الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالــي والبحــث العلمــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

en: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Les opérateurs non bornés et La théorie spectrale

Préparé par :

- Boudis Radouane
- Benhammada Abdelhakim

Soutenue devant le jury

Encadré par : Boufelgha Nabila …………………. M.A.B
Président : Meskine Habiba……………………….. M.A.B
Examinateur : Boubellouta Khadidja ……………. M.A.B

Année Universitaire : 2015/2016

Remerciement

Chaque fois qu'on achève une étape importante dans notre vie, on fait une pose pour regarder en arrière et se rappeler toutes ces personnes qui ont partagé avec nous tous les bons moments de notre existence, mais surtout les mauvais. Avant tout, nous remercions le bon dieu tout puissant qui nous avons donné la force et de nous avoir permis d'arriver à ce stade-là. Notre première pensée va tout naturellement à notre encadreur ***N.boufelgha*** *qui suit fidèlement nos travails, nous tenons la remercie pour son encadrement, pour la confiance qu'il nous a témoigné en nos confiant ce travail et pour nous avoir donné les moyens d'arriver au tout de ce mémoire. Nous voudrais sons remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire. Ensuite, nous tenons à remercier tous les enseignants de centre université de Mila en générale et l'équipe enseignantes de l'institut des sciences et de technologie en particulier pour la richesse des enseignements de ces années de Master. Nous dédions cet humble travail, nos très chers parents dont le courage et l'abnégation constitueront toujours pour nous un exemple à suivre. Les familles* ***" Benhammada "***, ***" boudis"***. *Enfin, nous adressons notre plus sincères remerciements à* ***tous notre proches et amis et tous le groupe de Master*** *qui nous ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.*

Abdelhakim, Radouane

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La mécanique quantique utilise un ensemble d'outils mathématiques indispensables à l'étude rigoureuse des phénomènes physiques et parmi ces outils, les opérateurs linéaires.
Lorsque ces opérateurs sont continus leurs manipulation n'offre pas de difficulté majeure, mais dans le cas contraire, il faut être d'une extrême prudence, car le domaine de définition d'opérateur est très important.
Le but de ce mémoire de master est donnez quelque application de la **théorie spectrale** dans la mécanique quantique, tel que une configuration d'un système quantique à un instant donné est appelée **un état**. Une grandeur physique mesurable (associée à un appareil de mesure) d'un système donné est appelée **une observable**.
Notre travail est partagé en trois chapitre :
Dons le premier, on donne toutes les définitions et les notion de base ayant été utilisés tout au long de ce mémoire, en rappelez les notions d'espace de Hilbert et donnez une étude générale sur l'espace des opérateurs, l'adjoint et auto-adjoints d'un opérateur, on parler aussi sur la spectre des opérateurs bornés, les opérateurs compacts.
Au chapitre deuxième, nous affranchissons de la continuité pour aborder les opérateurs linéaires non bornés. Nous exposons les définitions et quelques résultats fondamentaux liés à cette généralisation du concept d'application linéaire.
Le dernière chapitre, nous énonçons le **Théorème de Stone** qui exprime chaque groupe unitaire fortement continu en fonction d'un opérateur auto-adjoint qui lui est associé, dans le cadre de la mécanique quantique, nous expliquons brièvement le sens physique de la notion d'opérateur, nous

esquissons ensuite quelques implications physiques du théorème spectrale pour les opérateurs auto-adjoints et du théorème de Stone, nous faisons quelques considérations sur **les postulats** de base de cette théorie, puis nous discutons le cas d'une particule ponctuelle dans l'espace réel unidimensionnel.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES OPÉRATEURS LINÉAIRES BORNÉS

Nous définissons brièvement dans ce chapitre les notions de base liées aux espaces de Hilbert et quelques propriétés des projections orthogonales. Nous exposons notamment les résultats élémentaires sur les opérateurs linéaires bornés.

1.1 Notions préliminaires

On note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les espaces vectoriels considèreras dans la suite toujours des espaces vectoriels réels ou complexes.

Définition 1.1.
Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on appelle semi-norme sur H une application $p : H \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1- pour tout $x \in H$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x),$$

2- pour tous $x, y \in H$, on a :

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Si pour tout vecteur x non nul de H, on a : $p(x) > 0$, on dit que p est une norme sur H.
La propriété :

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y),$$

s'appelle l'inégalitaire triangulaire pour la semi-norme p.

Lemme 1.1.
Si p est une semi-norme sur H, on a :

$$| p(x) - p(y) | \leq p(x - y),$$

pour tous vecteurs $x, y \in H$.

On appelle espace normé (H, p) un espace vectoriel H muni d'une norme p.
En générale, nous noterons $\|x\|$ la norme d'un vecteur x d'un espace normé H, ou bien $\|x\|_H$.

Exemple 1.1.
Dans $\mathbb{R}^n$, avec la structure vectoriel usuelle, si $x = (x_1, ..., x_n)$ on a :

1- norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$,

2- norme : $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

3- norme : $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$,

4- dans $\mathbb{R}$: $\|x\| = |x|$.

Théorème 1.1.
Soit (H, p) un espace normé, l'application $p : H \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue pour la topologie de la norme.

1.1.1 Produit scalaire

Cas réel

Soit H un espace vectoriel réel, on appelle produit scalaire sur H l'application qui à tout couple de vecteur (x, y) associe un nombre réel généralement noté :

$$< x, y > \text{ ou } < x/y >,$$

vérifier les propriétés suivantes :

1- $\forall x, y \in H, < x, y >=< y, x >$ (Symétrique),

2- $\forall x, y \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, < \lambda x + \mu x', y >= \lambda < x, y > +\mu < x', y >$ (Linéaire en x),

3- $\forall x \in H, < x, x > \geq 0$ (Positive),

4- $\forall x \in H, < x, x >= 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (Positive stricte).

Exemple 1.2.

1- On prend $H = \mathbb{R}^n$ *et* $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *(Produit euclidien).*

2- On prend $H = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *où* μ *est une mesure et :*

$$< f, g >= \int fgd\mu.$$

Cas complexe

Soit H un espace vectoriel complexe, un produit scalaire sur H est une application vérifier les propriétés suivant :

1- $\forall x, y \in H, < x, y >= \overline{< y, x >}$ (Symétrique hermitien),

2- $\forall x, y \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, < \lambda x + \mu x', y >= \lambda < x, y > +\mu < x', y >$ (Linéaire en x),

3- $\forall x \in H, < x, x > \geq 0$ (Positive),

4- $\forall x \in H, < x, x >= 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (Positive stricte).

<u>**Notion**</u> :
C'est le produit scalaire n'est pas linéaire en second variables, il est antilinéaire en y on dit que dans ce cas sesquilinéaire, hermitienne, positive.

Exemple 1.3.

1- On prend $H = \mathbb{C}^n$ *et* $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ *(Produit hermitien).*

2- On prend $H = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *où* μ *est une mesure et :*

$$< f, g >= \int f \overline{g} d\mu.$$

1.1.2 Espace de Hilbert, Orthogonalité

Définition 1.2.
On appelle espace hermitien H un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Pour tout $x \in H$, on pose :

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$

Nous verrons que cette quantité est une norme sur un espace hermitien H lorsque nous aurons énoncé les propriétés :

1- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall x, y \in H$, on a :

$$| < x, y > | \leq ||x|| ||y||.$$

2- Identité du Parallélogramme s'écrit :

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Proposition 1.1.

Un espace hermitien H est un espace vectoriel normé avec la norme $||x|| = \sqrt{< x, x >}$, *induit par le produit scalaire.*

Preuve 1.1.

Le seule axiome non évident à obtenir est l'inégalité triangulaire

On a :

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2Re < x, y >,$$

de l'inégalité de Schwarz, on déduit que :

$$2Re < x, y > \leq 2||x|| ||y||,$$

d'où

$$||x + y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2.$$

Définition 1.3.

On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel H (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire $(x, y) \to < x, y >$ *qui est de plus complet pour la norme* $||.||$ *sur* H.

Remarque 1.1.

*Tous les espaces de Hilbert que nous considérerons seront supposés **séparables**, c'est-à-dire : admettant un sous ensemble dénombrable dense.*

Exemple 1.4.

1- L'espace euclidien

$$\mathbb{C}^k = \{x = (x_1, ..., x_k); x_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, ..., k\},$$

muni du produit scalaire

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{k} x_i \overline{y_i},$$

est un espace de Hilbert.

2- L'espace

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{N}) = \{x = (x_j)_{j>0}; x_j \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} \mid x_j \mid^2 < \infty\},$$

muni de produit scalaire

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j},$$

est un espace de Hilbert.

3- Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré, l'espace

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \, tel \, que \int \mid f(x) \mid^2 \mu dx < \infty\},$$

muni du produit scalaire

$$< f, g >= \int \overline{f(x)} g(x) d\mu(x).$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.4.

