 Approximation linéaire d'un système de contrôle

En pratique, pour de nombreux processus on n'a pas de connaissance à priori utile qui permet la formulation avec des systèmes dynamiques linéaires. Dans ce cas, il est nécessaire de commencer la modélisation en construisant un modèle non linéaire, puis on passe à l'étape de linéarisation si c'est possible. L'intérêt de cette linéarisation réside dans le fait que l'analyse des systèmes non linéaires n'est pas assez développée comme dans le cas linéaire, qui a été étudié dans la littérature de manière très détaillée.

Le système linéaire s'obtient généralement par la linéarisation du système non linéaire (1.4) autour d'un point d'équilibre $(x_\varepsilon, u_\varepsilon)$, pour lequel $f(x_\varepsilon, u_\varepsilon) = 0$. En effet si on pose :

$$\tilde{x} = x - x_\varepsilon, \quad \tilde{u} = u - u_\varepsilon, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u},$$

on obtient alors le système :

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}.$$

Le système $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$ s'appelle approximation linéaire du système non linéaire (1.1).

1.1.8 Quelques exemples de problèmes de commande optimale

Exemple 1.1 (Contrôle de la déviation d'un avion)**.**

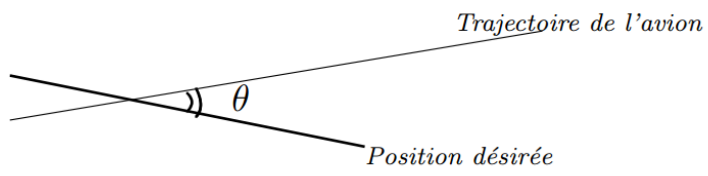

Figure 1.2 – la déviation d'un avion

On note θ la déviation d'un avion par rapport à la position désirée. On peut contrôler cette déviation par un terme force u. La déviation θ et la force u sont alors liées par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + a\frac{d\theta(t)}{dt} + w^2\theta(t) = u(t).$$

La position $\theta(0) = \theta_0$ étant connue ainsi que la vitesse de déviation :
$\frac{d\theta}{dt}(0) = \theta_1$, on souhaite retourner à l'état $(\theta, \frac{d\theta}{dt}) = (0,0)$ (déviation nulle, vitesse de déviation nulle) en un temps minimum. On suppose que $\mid u \mid \leq 1$. Et posons

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \frac{d\theta}{dt}(t) \end{bmatrix}.$$

On obtient :

$$\frac{dx}{dt}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & -a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Le problème de temps optimal consiste à choisir u et t^* de sorte que :

$$Z(u, t^*) = \int_0^{t^*} dt$$

soit minimal. La commande u et le temps t^* doivent être tels que :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad \text{et} \quad x(0) = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, x(t^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & -a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemple 1.2 (Problème de l'atterrissage en douceur)**.**

Un engin spatial doit atterrir en douceur en utilisant le minimum de carburant. Pour un modèle simplifie, m désigne la masse, h la hauteur, v la vitesse verticale et u la poussée de l'engin spatial. M désigne la masse de l'engin sans carburant, h_0 la hauteur initiale, v_0 la vitesse initiale, F la quantité initiale de carburant, α la poussée maximum de l'engin k une constante reliant la poussée et la perte de masse, g est la gravité sur la lune.

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= v(t), \\ \dot{v}(t) &= -g + \frac{1}{m(t)} u(t), \\ \dot{m}(t) &= -ku(t). \end{aligned}$$

Les contraintes sont $0 \leq u(t) \leq \alpha$ (la poussée est de sens opposé à la gravité, ce qui est suffisant pour freiner le véhicule étant donné que l'on recherche une consommation de carburant minimum).

Les conditions initiales et finales sont :

$$\begin{aligned} &h(0) = h_0, \ v(0) = v_0 \quad , \ m(0) = M + F \\ &h(t^*) = 0, \ v(t_1) = 0 \end{aligned}$$

où t^* étant l'instant de l'atterrissage.

On pose $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ v \\ m \end{pmatrix}$. Les équations du mouvement s'écrivent donc :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g + \dfrac{1}{x}u \\ -ku \end{pmatrix} = f(x,u),\ 0 \leq u(t) \leq \alpha,$$

ici f est une fonction non linéaire, et on a les contraintes :

$$x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ v_0 \\ M+F \end{pmatrix},\ x(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3(t_1) \end{pmatrix}.$$

Le problème consiste à déterminer u et t^* de sorte que $m(t^*)$ soit maximale, ou encore que :

$$Z(u,t^*) = -M - F - k\int_0^{t^*} u(\tau)d\tau,$$

soit minimum, et $x_1(t^*) = x_2(t^*) = 0$ avec $\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)), x(0) = \begin{pmatrix} h_0 \\ v_0 \\ M+F \end{pmatrix}$,

et $0 \leq u(t) \geq \alpha$

1.2 Contrôlabilité

Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener (en temps fini) d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit. Pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, due à Kalman. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile.

1.2.1 Ensemble accessible

Considérons le système contrôlé (1.1) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x(t),u(t)),\ \forall t \in I, \\ x(t) = x_0. \end{cases}$$

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t^* > 0$ est défini par :

$$Acc(x_0,t^*) = \left\{\ x_u(t^*) \setminus u \in L^\infty([0,t^*],U)\ \right\},$$

où $x_u(.)$ est la solution du système (1.1) associée au contrôle u.

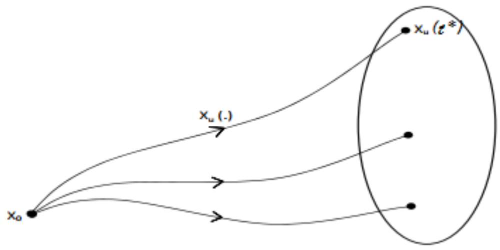

FIGURE 1.3 – Ensemble accessible

Autrement dit, $Acc(x_0, t^*)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.1) au temps t^*.

1.2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Les théorèmes d'existence de solutions d'équation différentielle nous assurent que, pour tout contrôle u, le système (1.5) admet une unique solution $x(.) : I \to \mathbb{R}^n$, absolument continue. Soit $S(.) : I \to M_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, définit par :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = A(t)S(t), \\ S(0) = Id. \end{cases}$$

Notons que si $A(t) = A$ est constante sur I, alors $S(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}t}$. La solution $x(t)$ du système (1.5) associée au contrôle u est donnée par :

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t)S(\tau)^{-1}(B(\tau)u(\tau) + r(\tau))d\tau,$$

pour tout $t \in I$.

Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, la solution du système s'écrit :

$$x(t) = S(t) \int_0^t S(\tau)^{-1}B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

.

Définition 1.2 (La contrôlabilité)**.**

Le système contrôlé $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est dit contrôlable en temps t^* si

$$Acc(x_0, t^*) = \mathbb{R}^n.$$

Autrement dit pour tous $x_0, x^* \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x^* en temps t^*.

Le système (1.5) est dit contrôlable en temps quelconque depuis x_0 si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{t \geq 0} Acc(x_0, t^*).$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité des systèmes linéaires dans le cas ou A et B ne dépends pas de t, elle est dite condition de Kalman.

Théorème 1.1 ([29]).

Le système autonome $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en t^* si et seulement si la matrice :

$$C(A, B) = (B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B)$$

est de rang n.

Remarque 1.1.

La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition
$rang \;\; C = n$ est appelée condition de Kalman.

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.1 ([29]).

La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \phi : L^\infty([0, t^*], U) &\to R^n, \\ u &\to \int_0^{t^*} \mathrm{e}^{(t^*-t)\mathrm{A}} Bu(t)dt, \end{aligned}$$

est surjective.

Preuve.

Supposons tout d'abord que rang $C < n$ et montrons que ϕ n'est pas surjective. L'application C étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in R^n - \{0\}$, que l'on supposera être un vecteur ligne tel que :

$$\psi C = 0.$$

Par conséquent,

$$\psi B = \psi AB = \cdots = \psi A^{n-1}B = 0.$$

Or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, tel que :

$$A^n = a_0 I + \cdots + a_{n-1} A^{n-1},$$

on déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier k :

$$\psi A^k B = 0,$$

en donc, pour tout $t \in [0, t^*]$:

$$\psi \mathrm{e}^{At} B = 0,$$

par conséquent, pour tout contrôle u, on a :

$$\psi \int_0^{t^*} \mathrm{e}^{(t^*-t)\mathrm{A}} Bu(t)dt = 0.$$

i.e : $\psi\phi(u) = 0$, et donc ϕ n'est pas surjective.

Réciproquement, si ϕ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n \ -\{0\}$ tel que pour tout contrôle u on ait :

$$\psi \int_0^{t^*} \mathrm{e}^{(t^*-t)\mathrm{A}} Bu(t) = 0,$$

ce qui implique que, pour tout $t \in [0, t^*]$:

$$\psi \mathrm{e}^{(t^*-t)\mathrm{A}} B = 0.$$

En $t = t^*$ on obtient $\psi B = 0$. En suite, en dérivant par rapport à t, puis en prenant $t = t^*$, on obtient $\psi AB = 0$. Ainsi, par dérivation successives, on obtient finalement :

$$\psi B = \psi AB = \cdots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Donc, $\psi C = 0$, et donc rang $C < n$.

Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème (1.1).

Si la matrice C est de range n, alors d'après le lemme (1.1), l'application ϕ est surjective, i.e : $\phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. Or pour tout contrôle u, la trajectoire associée à u à l'instant t^* est donnée par :

$$x(t^*) = \mathrm{e}^{At^*} x_0 + \int_0^{t^*} \mathrm{e}^{(\mathrm{t}^*-\mathrm{t})\mathrm{A}} (Bu(t) + r(t))dt.$$

L'ensemble accessible en temps t^* depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est :

$$Acc(t^*, x_0) = \mathrm{e}^{At^*} x_0 + \int_0^{t^*} \mathrm{e}^{(\mathrm{t}^*-\mathrm{t})\mathrm{A}} r(t)dt + \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

ce qui montre que le système est contrôlable.

Réciproquement, si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable depuis x_0 définit par :

$$x_0 = -\mathrm{e}^{-\mathrm{At}^*} \int_0^{t^*} \mathrm{e}^{(t^*-t)\mathrm{A}} r(t) dt.$$

Or en ce point l'ensemble accessible en temps t^* s'écrit :

$$Acc(t^*, x_0) = \phi(L^\infty),$$

et le système étant contrôlable cet ensemble est égal à $\mathbb{R}^n$.
Cela preuve que ϕ est surjective, donc, d'après le lemme, la matrice C est de *rang* n.

Exemple 1.3.

Le système suivant :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 8 & 1 \\ 9 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = Ax + Bu$$

est contrôlable car la matrice de Kalman

$$C(A, B) = (B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 93 \\ 2 & 17 & 170 \\ 1 & 10 & 157 \end{pmatrix}$$

est de rang égale à $n = 3$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité des systèmes linéaires dans le cas ou A et B dépendants de temps t (dans le cas non autonome (instationnaire)).

Théorème 1.2 ([29]).

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t^* si et seulement si la matrice :

$$C(t^*) = \int_0^{t^*} S(t)^{-1} B(t) B(t)' (S(t)^{-1})' dt, \tag{1.7}$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

Preuve.

Pour toute solution $x(t)$, on a, d'après la formule de variation de la constante,

$$x(t^*) = x^* + S(t^*) \int_0^{t^*} S(t)^{-1} B(t) u(t) dt,$$

où

$$x^* = S(t) x_0 + S(t^*) \int_0^{t^*} S(t)^{-1} r(t) dt,$$

Si $C(t^*)$ est inversible, posons $u(t) = B(t)' S(t)^{-1'} \psi$, avec $\psi \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$x(t^*) = x^* + S(t^*) C(t^*) \psi,$$

et il suffit de prendre $\psi = S(t^*)^{-1} C(t^*)^{-1} (x(t^*) - x^*)$.

Réciproquement, si $C(t^*)$ n'est pas inversible, alors il existe $\psi \backslash \{0\}$ tel que $\psi' C(t^*) \psi = 0$. On en déduit que :

$$\int_0^{t^*} \| B(t)' S(t)^{-1'} \psi \|^2 \, dt = 0,$$

d'où $B(t)' S(t)^{-1'} \psi = 0$ presque par tout sur $[0, t^*]$. Ainsi, pour tout contrôle u, on a :

$$\psi' \int_0^{t^*} S(t^*)^{-1} B(t) u(t) dt = 0,$$

Posons $\psi_1 = (t^*)^{-1'} \psi$, on a, pour tout contrôle u.

$$\psi' (x_u(t^*) - x^*) = 0.$$

i.e. $x_u(t^*) \in x^* + \psi^{\perp}$, et donc le système n'est pas contrôlable.

Exemple 1.4.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -x_2(t) + u(t) \cos t, \\ \dot{x_2}(t) = x_1(t) + u(t) \sin t. \end{cases}$$

Posons :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

La résolvante de système $\dot{x}(t) = Ax(t)$ est donné par la formule $S(t) = e^{tA}$. Les valeurs propre de A sont $\pm i$.

$$S(t) = e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

par conséquent

$$S(t)^{-1}B(t)B(t)'(S(t)^{-1})' = \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 \\ \sin 2t & 0 \end{pmatrix},$$

alors :

$$\begin{aligned} C(t^*) &= \int_0^{t^*} S(t)^{-1}B(t)B(t)'(S(t)^{-1})'dt \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin 2t^* & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 2t^* & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice $C(t^*)$ n'est pas inversible ($\det C(t^*) = 0$), donc le système n'est pas contrôlable.

Remarque 1.2.

Cette condition dépend de t^*, mais ne dépend pas du point initial x_0. Autrement dit, si un système linéaire instationnaire est contrôlable en temps t^* depuis x_0, alors il est contrôlable en temps t^* depuis tout point.

Remarque 1.3.

On a $C(t^*) = C(t^*)'$ et $x'C(t^*)x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, i.e $C(t^*)$ est une matrice carrée réelle symétrique définie positive.

1.2.3 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaires, on a tendance à utiliser le système linéarisé partant du fait que la contrôlabilité du système non linéarisé d'une manière locale. Mais la non contrôlabilité des systèmes linéarisé n'implique pas forcement la non contrôlabilité des systèmes non linéaires.

Considérons le système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Pour les systèmes de contrôle non linéaires, il est impossible d'étudier la contrôlabilité globale, le problème est beaucoup plus compliqué du fait qu'on ne peut pas utilisé la caractérisation de Kalman. Dans ce qui suit, on s'intéressera à l'étude de la contrôlabilité locale du système (1.8).

Définition 1.3.

Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (1.8) est localement contrôlable au voisinage de x^* en temps t^* depuis x_0, si $x^* \in Acc(x_0, t^*)$.
Autrement dit, il existe un voisinage V dans $V(x^*)$ tel que $V \subset Acc(x_0, t^*)$.

Proposition 1.1.

*Considérons le système (1.8) avec $f(x_0, u_0) = 0$.
On note*

$$A = \frac{df}{dx}(x_0, u_0) \ et \ B = \frac{df}{du}(x_0, u_0).$$

Si

$$\mathrm{rang}(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B) = n,$$

alors le système est localement contrôlable en x_0.

Remarque 1.4.

En générale, le problème de contrôlabilité est difficile. Cependant, il existe des techniques qui permettent de déduire la contrôlabilité locale dans le cas de système linéarisés.

1.3 Stabilisation

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)).$$

Définition 1.4.

Un contrôle en boucle ouverte est une application $t \to u(t)$ d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles admissibles.

Définition 1.5.

Un contrôle en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction, ou un bouclage, ou encore un feedback, est une application $u \to R(x)$ définit sur les variables d'état du système.

Définition 1.6 (Bouclage statique)**.**

On dit que u est un bouclage statique du système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ si sa valeur $u(t)$ à l'instant t ne dépend que de $x(t)$, c'est à dire $u = R(x)$ où R est une fonction.
Ce système s'écrit tout simplement :

$$\dot{x} = f(x, R(x)), \tag{1.9}$$

il est représenté par le diagramme suivant.

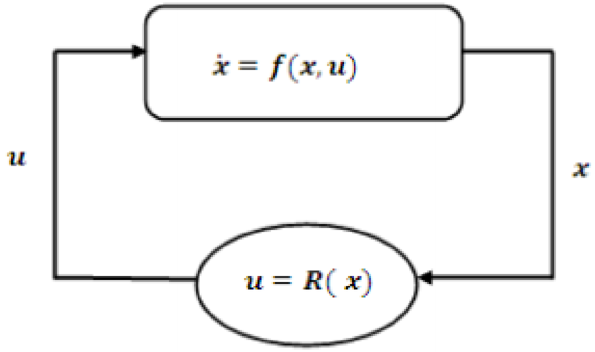

FIGURE 1.4 – Bouclage

Le problème de la stabilisation (ou régulation) consiste à maintenir le système près d'un équilibre $x = 0$. Il s'agit donc de construire une loi de commande telle que $x = 0$ soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée 1.9.

1.3.1 Stabilité des systèmes linéaires

Dans le cas des systèmes linéaires, attractif implique stable (donc asymptotiquement stable équivaut à attractif) et asymptotiquement stable équivaut à exponentiellement stable. De plus l'attractivité est toujours globale. En effet, considérons le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.10}$$

où A est une matrice carrée d'ordre n. La solution de (1.10) s'écrit :

$$x(t) = \mathrm{e}^{\,t\mathrm{A}} x(0). \tag{1.11}$$

La matrice exponentielle e^{tA} est définie par la série :

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}. \tag{1.12}$$

Pour calculer cette matrice exponentielle on cherche les valeurs propres de la matrice A, c'est à dire les racines du polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I).$$

Le polynôme caractéristique est de degré n en λ. Il admet donc s racines distinctes $\lambda_1, ...\lambda_s$ de multiplicités algébriques $m(\lambda_i)$ satisfaisant :

$$m(\lambda_1) + ... + m(\lambda_s) = n.$$

Par conséquent :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} ......(\lambda - \lambda_s)^{m(\lambda_s)}.$$

L'indice $\nu(\lambda)$ d'une valeur propre λ est le premier entier tel que la suite croissante des noyaux :

$$ker(A - \lambda I)^{\nu} \subseteq ker(A - \lambda I)^{\nu+1},$$

soit stationnaire pour $\nu \geq \nu(\lambda)$.
Pour toute valeur propre λ de A on a :

$$1 \leq \nu(\lambda) \leq m(\lambda).$$

Le polynôme minimal $M_A(\lambda)$ de A est donné par :

$$M_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu(\lambda_1)} ....(\lambda - \lambda_s)^{\nu(\lambda_s)}.$$

Les valeurs propres de A sont réelles ou complexes. Si elles sont complexes, alors elles sont conjuguées deux à deux. Les composantes $x_i(t)$, $i = 1, ..., n$, de la solution (1.11) sont des combinaisons linéaires, à coefficients constants, de termes de la forme :

1- $t^j e^{t\lambda}$ où λ est une valeur propre réelle de A et $0 \leq j < \nu(\lambda)$;

2- $t^j e^{ta} \cos bt$ et $t^j e^{ta} \sin bt$, c'est à dire les parties réelles et imaginaires de $t^j e^{t\lambda}$, où $\lambda = a + ib$ est une valeur propre complexe de A et $0 \leq j < \nu(\lambda)$.

On en déduit alors le résultat suivant.

Théorème 1.3.

1- Si $\exists j$, $Re(\lambda_j) > 0$ ou si $\exists k$, $Re(\lambda_k) = 0$ et $\nu(\lambda_k) > 1$ alors $x = 0$ est instable.

2- Si $\forall j$, $Re(\lambda_j) < 0$ alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.

3- Si $\forall j$, $Re(\lambda_j) \leq 0$ et $Re(\lambda_j) = 0 \Rightarrow \nu(\lambda_j) = 1$ et s'il existe k tel que $Re(\lambda_k) = 0$ alors $x = 0$ est stable mais non attractif.

Par conséquent pour un système linéaire $\dot{x} = Ax$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) l'origine est attractif ;
b) l'origine est globalement attractif ;
c) l'origine est asymptotiquement stable ;
d) l'origine est globalement asymptotiquement stable ;
e) l'origine est exponentiellement stable ;
f) l'origine est globalement exponentiellement stable ;
g) toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative (on dit que la matrice A est de Hurwitz).

1.3.2 Stabilité des systèmes non linéaires

Pour étudier la stabilité d'un système non linéaire on a deux méthodes :
- Méthode indirecte basé sur la linéarisation de la fonction F ;
- Méthode directe basé sur l'utilisation d'une fonction appelé fonction de lyapunov.