Soit H un espace de Hilbert, on dit que les vecteurs x et y de H sont orthogonaux si :

$$< x, y >= 0,$$

et on écrit :

$$x \perp y.$$

Si A est une partie non vide de H, l'orthogonal de A est l'ensemble $A^\perp$ tel que :

$$A^\perp = \{x \in H :< x, y >= 0 \, \forall y \in A\}.$$

Comme conséquence directe de la définition de l'orthogonalité, nous avons la relation suivante, dite relation de Pythagore.
Pour tout $x, y \in H$ avec $x \perp y$, alors :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

plus généralement, si $x_1, ..., x_n$ sont orthogonaux deux à deux, on a :

$$\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|x_k\|^2.$$

Remarque 1.2.
Pour toute partie non vide A de H :

$$(A^{\perp})^{\perp} = \begin{cases} [\overline{A}] \text{ si } A \text{ est une partie quelconque,} \\ \overline{A} \text{ si } A \text{ est un sous espace vectoriel de } H, \\ A \text{ si } A \text{ est un sous espace vectoriel fermé de } H. \end{cases}$$

Définition 1.5.
Dans un espace hermitien, une famille $E = \{e_i; i \in T\}$ ou $T \subset \mathbb{N}$, est dite orthonormée si :

$$< e_i, e_j >= \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, sinon. \end{cases}$$

Tout espace de Hilbert admet une base orthonormale, qui est finie si et seulement si l'espace est de dimension finie.

Définition 1.6.
Soit H un espace de Hilbert et E un sous ensemble de H, le sous espace vectoriel engendré par E, noté $Vect(E)$ est le espace qui contient tous les combinaisons linéaires finies d'éléments de E.

1.1.3 Théorème de Projection

Définition 1.7.

Soit H une espace vectoriel normé, $A \subset H$,

A est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in A, \forall \alpha \in [0,1] : \alpha x + (1-\alpha)y \in A,$$

ou

$$\forall x, y \in A, \forall \alpha, \beta \in [0,1] : \alpha x + \beta y \in A, / \ \alpha + \beta = 1.$$

Théorème 1.2. ***(Théorème de Projection)***

Soit H un espace de Hilbert et A convexe de H fermé non vide, alors pour tout $f \in H$, $\exists ! x \in A$ tel que :

$$\|f - x\| = \min_{y \in A} \|f - y\|,$$

*cet élément x est appelé **Projection** de f sur A et on note : $P_A(f) = x$.*

On note $\rho(H)$ l'ensemble de tous les opérateurs de projection sur H.

Corollaire 1.1.

Soit H un espace de Hilbert, A une partie de H convexe et complet alors :

$$x = P_A(f) \Longleftrightarrow \forall y \in A : Re < f - x, x - y > \geq 0.$$

Corollaire 1.2.

Soit H un espace de Hilbert, A un sous-espace vectoriel complet.

Si $x = P_A(f)$ alors :

$$f - x \perp A \ (\textit{Projection orthogonale}).$$

Preuve 1.2.

Soit $y \in A$, alors : $x - \lambda y \in A, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (car A un sous espace vectoriel)

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad Re < f - x, x - (x - \lambda y) > \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}, y \in A \\
&\Longleftrightarrow \quad Re < f - x, \lambda y) > \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda Re < f - x, y) > \geq 0, \forall y \in A, \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{lll} Si\ \lambda \geqslant 0 : & \Longrightarrow & Re < f - x, y > \geqslant 0 \\ Si\ \lambda \leqslant 0 : & \Longrightarrow & Re < f - x, y > \leqslant 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow Re < f - x, y >= 0,\ \forall y \in A.$$

On pose :

$$< f - x, y >= \rho e^{i\theta},$$

On a :

$$\begin{aligned}
Re < f - x, e^{i\theta} y >= 0 \quad &\Longrightarrow \quad Re\, e^{-i\theta} < f - x,\ y >= 0,\ \forall y \in A \\
&\Longrightarrow \quad Re\, e^{-i\theta}.\rho\, e^{i\theta} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \rho = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\forall y \in A$ *:*

$$\begin{aligned}
< f - x, y >= 0 \quad &\Longrightarrow \quad f - x\ \in A^{\perp} \\
&\Longrightarrow \quad f - x \perp A.
\end{aligned}$$

Proposition 1.2.

Soient H un espace de Hilbert et A un sous-espace vectoriel fermé de H, on a :

1- l'application

$$\begin{array}{rcl} P_A : H & \to & A \\ x & \mapsto & P_A(x) \end{array}$$

est linéaire et continue de norme $\|P_A\| = 1$,

2- $ker P_A = A^{\perp}$,

3- $H = A \oplus A^{\perp}$,

4- $P_A + P_{A^{\perp}} = Id_H$.

1.2 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.8.

Soit H, H' deux espaces de Hilbert, on appelle opérateur linéaire borné T de H dans H' tout application linéaire continue de H dans H'.

T linéaire$\Longleftrightarrow \forall x, y \in H.\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y.$$

T continu : $\exists\, c \geq 0$ tel que :

$$\|Tx\|_{H'} \leq c\|x\|_H, \forall x \in H. \tag{1.1}$$

La norme de l'opérateur T est le plus petit c qui assure (1.1), c'est à dire :

$$\|T\| = \inf\{c > 0 : \; \|Tx\| \leqslant c\|x\| \, \forall \, x \in H\},$$

et on écrit aussi :

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T\|_{H'}}{\|x\|_H} = \sup_{\|x\|_H = 1} \|T(x)\|_{H'},$$

ou bien

$$\|T\| = \sup_{x \leq 1} \frac{\|T\|_{H'}}{\|x\|_H}.$$

L'opérateur identité de H dans H sera noté par : Id_H.

Remarque 1.3.

L'ensemble des opérateurs linéaires continues de H dans H' est serra noté par $\mathcal{L}(H, H')$.

Proposition 1.3.

Voici quelque propriétés de la norme opérateur :

1- Si $T \in \mathcal{L}(H, H')$, alors : $\|T\| = 0$ si et seulement si $T = 0$.

2- Si $T, S \in \mathcal{L}(H, H')$, alors :

$$T + S \in \mathcal{L}(H, H') \text{ et } \|T + S\| \leqslant \|T\| + \|S\|.$$

3- Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}(H, H')$ alors :

$$\alpha T \in \mathcal{L}(H, H') \text{ et } \|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|.$$

4- Si $T, S \in \mathcal{L}(H, H')$, alors :

$$TS \in \mathcal{L}(H, H') \text{ et } \|TS\| \leqslant \|T\|\|S\|.$$

1.2.1 Inverse d'un opérateur

Définition 1.9.

Soient H, H' deux espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H, H')$.
On dit que T est inversible s'il bijectif et son inverse est continue, l'inverse de T est note T^{-1}.

Proposition 1.4.

Soit H espace de Hilbert, T un opérateur de $\mathcal{L}(H)$ tel que $\| T \| < 1$, alors : l'opérateur $(Id - T)$ est inversible et son inverse $(Id - T)^{-1}$ est donnée par :

$$(Id - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k.$$

Théorème 1.3.

Soient H, H' deux espace de Hilbert, T un opérateur inversible de $\mathcal{L}(H)$, si S est de $\mathcal{L}(H, H')$ tel que :

$$\| S \| < \frac{1}{\| T^{-1} \|},$$

alors :

$$T + S \text{ est inversible.}$$

Preuve 1.3.

Remarquons que :

$$T + S = T(Id + T^{-1}S),$$

il suffit de vérifier que $(Id + T^{-1}S)$ *est inversible pour assurer l'inversibilité de* $T + S$.

De Théorème (1.3), on à :

$$\| T^{-1}.S \| \leq \| T^{-1} \| . \| S \| < \| T^{-1} \| . \frac{1}{\| T^{-1} \|} = 1 \text{ et } T^{-1}S \in \mathcal{L}(H).$$

Donc d'après la proposition précédent $Id + T^{-1}S$ *est inversible.*

Corollaire 1.3.

L'ensemble des opérateurs inversibles de H *dans* H' *est noté :* $\rho_{\mathcal{L}(H,H')}$ *est un ouvert de* $\mathcal{L}(H, H')$.

Preuve 1.4.

On montre que : $\rho_{\mathcal{L}(H,H')}$ *est voisinage de chacun de ses point.*

Soit $S \in \rho_{\mathcal{L}(H,H')}$*, et soit :*

$$T \in B(S, \frac{1}{\| S^{-1} \|}) \Leftrightarrow \| T - S \| < \frac{1}{\| S^{-1} \|}.$$

D'après le Théorème(1.3), on a :

$$(T - S) + S \in \rho_{\mathcal{L}(H,H')},$$

donc

$$T \in B(S, \frac{1}{\| S^{-1} \|}) \subset \rho_{\mathcal{L}(H,H')}.$$

1.2.2 Adjoint

Définition 1.10.

Soient H, H' *deux espaces de Hilbert et* $T \in \mathcal{L}(H, H')$ *alors :*

$\exists! T^* \in \mathcal{L}(H', H)$ *tel que* $\forall x \in H$ *et* $y \in H'$ *:*

$$< T(x), y > = < x, T^*(y) >,$$

*est appelé **l'adjoint** de T de plus on a :*

$$\|T\| = \|T^*\|.$$

Proposition 1.5.

T^* est linéaire.

Preuve 1.5.

$\forall\, x \in H,\ y, z \in H'$

$$\begin{aligned} < x, T^*(y+z) > &= < Tx, y+z > \\ &= < Tx, y > + < Tx, z > \\ &= < x, T^*y > + < x, T^*z > \\ &= < x, T^*y + T^*z >, \\ \Rightarrow < x, T^*(y+z) - (T^*y + T^*z) > &= 0,\ \forall x \in H. \end{aligned}$$

En particulier :

$$\begin{aligned} x &= T^*(y+z) - (T^*y + T^*z), \\ &\Rightarrow\ < T^*(y+z) - (T^*y + T^*z), T^*(y+z) - (T^*y + T^*z) >= 0 \\ &\Rightarrow\ T^*(y+z) = T^*y + T^*z. \end{aligned}$$

Même choit avec $T^*(\alpha y) = \alpha T^*(y)$.

Proposition 1.6.

Soient H, H' deux espace de Hilbert $T, S \in \mathcal{L}(H, H')$, alors :

1- $(S+T)^* = S^* + T^*$,

2- $(ST)^* = T^*S^*$,

3- $Id^* = Id$,

4- Si S est inversible, S^* est aussi inversible, de plus an a :

$$(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*,$$

5- Si $(S^*)^* = S$.

Preuve 1.6.

1. $(S+T)^* = S^* + T^*$,

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in H : < x, (S+T)^* y > &= < (S+T)x, y > = < Sx + Tx, y > \\
&= < Sx, y > + < Tx, y > = < x, S^* y > + < x, T^* y > = < x, (S^* + T^*)y >, \\
&\Rightarrow \forall x, y \in H : < x, (S+T)^* y - (S^* + T^*)y > = 0.
\end{aligned}$$

En particulier :

$$x = (S+T)^* y - (S^* + T^*)y,$$

donc

$$< (S+T)^* y - (S^* + T^*)y, (S+T)^* y - (S^* + T^*)y > = 0,$$

alors :

$$(S+T)^* = S^* + T^*.$$

2. $(ST)^* = T^* S^*$,

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in H : < x, (ST)^* y > &= < (ST)x, y > = < Tx, S^* y > \\
&= < x, T^* S^* y >, \\
&\Rightarrow < x, (ST)^* y - T^* S^* y > = 0.
\end{aligned}$$

En particulier :

$$x = (ST)^* y - T^* S^* y,$$

alors :

$$(ST^*) = T^*S^*.$$

3. $Id^* = Id$,

$$\begin{aligned}\forall x, y \in H : < x, Id^* y > &= < Id\, x, y >=< x, y >,\\ &\Rightarrow < x, Id^* y - y >= 0.\end{aligned}$$

En particulier :

$$x = Id^* y - y,$$

donc

$$Id^* = Id.$$

4. *Si S est inversible, S^* est aussi inversible, de plus on a :*

$$(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*.$$

On montre que :

$$S \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow S^* \in \mathcal{L}(H)$$

(a) S^* linéaire ? : voir Proposition (1.5),

(b) S^* continue ? :

$$\begin{aligned}\forall x \in H : \|S^*x\|^2 &= < S^*x, S^*x >=< S(S^*x), x > \leqslant \|S(S^*x)\|.\|x\| \text{ (D'aprés Cauchy-schwarz)}.\\ \Rightarrow \|S^*x\|^2 &\leqslant \|S\|\,\|S^*x\|.\|x\|\\ \Rightarrow \|S^*x\| &\leqslant \|S\|.\|x\|,\ \exists\, c = \|S\| > 0 : \|S^*x\| \leqslant c\|x\|.\end{aligned}$$

Donc S^* est continue.

(c) Pour montre que :$(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$*, il suffit de montre que :* $S^* \circ (S^{-1})^* = Id.$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in H :< x, S^* \circ (S^{-1})^* y >=< Sx, (S^{-1})^* y > &= < S^{-1}(Sx), y > \\ &= < x, y >, \end{aligned}$$

$$\forall x, y \in H :< x, S^* \circ (S^{-1})^* y - y >= 0.$$

En particulier quand :

$$x = S^* \circ (S^{-1})^* y - y,$$

alors :

$$S^* \circ (S^{-1})^* y = y,\ \forall y \in H \Rightarrow S^* \circ (S^{-1})^* = Id.$$

5. $(S^*)^* = S,$

$$\begin{aligned} \forall x, y \in H :< x, (S^*)^* y >=< S^* x, y >= \overline{< y, S^* x >} &= \overline{< Sy, x >} \\ &= < x, Sy >, \\ &\Rightarrow < x, (S^*)^* y - Sy >= 0. \end{aligned}$$

En particulier quand :

$$x = (S^*)^* y - Sy,$$

alors :

$$(S^*)^* = S.$$

Proposition 1.7.

Si $T \in \mathcal{L}(H)$*, alors :*

$$\|T\| = \|T^*\| = \|TT^*\|^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve 1.7.

Pour $x \in H$ *avec* $\|x\| \leq 1$*, on a :*

$$\|Tx\|^2 =< Tx, Tx >=< T^*Tx, x >\leq \|T^*Tx\|.\|x\| \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|.\|T\|,$$

donc en prenant le supraliminaire sur x,

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\|,$$

en simplifiant par $\|T\|$ *, on obtient :*

$$\|T\| \leq \|T^*\|,$$

en remplaçant T par T^**, on obtient :*

$$\|T^*\| \leq \|T^{**}\| = \|T\|,$$

ainsi

$$\|T\| = \|T^*\|.$$

Proposition 1.8.

Soit $T : H \to H'$ *un opérateur linéaire, les propositions suivants sont équivalentes*

1- T *est continue,*

2- il existe $x \in H$ *tel que :* T *est continue sur x,*

3- T *est continue au point* 0_H*,*

4- T *est borné.*

Définition 1.11.

Soient H, H' *deux espace de Hilbert tel que :* $H = H'$.

1- Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H')$ *est appelé* ***Unitaire*** *si :*

$$T^*T = TT^* = Id_H \quad (T^* = T^{-1}),$$

2- Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H')$ *est appelé* ***Normale*** *si :*

$$TT^* = T^*T,$$

*3- Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H')$ est appelé **Hermitienne** ou auto-adjoint si :*

$$T = T^*,$$

*4- Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H')$ est appelé **Positive** (notation $T \geq 0$) si :*

$$< T(x), x >\geq 0, \text{ pour toutes } x \in H,$$

*5- Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H')$ est appelé **Projection** si :*

$$T = T^* = T^2,$$

*6- Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H')$ de **Rang fini** si $Im(T)$ est de dimension fini.*

Proposition 1.9.

Soient H, H' deux espace de Hilbert. $T \in \mathcal{L}(H, H')$, alors :

1. $(Im(T))^\perp = ker(T^*)$.
2. $(Im(T^*))^\perp = ker(T^*)$.

Preuve 1.8.

1. *Soit*

$$\begin{aligned} y \in (Im(T))^\perp &\Leftrightarrow < Tx, y >= 0, \ \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow < x, T^*y >= 0, \ \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow T^*y \in H^\perp = \{0\} \Leftrightarrow y \in ker(T^*). \end{aligned}$$

2. *Soit*

$$\begin{aligned} x \in (Im(T^*))^\perp &\Leftrightarrow < x, T^*y >= 0, \ \forall y \in H' \\ &\Leftrightarrow < Tx, y >= 0, \ \forall y \in H' \\ &\Leftrightarrow Tx \in H'^\perp = \{0\} \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow x \in ker(T). \end{aligned}$$

1.2.3 Les opérateurs auto-adjoints

Définition 1.12.

Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit que T est auto-adjoint si :

$$T^* = T,$$

ou bien

$$\forall x, y \in H :< Tx, y >=< x, Ty >,$$

et on dit aussi que T est symétrique ou que T est hermitien.

Exemple 1.5.

1- Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, les opérateurs $(T + T^*)$, $(T - T^*)$ et TT^* sont auto-adjoints.

2- Si A est un sous espace vectoriel fermé de H, l'opérateur de Projection P_A est auto-adjoint.

Définition 1.13.

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, alors :

$$T \text{ est un isométrie } \Longleftrightarrow \forall x \in H, \|Tx\| = \|x\|,$$

ou bien

$$\forall x, y \in H, < Tx, Ty >=< x, y > .$$

Proposition 1.10.

Soit H un espace de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$.

Pour tout T soit auto-adjoint, il faut et il suffit que le nombre $< Tx, x >$ soit réel, $\forall x \in H$.

Preuve 1.9.