Méthode indirecte :(linéarisation d'un système non linéaire)
Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Donc soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de class c^1, c'est-à-dire $F = (f_1, ...f_2)$ où $f_1, ...f_2$ sont des application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ tel que les dérivée partielles $\dfrac{df_i}{dx_i}$ tel que : $i, j = (1, .., n)$ existent en tout point $(x_1, ..., x_n)$.
On appelle matrice jacobienne de F en un point $X_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$, la matrice formés des dérivées partielles de $f_1, ..., f_2$ calculés en X_0 :

$$DF(X_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0^1, ..., x_0^n) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0^1, ..., x_0^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0^1, ..., x_0^n) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0^1, ..., x_0^n) \end{bmatrix}.$$

Le point fixe de (1.11) se ramène à l'origine $f(0) = 0$ par $x = X - a$, alors, le système devient :

$$\dot{x} = f(x).$$

Le développement de Taylor autour de $x = 0$ donne :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x,x) + ...$$

La méthode indirecte étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre consiste à étudier le système linéaire, avec :

$$A = Df(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0) \end{bmatrix},$$

la matrice jacobienne de f en 0.
- Si A possède n valeur propre distinctes $\lambda_i, i = 1, ..., n$, alors la solution de (1.9) est :

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{\lambda_i t} v_i,$$

v_i sont les vecteurs propres associés au valeur λ_i d'où le théorème suivant.

Théorème 1.4.

Considérons le système d'équation différentielle (1.13), soit $\overline{X} = 0$ un point d'équilibre de F où F est continue et différentiable dans un voisinage $D \subset \mathrm{R}^n$ contenant l'origine.
La linéairisation du système (1.13) autour du point d'équilibre donne le système linéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec la matrice jacobienne $A = \frac{dF}{dx} \mid_{X=\overline{X}}$. Alors :
- Si la partie réelle des valeurs propres du système linéaire est strictement négative $Re(\lambda) < 0$, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable (λ valeur propre de A).
- Si le système linéairisé possède des valeurs propres à partie réelle strictement positive $Re(\lambda) > 0$, alors le point d'équilibre est instable.

Notion de stable

Définition 1.7.

Un point d'équilibre de (1.13) est dit point hyperbolique si au moins une valeur propre de la matrice $A = Df(a)$ n'a pas la partie réelle nulle.

Définition 1.8.

Un point d'équilibre de (1.13) est appelé puit si tout les valeurs propres de la matrice $A = Df(0)$ sont à partie réelles négatives il est appelé source si toutes les valeurs propres sont à parties réelles positives.
Si au moins une valeur propre est à partie réelle négative et au moins une valeur propre est à partie réelle positive le point d'équilibre a est appelé point selle (col).
Méthode directe :(Fonction de Lyapunov)

Les fonctions de Lyapounov sont un outil puissant pour étudier la stabilité d'un point équilibre. Considérons de nouveau le système :

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.14}$$

tel que $f(0) = 0$, admettant $x = 0$ comme équilibre. Soit $V : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage U de l'origine et admettant des dérivées partielles continues. On note la dérivée de la fonction V dans la direction du champ de vecteurs f par :

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx}(x)f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dV}{dx_i}(x)f(x_i).$$

Cette dérivée s'appelle aussi la dérivée de Lie de V et se note $L_f V$. Pour toute solution $x(t)$ de (1.13) on a :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)).$$

Définition 1.9.

On dit que V est une fonction de lyapunov pour le système (1.14) en $x = 0$ dans U, si pour tout $x \in U$ on a :

a- $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq 0$;
b- $\dot{V}(x(t)) \leq 0$;
c- Si de plus $\dot{V}(x(t)) < 0$, alors V est une fonction de lyapunov strict.
C'est le théorème suivant qui sert à utiliser les fonctions de lyapunov.

Théorème 1.5.

- Si le point d'équilibre $x = 0$ admet une fonction de lyapunov, alors c'est un point d'équilibre stable.

- Si le point d'équilibre $x = 0$ admet une fonction de lyapunov strict, alors c'est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Exemple 1.5.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3, \\ \dot{x_2} = x_1 - x_1x_3 - x_2^3 \\ \dot{x_3} = x_1x_2 - x_3^3, \end{cases}$$

qui présente un point d'équilibre à l'origine et considérons la fonction de Lyapounov candidate suivant :

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2,$$

et $V(0,0,0) = 0$ et $V(x_1, x_2, x_3) > 0$ si $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$,
on a alors : $\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1\dot{x_1} + 4x_2\dot{x_2} + 2x_3\dot{x_3} = -2(x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4)$,
en effet, $\dot{V} < 0$, nous pouvons conclure, alors, que le système est asymptotiquement stable dans tout l'espace d'état (x_1, x_2, x_3).

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudiés la théorie du contrôle qui analyse les propriétés des systèmes commandés, par la suite la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires afin de vérifie l'existence d'un contrôle qui joigne l'état initial x_0 à un état final x^* en un temps fini et finalement nous avons exposés la stabilité pour rendre le système sensible à certains perturbations.

Chapitre 2

Condition d'optimalité

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un ensemble de conditions d'optimalité pour différents problème de contrôle optimal. Ces conditions qui se base essentiellement sur le principe de maximum de Pontryagin qui est énoncé par Pontryagin dans une publication Russe 1956 et en Anglais 1962 sous le titre "*The Mathematical theory of Optimal Processes*".

2.1 Les conditions nécessaires d'optimalité

Considérons le problème :

$$\max Z(u) = G(x(t^*), t^*),$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0,$$
$$u(t) \in U, t \in [0, t^*].$$

Définition 2.1 (Fonction Hamiltonien)**.**

L'Hamiltonien est une fonction de la forme :

$$H = H(x(t), u(t), \psi(t), t) = \psi' f(x(t), u(t), t).$$

2.1.1 Principe du maximum sans contrainte sur le contrôle

Théorème 2.1. *[29][Principe du maximum faible]*

Si le contrôle u^* associée au système de contrôle :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))),$$

est optimale pour le coût :

$$\max Z(u) = G(x(t^*), t^*),$$

alors, il existe une application $\psi(.)$ absolument continue $\psi : [0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, appelée vecteur adjoint, telle que les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, t^*]$:

$$\begin{cases} \dot{x^*}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \psi}(x(t), u^*(t), \psi^*(t), t), \\ \dot{\psi^*}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \psi(t), t), \\ H_u(x(t), u^*(t), \psi(t), t) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1.2 Principe du maximum sans contrainte sur l'état

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\max Z(u) = G(x(t^*), t^*),$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), x(0) = x_0,$$
$$u(t) \in U, t \in [0, t^*].$$

Théorème 2.2 (Principe du maximum de Pontryagin sans contrainte sur l'état)**.**

Soient $u^*(t) \in \vartheta$ une commande optimale admissible où ϑ une ensemble des contrôles admissibles et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$. Alors il existe un vecteur $\psi(t)^*(t)$ tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x^*}(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)), \ x^*(0) = x_0, \\ \dot{\psi^*}(t) = -H_x(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)), \qquad \psi(t^*) = G_x(t^*, x^*(t)), \\ H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) \geq H(t, x^*(t), u(t), \psi^*(t)), \quad \forall u(t) \in \vartheta, \quad t \in [0, t^*], \end{cases} \tag{2.2}$$

avec :

$$H_x(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) = \left.\frac{\partial H(x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x}\right|_{x(t)=x^*(t), u(t)=u^*(t), \psi(t)=\psi^*(t)},$$

$$G_x(t^*, x^*(t)) = \left.\frac{\partial G(t^*, x^*(t))}{\partial x}\right|_{x(t^*)=x^*(t^*)}.$$

On voit bien que $u^*(t)$ va fournir un maximum global du Hamiltonien $H(t, x^*(t), u(t), \psi^*(t))$ pour $u(t) \in \vartheta$. Pour cette raison, les conditions nécessaires (2.2) sont appelées "*Principe du maximum*".

Preuve.

Pour la démonstration, voir [26]

2.1.3 Principe du maximum avec contraintes sur l'état

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{aligned} \max Z(u) &= G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U, t \in [0, t^*]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ici nous imposons au problème des contraintes sur l'état et les variables de contrôle. Plus précisément, pour chaque instant $t \in T$, $x(t)$ et $u(t)$ doivent satisfaire la contrainte

$$g(x, u, t) \geq 0, \quad g \in \mathbb{R}^p, \; t \in T. \tag{2.4}$$

Ainsi, nous introduisons la fonction Lagrangien, qui s'écrit

$$\overline{H}(x, u, \psi, \mu, t) = H(x, u, \psi, t) + \mu' g(x, u, t), \tag{2.5}$$

le vecteur μ est appelée multiplicateur de Lagrange. Ce multiplicateur de Lagrange doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$\mu_i \geq 0, \; \mu_i g_i(x, u, t) = 0, \; \forall i = 1, ..., p, \tag{2.6}$$

le vecteur adjoint satisfait l'équation différentielle :

$$\dot{\psi}(t) = -\overline{H}_x(t, x(t), u(t), \psi(t)), \; \psi(t) = G_x(t^*, x(t^*)). \tag{2.7}$$

Théorème 2.3 ((Principe du maximum de Pontryagin avec contrainte sur l'état))**.**

Considérons le problème (2.3) et (2.4). Soient $u^*(t) \in \vartheta$ une commande optimale admissible où ϑ une ensemble des contrôles admissibles et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$. Alors il existe un vecteur adjoint $\psi^*(t)$ et un multiplicateur de Lagrange μ^* tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x^*}(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)), \; x^*(0) = x_0, \\ \dot{\psi^*}(t) = -H_x(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)), \qquad \psi(t^*) = G_x(t^*, x^*(t)), \\ H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) \geq H(t, x^*(t), u(t), \psi^*(t)), \quad \forall u(t) \in \vartheta, \quad t \in [0, t^*], \\ \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial u}|_{u(t)=u^*(t)} = \dfrac{\partial (H + \mu g)}{\partial u}|_{u(t)=u^*(t)} = 0, \\ g(x^*(t), u^*, t) \geq 0, \; t \in T, \\ \mu_i^*(t) \geq 0, \quad \mu_i^* g_i(x^*, u^*, t) = 0, \; \forall i = 1, ..., p \text{ et } t \in [0, t^*]. \end{cases} \tag{2.8}$$

Preuve.

Pour la démonstration, voir [26].

2.1.4 Principe du maximum dans le cas linéaire

Avant d'énoncer le principe du maximum, introduisons certaines définitions essentielles.

Définition 2.2.

Le contrôle u est dit extrémal sur $[0, t]$ si la trajectoire du problème de contrôle (1.1) associée à u vérifie :

$$x(t) \in \partial Acc(x_0, t),\ t \in [0, t^*] .$$

Définition 2.3.

Un contrôle $u^*(t),\ t \in [0, t^*]$ est dit optimal si $u^*(.)$ est extrémal et $Z(u^*(t)) < Z(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t),\ \in [0, t^*]$.
Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrémal. C'est un cas particulier du principe du maximum de Pontryagin.

Théorème 2.4.

Considérons le problème de contrôle optimale linéaire :

$$\max Z(u) = G(x(t^*), t^*),$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t),\ x(0) = x_0,$$

où le domaine des contraintes $U \in \mathbb{R}^m$ est compact, convexe. Soit $t^* > 0$, le contrôle u est extrémal sur $T = [0, t^*]$ si et seulement s'il existe une solution non triviale $\psi(t)$ de l'équation $\dot{\lambda}(t) = -\psi(t)A(t)$ telle que :

$$\psi(t)B(t)u(t) = \max_{V \in U} \psi(t)B(t)V, \tag{2.9}$$

pour presque tout $t \in [0, t^*]$.
Le vecteur ligne $\psi(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.

Preuve.

" $\Rightarrow$" Supposons que u est extrémal sur $[0, t^*]$, soit x la trajectoire associée à u, alors par définition on a : $x(t^*) \in \partial Acc(x_0, t^*)$, où $x(t)$ est donnée par :

$$x(t) = S(t)(x_0 + \int_0^{t^*} S^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau).$$

Par convexité de $Acc(x_0, t^*)$, il existe d'après le corolaire du convexe, un hyperplan séparant au sens large $x(t^*)$ et $Acc(x_0, t^*)$. Soit $\overline{\psi}$ un vecteur normal à cet hyperplan, et soit $\psi(t)$ la solution sur $[0, t^*]$ de $\dot{\psi} = -\psi A$ définit pour $0 \leqslant t \leqslant t^*$ par : $\psi(t) = \psi_0 S^{-1}(t)$, telle que : $\psi(t^*) = \overline{\psi}$, on obtient donc :

$$\psi(t)x(t) = \psi_0 x_0 + \int_0^{t^*} \psi(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \tag{2.10}$$

Supposons qu'il existe un sous-ensemble $[0, t^*]$ de mesure positive de telle sorte que pour tout t dans ce sous ensemble, nous avons :

$$\psi(t)B(t)u(t) < \max_{V \in U} \psi(t)B(t)V.$$

En utilisant un lemme de sélection mesurable de théorie de la mesure, nous pouvons définir une commande mesurables $\hat{u}(.)$ satisfaisant sur $0 \leqslant t \leqslant t^*$:

$$\psi(t)B(t)\hat{u}(t) = \max_{V \in U} \psi(t)B(t)V.$$

Soit $\hat{x}(.)$ la trajectoire associée à $\hat{u}(.)$, on obtient :

$$\psi(t^*)x(t^*) = \psi_0 x_0 + \int_0^{t^*} \psi(\tau)B(\tau)\hat{u}(\tau)d\tau.$$

En outre, par la construction de u et de (2.9) l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_0^{t^*} \psi(s)B(s)u(s)ds < \int_0^{t^*} \psi(\tau)B(\tau)\hat{u}(\tau)d\tau,$$

donc, on en déduit que : $\psi(t^*)x(t^*) < \psi(t^*)\hat{x}(t^*)$. Cette contradiction avec le fait que $x(t^*) \in \partial Acc(x_0, t^*)$ et que $p(t^*)$ est la normale extérieure à $x(t^*)$. Par conséquent, nous devons avoir :

$$\psi(t)B(t)u(t) < \max_{V \in U} \psi(t)B(t)V.$$

" $\Leftarrow$" Réciproquement, si $u(.)$ satisfait l'égalité :

$$\psi(t)B(t)u(t) < \max_{V \in U} \psi(t)B(t)V,$$

montrons que $x(t^*) \in \partial Acc(x_0, t^*)$. En effet supposer que $x(t^*) \in intAcc(x_0, t^*)$. Par conséquent, il existe $\tilde{x_1} \in Acc(x_0, t^*)$ telle que : $\psi(t^*)x(t^*) < \psi(t^*)\tilde{x}_1$. Soit $\tilde{u}(.)$ un contrôle définit sur $[0, t^*]$ à la direction x_0 à x_1 et $\tilde{x}(.)$ la trajectoire correspondante, alors :

$$\psi(t)B(t)\tilde{u}(t) \leq \psi(t)B(t)u(t). \tag{2.11}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\psi(t^*)\tilde{x}(t^*) \leq \psi(t^*)x(t^*).$$

Ce qui contredit l'inégalité (2.11). Donc $x(t^*) \in Acc(x_0, t^*)$, et u est extrémal.

Remarque 2.1.

La condition initiale $\psi(t^*)$ dépend en fait du point final x^*, comme on le voit dans la démonstration. Comme elle n'est pas directement connue, l'usage de ce théorème sera plutôt indirect.

Remarque 2.2.

Dans le cas mono-entrée (contrôle scalaire), et si de plus $U = [-a, a]$ où $a > 0$, la condition de maximisation implique immédiatement que $u(t) = asigne(\psi(t)B(t))$. La fonction $\varphi(t) = \psi(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation, et le temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$ change de signe est appelé un temps de commutation. C'est en particulier un zéro de la fonction φ.

2.2 Conditions de transversalité

La condition de transversalité est donnée par la formule suivante :

$$\left[H^* + \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)\right]_{t^*} \delta t^* + \left[\left(\frac{\partial G}{dx}\right)^* - \psi^*(t)\right]_{t^*} \delta x_1 = 0. \tag{2.12}$$

Nous obtenons déférents cas selon les cas t_* et \ ou $x(t_*)$ libre ou fixe.
Type (a) : Si t^* et $x(t^*)$ sont fixes alors, δt^* et δx_1 sont nuls dans la condition de transversalité (3.4), donc, on aura aucun condition supplémentaire.
Type (b) : Si t^* le temps final est libre et $\delta x(t^*)$ est fixe, alors δt^* est arbitraire, et comme $x(t^*)$ est fixe, δx_1 est nul. Le coefficient de δt^* dans la condition de transversalité (3.4) est nul, et on aura :

$$[H^* + (\frac{\partial G}{dt})]_{t^*} = 0.$$

Type (c) : Si t^* est fixe et $x(t^*)$ est libre, donc δt^* est nul et δx_1 est arbitraire. Alors le coefficient de δx_1 dans la condition de transversalité (3.4) est nul. Ce qui nous donne la relation suivante :

$$[(\frac{\partial G}{dx})^* - \psi(t)^*]_{t^*} = 0.$$

Type (d) : Si t^* et $x(t^*)$ sont libres, alors les coefficients de δt^* et de δx_1 sont arbitraire ce qui donne les relation suivante :

$$[H^* + (\frac{\partial G}{dt})]_{t^*} = 0,$$

$$[(\frac{\partial G}{dx})^* - \psi(t)^*]_{t^*} = 0.$$

2.3 Les conditions suffisantes d'optimalité

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{aligned} \max Z(u) = \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), x(0) = x_0, \\ u(t) \in U, t \in [0, t^*]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Définition 2.4.

Un ensemble K de $\mathbb{R}^n$ est dit *convexe* si :

$$\forall x, y \in K,\ \alpha \in [0,1],\ \text{ona } (1-\alpha)x + \alpha y \in K.$$

Définition 2.5.

Une fonction $F : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définit sur un ensemble convexe K est dite *convexe* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in K^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y),$$

F est dite *strictement convexe* si l'inégalité stricte est vérifiée pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$.

Définition 2.6.

Une fonction $F : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble convexe K est dite *concave* si et seulement si : $(-F)$ est convexe.

Théorème 2.5. *[25]*

Soient $F(x,u,t)$ et $f(x,u,t)$ des fonctions concaves. Si $(x(t),u(t),\psi(t))$ satisfait :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), x(0) = 0, \\ \dot{\psi}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x(t),u(t),\psi(t),t), \\ H(x(t),u(t),\psi(t),t) = \max\limits_{v\in K} H(x(t),v,\psi(t),t), \end{cases} \tag{2.14}$$

où

$$H(x,u,\psi,t) = F(x,u,t) + \psi f(x,u,t)$$

est l'hamiltonien du système, et K est un sous-ensemble convexe, alors $(x(t),u(t))$ est une solution optimale du problème de contrôle optimal correspondant. La condition sur le minimum signifie que :

$$g(s) = H(t,x(t),u(t)+s(v-u(t)),\psi(t)), s \in [0,1],$$

en fonction de s, pour t fixe et $v \in K$, a un minimum à $s = 0$.
Remarquons que vecteurs $sv + (1-s)u(t)$ appartient à K (puisque K est un ensemble convexe).
Dans cette situation tout ce que nous pouvons faire en sorte est $\dot{g}(0) \geq 0$(minimum à sens unique). Donc :

$$0 \leq \dot{g}(0) = \frac{\partial H}{\partial u}(x(t),u(t),\psi(t),t)(v-u(t)), v \in K.$$

Preuve.

En utilisant le multiplicateur de Lagrange $\psi(t)$, la fonction objectif est équivalente à :

$$Z(x(t),u(t)) = \int_0^{t^*} F(x(t),u(t),t) - \psi'(t)(\dot{x}(t) - f(x(t),u(t),t))dt. \tag{2.15}$$

Soit $(x^*(t),u^*(t))$ une solution réalisable du problème vérifiant les relation (2.14), et soit $(x(t), u(t))$ une solution réalisable quelconque, alors :

$$\begin{aligned}
Z(x^*(t), u^*(t)) - Z(x(t), u(t)) \quad &= \quad \int_0^{t^*} F(x^*(t), u^*(t), t) - \psi'(t)[\dot{x}^*(t) - f((t), x^*(t), u^*(t))dt \\
&\quad - \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) - \psi'(t)[\dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t)dt \\
&= \quad \int_0^{t^*} [H(x^*(t), u^*(t), \psi(t), t) - H(x(t), u(t), \psi(t), t) \\
&\quad + \psi'(t)(\dot{x}^*(t) - \dot{x}(t))]\, dt \\
&\geq \quad \int_0^{t^*} [\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), u(t), \psi(t), t)(x^*(t) - x(t)) + \\
&\quad \frac{\partial H}{\partial u}(x(t), u(t), \psi(t), t)(u^*(t) - u(t))] + \psi'(x^*(t) - x(t))dt \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

donc : $(x^*(t), u^*(t))$ est une solution optimale du problème (2.13).

2.4 Résolution du problème de contrôle optimal

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\max Z(u) = G(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt,$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t).$$

Nous développons la solution du problème de contrôle optimal donné ci dessus, à travers les étapes suivantes :

1) Construire l'Hamiltonien.
2) Obtenir l'équations d'état et l'équation adjoint.
3) Obtenir la condition nécessaire d'optimalité par rapport à u.
4) Donner les conditions de transversalité.

Description des différentes étapes de la résolution du problème

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\max Z(u) = G(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt,$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t),$$

Étape 1 : `Hamiltonien`

Nous construisons l'Hamiltonien H du problème décrit par :

$$H = H(x(t), u(t), \psi(t), t) = F(x(t), u(t), t) + \psi'(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)],$$

où $\psi(t)$ est l'état adjoint.

Étape 2 : `Équation d'état et équation adjoint.`

Soient $x^*(t)$, $u^*(t)$ et $(t)^*(t)$ les valeurs optimales, alors L'équation d'état et l'équation adjoint sont données respectivement par :

$$\dot{x}^*(t) = (\frac{\partial H}{\partial \psi})^* = A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) + r(t), \tag{2.16}$$

avec les conditions initiale $\dot{x}^*(0) = x(0)$,

et

$$\dot{\psi}^*(t) = -(\frac{\partial H}{\partial x})^* = -(\frac{\partial F}{\partial x} + \psi' \frac{\partial[A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)]}{\partial x})^* \tag{2.17}$$

Étape 3 : `Condition d'optimalité`

La condition d'optimalité est donnée par :

$$(\frac{\partial H}{\partial u})^* = (\frac{\partial F}{\partial u} + \psi' \frac{\partial[A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)]}{\partial u})^* = 0. \tag{2.18}$$

Étape 4 : `Condition de transversalité`

La condition de transversalité est donné par la formule suivante :

$$[H^* + (\frac{\partial G}{\partial t})]_{t^*}\delta t^* + [(\frac{\partial G}{\partial x})^* - \psi^*(t)]_{t^*}\delta x_1 = 0, \tag{2.19}$$

cette relation (2.19) donne la condition supplémentaire qui sert à résoudre l'ensemble des équations d'etat et équations adjoint avec les diffèrents cas de transversalité selon que l'on considère t^* et / ou $x(t^*)$ libre ou fixe.

Exemple 2.1.

On désire chauffer une chambre en utilisant le moins d'énergie possible. Si $\theta(t)$ est la température dans la chambre, θ_a la température ambiante extérieure de l'air (constante) et u(t) est le taux d'alimentation en chaleur de la chambre, alors :

$$\theta' = -a(\theta - \theta_a + bu),$$

où a et b sont des constantes dépendant de l'isolation de la chambre. Pour simplifier le problème, nous supposerons que $x = (\theta - \theta_a)$ et la température initiale de la chambre est égale à $\theta_a = 60^\circ$ alors $x(0) = 0^\circ$, et la température finale $\theta(t^*)$ libre. Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min Z(x,u) = \frac{1}{2}s(x(t^*) - 10)^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u(t)^3, \\ \dot{x}(t) = -ax(t) + bu(t), \\ x(0) = 0, \ x(t^*) \ \text{ libre } \ \text{et} \ \ t^* \text{ fixe}, \end{cases}$$

où s est un nombre réel. Alors, l'Hamiltonien H est :

$$H(x(t), u(t), \psi(t), t) = \frac{1}{2}u^2(t) + \psi(-ax + bu).$$

D'aprés les conditions nécessaires d'optimalité on a :

$$\begin{cases} \dot{x}^* = -ax + bu \\ \dot{\psi}^* = a\psi \\ u(t) + \psi b = 0. \\ x(0) = 0, \ x(t^*) \ \text{ libre } \ \text{et} \ \ t^* \text{ fixe} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \dot{x}^* = -ax - b^2\psi, \\ \dot{\psi}^* = a\psi, \\ x(0) = 0, \ x(t^*) \ \text{ libre } \ \text{et} \ \ t^* \text{ fixe}. \end{cases}$$

La résolution des équations d'état et des équations adjoints donne :

$$\psi^*(t) = \psi(t^*)e^{at},$$
$$x(t) = x(0)e^{-at} - \frac{b^2\psi(t^*)e^{at}}{2a}(e^{at} - e^{-at}),$$

où α est une constante.
Comme $x(0) = 0$, ceci implique que $\alpha = \dfrac{b^2\psi(t^*)}{2a}$. De ce fait, la solution devient :

$$x(t) = x(0)e^{-at} - \frac{b^2\psi(t^*)}{2a}(e^{at} - e^{-at}).$$

Comme l'état final est libre, donc, $\delta_x(t^*) \neq 0, \delta t^* = 0$ la condition de transversalité (2.19) se réduit au type (c) ce qui donne :

$$\psi(t) = s(x(t^*) - 10).$$

Substituant $x^{t^*} = x(0)e^{-at^*} - \dfrac{b^2\psi(t^*)e^{at^*}}{2a}(e^{at^*} - e^{-at^*})$ dans l'équation précédente nous obtenons :

$$\psi(t^*) = \frac{-20as}{2a + sb^2(e^{at^*} - e^{-at^*})}.$$

Substituant cette équation dans $\psi(t) = \psi(t^*)e^{at}$, on obtient l'état adjoint :

$$\psi(t) = \frac{-20ase^{at}}{2a + sb^2(e^{at^*} - e^{-at^*})}.$$

Finalement le contrôle optimal est :

$$u^*(t) = \frac{-20asbe^{at}}{2a + sb^2(e^{at^*} - e^{-at^*})}$$

Ainsi, la trajectoire optimale est donnée par :

$$x^*(t) = \frac{10sb^2(e^{at} - e^{-at})}{2a + sb^2(e^{at^*} - e^{-at^*})}.$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié le principe de maximum de Pontryagin qui donne une condition nécessaire d'optimalité. La résolution du problème de contrôle optimal consiste à utiliser le principe du maximum de Pontryagin, qui est une condition nécessaire d'optimalité, comme étape de résolution.

Chapitre 3

Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec contraintes d'inégalités

Introduction

Dans ce chapitre, nous représentons une méthode numérique pour la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec contraintes inégalités et commande vectorielle. Cette méthode a été développée par R. Gabassov et F.M.Kirillova.

3.1 Position du problème

Le problème de contrôle optimal particulier étudiée dans cette section est le suivant :
Sur l'intervalle $T = [0, t^*]$, considérons le problème de maximisation de la fonctionnelle :

$$Z(u) = c_1' x(t^*) \quad \to \max, \tag{3.1}$$

avec c_1 un vecteur de coût, de dimension n.

Le système de contrôle dynamique linéaire auquel on s'intéresse est celui à commande vectorielle, défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), \quad x(0) = x_0,\ t \in T, \tag{3.2}$$

où : $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur qui représente l'état du système à l'instant t ; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ la commande agissant sur le système à l'instant t (signal d'entrée), telle que $d^- \leqslant u(t) \leqslant d^+$, $d^- = (d_1^-, d_2^- ...., d_r^-)$, $d^+ = (d_1^+, d_2^+ ...., d_r^+)$; A est une matrice (réelle) carrée d'ordre n, qui caractérise le système (pour plus de simplicité on la suppose constante, c'est-à-dire ne dépendant pas de la variable t), de la même manière B est une matrice réelle $n \times r$ constante et x_0 la position initiale du système.

Associons à la trajectoire $x(t)$, solution du système, une contrainte (signal de sortie) à l'instant $t = t^*$

$$g^- \leq Hx(t^*) \leq g^+ \tag{3.3}$$

où H est une matrice d'ordre $m \times n$ et rang$H = m < n$. Ainsi le problème qu'on étudiera se présente sous la forme suivante :

$$Z(x,u) = c_1' x(t^*) \quad \to \max, \tag{3.4a}$$
$$\dot{x}(t) = Ax + Bu + r, x(0) = x_0, \tag{3.4b}$$
$$g^- \leq Hx(t^*) \leq g^+, \tag{3.4c}$$
$$d^- \leqslant u(t) \leqslant d^+, t \in T = [0, t^*], \tag{3.4d}$$

avec :$A = A(K,K),\ B = B(K,J),\ H = H(I,K),\ g^- = g^-(I),\ g^+ = g^+(I),\ d^- = d^-(J), d^+ = d^+(J),\ K = \ \{1,...,n\},\ I = \{1,...,m\},\ J = \{1,...,r\}$.

La solution du système dynamique (3.2) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = S(t)\left[x_0 + \int_0^t S^{-1}(\tau)(Bu(\tau) + r(\tau))d\tau\right]\ ,\ t \in T, \tag{3.5}$$

où $S(t) = \exp(At)$, est une matrice carrée d'ordre n, solution du système homogène :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = AS(t), \\ S(0) = I_n, \end{cases} \tag{3.6}$$

I_n est une matrice identité d'ordre n.
En remplaçant cette solution dans le problème (3.4), celui-ci devient un problème de la seule variable $u(t)$ suivant :

$$\begin{cases} Z(u) = c_1' S(t^*)x_0 + \int_0^{t^*}(c_1'(t)S(t^*)S^{-1}(t)B)u(t)dt + \int_0^{t^*} c_1'(t)S(t^*)S^{-1}(t)r(t)dt \quad \to \max, \\ g^- \leq HS(t^*)\left[x_0 + \int_0^{t^*} S^{-1}(t)(Bu(t) + r(t)\right] dt \leq g^+, \\ d^- \leqslant u(t) \leqslant d^+, t \in T = [0, t^*]. \end{cases} \tag{3.7}$$

Posons $c'(t) = c_1' S(t^*)S^{-1}(t)B$, $c_3'(t) = c_1' S(t^*)S^{-1}(t)$, $\varphi(t) = HS(t^*)S^{-1}(t)B$, $\bar{g}^- = g^- - HS(t^*)x_0 - \int_0^{t^*} HS(t^*)S^{-1}(t)r(t)dt$, et $\bar{g}^+ = g^+ - HS(t^*)x_0 - \int_0^{t^*} HS(t^*)S^{-1}(t)r(t)dt$, alors, le problème (3.4) devient :

$$\begin{cases} Z(u) = c_1' S(t^*) x_0 + \int_0^{t^*} c'(t) u(t) dt + \int_0^{t^*} c_3'(t) r(t) dt \quad \to \max, \\ \bar{g}^- \leq \int_0^{t^*} \varphi(t) u(t) dt \leq \bar{g}^+, \\ d^- \leqslant u(t) \leqslant d^+, t \in T = [0, t^*]. \end{cases} \tag{3.8}$$

Choisissons dans l'ensemble I , un sous ensemble $I_{sup} \subset I$, avec $\mid I_{sup} \mid = p \leq m$. Sur l'intervalle T choisissons un ensemble de moments isolés $T_{sup} = \{t_k, k \in K_{sup}\}$, $K_{sup} = \{1, ..., k_{sup}\}$, $k_{sup} \leqslant p$. A chaque moment $t_k \in T_{sup}$ faisons correspondre un ensemble d'indices $J_k \subset J$, $\sum\limits_{k \in K_{sup}} \mid J_k \mid = p$.
Posons $J_{sup} = \{J_k, k \in K_{sup}\}$ et $Q_{sup} = \{I_{sup}, J_{sup}, T_{sup}\}$.

Construisons la matrice :

$$\varphi_{sup} = \varphi(Q_{sup}) = (\varphi_{ij}(t_k),\ i \in I_{sup},\ j \in J_k, k \in K_{sup}), \tag{3.9}$$

où $\varphi_j(t)$ est la j^{me} colonne de la la matrice $\varphi(t) = Hq(t), t \in T$ et $q(t), t \in T$, est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{q} = Aq, \\ q(0) = B, \end{cases}$$

Définition 3.1.

La commande constante par morceaux $u = u(.) = (u(t), t \in T)$ est dite admissible si elle satisfait aux contraintes (3.4c), (3.4d).

Définition 3.2.

Une commande admissible $u^0 = u^0(.) = (u^0(t), t \in T)$ est dite optimale si et seulement si

$$Z(u^0) = \max Z(u). \tag{3.10}$$

La trajectoire correspondante $x^0(t)$ est dite trajectoire optimale.
En outre, on appelle commande suboptimale (ou ε-optimale) toute commande admissible $u^\varepsilon = u^\varepsilon(.) = (u^\varepsilon(t), t \in T)$ satisfaisant à l'inégalité :

$$Z(u^0) - Z(u^\varepsilon) \leq \varepsilon, \tag{3.11}$$

où $\varepsilon \geq 0$ et u^0 est la commande optimale.

Définition 3.3.

L'ensemble $Q_{sup} = \{I_{sup}, J_{sup}, T_{sup}\}$ est appelé support du problème (3.4) si $\det \varphi_{sup} \neq 0$.

Définition 3.4.

Le paire $\{u, Q_{sup}\}$ formé de la commande admissible u et du support Q_{sup} est appelé commande de support.

Définition 3.5.

La commande de support $\{u, Q_{sup}\}$ est dite non dégénérée si :

1. pour toute moment t_k de T_{sup} et pour toute indice $j \in J_k, k \in K_{sup}$, l'une des deux conditions est vérifiée :
   – dans le voisinage de t_k, le contrôle $u_j(t)$ est non critique
   $$d^- < u_j(t) < d^+, t \in [t_k - \delta, t_k + \delta],\ \delta > 0,$$
   – ou le contrôle $u_j(t), t \in T$, est discontinus à t_k ;
2. En outre, le contrainte suivant est vérifié :
   $$g^-(I_H) < H(I_H, K)x(t^*) < g^+(I_H),\ I_H = I \backslash I_{sup}. \tag{3.12}$$

3.2 Formule de l'accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{u, Q_{sup}\}$ une commande de support du problème (3.4) Considérons une autre commande admissible $\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ et sa trajectoire correspondante $\overline{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$.

L'accroissement de la fonctionnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\Delta Z(u) &= Z(\overline{u}) - Z(u) \\
&= c_1^{'} S(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} (c'(t)\overline{u}(t) + c_3'(t)r(t))dt - c_1^{'} S(t^*)x_0 - \int_0^{t^*} (c'(t)u(t) + c_3'(t)r(t))dt \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)\overline{u}(t)dt + \int_0^{t^*} c_3'(t)r(t)dt - \int_0^{t^*} c'(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} c_3'(t)r(t)dt \qquad (3.13) \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)\overline{u}(t)dt - \int_0^{t^*} c'(t)u(t)dt \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)(\overline{u}(t) - u(t))dt \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)\Delta u(t)dt.
\end{aligned}$$

Définissons le vecteur :

$$c_{sup} = (c_j(t_k), j \in J_k, k \in K_{sup}),$$

où $c_j(t), j \in J$, est la $j^{\text{ème}}$ élément du vecteur

$$c'(t) = (c_1(t), \dots, c_r(t)), t \in T.$$

Construisons le vecteur des potentiels :

$$y'(I_{sup}) = c'_{sup}\varphi_{sup}^{-1}, \qquad y(I_H) = 0, \tag{3.14}$$

on définie la co-commande $E'(t) = (E_1(t), \dots, E_r(t)),\ t \in T$:

$$\begin{aligned} E'(t) &= y'\varphi(t) - c'(t) \\ &= y'HS(t^*)S^{-1}(t)B - (c'_1 S(t^*)S^{-1}(t)B) \\ &= (y'H - c'_1)S(t^*)S^{-1}(t)B. \end{aligned} \tag{3.15}$$

En introduisant la fonction $\psi(t)$ défini comme suit :

$$\psi' = -(H'y - c_1)'S(t^*)S^{-1}(t),\ t \in T, \tag{3.16}$$

qui est la solution du système conjuguée :

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -A'\psi, \\ \psi(t^*) = c_1 - H'y, \end{cases} \tag{3.17}$$

alors, la co-commande peut s'écrire sous la forme :

$$E'(t) = -\psi'(t)B,\ t \in T. \tag{3.18}$$

En vertu des définitions (3.14) et (3.15), l'accroissement de la fonctionnelle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta Z(u) &= Z(\overline{u}) - Z(u) \\ &= \int_0^{t^*} c'(t)\Delta u(t)dt \\ &= \int_0^{t^*} [y'\varphi(t) - E'(t)]\Delta u(t)dt \\ &= y'\int_0^{t^*} \varphi(t)\Delta u(t)dt - \int_0^{t^*} E'(t)\Delta u(t)dt \\ &= y'H\Delta x(t^*) - \int_0^{t^*} E'(t)\Delta u(t)dt. \end{aligned} \tag{3.19}$$

En posant $H\Delta x(t^*) = v$, l'accroissement de la fonctionnelle devient :

$$\Delta Z(u) = \sum_{i\in I_{sup}} y_i v_i - \int_0^{t^*} E'(t)\Delta u(t)dt. \tag{3.20}$$

Par conséquent, il est clair que le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle $\Delta Z(u)$ sous la contrainte :

$$\begin{cases} g_i^- - H(i,K)x(t^*) \leq v_i \leq g_i^+ - H(i,K)x(t^*),\ i \in I_{sup}, \\ d^- - u(t) \leqslant \Delta u(t) \leqslant d^+ - u(t),\ t \in T, \end{cases} \tag{3.21}$$

est égal à :

$$\begin{aligned} \beta(u, Q_{sup}) \quad = \quad & \sum_{j=1}^{r} \left[\int\limits_{T_j^+} E_j(t)(u_j(t) - d_j^-)dt + \int\limits_{T_j^-} E_j(t)(u_j(t) - d_j^+)dt \right] + \\ & \sum_{y_i<0, i\in I_{sup}} y_i v_i^- + \sum_{y_i>0, i\in I_{sup}} y_i v_i^+, \end{aligned} \tag{3.22}$$

où :

$$T_j^+ = \{t \in T : E_j(t) > 0\},\ T_j^- = \{t \in T : E_j(t) < 0\},\ j \in J,$$

et

$$v^-(I) = (v_i^-, i \in I) = g^- - Hx(t^*),$$
$$v^+(I) = (v_i^+, i \in I) = g^+(s) - Hx(t^*).$$

Le nombre $\beta(u, Q_{sup})$ est appelé estimation de suboptimalité.
Ainsi, nous obtenons une majoration de l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\Delta Z(u) = Z(\overline{u}) - Z(u) \leqslant \beta(u, Q_{sup}). \tag{3.23}$$

3.3 Critère d'optimalité

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1 (Critère d'optimalité).

Soit (u, Q_{sup}) une commande de support du problème (3.4). Les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_j(t) \geqslant 0, \text{si} \quad u_j(t) = d_j^-, \\ E_j(t) \leqslant 0, \text{si} \quad u_j(t) = d_j^+, \\ E_j(t) = 0, \text{si} \quad d_j^- \leqslant u_j(t) \leqslant d_j^+, \qquad t \in T,\ j \in J; \\ \\ y_i \geq 0, \text{si} \quad H(i,K)x(t^*) = g_i^+, \\ y_i \leq 0, \text{si} \quad H(i,K)x(t^*) = g_i^-, \\ y_i = 0, \text{si} \quad g_i^- < H(i,K)x(t^*) < g_i^+,\ i \in I_{sup}, \end{cases} \tag{3.24}$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont aussi nécessaires pour l'optimalité de la commande de support (u, Q_{sup}).

Preuve.

Condition suffisante :

Soit $\{u, Q_{sup}\}$ une commande de support vérifiant les relations (3.24), alors la relation (3.22) donne $\beta(u, Q_{sup}) = 0$. En utilisant la relation (3.23) nous aurons $Z(\overline{u}) - Z(u) \leqslant \beta(u, Q_{sup}) = 0$ pour toute autre commande admissible Par conséquent, la commande de support (u, Q_{sup}) est une solution optimale du problème (3.4).

Condition nécessaire :

Soit $\{u, Q_{sup}\}$ une commande de support optimale non dégénérée pour laquelle les relations (3.24) ne sont pas vérifiées de support. Alors, deux cas peuvent se présenter :

1. $\exists t_0 \in T,\ \exists j_0 \in J$: $(E_{j_0}(t_0) > 0$ et $u_{j_0}(t_0) > d^-_{j_0})$ ou $(E_{j_0}(t) < 0$ et $u_{j_0}(t) < d^+_{j_0})$;
2. $\exists i_0 \in I_{sup}$ tel que : $(y_{i_0} > 0$ et $g^+_{i_0} - H(i_0, K)x(t^*) = v^+_{i_0} > 0)$ ou $(y_{i_0} < 0$ et $g^+_{i_0} - H(i_0, K)x(t^*) = v^-_{i_0} < 0)$.

Considérerons séparément les cas 1 et 2.