⇒) Si T est auto-adjoint, alors $\forall x \in H$:

$$< Tx, x >=< x, Tx >= \overline{< Tx, x >},$$

d'où

$$< Tx, x > \in \mathbb{R}.$$

$\Leftarrow$) *Si* $< Tx, x > \in \mathbb{R}, \forall x \in H$:

$$\begin{aligned}
\forall y \in H : < T(x+y), x+y > - < Tx, x > - < Ty, y > &= < Tx, y > + < Ty, x > \\
&= (< Tx, y > + \overline{< T^* x, y >}) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

On remplace y par iy on obtient :

$$\Rightarrow i[- < Tx, y > + \overline{< T^* x, y >}] \in \mathbb{R}.$$

Posons :

$$\alpha = [< Tx, y > + \overline{< T^* x, y >}] \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

$$\beta = i[- < Tx, y > + \overline{< T^* x, y >}] \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

En multipliant β par i on obtient :

$$i\beta = < Tx, y > - \overline{< T^* x, y >} \tag{1.4}$$

De (1.2) et (1.4), on a :

$$\begin{aligned}
< Tx, y > &= \frac{1}{2}(\alpha + i\beta), \\
\overline{< T^* x, y >} &= \frac{1}{2}(\alpha - i\beta) = \overline{< Tx, y >}. \\
&\Rightarrow < T^* x, y > = < Tx, y >, \ \forall x, y \in H \\
&\Rightarrow < Tx - T^* x, y > = 0 \\
&\Rightarrow Tx = T^* x, \forall x \in H \\
&\Rightarrow T = T^*.
\end{aligned}$$

1.2.4 Relation entre l'opérateur auto-adjoint et l'opérateur normal

Théorème 1.4.

Soit T un opérateur quelconque, il existe deux opérateurs auto-adjoints A et B sont uniques tel que :

$$T = A + iB.$$

Preuve 1.10.

On a :

$$T = A + iB \Longrightarrow T^* = (A + iB)^* = A^* - iB^*,$$

alors :

$$\begin{cases} T = A + iB, \\ T^* = A^* - iB^*, \end{cases}$$

ce qui implique que :

$$A = \frac{T + T^*}{2} \text{ et } B = \frac{T - T^*}{2i},$$

donc A et B unique.

Remarque 1.4.

T est normal si A et B sont commutant.

Théorème 1.5.

Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur borné alors :

1- T est normal $\Longleftrightarrow \|Tx\| = \|T^*x\|, \forall x \in H$,

2- T unitaire $\Longleftrightarrow \|T^*x\| = \|Tx\| = \|x\|, \forall x \in H$.

Preuve 1.11.

1- T normal $\Longleftrightarrow T^*T = TT^*$, *d'où*

$$||Tx||^2 - ||T^*x||^2 =< T^*Tx, x > - < TT^*x, x >=< (T^*T - TT^*)x, x >= 0,$$

alors :

$$||Tx||^2 - ||T^*x||^2 = 0,$$

donc

$$||Tx||^2 = ||T^*x||^2,$$

d'où

$$||Tx|| = ||T^*x||.$$

Réciproquement, on a :

$$||Tx|| = ||T^*x|| \Longrightarrow ||Tx||^2 = ||T^*x||^2,$$

alors :

$$< (T^*T - TT^*)x, x >= 0,$$

$$T^*T = TT^*.$$

Car H est un espace de Hilbert.

2- T *unitaire* $\Longrightarrow T^*T = TT^* = Id.$

$$||Tx||^2 =< Tx, Tx >=< TT^*x, x >=< x, x >= ||x||^2,$$

Réciproquement, on a :

$$||Tx||^2 = ||T^*x||^2 = ||x||^2,$$

d'où

$$< Tx, Tx >=< T^*x, T^*x >=< x, x >,$$

alors :

$$< T^*Tx, x >=< x, x >,$$

et

$$< TT^{*}x, x >=< x, x >,$$

donc

$$T^{*}T = Id \text{ et } TT^{*} = Id.$$

Car H est un $\mathbb{C}$*-Hilbert.*

1.2.5 Racine carrée d'un opérateur

Théorème 1.6.

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ *positif alors il existe un opérateur unique positif,*

$S \in \mathcal{L}(H)$*, tel que* $S^{2} = T$ *et on écrit :*

$$S = T^{\frac{1}{2}},$$

de plus :

si $B \in \mathcal{L}(H)$ *commute avec* T *alors* B *commute avec* S.

Corollaire 1.4.

Soient A et B deux opérateurs bornés dans un espace de Hilbert H.

Si A et B positif tel que : $AB = BA$ *alors AB est positif.*

Preuve 1.12.

On a : $A \geqslant 0, \exists S \geqslant 0$ *tel que* $S^{2} = A$ *(D'après Théorème(1.6)),*

et puisque B commute avec A alors S commute avec A.

D'où

$$< ASx, x >=< S^{2}Bx, x >=< SBx, Sx >=< BSx, Sx >,$$

on pose $y = Sx$,

donc

$$< By, y > \quad \geq 0 \quad (\text{ car } B \text{ positif }).$$

Alors AB est positif.

Corollaire 1.5.

Soit $T \geq 0$ et inversible alors $S = T^{\frac{1}{2}}$ est inversible.

Preuve 1.13.

Soit T est positif et inversible $\exists S \geq 0$ tel que $S^2 = T$ (D'après Théorème (1.6)),

$$(T^{-1}S)S = T^{-1}S^2 = T^{-1}T = Id,$$

et

$$S(T^{-1}S) = (ST^{-1})S = (ST^{-1})TST^{-1} = S^2T^{-1} = TT^{-1} = Id,$$

car

$$TS = ST \text{ c'est-à-dire } S = TST^{-1}.$$

Donc S est inversible d'inverse $T^{-1}S$.

Exemple 1.6.

Trouvons $T^{\frac{1}{2}}$ tel que :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

T est un opérateur positif car $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$< \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} >=< (2x, y), (x, y) >= 2x^2 + y^2 \geqslant 0, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

on remarque que :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

montrons que : $S^2 = T$,

puisque la racine carrée est unique, alors : $\sqrt{T} = S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

1.2.6 La convergence entre les opérateurs

Définition 1.14.

Soit $(T_n)_n$ une suite d'opérateur linéaire bornée sur un espace de Hilbert H.

1- $(T_n)_n$ est dite convergence uniforme si :$\exists T \in \mathcal{L}(H)$ tel que :

$$\| T_n - T \|_{\mathcal{L}(H)} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty,$$

2- $(T_n)_n$ est dite convergence fortement si :

$$\| T_n x - T x \| \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty, \forall x \in H,$$

3- $(T_n)_n$ est dite convergence faiblement si :

$$< T_n x, y > - < T x, y > \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty, \forall x \in H.$$

Remarque 1.5.

La convergence uniforme $\Rightarrow$ La convergence fortement $\Rightarrow$ La convergence faiblement.

Définition 1.15.

1- Une suite $(T_n)_n$ d'opérateur auto-adjoint est dite bornée croissante s'il existe $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que :

$$T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq ... \leq T_n \leq T,$$

c'est-à-dire :

$$< T_0 x, x > \quad \leq \quad < T_1 x, x > \quad \leq \quad < T_2 x, x > \quad \leq ... \leq \quad < T_n x, x > \quad \leq \quad < T x, x > .$$

2- $(T_n)_n$ est dite bornée décroissante s'il existe $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que :

$$T_n \leq T_{n-1} \leq ... \leq T_0 \leq T,$$

c'est-à-dire :

$$< T_n x, x > \ \leq \ < T_{n-1} x, x > \ \leq \ < T_{n-2} x, x > \ \leq ... \leq \ < T_0 x, x > \ \leq \ < T x, x > .$$

Remarque 1.6.
Toute opérateur positive est auto-adjoint.

1.3 Le spectre et l'ensemble résolvant d'un opérateur borné

Définition 1.16. ***(les valeurs propres)***
Une valeur propre de T est un élément $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que le noyau de $(T - \lambda Id)$ soit non nul (ou de manière équivalente, l'application linéaire $(T - \lambda Id)$ ne soit pas injective).

Le sous-espace vectoriel $ker(T - \lambda Id)$ est alors appelé l'espace propre de T associé à λ.
La dimension de cet espace propre (qui peut être infinie) est appelé la multiplicité de λ.
Un élément non nul de $ker(T - \lambda Id)$ est appelé un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ.
L'ensemble des valeurs propres est noté : $V_p(T)$ et aussi appelé le spectre ponctuel de T.

1.3.1 Le spectre et Résolvant

Définition 1.17.
Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert H sur $\mathbb{C}$.
*On appelle un **valeur spectrale** de l'opérateur T toute scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $(T - \lambda Id)^{-1}$ n'existe pas.*
*On appelle **spectre** de T l'ensemble des valeurs spectrales et on note $\sigma(T)$ tel que :*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \ n'est\ pas\ inversible \}.$$

*On appelle **valeur résolvante** de l'opérateur T toute scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $(T - \lambda Id)$ est bijective.*

On appelle ***ensemble résolvant*** *de T l'ensemble des* ***valeurs résolvant*** *et on note $\rho(T)$ tel que :*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda Id) \text{ bijective } \}.$$

On a donc : $\mathbb{C}/\rho(T) = \sigma(T)$.

Le spectre $\sigma(T)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant.

Remarque 1.7.

Si $\lambda \in \rho(T)$, alors :

$$(T - \lambda Id)^{-1} \in \mathcal{L}(H).$$

Théorème 1.7.

Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$.

L'ensemble des valeurs régulières $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Preuve 1.14.

Soit λ une valeur régulière, donc $(T - \lambda Id)^{-1}$ est défini continu sur H,

si pour tout entier ε (assez petit), on a :

$$\varepsilon < \frac{1}{\|(T - \lambda Id)^{-1}\|},$$

l'opérateur $(T - (\lambda + \varepsilon)Id)^{-1}$ est défini continu sur tout H (D'après le Théorème (1.3)),

donc $\lambda + \varepsilon$ est une valeur régulière et les éléments de la boule $B(\lambda, \varepsilon) \subset \mathbb{C}$ sont des valeurs régulière de T.