1. Toute d'abord, supposons qu'on a le cas $(E_{j_0}(t_0) > 0$ et $u_{j_0}(t_0) > d^-_{j_0}$). Comme $E(t),\ t \in T$ est continue et la commande $u(t),\ t \in T$ est constante par morceau alors $\exists \varepsilon$, tel que $E_{j_0}(t) > 0$ et $u_{j_0}(t) > d^-_{j_0}, t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$.
   Soit pour la commande de support non dégénérée $\{u, Q_{sup}\}$ les m_1 moments de support de commutation de la commande, avec $m_1 \leq \mid I_{sup} \mid$. Soit $J^c_{sup} \subset J_{sup}$ et $T^c_{sup} \subset T_{sup}$ les ensembles qui représentent ces m_1 moments de commutation de la commande de support.
   Construisons alors la nouvelle commande $\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, tel que $\Delta u(t)$ est défini comme suit :

$$\Delta u_j(t) = \begin{cases} d^-_j - u_j(t), & j = j_0,\ t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[, & \\ u_j(t_k - 0) - u_j(t_k + 0), & j \in J^c_k,\ t \in [t_k, t_k + \theta_{jk}[,\ k \in K^c_{sup}, & \text{si } \theta_{jk} > 0, \\ u_j(t_k + 0) - u_j(t_k - 0), & j \in J^c_k,\ t \in [t_k + \theta_{jk}, t_k[,\ k \in K^c_{sup}, & \text{si } \theta_{jk} < 0, \\ \gamma_{jk}, & j \in J_k \backslash J^c_k,\ t \in [t_k, t_k + \theta_{jk}[,\ k \in K_{sup} \backslash K^c_{sup}, & \text{si } \theta_{jk} > 0, \\ -\gamma_{jk}, & j \in J_k \backslash J^c_k,\ t \in [t_k + \theta_{jk}, t_k[,\ k \in K_{sup} \backslash K^c_{sup}, & \text{si } \theta_{jk} < 0, \\ 0, & \text{ailleurs.} & \end{cases} \tag{3.25}$$

En vertu de la non dégénérescence de $\{u, Q_{sup}\}$, pour des nombres suffisamment petits $\varepsilon \geqslant 0,\ \theta_{jk} \geqslant 0,\ \gamma_{jk} > 0$, nous aurons $d_j^- \leqslant \overline{u}_j(t) \leqslant d_j^+$.
Les nombres $\theta = (\theta_{jk}, j \in J_k, k \in K_{sup})$ et ε doivent être déterminés de telle sorte que $\overline{u}(t),\ t \in T$, soit admissible, prenons le cas :

$$\int_0^{t^*} \varphi \Delta u(t) dt = 0. \tag{3.26}$$

Considérerons alors la fonction :

$$\begin{aligned} F(\varepsilon, \theta) &= \int_0^{t^*} \varphi \Delta u(t) dt & (3.27) \\ &= \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \varphi(t)(d_{j_0}^- - u_{j_0}(t))dt + \sum_{j \in J_k, k \in K_{sup}} a_{jk} \int_{t_k}^{t_k+\theta_{jk}} \varphi(t)dt, & (3.28) \end{aligned}$$

où : $a_{jk} = u_j(t_k - 0) - u_j(t_k + 0) \neq 0$, pour $j \in J_k^c$ et $k \in K_{sup}^c$;
$a_{jk} = \gamma_{jk}$ pour $j \in J_k \backslash J_k^c$ et $k \in K_{sup} \backslash K_{sup}^c$.
La fonction $F(\varepsilon, \theta)$ est continûment différentielle au voisinage $\varepsilon = 0, \theta = 0$. Alors on détermine un voisinage V du point $\varepsilon = 0$ de telle manière qu'il existe une projection unique $\theta(\varepsilon)$ vérifiant :

$$F(\varepsilon, \theta(\varepsilon)) = 0. \tag{3.29}$$

Ainsi, pour $\theta = \theta(\varepsilon)$ la nouvelle commande $\overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ est admissible. L'accroissement de la fonctionnelle par rapport aux commandes $u(t)$ et $\overline{u}(t),\ t \in T$ est donné alors par :

$$\begin{aligned} \Delta Z(u) &= Z(\overline{u}) - Z(u) & (3.30) \\ &= -\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} E_{j_0}(t)(d_{j_0}^- - u_{j_0}(t)dt) - \sum_{j \in J_k, k \in K_{sup}} a_{jk} \int_{t_k}^{t_k+\theta_{jk}(\varepsilon)} E_j(t)dt. \end{aligned}$$

Comme $E_{j_0}(t_0) \neq 0,\ E_j(t_k) = 0,\ \forall j \in J_k,\ k \in K_{sup}$, et $E(t)$ est continue, alors nous obtenons :

$$\Delta Z(u) = -\varepsilon E_{j_0}(t_0)(d_{j_0}^- - u_{j_0}(t_0)) + \frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} + \sum_{j \in J_K k \in K_{sup}} a_{jk} \frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{3.31}$$

De cette expression, résulte que $\Delta Z(u) > 0$ pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, ce qui contredit l'optimalité de la commande de support non dégénérée $\{u, Q_{sup}\}$.
Pour le cas ($E_{j_0}(t_0) < 0$ et $u_{j_0}(t_0) < d_j^+$), la preuve est analogue au cas précédent.

2. Supposons qu'on a le cas : $y_{i_0} > 0$ et $g_{i_0}^{+} - H(i_0, K)x(t^*) = v_{i_0}^{+} > 0,\ i_0 \in I_{sup}$, de la même manière que le cas précédent, construisons la nouvelle commande $\overline{u} = u(t) + \Delta u(t)$, tel que $\Delta u(t)$ est défini comme suit :

$$\Delta u_j(t) = \begin{cases} u_j(t_k - 0) - u_j(t_k + 0), & j \in J_k^c,\ t \in [t_k, t_k + \theta_{jk}[,\ k \in K_{sup}^c, & \text{si } \theta_{jk} > 0, \\ u_j(t_k + 0) - u_j(t_k - 0), & j \in J_k^c,\ t \in [t_k + \theta_{jk}, t_k[,\ k \in K_{sup}^c, & \text{si } \theta_{jk} < 0, \\ \gamma_{jk}, & j \in J_k \backslash J_k^c,\ t \in [t_k, t_k + \theta_{jk}[,\ k \in K_{sup} \backslash K_{sup}^c, & \text{si } \theta_{jk} > 0, \\ -\gamma_{jk}, & j \in J_k \backslash J_k^c,\ t \in [t_k + \theta_{jk}, t_k[,\ k \in K_{sup} \backslash K_{sup}^c, & \text{si } \theta_{jk} < 0, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{3.32}$$

Les nombres θ_{jk} serons déterminés de telle sorte que la commande $\overline{u}(t),\ t \in T$ soit admissible, ce qui veut dire :

$$v(I)^- \leq \int_0^{t^*} \varphi(t)\Delta u(t)dt \leq v(I)^+, \tag{3.33}$$

Prenons le cas :

$$\int_0^{t^*} \varphi(t)\Delta u(t)dt = v(I), \tag{3.34}$$

avec

$$v_i = \begin{cases} v_i^-, & y_i < 0, \\ v_i^+, & y_i > 0, \\ 0, & y_i = 0. \end{cases} \tag{3.35}$$

Construisons alors la fonction :

$$F(\theta) = \int_0^{t^*} \varphi(t)\Delta u(t)dt \tag{3.36}$$

$$= \sum_{j \in J_k, k \in K_{sup}} a_{jk} \int_{t_k}^{t_k + \theta_{jk}} \varphi(t)dt, \tag{3.37}$$

où : $a_{jk} = u_j(t_k - 0) - u_j(t_k + 0) \neq 0$, pour $j \in J_k^c$ et $k \in K_{sup}^c$;
$a_{jk} = \gamma_{jk}$ pour $j \in J_k \backslash J_k^c$ et $k \in K_{sup} \backslash K_{sup}^c$.
Notons $\theta(\varepsilon)$ la solution de l'équation $F(\theta) = v^0 = (v_i^0,\ i \in I)$, avec :

$$v_i^0 = \begin{cases} v_i^+, & i = i_0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.38}$$

L'accroissement de la fonctionnelle par rapport aux commande $u(t)$ et $\overline{u}(t),\ t \in T$

est donné par :

$$\begin{aligned}
\Delta Z(u) &= Z(\overline{u}) - Z(u) \\
&= y_{i_0}v_{i_0} - \sum_{j\in J_K k\in K_{sup}} a_{jk}\int_{t_k}^{t_k+\theta_{jk}(\varepsilon)} E_j(t)dt. \qquad (3.39)\\
&= y_{i_0}v_{i_0} + \sum_{j\in J_K k\in K_{sup}} a_{jk}\frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} > 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité contredit l'optimalité de la commande de support $u(t),\ t \in T$.
Pour le cas $y_{i_0} < 0$ et $g^+_{i_0} - H(i_0, K)x(t^*) = v^+_{i_0} < 0,\ i_0 \in I_{sup}$, la preuve est analogue au cas précédent.

3.4 Principe du ε-maximum

Le critère d'optimalité décrit ci-dessus peut être écrit sous forme du principe du maximum. Pour cela, construisons la fonction Hamiltonien :

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \psi(t)'(Ax(t) + Bu(t) + r(t)), \qquad (3.40)$$

où $\psi(t)$ est la solution du système conjugué (3.17)

Théorème 3.2 (Principe de maximum)**.**

Pour que la commande de support non dégénérée $\{u, Q_{sup}\}$ soit optimale, il est nécessaire et suffisant que le long de la commande $u(t),\ t \in T$ et des trajectoire $x(t)$,$\psi(t),\ t \in T$, la condition suivante du maximum soit vérifiés :

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d^-\leqslant v\leqslant d^+} H(t, x(t), \psi(t), v), t \in T. \qquad (3.41)$$

Théorème 3.3. *Principe de ε-maximum*

Soit $\varepsilon > 0$, pour l'ε-optimalité de la commande admissible $u(t),\ t \in T$, il est nécessaire et suffisante de trouver un support Q_{sup} de telle sorte que le long des trajectoires $x(t),\ \psi(t),\ t \in T$, on ait la condition de ε-maximum :

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d^-\leqslant v\leqslant d^+} H(t, x(t), \psi(t), v) - \varepsilon(t),\ t \in T, \qquad (3.42a)$$

$$y'Hx(t^*) = \max_{g^-\leqslant Z\leqslant g^+} y'Z - \varepsilon_1, : \qquad (3.42b)$$

avec $\int_0^{t^*} \varepsilon(t)dt + \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$.

Preuve.

Suffisante :
Soit $\{u, Q_{sup}\}$ une commande de support vérifiant les relations (3.42). D'après la formule (3.22) et en vertu de (3.18) la valeur de suboptimalité sera donnée par :

$$\begin{aligned}
\beta(u, Q_{sup}) &= \sum_{j=1}^{r}\left[\int\limits_{T^+(j)} E_j(t)(u_j(t)-d_j^-)dt + \int\limits_{T^-(j)} E_j(t)(u_j(t)-d_j^+)dt\right] + \\
&\quad \sum_{y_i<0, i\in I_{sup}} y_i v_i^- + \sum_{y_i>0, i\in I_{sup}} y_i v_i^+ \\
&= \sum_{j=1}^{r}\left[\int\limits_{T^+(j)} (-\psi'(t)B(K,j))(u_j(t)-d_j^-)dt\right] + \\
&\quad \sum_{j=1}^{r}\left[\int\limits_{T^-(j)} (-\psi'(t)B(K,j))(u_j(t)-d_j^+)dt\right] + \\
&\quad \sum_{y_i<0, i\in I_{sup}} y_i(g_i^- - H(i,K)x(t^*)) + \sum_{y_i>0, i\in I_{sup}} y_i(g_i^+ - H(i,K)x(t^*)) \\
&= \sum_{j=1}^{r}\int\limits_{T^+(j)} [(-\psi'(t)B(K,j))(u_j(t)-d_j^-) + \psi'[Ax(t)+r(t)] - \psi'[Ax(t)+r(t)]]dt + \\
&\quad \sum_{j=1}^{r}\int\limits_{T^-(j)} (-\psi'(t)B(K,j))(u_j(t)-d_j^+) + \psi'[Ax(t)+r(t)] - \psi'[Ax(t)+r(t)]]dt + \\
&\quad \sum_{y_i<0, i\in I_{sup}} y_i(g_i^- - H(i,K)x(t^*)) + \sum_{y_i>0, i\in I_{sup}} y_i(g_i^+ - H(i,K)x(t^*)) \\
&= \sum_{j=1}^{r}\int\limits_{T^+(j)} [\psi'[Ax(t)+B(K,j)d_j^- + r(t)]]dt + \sum_{j=1}^{r}\int\limits_{T^-(j)} [\psi'[Ax(t)+B(K,j)d_j^+ + r(t)]]dt \\
&\quad -\sum_{j=1}^{r}\int_0^{t^*}[\psi'[Ax(t)+B(K,j)u_j(t)+r(t)]]dt + \\
&\quad \sum_{y_i<0, i\in I_{sup}} y_i g_i^- + \sum_{y_i>0, i\in I_{sup}} y_i g_i^+ - \sum_{i\in I} y_i H(i,K)x(t^*) \\
&= \int_0^{t^*}[\max_{d^-\le d^+} H(t,x(t),\psi,v) - H(t,x(t),\psi,v)]dt + \max_{g^-\le Z\le g^+} y'Z - y'Hx(t^*) \\
&= \int_0^{t^*}\varepsilon(t)dt + \varepsilon_1 \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que la commande $u(t), t\in T$ est ε-optimale.

Nécessaire :
Soit $u(t),\ t\in T$ une commande ε- optimale. Décomposons la valeur de suboptimalité $\beta(u,Q_{sup})$ en introduisant le problème dual du problème (3.8)

$$\begin{cases} L(\lambda)=c_1'S(t^*)x_0+\int_0^{t^*}c_3'(t)r(t)-v^{-'}\overline{g}^-+v'\overline{g}^+-\int_0^{t^*}f^{-'}(t)d^-+\int_0^{t^*}f^{+'}(t)d^+ \quad\rightarrow \min,\\ v'\varphi(t)-f^-(t)+f^+(t)=c(t),\\ v^{'}+v^{-'}-v^{+'}=0,\\ v^+(I)\geq 0, v^-(I)\geq 0, f^-(t)(J)\geq 0, f^+(t)(J)\geq 0,\ t\in T. \end{cases} \tag{3.43}$$

Soit $\lambda=(v,v^+,v^-,f^-(t),f^+(t))$ une solution réalisable du problème dual (3.43) construite comme suit :

$$\begin{cases} v=y; & & \\ v_i^-=0, & v_i^+=y_i & \text{si}\quad y_i\geq 0,\\ v_i^-=-y_i, & v_i^+=0 & \text{si}\quad y_i\leq 0, i\in I\\ f_j^-(t)=E_j(t), & f_j^+(t)=0 & \text{si}\quad E_j(t)\geq 0,\\ f_j^-(t)=0, & f_j^+(t)=-E_j(t) & \text{si}\quad E_j(t)<0,\ j\in J. \end{cases} \tag{3.44}$$

Notons $\lambda^0=(v^0,v^{+0},v^{-0},f^{-0}(t),f^{+0}(t))$ la solution optimale du problème dual. De la formule de suboptimalité et des relations (3.44) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \beta(u,Q_{sup}) &= \int_0^{t^*}E(t)u(t)dt-\sum_{j=1}^{r}\left[\int_{T^+(j)}E_j(t)d_j^-dt+\int_{T^-(j)}E_j(t)d_j^+dt\right]+\\ &\quad \sum_{y_i<0,i\in I_{sup}}y_ig_i^-+\sum_{y_i>0,i\in I_{sup}}y_ig_i^+-y'Hx(t^*)\\ &= \int_0^{t^*}E(t)u(t)dt-\int_0^{t^*}f^-(t)d^{-'}dt+\int_0^{t^*}f^+(t)d^{+'}dt+v^{+'}g^+-v^{-'}g^--y'Hx(t^*). \end{aligned}$$

Notons u^0 la solution optimale du primal. De (3.15) et de la relation $Z(u^0)=L(\lambda^0)$, la valeur de suboptimalité peut être décomposée comme suit :

$$
\begin{aligned}
\beta(u,Q_{sup}) &= \int_0^{t^*} y'\varphi(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} c'(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} f^{-'}(t)d^-(t)dt + \\
&\int_0^{t^*} f^{+'}(t)d^+dt + v^{+'}g^+ - v^{-'}g^- - y^{'}Hx(t^*) + Z(u^0) - L(\lambda^0) \\
&= \int_0^{t^*} y'\varphi(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} c'(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} f^{-'}(t)d^-dt + \\
&\int_0^{t^*} f^{+'}(t)d^+dt + v^{+'}g^+ - v^{-'}g^- - y^{'}Hx(t^*) + c_1^{'}F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c_3^{'}(t)r(t)dt + \\
&\int_0^{t^*} c^{'}(t)u^0(t)dt - c_1F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c_3^{'}(t)r(t)dt + v^{-0'}\overline{g}^- - v^{+0'}\overline{g}^+ + \int_0^{t^*} f^{-0'}(t)d^-dt - \\
&\int_0^{t^*} f^{+0'}(t)d^+dt \\
&= -\int_0^{t^*} c^{'}(t)u(t)dt + \int_0^{t^*} c^{'}(t)u^0(t)dt - \int_0^{t^*} f^{-'}(t)d^-dt + \int_0^{t^*} f^{+'}(t)d^+dt + v^{+'}g^+ - \\
&v^{-'}g^- + v^{-0'}\overline{g}^- - v^{+'0}\overline{g}^+ + \int_0^{t^*} f^{-0'}(t)d^-dt - \int_0^{t^*} f^{+0'}(t)d^+dt \\
&= [Z(u^0) - Z(u)] + [L(\lambda) - L(\lambda^0)] \\
&= \beta(u) + \beta(Q_{sup}),
\end{aligned}
$$

où : $\beta(u) = Z(u^0) - Z(u)$ est la mesure de non optimalité de la commande $u(t), t \in T, \beta(Q_{sup}) = L(\lambda) - L(\lambda^0)$ mesure la non optimalité du support.

Ainsi, si on trouve un support Q^0_{sup} associé à la commande $u(t)$ tel que le vecteur $\lambda = (v^+, v^-, f^-(t), f^+(t))$ défini par les relations (3.44) sera optimale pour le problème (3.43), on aura

$\beta(Q_{sup}) = 0$. En effet, on peut écrire :

$$
\beta(u, Q_{sup}) = \beta(u) = Z(u^0) - Z(u) \leq \varepsilon, \tag{3.45}
$$

à cause de l'optimalité de u.
Définissons la fonction $\varepsilon(t) > 0$ tel que :

$$
\varepsilon(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^r E_j(t)(u_j(t) - d_j^-), & \text{si} \ \in T_j^-, \\ \sum_{j=1}^r E_j(t)(u_j(t) - d_j^+), & \text{si} \ \in T_j^+, \\ 0, & \text{si} \ E(t) = 0; \quad t \in T. \end{cases} \tag{3.46}
$$

Comme $E'(t) = -\psi'(t)B - c_2'(t), \ t \in T$, alors, $\varepsilon(t)$ peut être écrit comme suit :

$$
\varepsilon(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^r [-\psi\prime(t)B(K,j)](u_j(t) - d_j^-), & \text{si} \ \in T_j^-, \\ \sum_{j=1}^r [-\psi\prime(t)B(K,j)](u_j(t) - d_j^+), & \text{si} \ \in T_j^+, \\ 0, & \text{si} \ E(t) = 0; \quad t \in T. \end{cases} \tag{3.47}
$$

En ajoutant les quantités $(\psi'(t)[Ax(t)+r(t)]-\psi(t)[Ax(t)+r(t)])$ à chaque relation on aura :

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{r}(\psi\prime(t)[Ax(t)+B(K,j)d_j^-+r(t)]\\ -[\psi\prime(t)[Ax(t)+B(K,j)u_j(t)+r(t)]]),\ t\in T_j^-,\\ \sum_{j=1}^{r}(\psi\prime(t)[Ax(t)+B(K,j)d_j^++r(t)]\\ -[\psi\prime(t)[Ax(t)+B(K,j)u_j(t)+r(t)]]),\ t\in T_j^+,\\ 0,\ \text{si}-\psi'(t)B=0,\ t\in T.\end{cases}\tag{3.48}$$

En explicitant la fonction Hamiltonien définie par la relation (3.40) nous obtenons :

$$\varepsilon(t)=\max_{d^-\leq v\leq d^+}H(t,x(t),\psi(t),v)-H(t,x(t),(t),u(t)).\tag{3.49}$$

Posons :

$$\varepsilon_1=\sum_{y_i<0,i\in I_{sup}}y_ig_i^-+\sum_{y_i>0}y_ig_i^+,-\sum_{i\in I}y_iH(i,K)x(t^*)).\tag{3.50}$$

Cette égalité peut s'écrire :

$$\varepsilon_1=\max_{g^-\leq Z\leq g^+}y'Z-y'Hx(t^*).\tag{3.51}$$

Ainsi, d'après les relation (3.45) et (3.22), nous obtenons :

$$\beta(u,Q_{sup})=\int_0^{t^*}\varepsilon(t)dt+\varepsilon_1+\leq\varepsilon.\tag{3.52}$$

Cette dernière inégalité implique que les conditions (3.42) de ε-maximum sont vérifiées.

3.5 Algorithme de la méthode

Soient $\varepsilon>0$et $\{u,Q_{sup}\}$ une commande de support initiale. Le but de l'algorithme est de construire une commande u^ε ε-optimale ou carrément optimale u^0, en faisant des itérations qui consiste à faire le passage de $\{u,Q_{sup}\}$ à $\{\overline{u},\overline{Q}_{sup}\}$ tel que $Z(\overline{u})\geq Z(u)$. Pour cela, l'algorithme se décompose en trois procédures :

- changement de commande $u\longrightarrow\overline{u}$;
- changement de support $Q_{sup}\longrightarrow\overline{Q}_{sup}$;
- procédure finale.

3.5.1 Changement de commande

Soit $\varepsilon\geq0$ donné et une commande de support $\{u,Q_{sup}\}$ vérifiant $\beta(u,Q_{sup})>\varepsilon$. Construisons une autre commande admissible $\overline{u}(t)=u(t)+\theta\Delta u(t),\ t\in T,$

de telle façon à avoir $Z(\overline{u}) \geq Z(u)$, où $\Delta u(t)$ est la direction du changement de la commande, et $\theta \geq 0$ est le pas maximal admissible le long de cette direction. Pour cela, choisissons les nombres $\alpha > 0,\ h > 0$ (paramètres de l'algorithme) et construisons les ensembles :

$$T_\alpha = \{t \in T : \eta(t) \leq \alpha\}, \quad T_* = T \backslash T_\alpha, \quad \text{avec} \quad \eta(t) = \min_{j\in J} |E_j(t)|\,, t \in T.$$

Subdivisons l'ensemble T_α en intervalles $\left[\tau_k, \tau^k\right]$, $k = \overline{1, N}$, $\tau_k < \tau^k \leq \tau_{k+1}$, $T_\alpha = \cup_{k=1}^{N} \left[\tau_k, \tau^k\right[$, de telle façon que nous ayons $\tau^k - \tau_k \leq h$; $T_{sup} \subset \{\tau_k,\ k = \overline{1, N}\}$; $u_j(t) = u_{jk} = const$, $t \in \left[\tau_k, \tau^k\right[, k = \overline{1, N},\ j \in J$.

Calculons les quantités suivantes :

$$\beta_{jk} = -\int_{\tau_k}^{\tau^k} E_j(t)dt, \quad q_{jk} = \int_{\tau_k}^{\tau^k} \varphi_j(t)dt,\ k = \overline{1, N},\ j \in J; \tag{3.53}$$

$$\beta_{N+1} = -\sum_{j=1}^{r} \int_{T_*} E_j(t)\Delta u_j(t)dt + \sum_{i\in I_{sup}} y_i \overline{v_i}; \tag{3.54}$$

$$q_{iN+1} = \sum_{j=1}^{r} \int_{T_*} \varphi_{ij}(t)\Delta u_j(t)dt - \overline{v_i},\ i \in I_{sup}; \tag{3.55}$$

$$q_{iN+1} = \sum_{j=1}^{r} \int_{T_*} \varphi_{ij}(t)\Delta u_j(t)dt,\ i \in I_H; \tag{3.56}$$

avec

$$\overline{v_i} = \begin{cases} g_i^+ - H(i, K)x(t^*), & \text{si} \quad y > 0, \\ g_i^- - H(i, K)x(t^*), & \text{si} \quad y < 0. \end{cases} \tag{3.57}$$

et

$$\Delta u_j(t) = \begin{cases} d_j^+ - u_j(t), & \text{si} \quad E_j(t) < -\alpha, \\ d_j^- - u_j(t), & \text{si} \quad E_j(t) > \alpha, \quad j = \overline{1, r}, t \in T_*. \end{cases} \tag{3.58}$$

Posons :

$$\begin{cases} l_{jk} = \theta \Delta u_j(t), t \in [\tau_k, \tau^k], & j = \overline{1, r}, k = \overline{1, N}. \\ l_{N+1} = \theta & \text{avec } 0 \leq \theta \leq 1. \end{cases} \tag{3.59}$$

$f_*(I_H) = g^-(I_H) - H(I_H, K)x(t^*), f^*(I_H) = g^+(I_H) - H(I_H, K)x(t^*), f_*(I_{sup}) = 0, f^*(I_{sup}) = 0,$

$$l = (l_{11}, ..., l_{1N}, ..., l_{r1}, ..., l_{rN}, l_{N+1})'; \tag{3.60}$$

$$\beta = (\beta_{11}, ..., \beta_{1N}, ..., \beta_{r1}, ..., \beta_{rN}, \beta_{N+1})'. \tag{3.61}$$

Les vecteurs l, β, et q_{jk} ont pour dimensions respectives (N_{r+1}), (N_{r+1}) et m. En utilisant ces quantités, le problème(3.20)-(3.22) sera équivalent au problème de support suivant :

$$\begin{array}{l} \beta' l \qquad \to \max, \\ f_* \leq \sum\limits_{j=1}^{r} \sum\limits_{k=1}^{N} q_{jk} l_{jk} + q_{N+1} l_{N+1} \leq f^*, \\ d_j^- - u_{jk} \leq l_{jk} \leq d_j^+ - u_{jk},\ j = \overline{1,r},\ k = \overline{1,N},\ 0 \leq l_{N+1} \leq 1. \end{array} \tag{3.62}$$

Résolvons le problème (3.62) par la méthode adaptée, présentée en Annexe, de la maniére suivante :

Introduisons $S_{sup} \subset S = \{1, ..., N+1\}$, $|S_{sup}| \leq p$, et à chaque indice $k \in S_{sup}$ faisons correspondre un ensemble $J_k \subset J = \{1, ..., r\}$, $\sum\limits_{k \in S_{sup}} |J_k| = p$.

Posons $J_{sup} = \{J_k, k \in S_{sup}\}$, $T_{sup} = \{k, k \in S_{sup}\}$ et $Q_{sup} = \{I_{sup}, J_{sup}, T_{sup}\}$ et introduisons la matrice $P_{sup} = P(Q_{sup}) = (q_{ij_k}, i \in I_{sup}, j \in J_k, k \in S_{sup})$, où q_{ij_k} est un m-vecteur et $\det(P_{sup}) \neq 0$.

On prend comme plan initial $l_{jk}^0 = 0$, à qui nous associons le support (Q_{sup}). Après certain nombre d'itérations, on obtient la solution ε-optimale $\{l^\varepsilon, \widetilde{Q}_{sup}\}$.

Si l'indice supplémentaire $(N+1) \in \widetilde{T}_{sup}$, alors par la méthode duale, on l'exclut du support et on construit un nouveau support $\overline{Q}_{sup}$.

Si l'indice $(N+1)$ n'est pas dans T_{sup}, alors on pose $\overline{Q}_{sup} = \widetilde{Q}_{sup}$.

Ainsi, construisons la nouvelle commande de support $\{\overline{u}, \widetilde{Q}_{sup}\}$, avec :

$$\overline{u}_j(t) = \begin{cases} u_j(t) + l_{jk}^\varepsilon, & t \in \left[\tau_k, \tau^k\right],\ k = \overline{1,N}, \\ u_j(t) + l_{N+1}^\varepsilon \Delta u_j(t), & j = \overline{1,r},\ t \in T_*, \end{cases} \tag{3.63}$$

et le support $\widetilde{Q}_{sup} = \{\widetilde{I}_{sup}, \widetilde{J}_{sup}, \widetilde{T}_{sup}\}$ du problème (3.4) est construit de la manière suivante :

$$\widetilde{I}_{sup} = \overline{I}_{sup}, \widetilde{J}_{sup} = \{\overline{J}_k, k \in \overline{S}_{sup}\},\ \widetilde{T}_{sup} = \{\tau_k, k \in \overline{S}_{sup}\}. \tag{3.64}$$

En utilisant ces ensembles, on construit la matrice :

$$\widetilde{\varphi}_{sup} = \{\varphi_j(t_k), j \in \widetilde{J}_k,\ k \in \widetilde{K}_{sup}\}.$$

La nouvelle commande ainsi construite vérifie l'inégalité $Z(\overline{u}) \geq Z(u)$. Calculons alors la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_{sup})$. A partir de cette valeur on distingue trois cas :

– si $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_{sup}) = 0$, alors $\overline{u}$ est une commande optimale pour le problème (3.4) ;

– si $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_{sup}) \leq \varepsilon$, alors $\overline{u}$ est une commande ε-optimale ;
– sinon, nous passons soit à une nouvelle itération en démarrant avec une commande d'appui $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q})$ et les paramètres $\overline{\alpha} < \alpha, \overline{h} < h$, soit à la procédure de changement de support.

3.5.2 Changement de support

Soit $\{\overline{u}, \widetilde{Q}_{sup}\}$la commande de support obtenue après résolution du problème (3.62). Calculons par les formules (3.14)-(3.15) la co-commande $\widetilde{E}'(t) = -\widetilde{\psi}'(t)B,\ t \in T$, correspondant à $\{\overline{u}, \widetilde{Q}_{sup}\}$. Par la suite, construisons la quasi-commande $w = w(.) = (w(t), t \in T)$.

$$w_j(t) = \begin{cases} d_j^-, & \text{si} \quad \widetilde{E}_j(t) > 0, \\ d_j^+, & \text{si} \quad \widetilde{E}_j(t) < 0, \\ \in [d_j^-, d_j^+] & \text{si} \quad \widetilde{E}_j(t) = 0, j = \overline{1, r}, t \in T, \end{cases} \tag{3.65}$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi = (.) = (\chi(t),\ t \in T)$ vérifiant l'équation :

$$\dot{\chi} = A\chi + Bw + r(t),\ \chi(0) = x_0. \tag{3.66}$$

Construisons le vecteur :

$$\gamma(\widetilde{J}_{sup}, \widetilde{T}_{sup}) = \widetilde{\varphi}_{sup}^{-1}(g_-^+(\widetilde{I}_{sup}) - H(\widetilde{I}_{sup}, K)\chi(t^*)), \tag{3.67}$$

avec

$$g_{-i}^+ = \begin{cases} g_i^-, & si \quad \widetilde{y}_i < 0, \\ g_j^+, & si \quad \widetilde{y}_i > 0, \end{cases} \tag{3.68}$$

et les quantités :

$$\gamma^+(\widetilde{I}_H) = (\gamma_i^+, i \in \widetilde{I}_H = I \setminus \widetilde{I}_{sup}),$$
$$\gamma^-(\widetilde{I}_H) = (\gamma_i^-, i \in \widetilde{I}_H),$$

avec γ_i^+ et γ_i^- sont définies comme suit :

$$\gamma_i^+ = \sum_{j \in \widetilde{J}_k, k \in \widetilde{K}_{sup}} \varphi_{ij}(t_k)\gamma(j, t_k) + H(i, K)\chi(t^*) - g_i^+.$$

$$\gamma_i^- = \sum_{j \in \widetilde{J}_k, k \in \widetilde{K}_{sup}} \varphi_{ij}(t_k)\gamma(j, t_k) + H(i, K)\chi(t^*) - g_i^-.$$

En introduisant un paramètre μ suffisamment petit deux cas peuvent se présenter :

1. Si la relation suivante :

$$\left\|\gamma(\widetilde{J}_{sup}, \widetilde{T}_{sup})\right\| \leq \mu, \gamma^{+}(\widetilde{I}_{H}) \geq 0, \gamma^{-}(\widetilde{I}_{H}) \leq 0, \tag{3.69}$$

   est vérifié, alors on passe à la procédure finale avec le support $\overline{Q}_{sup} = \widetilde{Q}_{sup}$.
2. Sinon on va changer le support ($\widetilde{Q}_{sup} \longrightarrow \overline{Q}_{sup}$), en effectuant une itération de la méthode duale, et on refait une nouvelle itération avec $\{\overline{u}, \overline{Q}_{sup}\}$, $\overline{\alpha} < \alpha$ et $\overline{h} < h$. Pour cela introduisons le problème dual du problème primal (3.43) :

$$\begin{cases} L(\lambda) = c_1' S(t^*) x_0 + \int_0^{t^*} c_3'(t) r(t) - v^{-\prime} \overline{g}^{-} + v^{\prime +} \overline{g}^{+} - \int_0^{t^*} f^{-\prime}(t) d^{-} dt + \int_0^{t^*} f^{+\prime}(t) d^{+} dt \ \rightarrow \min, \\ v^{\prime +} \varphi(t) - v_*' \varphi(t) - f^{-}(t) + f^{+}(t) = c(t), \\ v^{-} \geq 0, v^{+} \geq 0, f^{-}(t) \geq 0, f^{+}(t) \geq 0, \ t \in T. \end{cases} \tag{3.70}$$

Soit $\lambda = (v^{-}, v^{+}, f^{-}(t), f^{+}(t))$ une solution réalisable du problème dual (3.54) définit de la façons suivante :

$$\begin{cases} v_i^{-} = 0, & v_i^{+} = \widetilde{y}_i & \text{si} \ \ \widetilde{y}_i < 0 \\ v_i^{-} = -\widetilde{y}_i, & v_i^{+} = 0 & \text{si} \ \ \widetilde{y}_i \leq 0, \\ f_j^{-}(t) = \widetilde{E}_j(t), & f_j^{+}(t) = 0 & \text{si} \ \ \widetilde{E}_j(t) \geq 0, \\ f_i^{-}(t) = 0, & f_i^{+}(t) = -\widetilde{E}_j(t), & \text{si} \ \ \widetilde{E}_j(t) > 0. \end{cases} \tag{3.71}$$

Construisons une nouvelle solution réalisable $\overline{\lambda}$ avec sa co-commande correspondante $\overline{E}(t) = \overline{y}' \varphi(t) - c(t)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \overline{\lambda} = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + \sigma^0 \xi, \\ \overline{y} = \widetilde{y} + \sigma^0 \Delta y, \\ \overline{E}(t) = \widetilde{E}(t) + \sigma^0 \delta(t), t \in T, \end{cases} \tag{3.72}$$

où :$\delta(t)$ est la direction du changement de la co-commande et Δy est celle du vecteur des potentiels , σ^0 est le pas le long de cette direction. Supposons que $\exists I_H^0 \subset \widetilde{I}_H$, avec $i \in I_H^0$ et $(\gamma_i^{+} > 0, \quad ou \quad \gamma_i^{-} < 0)$.
Calculons la quantité suivante :

$$\alpha(0) = \sum_{y_i > 0, i \in \widetilde{I}_{sup}} \Delta y_i \overline{g}_i^{+} + \sum_{y_i < 0, i \in \widetilde{I}_{sup}} \Delta y_i \overline{g}_i^{-} - \sum_{j}^{r} \left(\int_{T_j^{+}} \delta_j(t) d_j^{-} dt + \int_{T_j^{-}} \delta_j(t) d_j^{+} dt \right), \tag{3.73}$$

$$\alpha(\sigma) = \alpha(0) + \sum_{j=1}^{r} \sum_{l=1}^{l_j} \int_{t_j^l}^{t_j^l(\sigma)} \delta_j(t) (d_j^{-} - d_j^{+}) sign \dot{\widetilde{E}}_j(t_j^l) dt. \tag{3.74}$$

avec : $t_j^l, t_j^l(\sigma)$ sont les zéros de $\widetilde{E}_j(t)$ et de $E_j(t)$ respectivement , et $\dot{\overline{E_j}}(t_j^l(\sigma)) \neq 0$, $j = \overline{1...r}, j \in l_j$. Posons :

$$\gamma_{i_0} = \max_{i \in I_H^0} \{| \gamma_i^- |, | \gamma_i^+ |\},$$

$$\Delta y_{i_0} = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad \gamma_{i_0} = | \gamma_i^+ |, \\ 1, & \text{si} \quad \gamma_{i_0} = | \gamma_i^- |, \end{cases}$$

$$\Delta y(\widetilde{I}_H \setminus i_0) = 0.$$

De l'égalité :

$$\delta'_{sup} = \Delta y'(\widetilde{I}_{sup})\widetilde{\varphi}_{sup} + \Delta y_{i_0}(\varphi_{i_0 j}, j \in J_k, k \in K_{sup}),$$

on trouve :

$$\Delta y'(\widetilde{I}_{sup}) = \Delta y_{i_0}(\varphi_{i_{0j}}, j \in J_k, k \in K_{sup})\widetilde{\varphi}_{sup}^{-1}.$$

La direction $\delta(t), t \in T$, est donnée par :

$$\delta(t) = -\Delta\psi'(t)B(t), t \in T,$$

avec $\Delta\psi(t), t \in T$, est la solution du système suivant :

$$\Delta\dot{\psi} = -A'\Delta\psi, \Delta\psi(t^*) = -\Delta y' H.$$

Ainsi, le changement de support se fait de la façon suivante :

- si il existe $i_* \in \widetilde{I}_{sup}$, avec $y_{i*} = 0$, alors, le nouveau support $\overline{Q}_{sup} = (\overline{I}_{sup}, \overline{J}_{sup}, \overline{T}_{sup})$, avec :
$$\overline{I}_{sup} = (\widetilde{I}_{sup} \setminus i_*) \cup i_0, \overline{J}_{sup} = \widetilde{J}_{sup}, \overline{T}_{sup} = \widetilde{T}_{sup}.$$
- sinon choisissons $(j_1, t_s), j_1 \in J \setminus \widetilde{J}_{sup}, t_s \in T \setminus \widetilde{T}_{sup}$, avec :
$$\overline{E_{J_1}}(t_s) = \widetilde{E}_{j_1}(t_s) + \sigma^0\delta_{j_1}(t_s) = 0 \quad et \quad \delta_{j_1}(t_s) \neq 0$$
Le pas σ^0, est calculé de telle sorte que $(\sigma^0) > 0$
Ainsi, le nouveau support est $\overline{Q}_{sup} = (\overline{I}_{sup}, \overline{J}_{sup}, \overline{T}_{sup})$, avec :
$$\overline{I}_{sup} = (\widetilde{I}_{sup} \cup i_0), \overline{J}_{sup} = (\widetilde{J}_{sup} \cup j_1), (\overline{T}_{sup}) = (\widetilde{T}_{sup} \cup t_s).$$

Supposons maintenant que l'on a $\gamma^+(\widetilde{I_H}) \geq 0, \gamma^-(\widetilde{I_H}) \leq 0, \quad$ et $\quad \| \gamma(\widetilde{I}_{sup}, \widetilde{T}_{sup}) \| > \mu$ Posons :

$$| \gamma(j_0, t_{s_0}) | = \max | \gamma(\widetilde{I}_{sup}, \widetilde{T}_{sup}) | j_0 \in \widetilde{J}_{s_0}, s_0 \in \widetilde{K}_{sup}.$$

Dans ce cas, le changement de support se fait de la manière suivante :

– s'il existe $i_* \in \widetilde{I}_{sup}$, avec $\overline{y}_{i_*} = 0$, ou $y = y + \sigma^0 \Delta_y$, et $\Delta_y(\widetilde{I}_H) = 0$, $\Delta_y(\widetilde{I}_{sup}) = -sign\gamma(j_0, t_{s0})\varphi^{-1}(\widetilde{I}_{sup}, j_0, t_{s0})$ alors, le nouveau support $\overline{Q}_{sup} = (\overline{I}_{sup}, \overline{J}_{sup}, \overline{T}_{sup})$ est donnée comme suit :

$$\overline{I}_{sup} = \widetilde{I}_{sup} \backslash i_*, \overline{J}_{sup} = \widetilde{J}_{sup} \backslash j_0, \overline{T}_{sup} = \widetilde{T}_{sup} \backslash t_{s_0}.$$

– sinon, le nouveau support est$\overline{Q}_{sup} = (\overline{I}_{sup}, \overline{J}_{sup}, \overline{T}_{sup})$ avec :

$$\overline{I}_{sup} = \widetilde{I}_{sup}, \overline{J}_{sup} = (\widetilde{J}_{sup} \backslash j_0) \cup j_1, \overline{T}_{sup} = (\widetilde{T}_{sup} \backslash t_{s0}) \cup t_s.$$

Calculons la valeur de suboptimalité $\beta(\overline{u}, \overline{Q}_{sup})$:

– si $\beta(\overline{u}, \overline{Q}_{sup}) = 0$ alors la commande de support$\{\overline{u}, \overline{Q}_{sup}\}$ est optimale ;
– si $\beta(\overline{u}, \overline{Q}_{sup}) \leq \varepsilon$ alors $\{\overline{u}, \overline{Q}_{sup}\}$ est une commande $\varepsilon-$ optimale ;
– sinon aller à la procédure finale si les relations (3.69) sont vérifiées.