$\rho(T)$ donc voisinage de tous ces point, c'est-à-dire $\rho(T)$ est un ouvert.

Corollaire 1.6.

Soit H un espace de Hilbert $T \in \mathcal{L}(H)$, alors le spectre de $T(\sigma(T))$ est fermé dans $\mathbb{C}$.

Preuve 1.15.

$\sigma(T)$ n'est autre que le complémentaire de $\rho(T)$.

Théorème 1.8.

Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\|T\| < |\lambda|$, alors λ est un valeur régulière.

Preuve 1.16.

On a :

$$T - \lambda Id = -\lambda(Id - \frac{1}{\lambda}T) \qquad \lambda \neq 0.$$

Comme

$$\|T\| < |\lambda| \Rightarrow \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1.$$

D'après la Proposition (1.4),
donc $(Id - \frac{1}{\lambda}T)$ *est inversible alors* $T - \lambda Id$ *est inversible.*
$\Rightarrow \lambda$ *est une valeur régulière de* T.

Proposition 1.11.

Soit H *un espace de Hilbert et* $T \in \mathcal{L}(H)$ *tel que* $T = T^*$*, alors les valeurs propres de* T *sont réelles.*

Preuve 1.17.

Soit λ *une valeur propre de* T *alors* $\exists x \neq 0$*(valeur propre), tel que :*

$$< \lambda x, x >= \lambda < x, x >=< Tx, x > \overset{T=T^*}{=} < x, Tx >=< x, \lambda x >= \overline{\lambda} < x, x > \;\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.12.

Les vecteurs propres associes des valeurs propres distinctes d'un opérateur hermitien sont orthogonaux.

Preuve 1.18.

Soit λ_1 *et* λ_2 *deux valeurs propres distinctes de* T, x_1, x_2 *deux vecteurs propres à* λ_1 *et* λ_2 *respectivement.*

On a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 < x_1, x_2 >=< Tx_1, x_2 > &\overset{T=T^*}{=} < x_1, Tx_2 >=< x_1, \lambda_2 x > \\
&\overset{\lambda_2 \in \mathbb{R}}{=} \lambda_2 < x_1, x_2 > . \\
&\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) < x_1, x_2 >= 0 \\
&\Rightarrow < x_1, x_2 >= 0 \\
&\Rightarrow x_1 \perp x_2.
\end{aligned}$$

1.4 Les opérateurs compactes

Définition 1.18.

Soient H, H' deux espaces de Hilbert, un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H')$ est dite compacte s'il transformé tout partie borné de H en une partie relativement compacte H'.
Autrement dit :
T compacte $\Longleftrightarrow$ Pour tout suit $(x_n)_n$ borné dans H, la suit $(Tx_n)_n$ admet une suit convergent.

Définition 1.19.

Soient H, H' deux espaces de Hilbert, un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H')$ est dite compacte si $T(B(0,1))$ est relativement compact.

Dans le texte qui suit, l'ensemble de tous les opérateurs de $\mathcal{L}(H, H')$ qui sont compacts sera désigné par $\mathbb{K}(H, H')$.

Définition 1.20.

Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, H')$ est dite de rang fini si Im (T) est de dimension finie.

Remarque 1.8.

1- Tout opérateur de rang finie est compact, la réciproque dans un seul cas d'un espace de Hilbert séparable.

2- Un opérateur compacte est nécessairement continu.

Théorème 1.9.

$\mathbb{K}(H, H')$ *est un sous-espace fermé dans* $\mathcal{L}(H, H')$.

Théorème 1.10.

Si H *ou* H' *sont de dimension finie, on a :*

$$\mathbb{K}(H, H') = \mathcal{L}(H, H').$$

Corollaire 1.7.

Si $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ *(au sens de la norme de* $\mathcal{L}(H, H')$*) où les* T_n *sont des opérateurs compacts ou de dimension finie alors* T *est un opérateur compact.*

Théorème 1.11.

Soient $T \in \mathcal{L}(H, H')$ *et* $S \in \mathcal{L}(H, H')$*, si l'un quelconque (au moins) de ces deux opérateurs est compact, leur produit* ST *est un opérateur compact.*

Théorème 1.12. *(Schauder)*

Soit $T \in \mathcal{L}(H, H')$*, l'opérateur* T *est compact si et seulement si son adjoint* T^* *est compact.*

Proposition 1.13.

Soit H *un espace de Hilbert et* T *un opérateur compact de* H *dans* H'*, de spectre* $\sigma(T)$ *on a :*

1- Si H *est de dimension infinie,* $0 \in \sigma(T)$.

2- Si $\lambda \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda$ *est valeur propre de* T*. Le sous-espace propre associé est de dimension finie.*

3- $\sigma(T)$ *est dénombrable et s'il est infini, on peut ranger ses éléments en une suite* λ_n

$$|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \text{ avec } \lim_{n\to\infty} \lambda_n \to 0.$$

1.5 Décomposition spectrale des opérateurs compact auto-adjoint

Proposition 1.14.

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint on pose :

$$m = \inf_{x \in H} < Tx, x > \; et \; M = \sup_{x \in H, |x|=1} < Tx, x >,$$

alors :

$$\sigma(T) \subset [m, M] \quad m, M \in \sigma(T).$$

Corollaire 1.8.

Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que :

$$\sigma(T) = 0 \; alors \; T = 0.$$

Théorème 1.13.

On suppose que H est séparable. Soit T un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

Théorème 1.14. *(Hilbert Shmidt)*

Si T est un opérateur auto-adjoint compact sur H alors : pour tout $x \in H$, l'élément Tx se développe en Série de Fourier convergente suivant une famille orthonormée de vecteurs propres de T.

Théorème 1.15. *(Alternative de Fredholm)*

Soit H un espace de Hilbert, $T \in \mathbb{K}(H, H')$ (T compact) alors :

1. *$ker(Id - T)$ est de dimension fini,*

2. *$Im(Id - T)$ est un fermé et plus précisément :*

$$Im(Id - T) = ker(Id - T^*)^{\perp},$$

3. $ker(Id - T) = 0 \Leftrightarrow Im(Id - T) = H$,

4. $dim(ker(Id - T)) = dim(ker(Id - T^*)^{\perp})$.

Remarque 1.9.

La propriété (3) *est familière en dimension fini car si* $\dim H < +\infty$ *et* $T \in \mathcal{L}(H)$ *injective ssi il est surjective ce qui n'est pas toujours le cas en dimension infini pour un remarquable des opérateurs de la forme* $(Id - T)$ *quand* T *est compact.*

Remarque 1.10.

L'alternative de Fredholm conserve la résolution de l'équation $x - Tx = f$*, elle exprime que.*
Ou bien
$\forall f \in H$*, l'équation* $x - Tx = f$ *admet une solution unique.*
Ou bien
l'équation homogène $x - Tx = 0$ *admet n solutions linéairement indépendantes et dans ce cas l'équation non homogène* $x - Tx = f$ *est résoluble ssi* f *vérifie n conditions d'orthogonalité (c'est à dire :* $f \in ker(Id - T^*)^{\perp}$*).*

CHAPITRE 2

LES OPÉRATEURS LINÉAIRES NON BORNÉS

Dans ce chapitre, nous introduisons une notion d'opérateur linéaire qui étend celle utilisée jusqu'à présent. Nous étudions les propriétés de cette nouvelle notion. Nous exposons les résultats fondamentaux pour la démonstration, au chapitre suivant, d'une extension du théorème spectrale pour les opérateurs auto-adjoints.

2.1 Opérateurs linéaires non bornés

Définition 2.1.

Un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H est un couple $(D(T), T)$ tel que $D(T)$ est un sous espace vectoriel de H et T est un opérateur linéaire définie de $D(T)$ dans H.

En générale :

$$\begin{aligned} T &: H \longrightarrow H \\ D(T) &= \{x \in H, Tx \in H\} \end{aligned}$$

*$D(T)$ est appelé **le domaine** de l'opérateur.*

Remarque 2.1.

On note un opérateur par $(D(T), T)$ mais s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant son domaine on pourra noté simplement par T.

Exemple 2.1.

Soient T un opérateur et H un espace de Hilbert tel que :

$$H = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, f \text{ mesurable tel que } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty\},$$

le produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est :

$$< f, g >= \int f(x)\overline{g(x)}dx,$$

$$\begin{aligned} T : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \\ f &\longrightarrow Tf \end{aligned}$$

tel que : $Tf(x) = xf(x)$, le domaine

$$D(T) = \{f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), Tf \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})\},$$

alors si on pose :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),$$

mais $xf(x) \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ car $\int xf(x)dx$ divergent,
alors :
T est un opérateur non borné.

Définition 2.2.

On dit qu'un opérateur $(D(T), T)$ dans H est borné si $D(T) = H$ et $T : H \to H$ est continue.

2.2 Le graphe d'un opérateur non borné

Définition 2.3.

Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H, le graphe de $T : D(T) \longrightarrow H$ est un sous espace vectoriel noté par $G(T)$ dans $H \oplus H$ tel que :

$$G(T) = \{(x, f) \in H \oplus H, x \in D(T), f = Tx\} = \bigcup_{x \in D(T)} (x, Tx) \subset H \oplus H.$$

Remarque 2.2.

Soient T et S deux opérateurs non bornés sur un espace de Hilbert.

1- Si $T = S \iff G(T) = G(S)$,

2- L'image de T est : $Im(T) = \bigcup_{x \in D(T)} Tx \subset H$,

3- Le noyau de T est : $ker(T) = \{x \in D(T), Tx = 0\} \subset H$.

Définition 2.4.

On dit que $(D(S), S)$ est ***un extension*** *de $(D(T), T)$ (**prolongement**) si :*

$$D(T) \subset D(S) \text{ et } Tx = Sx, \text{ pour tout } x \in D(T).$$

Autrement dit : $G(T) \subset G(S)$.

2.3 Opérateur non borné fermé

Définition 2.5.

On dit que un opérateur T est fermé si son graphe $G(T)$ fermé dans $H \oplus H$.

Proposition 2.1.

On dit que T est fermé si pour tout suite $(x_n)_n$ de $D(T)$ converge vers x et la suite $(Tx_n)_n$ converge vers y dans H alors :

$$x \in D(T) \text{ et } y = Tx.$$

Théorème 2.1. *(Théorème de graphe fermé)*

Soient H et H' deux espace de Hilbert et $T : H \longrightarrow H'$ un opérateur linéaire alors :

1- T borné $\Longleftrightarrow T$ fermé ,

2- $G(T)$ fermé $\Longrightarrow T$ continue .

Définition 2.6.

On dit que un opérateur $(D(T), T)$ est fermable s'il possède une extension fermé.

Proposition 2.2.

Si T est fermable alors $\overline{T}$ est le plus petit extension fermé de plus on a :

$$\overline{G(T)} = G(\overline{T}).$$

Preuve 2.1.

Puisque $\overline{T}$ est une extension fermé de T, soit S autre extension fermé de T alors :

$$\begin{aligned} T \subset S \text{ et } D(T) \subset D(S) \quad &\Longleftrightarrow \quad G(T) \subset G(S) \\ &\Longleftrightarrow \quad \overline{G(T)} = G(\overline{T}) \subset G(\overline{S}) = G(S). \end{aligned}$$

2.4 Adjoint d'un opérateur non borné

Définition 2.7.

Soit$(D(T), T)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H, on défini l'adjoint $T^* : D(T^*) \longrightarrow H$ de T par :

$$\forall x \in D(T), y \in D(T^*), < Tx, y >=< x, T^*y > .$$

Proposition 2.3.

Soient S et T deux opérateurs non bornés alors :

1- $S^* + T^* \subset (S + T)^*$,

2- $S^*T^* \subset (TS)^*$,

3- $S \subset T \Longrightarrow T^* \subset S^*$, 4- $(\lambda T)^* \neq \overline{\lambda} T^*, \forall \lambda \in \mathbb{C}$,

5- *Si* S *est borné alors* :$(ST)^* = T^* S^*$.

Définition 2.8.

1- *Soit* $(D(T), T)$ *un opérateur non borné sur un espace de Hilbert* H *de domaine dense dans* H *alors :*

T est dit hermitien ou bien symétrique si $\forall x, y \in D(T)$:

$$< Tx, y > = < x, Ty >,$$

cela signifier que T^* *est une extension de* T, *c'est-à-dire :*

$$D(T) \subset D(T^*).$$

2- T *est dit auto-adjoint si* $T^* = T$, *c'est-à-dire :*

$$D(T) = D(T^*) \text{ et } T^* x = Tx.$$

Ou bien

$$T \text{ est dit auto-adjoint } \Longleftrightarrow T \text{ est symétrique et } D(T^*) \subset D(T).$$

Remarque 2.3.

1- *Dans le cas des opérateurs linéaires bornés ces deux notion sont identique.*

2- *Dans le cas des opérateurs non bornés toute opérateur auto-adjoint est symétrique par contre un opérateur symétrique n'est pas forcement auto-adjoint.*

Théorème 2.2.

Soit $(D(T), T)$ *un opérateur non borné dans un espace de Hilbert* H *de domaine dense dans* H *alors :*

1- T^* *existe et il est un opérateur fermé,*

2- T *fermable si est seulement si* $D(T^*)$ *est dense dans* H*, dans ce cas on a :* $\overline{T} = T^{**}$*,*

3- Si T *est fermable alors* $(\overline{T})^* = T^*$*.*

Remarque 2.4.

$(D(T), T)$ *un opérateur non borné symétrique sur un* H *alors :* T^* *est une extension fermée de* T *et puisque :*

$$D(T) \subset D(T^*) \text{ et } D(T) \text{ dense dans } H,$$

alors $D(T^*)$ *est aussi dense dans* H *et on a par conséquent* T *fermable.*
$\overline{T} = T^{**}$ *or* $\overline{T}$ *est la plus petit extension fermée de* T*.*
En particulier, si T *est symétrique fermé alors :*

$$T = T^{**} \subset T^* \text{ et } T = T^{**} \subset T^{***}.$$

Si T *auto-adjoint* $T^* = T$ *alors :*

$$T = T^* = T^{**} = T^{***}.$$

Si T *auto-adjoint alors* T *est fermé, en déduit alors qu'un opérateur non borné symétrique fermé est auto-adjoint si seulement si son adjoint symétrique.*

Proposition 2.4.

Si T *est symétrique et fermé, alors* T *auto-adjoint.*
Si T^* *est symétrique fermé alors :* $\overline{T} = T^{**}$ *est une extension de* T^**.*

Définition 2.9.

Soit $(D(T), T)$ *un opérateur non borné sur* H*, symétrique de domaine* $D(T)$ *dense dans* H*.*
T *est dit essentiellement auto-adjoint si* $\overline{T}$ *est auto-adjoint.*

Ou bien

$$(\overline{T})^* = \overline{T}.$$

Remarque 2.5.

1- Tout opérateurs auto-adjoints est essentiellement auto-adjoint mais la réciproque est fausse.

2- Si T essentiellement auto-adjoint, alors T^* est la petite extension fermée de T.

3- Si T essentiellement auto-adjoint, alors T^* est auto-adjoint.

Lemme 2.1.

Si T essentiellement auto-adjoint, T a une unique extension auto-adjoint $\overline{T}$.

Preuve 2.2.

Par définition $\overline{T}$ est extension auto-adjoint de T.

Soit S une deuxième extension auto-adjoint de T, alors :

$$T \subset S \Longrightarrow \overline{T} \subset S \text{ et } S^* \subset (\overline{T})^* \Longrightarrow S \subset \overline{T^*} = \overline{T},$$

donc

$$S = \overline{T}.$$

Proposition 2.5.

Soient T et S deux opérateurs non bornés auto-adjoints si $T \subset S$, alors :

$$T = S.$$

Preuve 2.3.

On a :

$$T \subset S \Longrightarrow S^* \subset T^*,$$

d'où

$$T = S.$$

Théorème 2.3.

Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné symétrique de domaine $D(T)$ dense dans H, alors les propriétés suivants sont équivalents :

1- T est auto-adjoint,

2- T est fermé et $ker(T^* + i) = ker(T^* - i) = \{0\}$,

3- $Im(T + i) = Im(T - i) = H$.

Preuve 2.4.

$1 \Longrightarrow 2$

Si T est auto-adjoint alors T est fermé vérifions que :

$$ker(T^* + i) = ker(T + i) = ker(T - i) = \{0\},$$

Soit $x \in D(T)$, tel que :$(T - i)x = 0$,

ou bien

$$Tx = ix,$$

ainsi que

$$< Tx, x >=< ix, x >= i\|x\|^2,$$

d'autre part

$$< x, T^*x >=< x, Tx >=< x, ix >= -i\|x\|^2,$$

et

$$< Tx, x >=< x, Tx >\Longrightarrow i\|x\|^2 = -i\|x\|^2,$$

alors :

$$\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

$2 \Longrightarrow 3$

On montre que $Im(T \pm i)$, est dense et fermé dans H.

Soit $f \in (Im(T - i))^{\perp}$ alors :

$$\forall x \in D(T), < (T - x), f >= 0,$$

donc

$$< Tx, f >= i < x, f >,$$

par conséquent :

$$x \in D(x) \to < Tx, f >= i < x, f >,$$

possède une extension continue à H,

et on a :

$$\begin{aligned} f \in D(T^*), < x, T^* f > &= < x, -if > \quad \forall x \in D(T), \\ < x, (T^* + i) f > &= 0 \quad \forall x \in D(T), \\ (T^* + i) f = 0 &\Longrightarrow f = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$(Im(T + i))^\perp = 0.$$

Ou bien

$Im(T + i)$ est dense dans H.

La fermeture de l'image

$$\overline{Im(T - i)} \subset Im(T - i).$$

Remarquant : $\forall x \in D(T)$, on a :

$$\|(T - i)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|X\|^2,$$

ou T est symétrique.

D'où

$$\|(T - i)x\| \geqslant \|x\|.$$

Soit $f \in \overline{Im(T - i)}$ tel que :

$$f_n = (T - i)x_n, \forall (x_n) \in D(T),$$

(x_n, f_n) est le graphe de $(T - i)$.