3.5.3 Procédure finale

Admettons, que la relation (3.69) est vérifiées pour la quasi-commande $w = w(.) = (w(t), t \in T)$ et la quasi-trajectoire $\chi = \chi(.) = (\chi(t), t \in T)$ construite par le support $\overline{Q}_{sup}$.

La procédure finale consiste à déterminer le support optimal $Q^*_{sup} = \{I^*_{sup}, J^*_{sup},\ T^*_{sup}\}$ de telle manière à avoir : $g^- \leq H\chi(t^*) \leq g^+$.

Ainsi, le support Q^*_{sup} est déterminé en résolvant le système d' équations suivant :

$$\sum_{j \in \overline{J}_k} \sum_{k \in \overline{K}_{sup}} (d_j^+ - d_j^-) sign\dot{E}_j(t_k) \int_{t_k}^{V_k(T^*_{sup})} \varphi_{ij}(t)dt - g + H(i, K)\chi(t^*) = 0, i \in I^*_{sup}, \tag{3.75}$$

avec $V_k(T^*_{sup}), k \in K^*_{sup}$ est déterminé par les relations :

$$E_j(V_k(T^*_{sup}), T^*_{sup}) = 0, V_k(\overline{T}_{sup}) = t_k, j \in \overline{J}_k, k \in \overline{K}_{sup};$$

$$E(t, T^*_{sup}) = c^{*\prime}_{1sup}\varphi^{*-1}_{sup}\varphi(t) - c(t).$$

Supposons Q^l_{sup} la l^{eme} approximation, Q^0_{sup} l'approximation initiale , avec $I^0_{sup} = \overline{I}_{sup}$, $J^0_{sup} = \overline{J}_{sup}$, $T^0_{sup} = \overline{T}_{sup}$. Supposons que la l^{eme} approximation est connue, alors la $(l+1)^{eme}$ approximation sera construite de la manière suivante :

$$T^{l+1}_{sup} = T^l_{sup} + \left\{ \frac{1}{d_j^+ - d_j^-} sign\dot{E}_j(t_k)\gamma(j, t^l_k),\ j \in J^l_k,\ k \in K^l_{sup} \right\}. \tag{3.76}$$

En outre, la $(l+1)^{ème}$ approximation sera construite d'une manière à satisfaire la relation (3.69).

Ainsi, si à chaque approximation, les conditions (3.69) ne sont pas vérifies, nous changeons le support comme suit :

- Si $\exists i_* \in I^l_{sup}$ avec $y^{l+1}_{i_*} = 0, \gamma_i^{-l+1} \geq 0,\ \gamma_i^{+l+1} \leq 0, i \in I^k_H$, posons $Q^{l+1}_{sup} = \{I^{l+1}_{sup}, J^{l+1}_{sup}, T^{l+1}_{sup}\}$, avec $I^{l+1}_{sup} = I^l_{sup} \backslash i_*, J^{l+1}_{sup} = J^l_{sup} \backslash j_0, T^{l+1}_{sup} = T^l_{sup} \backslash t_{s0}$
  Calculons $\gamma^+(I^{l+1}_H), \gamma^-(I^{l+1}_H), \gamma^+(J^{l+1}_{sup}, T^{l+1}_{sup})$.
  Si les conditions (3.69) sont vérifies, nous posons $Q^0_{sup} = Q^{l+1}_{sup}$. Sinon, changeons le support jusqu'à ce que les conditions (3.69) soient satisfaites.
- Si $\exists i_* \in I^l_{sup}, y^{l+1}_{i_*} = 0, \exists i_0 \in I^k_H, \gamma^{-l+1}_{i_0} > 0, \gamma^{+l+1}_{i_0} < 0$, nous changeons le support de la manière suivante :

$$I^{l+1}_{sup} = (I^l_{sup} \backslash i_*) \cup i_0, J^{l+1}_{sup} = J^l_{sup}, T^{l+1}_{sup} = T^l_{sup}.$$

- Si $\forall i \in I^l_{sup}, y^{l+1}_i \neq 0$, et $\exists i_0 \in I_H; \exists i_0 \in I^k_H, \gamma^{-l+1}_{i_0} > 0, \gamma^{+l+1}_{i_0} < 0$, posons

$$I^{l+1}_{sup} = I^l_{sup} \cup i_0, J^{l+1}_{sup} = J^l_{sup} \cup j_1, T^{l+1}_{sup} = T^l_{sup} \cup t_s.$$

Posons $I^l_{sup} = I^{l+1}_{sup}, J^l_{sup} = J^{l+1}_{sup}, T^l_{sup} = T^{l+1}_{sup}$, et faisons une nouvelle itération jusqu'à ce que les approximations successives ne diffèrent pas.

Soit $Q^*_{sup} = \{I^*_{sup}, J^*_{sup}, T^*_{sup}\}$ la solution du système (3.25), alors la quasi-commande $w^*(t), t \in T$ calculée par (3.65) et le support Q^*_{sup} est une commande optimale pour le problème (3.4), et Q^*_{sup} est le support optimal.

3.6 Schéma de l'algorithme

La méthode est résumée dans l'algorithme suivant :

Début

(1) `Teste de commandabilité du système` :

> **Si** $rang(B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B) = n$, Alors le système est commandable, aller en (2).
>
> **Sinon**, le problème n'admet pas de solution.

(2) `Soit` $\{u, Q_{sup}\}$ `une commande de support de départ admissible du problème (3.4).`

* Déterminer la trajectoire admissible $x(t), t \in T$.
* Calculer $\varphi(t) = HS(t^*)S^{-1}(t)B$.
* Calculer$c'(t) = c'_1(t)S(t^*)S^{-1}(t)B$.
* Calculer $y'(I_{sup}) = c'_{sup}\varphi^{-1}_{sup}, \qquad y(I_H) = 0,$.
* Déterminer la co-commande $E(t) = y'\varphi(t) - c'(t)$.

* Calculer la valeur de la fonctionnelle $Z(u) = c_1' x(t^*)$.

(3) `Test d'optimalité de la commande de support de départ`

* Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(u, Q_{sup})$ donnée par la formule (3.22).

SI $\beta(u, Q_{sup}) = 0$, alors la commande de support $\{u, Q_{sup}\}$ est optimale ;

SI $\beta(u, Q_{sup}) \leq \varepsilon$, alors la commande de support $\{u, Q_{sup}\}$ est ε-optimale ;

SINON, aller en (4).

(4) `Changement de la commande` u `en` $\overline{u}$

* Construire les ensembles :

$T_\alpha = \{t \in T : \eta(t) \leq \alpha\}, \quad T_* = T \backslash T_\alpha, \quad$ avec, $\eta(t) = \min_{j \in J} |E_j(t)|, t \in T.$

* Subdiviser l'ensemble T_α en intervalles $[\tau_k, \tau^k[$.

* Calculer les quantités suivantes : $\beta_{jk},\ q_{jk},\ \beta_{N+1},\ q_{N+1}$, avec les relations (3.53), (3.54), (3.55) et (3.56).

* Résoudre le problème suivant par la méthode adaptée :

$$\begin{cases} \beta' l \longrightarrow \max, \\ f_* \leq \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{N} q_{jk} l_{jk} + q_{N+1} l_{N+1} \leq f^*, \\ d_j^- - u_{jk} \leq l_{jk} \leq d_j^+ - u_{jk}, j = \overline{1,r}, k = \overline{1,N}, 0 \leq l_{N+1} \leq 1. \end{cases} \tag{3.77}$$

où f^*, f_*, l et β sont données par les relations (3.60) et (3.61).

* Construire la nouvelle commande de support $\{\overline{u}, \overline{Q}_{sup}\}$, avec :

$$\overline{u}_j(t) = \begin{cases} u_j(t) + l_{jk}^{\varepsilon}, \quad t \in \left[\tau_k, \tau^k\right], \ k \in \overline{1,N}, \\ u_j(t) + l_{N+1}^{\varepsilon} \Delta u_j(t), j = \overline{1,r}, t \in T_*, \end{cases} \tag{3.78}$$

et le support $\widetilde{Q}_{sup}$ est construit par les relations (3.64).

(5) `Test d'optimalité de la nouvelle commande de support` $\{\overline{u}, \widetilde{Q}_{sup}\}$`,`

* Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_{sup})$

SI $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_{sup}) = 0$, alors $\overline{u}$ est une commande optimale ;
SI $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_{sup}) \leq \varepsilon$, alors $\overline{u}$ est une commande ε-optimale ;
SINON aller en (6).

(6) `Changement du support` $\widetilde{Q}_{sup}$ `en` $\overline{Q}_{sup}$.

* Construire la quasi-commande $w = w(.) = (w(t),\ t \in T)$ telle que

$$w_j(t) = \begin{cases} d_j^-, \quad si\ \widetilde{E}_j(t) > 0, \\ d_j^+, \quad si\ \widetilde{E}_j(t) < 0, \\ \in \left[d_j^-, d_j^+\right], \quad si\ \widetilde{E}_j(t) = 0, \quad j = \overline{1,r},\ t \in T, \end{cases}$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi = (.) = (\chi(t),\ t \in T)$ vérifiant :

$$\dot{\chi} = A\chi + Bw + r(t),\ \chi(0) = x_0.$$

Construire les vecteurs :

$$\gamma(\widetilde{J}_{sup}, \widetilde{T}_{sup}) = \widetilde{\varphi}_{sup}^{-1}(g_{-}^{+}(\widetilde{I}_{sup}) - H(\widetilde{I}_{sup}, K)\chi(t^*)),$$

$$\gamma_i^+ = \sum_{j\in\widetilde{J}_k, k\in\widetilde{K}_{sup}} \varphi_{ij}(t_k)\gamma(j,t_k) + H(i,K)\chi(t^*) - g_i^+,$$

$$\gamma_i^- = \sum_{j\in\widetilde{J}_k, k\in\widetilde{K}_{sup}} \varphi_{ij}(t_k)\gamma(j,t_k) + H(i,K)\chi(t^*) - g_i^-.$$

SI

$$\gamma^+(\widetilde{I_H}) \geq 0, \gamma^-(\widetilde{I_H}) \leq 0, \quad \text{et} \quad \| \gamma(\widetilde{I}_{sup}, \widetilde{T}_{sup}) \| \leq \mu$$

alors on pose $\overline{Q}_{sup} = \widetilde{Q}_{sup}$ et aller en (7).
SINON, changer le support ($\overline{Q}_{sup} \to \widetilde{Q}_{sup}$) en effectuant une itération de la méthode duale, et aller en (2) avec le nouveau support.

(7) `Test d'optimalité de la nouvelle commande de support` $\{\overline{u}, \overline{Q}_{sup}\}$

*Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(\overline{u}, \overline{Q}_{sup})$
SI $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_{sup}) = 0$, alors $\overline{u}$ est une commande optimale ;
SI $\beta(\overline{u}, \widetilde{Q}_{sup}) \leq \varepsilon$, alors $\overline{u}$ est une commande ε-optimale ;
SINON aller en (8).

(8) `Procédure finale`
* Résoudre le système suivant par la méthode de Newton :

$$\sum_{j\in\overline{J}_k} \sum_{k\in\overline{K}_{sup}} (d_j^+ - d_j^-) sign\dot{E}_j(t_k) \int_{t_k}^{V_k(T_{sup}^*)} \varphi_{ij}(t)dt - g_{i-}^{+} + H(i,K)\chi(t^*) = 0, i \in I_{sup}^*, \tag{3.79}$$

on prend comme approximation initiale Q_{sup}^0, avec $I_{sup}^0 = \overline{I}_{sup}, J_{sup}^0 = \overline{J}_{sup}, T_{sup}^0 = \overline{T}_{sup}$,
(a) Calculer la $(l+1)^{\text{ème}}$ approximation, construite comme suit :

$$T_{sup}^{l+1} = T_{sup}^l + \left\{ \frac{1}{d_j^+ - d_j^-} sign\dot{E}_j(t_k)\gamma(j, t_k^l),\ j \in J_k^l,\ k \in K_{sup}^l \right\}.$$

SI $\exists i_* \in I_{sup}^l$ avec $y_{i_*}^{l+1} = 0, \gamma_i^{-l+1} \geq 0,\ \gamma_i^{+l+1} \leq 0, i \in I_H^k$, posons $Q_{sup}^{l+1} = \{I_{sup}^{l+1}, J_{sup}^{l+1}, T_{sup}^{l+1}\}$, avec $I_{sup}^{l+1} = I_{sup}^l \backslash i_*, J_{sup}^{l+1} = J_{sup}^l \backslash j_0, T_{sup}^{l+1} =$

$T^l_{sup} \backslash t_{s0}$.
SI $\exists i_* \in I^l_{sup}, y^{l+1}_{i_*} = 0, \exists i_0 \in I^k_H, \gamma^{-l+1}_{i_0} > 0, \gamma^{+l+1}_{i_0} < 0$, nous changeons le support de la manière suivante :

$$I^{l+1}_{sup} = (I^l_{sup} \backslash i_*) \cup i_0, J^{l+1}_{sup} = J^l_{sup}, T^{l+1}_{sup} = T^l_{sup}.$$

SI $\forall i \in I^l_{sup}, y^{l+1}_i \neq 0$, et $\exists i_0 \in I_H; \exists i_0 \in I^k_H, \gamma^{-l+1}_{i_0} > 0, \gamma^{+l+1}_{i_0} < 0$, posons

$$I^{l+1}_{sup} = I^l_{sup} \cup i_0, J^{l+1}_{sup} = J^l_{sup} \cup j_1, T^{l+1}_{sup} = T^l_{sup} \cup t_s.$$

(b) Calculer $\gamma^+(I^{l+1}_H)$, $\gamma^-(I^{l+1}_H)$, $\gamma^+(J^{l+1}_{sup}, T^{l+1}_{sup})$
Si les conditions (3.81) sont vérifies, posons $Q^0_{sup} = Q^{l+1}_{sup}$;
SINON changeons le support jusqu'à ce que les conditions (3.81) soient satisfaites.

(c) **SI** $Q^{l+1}_{sup} = Q^l_{sup}$, alors $Q^{l+1}_{sup} = Q^*_{sup}$ est optimal, et la quasi-commande $w^*(t),\ t \in T$ calculée par (3.47) et le support Q^*_{sup} est une commande optimale.
SINON, aller en (a).

FIN.

3.7 Exemple

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Z(u) = x_1(12) + x_2(12), \\ \dot{x_1}(t) = 0.4x_1 + 0.99u_1(t) - 1.01u_2(t) + 30, \\ \dot{x_2}(t) = 0.15x_2 - u_1(t) + u_2(t), \\ x_1(0) = 500, x_2(0) = 0, \\ x_1(12) \geq 0, \\ x_2(12) \geq 0, \\ 0 \leq u_1(t) \leq 100, \\ 0 \leq u_2(t) \leq 100;\ t \in [0, 12]. \end{array} \right. \tag{3.80}$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0.99 & -1.01 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d^+ = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix},$$

$c' = (1 \quad 1) \quad x' = (x_1 \quad x_2)$
$K = \{1,2\}\,,\ J = \{1,2\}\,,\ I = \{1,2\}.$
Soient $\varepsilon = 0.003$, $\mu = 0.0017$.

$$(B \quad AB^2) = \begin{pmatrix} 0.99 & -0.01 & 0.396 & -0.0404 \\ -1 & 1 & -0.15 & 0.15 \end{pmatrix},$$

Le système est contôlable car la matrice (B, AB^2) est de rang 2=n.
Il en résulte que :

$$S(t) = \mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} e^{0.04t} & 0 \\ 0 & e^{0.15t} \end{pmatrix}, \qquad S^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-0.04t} & 0 \\ 0 & e^{-0.15t} \end{pmatrix}.$$

Posons les commandes admissibles initiale comme suit :

$$u_1(t) = \begin{cases} 0,\ 0 \le t \le 10.2117, \\ 100,\ 10.2117 \le t \le 12. \end{cases} \quad , \quad u_2(t) = \begin{cases} 100,\ 0 \le t \le 10.2117, \\ 0,\ 10.2117 \le t \le 12. \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= HS(12)S^{-1}(t)B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.6161 & 0 \\ 0 & 6.0496 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-0.04t} & 0 \\ 0 & e^{-0.15t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.99 & -1.01 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.5999e^{-0.04t} & -1.6322e^{-0.04t} \\ -6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \bar{g}^- &= g^- - HS(12)x_0 - \int_0^{12} HS(12)S^{-1}(t)r(t)dt \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.6161 & 0 \\ 0 & 6.0496 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 462.0558 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1270.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c'(t) &= c_1 S(12)x_0 S^{-1}(t)B \\ &= (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1.6161 & 0 \\ 0 & 6.0496 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-0.04t} & 0 \\ 0 & e^{-0.15t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.99 & -1.01 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.5999e^{-0.04t} - 6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} - 1.6322e^{-0.04t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant cette solution, le problème (3.80) devient :

$$\begin{cases} \max Z(u) = 1270.1 + \int\limits_0^{12} \left(\begin{array}{cc} 1.5999e^{-0.04t} - 6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} - 1.6322e^{-0.04t} \end{array} \right) u(t)dt \\ \int\limits_0^{12} \left(\begin{array}{cc} 1.5999e^{-0.04t} & -1.6322e^{-0.04t} \\ -6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} \end{array} \right) u(t) = \left(\begin{array}{c} -1270.1 \\ 0 \end{array} \right); \\ 0 \le u_1(t) \le 100; \\ 0 \le u_1(t) \le 100, t \in [0, 12]. \end{cases}$$

Pour cette commande on a $Z(u) = 3041.5$.
Posons le support suivant :
$Q_{sup} = \{I_{sup}, J_{sup}, T_{sup}\}$, avec $I_{sup} = \{1\}$, $J_{sup} = \{1\}$, $T_{sup} = \{10.2117\}$.
D'où on aurra :

$$\begin{array}{rcl} y'(I_{sup}) & = & c'_{sup}\varphi_{sup}^{-1} \\ & = & -0.2443 * 0.9404 \\ & = & -0.02297, \end{array}$$

$$y'(I_H) = 0,$$

alors

$$y' = \left(\begin{array}{cc} -0.02297 & 0 \end{array} \right),$$

En effet :

$$\begin{array}{rcl} E' & = & y'\varphi(t) - c'(t) \\ & = & \left(\begin{array}{cc} -0.02297 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1.5999e^{-0.04t} & -1.6322e^{-0.04t} \\ -6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} \end{array} \right) \\ & & - \left(\begin{array}{cc} 1.5999e^{-0.04t} - 6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} - 1.6322e^{-0.04t} \end{array} \right) \\ & = & \left(\begin{array}{cc} 6.0496e^{-0.15t} - 1.9674e^{-0.04t} & 2.0071e^{-0.04t} - 6.0496e^{-0.15t} \end{array} \right). \end{array}$$

Par conséquent la commande de support ne vérifié pas le critère d'optimalité.
La valeur de suboptimalité $\beta(u, Q_a) = 0.008 > \varepsilon$, alors on passe au changement de commande.
Changement de commande :
Soient $\alpha = 0.0754$ et $h = 0.1$.
On a : $T_\alpha = \{t \in T, \min \mid E_j(t) \le \alpha\} \Rightarrow T_\alpha = [971.1795 \times 10^{-2}; 10.7641] = [971.1795 \times 10^{-2}; 981.1795 \times 10^{-2}[\cup [981.1795 \times 10^{-2}; 991.1795 \times 10^{-2}[\cup [991.1795 \times 10^{-2}; 1001.1795 \times 10^{-2}[\cup [1001.1795 \times 10^{-2}; 1011.1795 \times 10^{-2}[\cup [1011.1795 \times 10^{-2}; 1021.1795 \times 10^{-2}[\cup [1021.1795 \times 10^{-2}; 1031.1795 \times 10^{-2}[\cup [1031.1795 \times 10^{-2}; 1041.1795 \times$