On a de plus :

$$\|f_n - f_m\|^2 = \|Tx_n - Tx_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 \to 0.$$

$(x_n)_n$ et $(Tx_n)_n$ sont de Cauchy dans H, alors elles convergent respectivement vers x et y dans H. Par la fermeture de T on obtient :

$$x \in D(T) \text{ et } y = Tx,$$

par suite

$$f = Tx_n - ix_n = Tx - ix = (T - i)x \Longrightarrow f \in Im(T - i),$$

par conséquent :

$$Im(T - i) = H.$$

$3 \Longrightarrow 1$

Montrons d'abord que :

$$ker(T - i) = 0 \text{ et } ker(T^* - i) = 0,$$

$$ker(T^* - i) = ker(T - i)^* = Im(T + i)^\perp = H^\perp = 0.$$

Pour vérifier que T auto-adjoint il suffit de voir que :

$$D(T^*) = D(T).$$

Soit $x \in D(T^*)$, alors $(T^* - i)x \in H$. comme $Im(T - i) = H, \exists y \in D(T)$ tel que :

$$(T^* - i)x = (T - i)y,$$

ou bien

$$(T^* - i)(x - y) = 0 \Longrightarrow x = y \in D(T).$$

Corollaire 2.1.

Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné symétrique sur un espace de Hilbert H de domaine $D(T)$ dense dans H, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1- T est essentiellement auto-adjoint,

2- $Ker(T \pm i) = 0$,

3- $Im(T \pm i)$ est dense dans H.

Définition 2.10.

Un opérateur symétrique T dans H est dit symétrique maximal si T n'admet pas d'extension symétrique propre, c'est-à-dire : si les hypothèses $T \subset S$ et S symétrique implique $S = T$.

Théorème 2.4.

Les opérateurs auto-adjoints sont symétriques maximaux.

Preuve 2.5.

Supposons que T est auto-adjoint, S est symétrique (c'est-à-dire : $S \subset S^*$) et $T \subset S$. Cette inclusion implique évidemment (D'après la définition de l'adjoint) que $S^* \subset T^*$.
Donc

$$S \subset S^* \subset T^* = T \subset S,$$

ce qui prouve que :

$$S = T.$$

Proposition 2.6.

Si T est fermé tel que :

$$TT^* \subset T^*T,$$

alors T est normal, c'est-à-dire :

$$TT^* = T^*T.$$

2.5 Spectre des opérateurs non bornés

Définition 2.11.

Soit$(D(T), T)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H de domaine $D(T)$ dense dans H.

1- *On appelle **ensemble résolvant** de l'opérateur T l'ensemble $\rho(T)$ des λ complexes tel que :$Im(T - \lambda Id)$ est dense dans H.*

2- *$(T - \lambda Id)$ est inversible de $D(T)$ sur $Im(T - \lambda Id)$ d'inverse borné et $Im(T - \lambda Id)$ est muni de la topologie induite par H.*

On note :

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda Id)^{-1} \text{ pour tout } \lambda \in \rho(T),$$

*$R_\lambda(T)$ est appelé **l'opérateur résolvant** de T.*

Remarque 2.6.

$R_\lambda(T)$ est borné de $Im(T - \lambda Id)$ dans $D(T)$, c'est-à-dire :

$$\exists c \geq 0 \text{ tel que } \|R_\lambda(T)x\| \leq c\|x\|, \forall x \in Im(T - \lambda Id).$$

Définition 2.12.

Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné sur H (lequel est un $\mathbb{C}$-Hilbert).

*On désigne par $\sigma(T)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble résolvant $\rho(T)$ et $\sigma(T)$ est appelé **le spectre** de l'opérateur T on a :*

1- $\sigma(T) = \mathbb{C}/\rho(T)$,

2- $\mathbb{C} = \sigma(T) \cup \rho(T)$,

3- $\sigma(T) \cap \rho(T) = \phi$.

$\sigma(T)$ peut être décomposé en trois ensembles deux à deux disjoints notés :

$$\sigma_p(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T).$$

Ils sont définis comme suivants :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (T - \lambda Id) \text{ n'est pas inversible de } D(T) \text{ dans } Im(T - \lambda Id)\},$$

*$\sigma_p(T)$ est appelé **le spectre ponctuel** de T.*

$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (T-\lambda Id)$ *inversible de* $D(T)$ *dans* $Im(T-\lambda Id)$ *et* $Im(T-\lambda Id)$ *est dense dans* $H\}$, *mais $\rho(T)$ n'est pas borné et $\sigma_c(T)$ est appelé* **le spectre continu** *de T.*

$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (T-\lambda Id)$ *inversible de $D(T)$ dans $Im(T-\lambda Id)$ et $Im(T-\lambda Id)$ n'est pas dense dans $H\}$,*

$\sigma_r(T)$ est appelé **le spectre résiduel** *de T.*

Exemple 2.2.

$H = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et T l'opérateur de multiplication par la fonction $\varphi(x) = x$, tel que : $T\varphi(x) = x\varphi(x)$ de domaine

$$D(T) = \{\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), x\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})\},$$

alors $D(T)$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et T est auto-adjoint donc

$$\begin{cases} \sigma_p(T) = \phi, \\ \sigma_c(T) = \mathbb{R}, \\ \sigma_r(T) = \phi, \\ \rho(T) = \mathbb{C}/\mathbb{R}. \end{cases}$$

Définition 2.13.

Le rayon spectrale de T est :

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|,$$

(avec la convention usuelle que $r(T) = -\infty$ si $\sigma(T)$ est vide).

Proposition 2.7.

L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, sur lequel :

$$\lambda \to \rho_\lambda(T),$$

est analytique et vérifie l'équation résolvante :$\forall \lambda \in \rho(T), \forall \mu \in \rho(T)$

$$\rho_\lambda(T) - \rho_\mu(T) = (\mu - \lambda)\rho_\lambda(T)\rho_\mu(T),$$

Il est par contre faux que le spectre soit compact ou toujours non vide.

Proposition 2.8.

Soit T auto-adjoint, alors :

1- *Le spectre de T est réel, et on a la majoration*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}/\mathbb{R}, \|\rho_\lambda(T)\| \leq 1/|Im(\lambda)|,$$

2- *Le spectre résiduel de T est vide.*

Proposition 2.9.

Soit T un opérateur auto-adjoint, le spectre de T est donné par :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\exists U_n \in D(T),\ \|U_n\| = 1,\ \lim_{n\to\infty} \|(T - \lambda Id)U_n\|\}.$$

Remarque 2.7.

1- *Si H est de dimension finie n, alors tout opérateur linéaire de H est continu et tout sous-espace vectoriel de H est fermé.*
   Donc $(T - \lambda Id)$ est inversible si et seulement si $(T - \lambda Id)$ est injectif ou surjectif.
   Le spectre résiduel est donc vide et les valeurs spectrales de T sont donc les valeurs propres de T.

2- *Toute valeur propre est une valeur spectrale : $V_p(T) \subset \sigma(T)$, en dimension finie, nous venons de voir que cette inclusion est une égalité.*

3- $\sigma_p(\lambda T) = \lambda\sigma_p(T)$, $\sigma(\lambda T) = \lambda\sigma(T)$, $\sigma_r(\lambda T) = \lambda\sigma_r(T)$ *et* $r(\lambda T) = |\lambda| r(T)$.

2.6 Les opérateurs normaux non bornés

Définition 2.14.

Un opérateur linéaire T dans H est dite normal si T est fermé et à domaine dense et si :

$$TT^* = T^*T.$$

Proposition 2.10.

Si T un opérateur normal alors :

$$D(T) = D(T^*) \ et \ \| Tf \| = \| T^* f \|, \forall f \in D(T).$$

2.7 Résolution spectrale des opérateurs auto-adjoints

Le but de cette partie est de décrire un opérateur auto-adjoint d'un espace de Hilbert par des quantités définies sur son spectre. Les projecteurs orthogonaux jouent un rôle important.

Définition 2.15.

Une famille spectral (ou résolution de l'identité) sur H est une fonction $p : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(H)$, que nous notons $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1- p_λ est une projection pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

2- Si $\lambda < \mu$, alors $p_\lambda \leq p_\mu$,

3- pour tout x dans H, nous avons :

$$\lim_{\mu\to\lambda^+} p_\mu = p_\lambda,$$

4- $p_\lambda = 0$ si λ assez petit et $p_\lambda = Id$ si λ assez grand.

Proposition 2.11.