$10^{-2}[$
$\cup[1041.1795\times10^{-2};1051.1795\times10^{-2}[\cup[1051.1795\times10^{-2};1061.1795\times10^{-2}[\cup[1061.1795\times 10^{-2};10.7641[$,
et $T_* = T \setminus T_\alpha = [0;971.1795\times10^{-2}[\cup[10.7641;12]$.
Calculons les quantités suivantes :

$$\beta_{jk} = -\int_{\tau_k}^{\tau^k} E_j(t)dt$$

$$\beta_{1k} = -\int_{\tau_k}^{\tau^k}(6.0496e^{-0.15t} - 1.9674e^{-0.04t})dt,$$

$$\beta_{2k} = -\int_{\tau_k}^{\tau^k}(2.0071e^{-0.04t} - 6.0496e^{-0.15t})dt, \forall k = \overline{1,11},$$

$$q_{jk} = \int_{\tau_k}^{\tau^k}\varphi_{jk}(t)dt$$

$$q_{1k} = \int_{\tau_k}^{\tau^k}\begin{pmatrix} 1.5999e^{-0.04t} \\ -6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}, q_{2k} = \int_{\tau_k}^{\tau^k}\begin{pmatrix} -1.6322e^{-0.15t} \\ 6.0496e^{-0.04t} \end{pmatrix}, \ \forall k = \overline{1,11}.$$

Cela permet d'aboutir au problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases}
-0.0068l_{11} - 0.0052l_{12} - 0.0037l_{13} - 0.0022l_{14} - 0.0072l_{15} + 0.00071l_{16} + \\
0.0021l_{17} + 0.0035l_{18} + 0.0049l_{19} + 0.01l_{110} + 0.0156l_{21} + 0.0153l_{22} + \\
0.0150l_{23} - 0.0147l_{24} - 0.0144l_{25} - 0.0141l_{26} - 0.0139l_{27} - 0.0136l_{28} - \\
0.0133l_{29} - 0.0199l_{210} + 0l_{11} \to \max \\
0.1083l_{11} + 0.1078l_{12} + 0.1074l_{13} + 0.1070l_{14} + 0.1066l_{15} + 0.1061l_{16} + 0.1057l_{17} + 0.1053l_{18} + \\
0.1049l_{19} + 0.1089l_{110} - 0.1105l_{21} - 0.1100l_{22} - 0.1096l_{23} - 0.1091l_{24} - 0.1087l_{25} - 0.1083l_{26} \\
-0.1078l_{27} - 0.1074l_{28} - 0.1070l_{29} - 0.1621l_{210} + 0l_{11} \leq 0, \\
0.1399l_{11} + 0.1378l_{12} + 0.1358l_{13} + 0.11337l_{14} + 0.1318l_{15} + 0.1298l_{16} + 0.1279l_{17} + 0.1260l_{18} + \\
0.1241l_{19} + 0.1854l_{110} - 0.1399l_{21} - 0.1378l_{22} - 0.1358l_{23} - 0.1337l_{24} - 0.1318l_{25} - 0.1298l_{26} \\
-0.1279l_{27} - 0.1260l_{28} - 0.1241l_{29} - 0.1854l_{210} + 0l_{11} \leq 2956.2, \\
0 \leq l_{11} \leq 100 \\
0 \leq l_{12} \leq 100 \\
0 \leq l_{13} \leq 100 \\
0 \leq l_{14} \leq 100 \\
0 \leq l_{15} \leq 100 \\
-100 \leq l_{16} \leq 0 \\
-100 \leq l_{17} \leq 0 \\
-100 \leq l_{18} \leq 0 \\
-100 \leq l_{19} \leq 0 \\
-100 \leq l_{110} \leq 0 \\
-100 \leq l_{21} \leq 0 \\
-100 \leq l_{22} \leq 0 \\
-100 \leq l_{23} \leq 0 \\
-100 \leq l_{24} \leq 0 \\
-100 \leq l_{25} \leq 0 \\
0 \leq l_{26} \leq 100 \\
0 \leq l_{27} \leq 100 \\
0 \leq l_{28} \leq 100 \\
0 \leq l_{29} \leq 100 \\
0 \leq l_{210} \leq 100 \\
0 \leq l_{11} \leq 1
\end{cases}$$

La solution optimale est :
$l' = (0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ -100.0000\ -100.0000\ -100.0000\ -100.0000\ -79.1824\ -100.0000\ -100.0000\ -100.0000\ -100.0000\ -100.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0.0000\ 0)$,
avec $\bar{I} = \{1\}$;$\bar{J} = \{1\}$; $\bar{T_{sup}}\{1061.1795 \times 10^{-2}\}$, donc la nouvelle commande $\bar{u}$ est :

$$\bar{u_1}(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1061.1795 \times 10^{-2} \\ 20.8176 & 1061.1795 \times 10^{-2} \leq t \leq 10.7641 \\ 100 & 10.7641 \leq t \leq 12 \end{cases},$$

$$\bar{u_2}(t) = \begin{cases} 100 & 0 \le t \le 971.1795 \times 10^{-2} \\ 0 & 971.1795 \times 10^{-2} \le t \le 0.72 \end{cases}$$

la nouvelle commande de support est $\left\{\bar{u}, \widetilde{Q}_{sup}\right\}$ avec :
$\widetilde{Q}_{sup} = \left\{\widetilde{I}_{sup}, \widetilde{J}_{sup}, \widetilde{T}_{sup}\right\}$, avec $\widetilde{I}_{sup} = \{1\}$,$\widetilde{J}_{sup} = \{1\}$, $\widetilde{T}_{sup} = \{1061.1795 \times 10^{-2}\}$
En effet :

$$\begin{aligned} \widetilde{y'}(I_{sup}) &= c'_{sup}\widetilde{\varphi}_{sup}^{-1} \\ &= -0.1850 * 0.9555 \\ &= -0.17685 \end{aligned}$$

$$\widetilde{y'}(I_H) = 0,$$

alors

$$\widetilde{y'} = \begin{pmatrix} -0.17685 & 0 \end{pmatrix},$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \widetilde{E'} &= \widetilde{y'}\widetilde{\varphi}(t) - c'(t) \\ &= \begin{pmatrix} -0.17685 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5999e^{-0.04t} & -1.6322e^{-0.04t} \\ -6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 1.5999e^{-0.04t} - 6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} - 1.6322e^{-0.04t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6.0496e^{-0.15t} - 1.9674e^{-0.04t} & 2.0071e^{-0.04t} - 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En effet :
$\beta(\bar{u}, \widetilde{Q}_{sup}) = 0.004 > 0.003.$
Soit la quasi-commande :

$$w_1(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \le t \le 1061.1795 \times 10^{-2}, \\ 100 & , 1061.1795 \times 10^{-2} \le t \le 12, \end{cases} ,$$

$$w_2(t) = \begin{cases} 100 & , 0 \le t \le 1061.1795 \times 10^{-2}, \\ 0 & , 1061.1795 \times 10^{-2} \le t \le 12, \end{cases}$$

avec sa trajectoire correspondante $\chi(t)$ à l'instant t^*

$$\dot{\chi} = A\chi + Bw + r(t)$$

$$\chi(t^*) = \begin{pmatrix} -0.0018 \\ 3057.8 \end{pmatrix}.$$

Calculons $\gamma(\widetilde{J}_{sup}, \widetilde{T}_{sup}) = 6.9620 \times 10^{-4}$, alors on aurra $\|\gamma\| = 6.9620 \times 10^{-4} \leq 0.0017$.
Pour cela passons à la procédure finale.
Procédure finale
Posons $T^0_{sup} = \{1061.1795 \times 10^{-2}\}$, grâce à la $l^{éme}$ approximations on calcule $l^{éme} + 1$ approximation comme suit :
$T^{l+1}_{sup} = T^l_{sup} + \left\{\frac{1}{d^+_j - d^-_j} sign\dot{E}_j(t_k)\gamma(j, t^l_k),\ j \in J^l_k,\ k \in K^l_{sup}\right\}$.
D'où on aurra :
$T^1_{sup} = \{10.6118\}$, $\chi(t^*) = \begin{pmatrix} -0.0018 \\ 3057.8 \end{pmatrix}$, et $\gamma(\widetilde{J}_{sup}, \widetilde{T}_{sup}) = 0.0017$, on a $\|\gamma\| = 0.0017$, d'où on aurra :
$T^l_{sup} = \{10.6118\}$, en effet $T^1_{sup} = T^2_{sup}$. Donc le support Q^*_{sup} avec $T^*_{sup} = T^2_{sup}$ est le support optimal, et la quasi commande :

$$w_1(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq 10.6118, \\ 100 & , 10.6118 \leq t \leq 12, \end{cases} \quad , \quad w_2(t) = \begin{cases} 100 & , 0 \leq t \leq 10.6118, \\ 0 & , 10.6118 \leq t \leq 12, \end{cases}$$

est admissible,donc elle est optimale.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié une méthode adaptée pour la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec contraintes inégalités et commande vectorielle. Cette méthode se base sur trois procédures essentielles : i) changer la commande u par $\overline{u}$ d'une manière à diminuer la mesure de non optimalité de la commande ; ii) changer le support Q_{sup} par $\overline{Q}_{sup}$ de telle sorte que la mesure de non optimalité de support sera diminuée ; iii) procédure finale, qui consiste à rendre la quasi-commande w à la fois réalisable et optimale.

Conclusion Générale

L'objectif de ce travail est de présenter une méthode numérique en contrôle optimale, cette méthode consiste à chercher une commende optimale qui pouvait nous ramener d'un état initial x_0 vers d'un état final.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressées à la théorie de contrôle optimal où nous avons présenté certains éléments de base de cette théorie, en portant un intérêt particulier à la contrôlabilité et la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires.

Ensuite nous avons consacré une partie pour la présentation de principe du maximum de Pontryaguin. La résolution du problème de contrôle optimale consiste à utiliser le principe de maximum de Pontryaguin, qui est une condition nécessaire d'optimalité. Dans le cas les fonctionnelles sont concave ou affine ce principe nous donne une condition suffisante d'optimalité.

Enfin nous avons exposé la méthode adaptée pour la résolution d'un problème de contrôle optimal avec commande vectoriel et contrainte d'inégalité, l'algorithme de résolution se base sur trois procédures essentielles : changement de commande qui consiste à diminuer la non optimalité de la commande en trouvant une autre commande admissible ; procédure finale qui cherche un support qui rend la quasi-commande réalisable et optimale.

Annexe A

Méthode adaptée de Programmation Linéaire avec contraintes généralisées

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode adaptée développée par R. Gabassov et F.M.Kirillova pour un problème de programmation linéaire avec contraintes inégalités. Cette méthode est une généralisation de la méthode du simplexe. Elle utilise une métrique différente de celle du simplexe, dite adaptée, qui consiste à considérer tous les indices non optimaux en fonction desquels on construit une direction d'amélioration de la fonction objectif, et le pas le long de cette direction.

A.1 Position du problème

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} Z(x) = c'x \longrightarrow \max, \\ b^- \leq Ax \leq b^+, \\ d^- \leq x \leq d^+. \end{cases} \tag{A.1}$$

où c, x, d^-, d^+ sont des vecteurs de dimension n ;
$b^-,\ b^+$ est un vecteur de dimension m ;
A est une matrice d'ordre $(m \times n)$, avec $rang\ A = m < n$.
Définissons les ensembles d'indices suivants :
$I = \{1, 2, \ldots, m\},\ J = \{1, 2, \ldots, n\}$;
$J = J_{sup} \cup J_N,\ J_{sup} \cap J_N = \emptyset,\ I = I_{sup} \cup I_N,\ I_{sup} \cap I_N = \emptyset,\ |I_{sup}| = |J_{sup}| \leq m.$
Nous pouvons alors écrire et fractionner les vecteurs de la manière suivante :

$d^- = d^-(J) = (d_j^-, j \in J), \quad d^+ = d^+(J) = (d_j^+, j \in J)\,;$
$b^- = b^-(J) = (b_j^-, j \in J), \quad b^+ = b^+(J) = (b_j^+, j \in J)\,;$
$x = x(J) = (x_j, j \in J), x = (\frac{x_{sup}}{x_N}), x_{sup} = x(J_{sup}) = (x_j, j \in J_{sup}), x_N = x(J_N) = (x_j, j \in J_N)\,;$
$c = c(J) = (c_j, j \in J), c = (\frac{c_{sup}}{c_N}), c_{sup} = c(J_{sup}) = (c_j, j \in J_{sup}), c_N = c(J_N) = (c_j, j \in J_N)\,;$
$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = (a_i', i \in I)$, où $a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$.

Appelons l'ensemble I_{sup} pour lequel les vecteurs $a_i', i \in I_{sup}$, sont linéairement indépendants, ensemble de travail, et notons $A(I_{sup}, J)$ la matrice correspondante. Une contrainte d'indice $i \in I$, est dite active au point x si l'une des égalités suivantes est vérifié :

$$a_i'x = b_i^- \text{ ou } \quad a_i'x = b_i^+. \tag{A.2}$$

Construisons alors l'ensemble d'indices des contraintes actives au point x noté $I_a = I_a^- \cup I_a^+$, avec :

$$I_a^- = \{i, a_i'x = b_i^-\}, \tag{A.3}$$

$$I_a^+ = \{i, a_i'x = b_i^+\}. \tag{A.4}$$

Soit l'ensemble des solutions réalisables (ensemble des contraintes) :

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n / \ b^- \leq Ax \leq b^+, \ d^- \leq x \leq d^+\right\}.$$

Définition A.1.

Un vecteur x vérifiant les contraintes générales $b^- \leq Ax \leq b^+$ et les contraintes simples $d^- \leq x \leq d^+$ est appelé *plan* ou *solution réalisable* du problème (A.1). Le problème (A.1) consiste à trouver un plan optimal $x^0 \in X$, tel que :

$$Z(x^0) \geq Z(x), \forall x \in X, \ \Leftrightarrow Z(x^0) = \max_{x \in X} Z(x).$$

Définition A.2.

Soit ε un nombre positif ou nul choisi à l'avance, un plan x^ε est appelle ε-*optimal* ou *suboptimal* si :

$$Z(x^0) - Z(x^\varepsilon) = c'x^0 - c'x^\varepsilon \leq \varepsilon,$$

où x^0 est une solution optimale. Choisissons dans l'ensemble I le sous-ensemble I_{sup}, et soit un sous-ensemble d'indices $J_{sup} \in J$ tel que $\mid J_{sup} \mid = \mid I_{sup} \mid \leq m$. L'ensemble $Q_{sup} = (I_{sup}, J_{sup})$ est appelé support du problème (A.1) si la sous-matrice $A_{sup} = A(I_{sup}, J_{sup})$ est inversible.

Définition A.3.

La paire $\{x, Q_{sup}\}$ formé du plan x et du support Q_{sup} est appelée plan de support ou bien solution réalisable de support.
Le plan de support $\{x, Q_{sup}\}$ est dit non dégénéré si :

$$\begin{cases} d_j^- < x_j < d_j^+, & j \in J_{sup}, \\ b_i^- < a_i' x < b_i^+, & i \in I_N. \end{cases} \tag{A.5}$$

A.2 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{x, Q_{sup}\}$ un plan de support et considérons un autre plan quelconque $\overline{x} = x + \Delta x$.
L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$\Delta Z = Z(\overline{x}) - Z(x) = c'\overline{x} - c'x = c'\Delta x. \tag{A.6}$$

Définissons le vecteur des potentiels u donné par :

$$u' = u'(I_{sup}) = c'_{sup} A_{sup}^{-1}, \tag{A.7}$$

ainsi que le vecteur des estimations E donné par :

$$E' = E'(J) = u' A(I_{sup}, J) - c', \tag{A.8}$$

où :

$$E' = (E'_{sup}, E'_N), \text{ avec } E'_{sup} = u' A_{sup} - c'_{sup} = 0 \text{ et } E'_N = u' A_N - c'_N.$$

En vertu des définitions (A.7) et (A.8), la formule d'accroissement (A.6) prend la forme suivante :

$$\Delta Z = (u' A(I_{sup}, J_N - E'(J_N))\Delta x(J_N) + u' A_{sup} \Delta x(J_{sup}). \tag{A.9}$$

Par ailleurs, on a :

$$b^- \leq A\overline{x} \leq b^+ \Rightarrow b^- \leq A(x + \Delta x) \leq b^+ \Rightarrow b^- - Ax \leq A\Delta x \leq b^+ - Ax. \tag{A.10}$$

Notons :

$$\delta^- = b^- - Ax,$$

$$\delta^+ = b^+ - Ax$$

et

$$z(I_{sup}) = A(I_{sup}, J_{sup})\Delta x(J_{sup}) + A(I_{sup}, J_N)\Delta x(J_N), \tag{A.11}$$

avec

$$\delta^-(I_{sup}) \leq z(I_{sup}) \leq \delta^+(I_{sup}). \tag{A.12}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\Delta x(J_{sup}) = A_{sup}^{-1} z(I_{sup}) - A_{sup}^{-1} A(I_{sup}, J_{sup})\Delta x(J_N). \tag{A.13}$$

Grâce à ces notations, l'accroissement (A.9) devient :

$$\Delta Z = -E'(J_N)\Delta x(J_N) + u' z(I_{sup}). \tag{A.14}$$

A.3 Estimation de suboptimalité

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(x)$ d'un plan de support quelconque, remplaçons dans la formule d'accroissement (A.6) le vecteur $\overline{x}$ par x^0 :

$$\begin{aligned} Z(x^0) - Z(x) &= -E'(J_N)(x^0(J_N) - x(J_N)) + u' z^0(I_{sup}) \\ &= \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - x_j^0) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - x_j^0) + \\ &\quad \sum_{u_i > 0, i \in I_{sup}} u_i z_i^0 + \sum_{u_i < 0, i \in I_{sup}} u_i z_i^0, \end{aligned}$$

avec

$$z_i^0(I_{sup}) = A(I_{sup}, J_{sup})(x^0(J_{sup}) - x(J_{sup})) + A(I_{sup}, J_N)(x^0(J_{sup}) - x(J_N)).$$

Puisque le plan optimal x^0 vérifie $d^- \leq x_j^0 \leq d^+,\ j \in J$, il en résulte que :

$$x_j - x_j^0 \leq x_j - d_j^-,$$

$$x_j - x_j^0 \geq x_j - d_j^+,$$

d'où :

$$E_j(x_j - x_j^0) \leq E_j(x_j - x_j^0), \text{ si } E_j > 0,$$

$$E_j(x_j - x_j^0) \leq E_j(x_j - x_j^0), \text{ si } E_j < 0.$$

En outre, d'après la relation (A.12) on a :

$$\delta_i^- \leq z_i^0 \leq \delta_i^+,\ i \in I_{sup},$$

d'où

$$\begin{cases} u_i z_i^0 \leq u_i \delta_i^+, & \text{si} \quad u_i > 0, \\ u_i z_i^0 \leq u_i \delta_i^-, & \text{si} \quad u_i < 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient une majoration de l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(x)$, qui est donnée par :

$$\begin{aligned} Z(x^0) - Z(x) \quad \leq \quad & \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+) + \\ & \sum_{u_i > 0, i \in I_{sup}} u_i \delta_i^+ + \sum_{u_i < 0, i \in I_{sup}} u_i \delta_i^-. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Le nombre $\beta(x, Q_{sup})$ défini par (A.16), est appelé *estimation de suboptimalité* du plan de support $\{x, Q_{sup}\}$:

$$\beta(x, Q_{sup}) \quad \leq \quad \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+) + \sum_{u_i > 0, i \in I_{sup}} u_i \delta_i^+ + \sum_{u_i < 0, i \in I_{sup}} u_i \delta_i^-. \tag{A.16}$$

A.4 Critère d'optimalité et de suboptimalité

Donnons les deux théorèmes suivants :

Théorème A.1. [1]

$\{x, Q_{sup}\}$ un plan de support du problème (A.1). Alors les relations

$$\begin{cases} E_j(t) \geqslant 0, \text{si} \quad x_j = d_j^-, \\ E_j(t) \leqslant 0, \text{si} \quad x_j = d_j^+, \\ E_j(t) = 0, \text{si} \quad d_j^- \leqslant x_j (\leqslant d_j^+, \ j \in J_N; \\ \\ u_i \geq 0, \text{si} \quad a_i' x = b_i^+, \\ u_i \leq 0, \text{si} \quad a_i' x = b_i^-, \\ u_i = 0, \text{si} \quad b_i^- \leq a_i' x \leq b_i^+, \ i \in I_{sup}, \end{cases} \tag{A.17}$$

sont suffisantes pour l'optimalité du plan x, et ces mêmes relations sont aussi nécessaires dans le cas où le plan de support $\{x, Q_{sup}\}$ est non dégénéré.

Théorème A.2 (Condition suffisantes de suboptimalité)**.**

Soit $\{x, Q_{sup}\}$ un plan de support du problème (A.1), et $\varepsilon \geq 0$ un nombre positif arbitraire. Si $\beta(x, Q_{sup}) \leq \varepsilon$, alors le plan x est suboptimal(ε-optimal).

1. R.Gabasov, F.M.Kirillova, Méthode de la programmation linéaire, Partie 3, BSU LÉNINE, 1980.

A.5 Algorithme de la méthode

Étant donné un nombre réel positif ou nul quelconque ε et un plan de support initial $\{x, Q_{sup}\}$, le but de l'algorithme est alors de construire un plan ε-optimal x^ε ou carrément un plan optimal x^0. Une itération de la méthode adaptée se base sur le principe de diminution de l'estimation de suboptimalité. En d'autres termes, elle consiste à faire le passage de $\{x, Q_{sup}\}$ à $\{\overline{x}, \overline{Q}_{sup}\}$ tel que $\beta(\overline{x}, \overline{Q}_{sup}) < \beta(x, Q_{sup})$. Ainsi, ce principe se réalise en deux procédures :

- changer la solution réalisable x par $\overline{x}$ de manière à diminuer la mesure de non optimalité du plan, $\beta(\overline{x}) < \beta(x)$;
- changer le support Q_{sup} par $\overline{Q}_{sup}$ de telle sorte que la mesure de non optimalité du support sera diminué $\beta(\overline{Q}_{sup}) \leq \beta(Q_{sup})$ où $\beta(x, Q_{sup}) = \beta(\overline{Q}_{sup}) + \beta(Q_{sup})$

A.5.1 Changement du plan

Construisons le nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \theta l,$$

où l est la direction d'amélioration, et $\theta \geq 0$ le pas le long de cette direction.

Construction d'une direction d'amélioration adaptée

Considérons la métrique suivante pour les composantes non basiques de la direction admissible l :

$$d_j^- - x_j \leq l_j \leq d_j^+ - x_j, \ j \in J_N. \tag{A.18}$$

Cette métrique dépend du plan courant x, et de ce fait, elle est dite adaptée.
Les composantes (A.18) se calculent en rendant maximal l'accroissement de la fonction objectif dans l'espace des variables non basiques.

Ainsi, en tenant compte de la métrique (A.18), l'accroissement de la fonction objectif atteint son maximum pour les valeurs des composantes non basiques suivantes :

$$l_j = \begin{cases} d_j^- - x_j & \text{si} \quad E_j > 0 \\ d_j^+ - x_j & \text{si} \quad E_j < 0 \\ 0 & \text{si} \quad E_j = 0, \ j \in J_N. \end{cases} \tag{A.19}$$

En outre, l'accroissement de la fonction objectif atteint son maximum pour les composantes basiques calculées par la formule :

$$A(I_{sup}, J)l = \delta, \tag{A.20}$$

où δ est donné par :

$$\delta_i = \begin{cases} \delta_i^- & \text{si} \quad u_i > 0, \\ \delta_i^+ & \text{si} \quad u_i < 0, \\ 0 & \text{si} \quad u_i = 0, \ i \in I_{sup}. \end{cases} \tag{A.21}$$

Ainsi, nous aurons :

$$l(J_{sup}) = A_{sup}^{-1}\delta(I_{sup}) - A_{sup}^{-1}A(I_{sup}, J_N)l_(J_N). \tag{A.22}$$

Calcul du pas maximal θ^0

Construisons un nouveau plan $\bar{x}$ sous la forme :

$$\overline{x} = x + \theta^0 l,$$

où l est la direction d'amélioration défini par (A.19) et (A.22) et le nombre θ^0 est le pas le long de cette direction ; ce dernier se calcule de façon à ce que les contraintes directes et principales soient satisfaites pour $\bar{x}$, i.e, pour les contraintes directes on doit avoir :

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_j \leq d_j^+ - x_j, \ \ j \in J_{sup}, \tag{A.23}$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N. \tag{A.24}$$

Des inégalités (A.19) et (A.24), nous déduisons que

$$\theta^0 \leq 1, \tag{A.25}$$

En outre, pour satisfaire les contrainte (A.23), on doit choisir θ^0 tel que :

$$\theta^0 \leq 1, \tag{A.26}$$

où

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{l_j} & \text{si } l_j > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{l_j} & \text{si } l_j < 0, \\ \infty & \text{si } l_j = 0. \end{cases} \tag{A.27}$$

D'autre part, θ^0 doit vérifier les inégalités suivantes pour satisfaire les contraintes principales pour $\bar{x}$:

$$\delta_i^- \leq a_i'\theta l \leq \delta_i^+, \ \ i \in I_{sup}, \tag{A.28}$$

$$\delta_i^- \leq a_i'\theta l \leq \delta_i^+, \ \ i \in I_N. \tag{A.29}$$

De (A.20), on voit bien que l'inégalité (A.28) est vérifiée pour $\theta^0 \leq 1$.
Ainsi, il reste à satisfaire les contraintes (A.29). Pour cela, nous choisissons θ_0 de la manière suivante :

$$\theta^0 \leq \theta_{i_1}, \qquad \theta_{i_1} = \min_{i \in I_H} \theta_i \tag{A.30}$$

où :

$$\theta_i = \begin{cases} \frac{\delta^+}{a_i' l} & \text{si } a_i' l > 0, \\ \frac{\delta^-}{a_i' l} & \text{si } a_i' l < 0, \\ \infty & \text{si } a_i' l = 0. \end{cases} \tag{A.31}$$

De (A.25), (A.26) et (A.30), la valeur θ_0 sera choisie par la relation $\theta_0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{i_1}\}$ Ce choix va nous assurer que lors du déplacement le long de la direction l, les contraintes (A.28), (A.29), (A.23) et (A.24) ne seront pas violées, i.e, il va nous garantir l'admissibilité du nouveau plan $\bar{x}$. Dans ce cas, l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(\bar{x})$ sera majoré comme suit :

$$Z(x^0) - Z(\overline{x}) = c'x^0 - c'\overline{x} = c'x^0 - c'x - \theta^0 c'l \leq \beta(x, Q_{sup}) - \theta^0 c'l, \tag{A.32}$$

de plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \beta(x, Q_{sup}) - \theta^0 c'l &= \beta(x, Q_{sup}) - \theta^0(u'A(I_{sup}, J)) - E')l(J) \\ &= \beta(x, Q_{sup}) + \theta^0(E'l - u'\delta(I_{sup})) \\ &= \beta(x, Q_{sup}) - \theta^0 \beta(x, Q_{sup}) = (1 - \theta^0)\beta(x, Q_{sup}). \end{aligned}$$

Finalement, nous aurons :

$$Z(x^0) - Z(\overline{x}) \leq (1 - \theta^0)\beta(x, Q_{sup}), \tag{A.33}$$

De là, trois cas peuvent se présenter :
- $\theta^0 = 1$, le plan $\overline{x} = x + l$ vérifie les critères d'optimalité, il est donc optimal, et le processus de résolution du problème (A.1) est donc terminé ;
- $(1 - \theta^0)\beta(x, Q_{sup}) \leq \varepsilon$, le plan $\overline{x}$ est donc ε-optimal (suboptimal) et le processus de résolution du (A.1) peut être arrêter ;
- $(1 - \theta^0)\beta(x, Q_{sup}) > \varepsilon$, on abordera la procedure du changement de support.

A.5.2 Changement de support

Afin d'améliorer la mesure de non optimalité du support $\beta(Q_{sup})$, construisons une iteration de la méthode duale du support.
Introduisons le problème dual du problème (A.1) :

$$\begin{cases} L(\lambda) = b^{+'}s - b^{-'}t - d^{-'}v + d^{+'}w \longrightarrow \min \\ A'y - v + w = c, \\ s - t - y = 0, \\ s \geq 0, t \geq 0, v \geq 0, w \geq 0. \end{cases} \tag{A.34}$$

A cette effet, à chaque opération faisons correspondre au plan de support $\{x, Q_{sup}\}$, un coplan $\delta = E$ et un plan dual $\lambda(y, s, t, v, w)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} y(I_{sup}) = u, \quad y(I_N) = 0, & \\ s_i = y_i, t_i = 0, & si \;\; y_i \geq 0, \\ s_i = 0, t_i = -y_i, & si \;\; y_i < 0, \quad i \in I; \\ v_j = E_j, w_j = 0, & si \;\; E_j \geq 0, \\ v_j = 0, w_j = -E_j, & si \;\; E_j < 0, j \in J. \end{cases} \tag{A.35}$$

On fera remarquer que le plan dual λ et son coplan correspondant $\delta = E$ dépend uniquement du support Q_{sup}.
Montrons alors que l'estimation de suboptimalité se décompose ainsi :

$$\beta(x, Q_{sup}) = \beta(x) + \beta(Q_{sup}), \tag{A.36}$$

avec :

$$\beta(x) = c'x^0 - c'x; \tag{A.37}$$

$$\beta(Q_{sup}) = L(\lambda) - L(\lambda^0) = b^{+'}s - b^{-'}t - d^{-'}v + d^{+'}w - b^{+'}s^0 + b^{-'}t^0 + d^{-'}v^0 - d^{+'}w^0. \tag{A.38}$$

Où x^0 et $\lambda^0 = (y^0, s^0, t^0, v^0, w^0)$ sont des solutions optimales du problème (A.1) et (A.34) respectivement.
Grace aux relations (A.35) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \beta(x, Q_a) &= \sum_{j \in J} E_j x_j - \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j d_j^- - \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j d_j^+ - \sum_{i \in I_{sup}} u_i a_i' x + \\ &\quad \sum_{u_i < 0, i \in I_{sup}} u_i b_i^- + \sum_{u_i > 0, i \in I_{sup}} u_i b_i^+ \\ &= [u'A(I_{sup}, J) - c']x - d^{-'}v + d^{+'}w - u'A(I_{sup}, J)x + b^{+'}s - b^{-'}t \\ &= -c'x + d^{-'}v + d^{+'}w + b^{+'}s - b^{-'}t. \end{aligned}$$

De la relation $Z(u^0) = L(\lambda^0)$, la valeur de suboptimalité peut être décomposée comme suit :

$$\begin{aligned} \beta(x, Q_a) &= -c'x + d^{-'}v + d^{+'}w + b^{+'}s - b^{-'}t + Z(u^0) - L(\lambda^0) \\ &= (c'x^0 - c'x) + (b^{+'}s - b^{-'}t - d^{-'}v + d^{+'}w - b^{+'}s^0 + b^{-'}t^0 + d^{-'}v^0 - d^{+'}w^0) \\ &= \beta(x) + \beta(Q_{sup}). \end{aligned}$$

Ainsi, pour diminuer la valeur de $\beta(Q_{sup})$, effectuons une itération de la méthode dual du support, en Construisant une nouvelle solution réalisable $\overline{\lambda}$ avec son coplan $\overline{\delta} = E(Q_{sup})$ correspondant d'une manière à avoir $\beta(\overline{Q}_{sup}) \leq \beta(Q_{sup})$.
En effet, Les changements de support se produisent de la manière suivante :

– Pour $\theta^0 = \theta_{i_1} < 1$, on posera :

$$\alpha = a'_{i_1} l, \tag{A.39}$$

et

$$\sigma^0 = \min\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}, \tag{A.40}$$

avec :

$$\sigma_{i_0} = min\sigma_i, i \in I_{sup}; \tag{A.41}$$

et

$$\sigma_{j_0} = min\sigma_j, j \in J_N. \tag{A.42}$$

Les quantités σ_j, σ_i sont données par :

$$\sigma_j = \begin{cases} \frac{-E_j}{z_j} & \text{si } E_j z_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_i = 0, z_i > 0, x_j \neq d_j^-, \quad \text{ou} \quad \text{bien} \\ & \quad E_i = 0, z_i < 0, x_j \neq d_j^+, \quad j \in J_N; \\ \infty & \text{sinon;} \end{cases} \tag{A.43}$$

$$\sigma_i = \begin{cases} \frac{-u_i}{z_i}, & \text{si } u_i z_i < 0, \\ 0, & \text{si } u_i = 0, z_i > 0, i \in I_a^+, \quad \text{ou} \quad \text{bien} \\ & u_i = 0, z_i < 0, i \in I_a^-, \quad i \in I_{sup}, \\ \infty, & \text{sinon,} \end{cases} \tag{A.44}$$

où :

$$z'(J_N \cup I_{sup}) = ke'_{i_1}\{A(I_N, J_N) - A(I_N, J_{sup})A_{sup}^{-1}A(I_{sup}, J_N),\ -A(I_N, J_{sup})A_{sup}^{-1}\}, \tag{A.45}$$

$$k = \begin{cases} 1, & \text{si } a'_{i_1}\overline{x} = b_{i_1}^+, \\ -1 & \text{si } a'_{i_1}\overline{x} = b_{i_1}^-, \end{cases} \tag{A.46}$$

et e_{i_1} est un vecteur unitaire dont la composante i_1 vaut 1.

– Pour $\theta^0 = \theta_{J_1} < 1$, on posera :

$$\alpha = l_{j_1}. \tag{A.47}$$

Construisons les quantités σ^0, σ_i et σ_j de la même manière que le cas précédent, avec

$$z'(J_N \cup I_{sup}) = ke'_{j_1}\{A_{sup}^{-1}A(I_{sup}, J_N),\ A_{sup}^{-1}\}, \tag{A.48}$$

avec :

$$k = \begin{cases} 1, & \text{si } \overline{x} = d_{j_1}^-, \\ -1 & \text{si } \overline{x} = d_{j_1}^+; \end{cases} \tag{A.49}$$

et e_{j_1} est un vecteur unitaire dont la composante j_1 vaut 1.

Pour la construction du nouveau support, considérons les quatre cas suivants :

1. Pour $\theta^0 = \theta_{i_1} < 1$, $\sigma^0 = \sigma_{i_0}$, nous construisons un nouveau support $\overline{Q}_{sup}$ avec :
$$\overline{I}_{sup} = (I_{sup} \setminus i_0) \cup i_1, \quad \overline{J_{sup}} = J_{sup}; \tag{A.50}$$
2. Pour $\theta^0 = \theta_{i_1} < 1$, $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$, le nouveau support sera $\overline{Q}_{sup}$:
$$\overline{I}_{sup} = I_{sup} \cup i_1, \quad \overline{J_{sup}} = J_{sup} \cup j_0; \tag{A.51}$$
3. Pour $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$, $\sigma^0 = \sigma_{i_0}$, le nouveau support devient :
$$\overline{I}_{sup} = I_{sup}\text{ß}_0, \quad \overline{J_{sup}} = J_{sup}\text{æ}_1; \tag{A.52}$$
4. Pour $\theta^0 = \theta_{j_1} < 1$, $\sigma^0 = \sigma_{j_0}$, le nouveau support devient :
$$\overline{I}_{sup} = I_{sup}, \quad \overline{J_{sup}} = (J_{sup} \setminus j_1) \cup j_0; \tag{A.53}$$

Ce changement de support va nous donner une autre majoration de l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(x)$:

$$Z(x^0) - Z(x) \leq \overline{\beta} = (1 - \theta^0)(\beta(x, Q_{sup}) - \sigma^0|\alpha|), \tag{A.54}$$

où :

$$\alpha = \begin{cases} \alpha = a'_{i_1} l, & si \quad \theta^0 = \theta_{i_1}, \\ \alpha = l_{j_1}, & si \quad \theta^0 = \theta_{j_1}. \end{cases} \tag{A.55}$$

Ainsi, si $\overline{\beta} < \varepsilon$, le plan $\overline{x}$ est ε-optimal, donc on arrête l'algorithme. Par ailleurs, si $\overline{\beta} > \varepsilon$ nous recommençons une nouvelle itération avec le couple $\{\overline{x}, \overline{Q}_{sup}\}$.

Conclusion

La méthode que nous avons présentée a la particularité de tenir compte des spécificités des problèmes tels qu'ils sont formulés lors de leurs modélisations premières.
Cette méthode se base sur deux procédures essentielles :i)changer la solution réalisable x par $\overline{x}$ d'une manière à diminuer la mesure de non optimalité du plan, $\beta(\overline{x}) \leq \beta(x)$; ii) changer le support Q_{sup} par $\overline{Q_{sup}}$ de tel sorte que la mesure de non optimalité de support sera diminuée. En outre, elle utilise une métrique dite adaptée pour la direction d'amélioration, sa particularité est le fait de changer tous les indices non optimaux à la fois.

Table des figures

Bibliographie

[1] M.Azi, Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire et application en économie financière, Mémoire de magister, Université A. Mira de Béjaia, 2010.

[2] Ch.Bennani, Stabilisation et estimation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires et applications, Mémoire de magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2011.

[3] M.Bergounioux, Optimisation et contrôle des systèmes linéaires, Dunod, Collection Sciences Sup, 2001.

[4] M.O.Bibi, Optimization of a linear dynamic system with double terminal constraint on the trajectories, Optimization, 1994, 30 : 359 - 366.

[5] M.O. Bibi, Support Method for Solving a Linear-Quadratic Problem with Polyhedral Constraints on Control, Optimization. 1996, 37 : 139 - 147.

[6] M.O.Bibi and S.Medjdoub, Optimization of a linear-quadratic problem of optimal control with free initial condition, 26-th European Conference on Operational Research, EURO'13, Rome, Italy, July 01-04, (2013), Book of Abstracts : 262.

[7] S.Boukouira, I.Metaai, Optimisation D'un Système Dynamique, Mémoire de mastre, Centre universitaire de Mila, 2013.

[8] A.Bouteffous, I.Guessoum , Méthode adaptée pour la résolution d'un problème de Contrôle optimal, Mémoire de mastre, Centre universitaire de Mila, 2015.

[9]

[10] D.Burghes, A.graham, Control and optimal control theories with applications, England, 1980.

[11] M. G.Crandall , P. L.Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 277, 1983, 1–42.

[12] R.Gabasov et F. M.Kirillova, Constructive Theory of Extremal problems, University Press, Minsk, 1984.

[13] R.Gabasov et F. M.Kirillova, Methods of linear programing, vol.3, University press, Minsk, 1980.

[14] R.Gabasov et F. M.Kirillova et N.S.Pavlenok, Constructing Open-Loop and Closed-Loop Solutions of Linear-Quadratic Optimal Control Problems, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2008, 48(10) : 1715-1745.

[15] R.Gabasov, F.M.Kirillova et S.V.Prischepova, Optimal Feedback Control, Springer-Verlag, London, 1995.

[16] R. V.Gamkrelidze, Discovery of the maximum principle, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 5, no. 4, 1999, 437-451.

[17] O.Hilton ,P.M.kort et P.J.J.M. loon Dynamic Policies of a Firm : An Optimal Control Approach, Berlin, Springer, 1993.

[18] L. M.Hocking, Optimal control, an introduction to the theory with applications, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1991.

[19] G.Knowles,An Introduction to Applied Optimal Control, University of Southern California, New York, 1981.

[20] G. Leitmann , An introduction to optimal control, McGraw-Hill Book Company, 1966.

[21] C.Lobry , T.Sari, Introduction à la théorie du contrôle, INRIA Sophia Antipolis, Laboratoire de Mathématiques, 2004.

[22] K.Louadj , Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal, Mémoire de Doctorat, TIZI OUZOU, 2012.

[23] N.Moussouni, Controle optimal : Optimisation d'une production céréalière, thèse en cotutelle internationale, Université de Tizi-Ouzou, 2012.

[24] D. Ouidja, Principe du maximum et méthode de Tir, Mémoire de Magister, TIZI-OUIZOU, 2011.

[25] P.Pedregal,Introduction to Optimization,Springer-New York, 1963.

[26] L.Pontryagin, V.Boltyanski , R.Gamkrelidze , E. Michtchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, L. W. Neustadt, New York, 1962.

[27] R.Pytlak, Numerical Methods for Optimal Control Problems with State Constraints. -Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[28] E.Trélat, Contrôle Optimal : théorie et application, Vuibert, collection Mathématique concrêtes, Paris, 2005

[29] E.Trélat, Contrôle Optimal. Notes de Cours, Master de Mathématiques, Université d'Orléans, 2008.

Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudier une méthode de contrôle, dite adaptée pour une classe des problèmes de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec contrôle vectoriel et contraintes d'inégalité. Dans ce travail, nous présentons une méthode numérique itérative qui évite la discrétisation du système dynamique. Le problème est réduit pour chaque itération à un programme linéaire, dont la solution permet d'améliorer la valeur du critère. Le processus est répété jusqu'à ce que la valeur optimale ou suboptimale est obtenu.

Mots clés :Contrôle optimal, contrôlabilité, Principe du Maximum, Méthode adaptée , Commande de support.

Abstract

In this paper, we present an adaptive method for solving an optimal control problem with inequality constraints and vector control. The particularity of this method is the fact that it avoids the preliminary transformation of the initial problem and it has a suboptimal criterion which stops the algorithm with the desired accuracy. This iterative numerical method avoids the discretization of the dynamical system. The problem is reduced for each iteration to a linear programming problem, whose the solution allows to improve the value of the quality criterion. The process is repeated until the optimal or the suboptimal control is obtained.

Keywords :Optimal control, controllability, Maximum Principle, Adaptive method, support.