Soient H un espace de Hilbert complexe, $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ une résolution de l'identité et $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Il existe un unique opérateur continu $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que, pour tout $x \in H$,

$$< Tx, x >= \int_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda) d < p_\lambda x, x > .$$

Cet opérateur continu est auto-adjoint si f est à valeurs réelles et positif si f est à valeurs positives. Cet opérateur continu sera noté :

$$T = \int_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda) dp_\lambda.$$

Théorème 2.5. ***(Résolution spectrale)***

Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$*, un opérateur auto-adjoint de H. Il existe une seule résolution de l'identité* $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$*, appelée* ***la résolution spectrale*** *de* T*, tel que :*

pour tout $f \in C(\sigma(T))$

$$f(T) = \int_{\lambda\in\sigma(T)} f(\lambda)dp_\lambda.$$

CHAPITRE 3

QUELQUE APPLICATION DE LA THÉORIE SPECTRAL DANS LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Dans ce chapitre, nous énonçons le théorème de Stone qui exprime chaque groupe unitaire fortement continu en fonction d'un opérateur auto-adjoint qui lui est associé, dans le cadre de la mécanique quantique, nous expliquons brièvement le sens physique de la notion d'opérateur, nous esquissons ensuite quelques implications physiques du théorème spectrale pour les opérateurs auto-adjoints et du théorème de Stone, nous faisons quelques considérations sur les postulats de base de cette théorie, puis nous discutons le cas d'une particule ponctuelle dans l'espace réel unidimensionnel.

3.1 Théorème de Stone

Nous abordons dans cette section les groupes unitaires à un paramètre et le théorème de Stone. Ce résultat mathématique possède une très belle interprétation en mécanique quantique que nous discutons au partie suivante. Nous commençons par définir la notion de groupe unitaire sur un espace de Hilbert.

3.1.1 Groupe unitaire (à un paramètre)

Il n'est pas toujours facile de vérifier qu'un opérateur donné est auto-adjoint (un critère bien connu est de trouver un groupe unitaire généré par un opérateur auto-adjoint).

Définition 3.1.
Soit H un espace de Hilbert, on appelle groupe à un paramètre une famille $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'opérateurs unitaires de $\mathcal{L}(H)$ tel que :

i) $U_0 = Id$,

ii) pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$U_{s+t} = U_s U_t.$$

Un groupe unitaire à un paramètre est dit fortement continu si :
Pour tout $x \in H$, la fonction

$$\begin{array}{rcl} Ux : \mathbb{R} & \rightarrow & H \\ t & \mapsto & U_t x \end{array}$$

est continue, c'est-à-dire :

$$\lim_{s\to t} U_s x = U_t x, \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Observer aussi que, si nous demandons à un groupe unitaire $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ faiblement continu, dans le sens où pour tous $x, y \in H$, la fonction

$$\begin{array}{rcl} < Ux, y >: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & < U_t x, y > \end{array}$$

est continue.

Remarque 3.1.

Il découle directement de la définition d'un groupe unitaire que pour tout groupe unitaire $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ nous avons :

$$(U_t)^* = (U_t)^{-1}.$$

Si T est un opérateur auto-adjoint de H, alors la famille $U_t = \mathrm{e}^{itT}$ est un groupe à paramètre, la réciproque est connue sous le nom de Théorème de Stone. Si $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre, alors il existe un opérateur T auto-adjoint de H, tel que $U_t = \mathrm{e}^{itT}$.

Définition 3.2.

Soit $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires. Le générateur infinitésimal de $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est l'opérateur T défini sur le domaine :

$$D(T) = \{x \in H, \lim_{t\to 0} \frac{1}{i}\frac{U_t(x) - x}{t} existe\},$$

par :

$$Tx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{i}\frac{U_t(x) - x}{t}, \forall x \in D(T).$$

Théorème 3.1.

Soit T un opérateur auto-adjoint sur H et $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ sa famille spectrale, la formule

$$U_t = e^{itT} = \int e^{it\lambda} dp_\lambda, \forall t \in \mathbb{R},$$

définit un groupe unitaire fortement continu dont le générateur infinitésimal égale iT.

En outre, si $x \in D(T)$, alors :

$$U_t x \in D(T), \forall t \in \mathbb{R},$$

Remarque 3.2.

Pour un opérateur non borné T, le cas $f(T) = \mathrm{e}^{itT}$ est spéciale et existe toujours : c'est le théorème de Stone.

3.1.2 Théorème de Stone

Nous abordons dans cette partie le Théorème de Stone.

Théorème 3.2.

Soit $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe unitaire fortement continu, il existe un unique opérateur auto-adjoint T tel que :

$$U_t = e^{itT}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pour la preuve de cette théorème voir [2]pages :$58 - 59 - 60 - 61$.

3.2 Évolution en mécanique quantique

Nous exposons dans ce section une interprétation donnée par la physique quantique des résultats établis dans le section précédent.

Dans la première partie, nous montrons en quoi les résultats du section précédent contribuent à la formalisation de cette théorie physique.

Dans la deuxième partie, nous abordons une application simple du Théorème de Stone.

3.2.1 Postulats de la mécanique quantique

La mécanique quantique étudie des systèmes physiques appelés dans ce cadre systèmes quantiques. Une configuration d'un système quantique à un instant donné est appelée **un état**. Une grandeur physique mesurable (associée à un appareil de mesure) d'un système donné est appelée **une observable**.

Les postulats

Sur une base expérimentale, certaines considérations sur la structure des états et des observables pour un système quantique peuvent être faites, il en découle les postulats suivants pour tout système quantique.

Postulat I

À tout instant, l'état du système est représenté par un vecteur $\psi \neq 0$, d'un espace de Hilbert complexe séparable H.

De plus, pour tout $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, le vecteur $c\psi$ représente le même état que le vecteur ψ .

Postulat II

Tout observable $\mathcal{T}$ est représentée par un opérateur auto-adjoint T.

Postulat III

Le résultat d'une mesure de l'observable $\mathcal{T}$ ne peut être qu'un nombre réel λ, valeur propre de l'opérateur T.

Postulat IV

Si le système est dans l'état ψ à l'instant t, alors la probabilité d'obtenir la valeur λ lors de la mesure de l'observable $\mathcal{T}$ à l'instant t est donnée par :

$$Prop_{\psi}\{ \text{ mesure de } \mathcal{T} \text{ vaut } \lambda\} = \frac{< \psi, P_{\lambda}\psi >}{< \psi, \psi >},$$

où P_{λ} est la projection sur le sous-espace propre de T associé à λ.

Postulat V

La valeur moyenne, prise sur un grand nombre de systèmes identiques préparés dans le même état de l'observable $\mathcal{T}$ est donnée par :

$$< T >_{\psi}= \frac{< \psi, T\psi >}{< \psi, \psi >}.$$

Postulat VI

Si le système est dans l'état ψ, alors immédiatement après la mesure de $\mathcal{T}$ ayant donné la valeur λ, le système est dans l'état $\phi = P_{\lambda}\psi$ et ϕ est donc un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ.

Postulat VII

Il existe un opérateur auto-adjoint S qui représente l'énergie du système et tel que l'évolution temporelle est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$ih = \frac{d}{dt}\psi_t = S\psi_t,$$

où ψ_t représente l'état du système à l'instant t et h est la constante de Planck.

Distribution des valeurs d'une observable

Considérons un système quantique et notons H l'espace de Hilbert séparable des états, le système est dans l'état $\psi \in H \setminus \{0\}$ normalisé, c'est-à-dire : $||\psi|| = 1$, nous intéressons à une observable $\mathcal{T}$ représentée par un opérateur auto-adjoint T, nous notons $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ la famille spectrale de T de sorte que :

$$T = \int \lambda dp_\lambda.$$

La valeur moyenne de l'observable $\mathcal{T}$, définie dans le Postulat V, peut s'écrire :

$$< T >_\psi = < \psi, T\psi > = \int \lambda d\mu_{||p_\lambda\psi||^2}.$$

La fonction :

$$\lambda \longmapsto ||p_\lambda\psi||^2 = < p_\lambda\psi, \psi >,$$

représente donc la fonction de distribution de l'observable $\mathcal{T}$ pour le système dans l'état ψ. Par conséquent :

$$Prop_\psi\{\text{mesure de}\mathcal{T} < \lambda\} = < p_\lambda\psi, \psi >,$$

et

$$Prop_\psi\{\text{mesure de}\mathcal{T} \in [a, b]\} = < (p_{b+0} - p_a)\psi, \psi > .$$

En outre, nous avons :

$$
\begin{aligned}
Prop_{\psi}\{\text{mesure de}\mathcal{T} = \lambda\} &= \; < (p_{\lambda+0} - p_{\lambda})\psi, \psi >, \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \text{ n'est pas valeur propre de } T, \\ < P_{\lambda}\psi, \psi > & \text{si } \lambda \text{ est valeur propre de } T. \end{cases}
\end{aligned}
$$

où P_{λ} est le projecteur sur le sous-espace propre associé à λ, dans le cas où λ est valeur propre de T.

Les Postulats III et IV peuvent donc être vu comme des conséquences du Postulat V et du théorème spectrale.

Évolution temporelle

L'opérateur S du Postulat VII est appelé Hamiltonien du système, il représente l'observable d'énergie. Nous disons que le temps est homogène pour le système si l'hamiltonien S est indépendant du temps.

De façon plus générale, le temps est homogène pour le système si son évolution temporelle est donnée par un groupe unitaire fortement continu $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$, dans le sens où si à l'instant $t = 0$, le système se trouve dans l'état ψ_0, alors l'état du système à l'instant t est donné par :

$$\psi_t = U_t\psi_0.$$

L'existence de l'hamiltonien S est alors assurée par le théorème de Stone. En effet, selon ce théorème, le générateur infinitésimal G du groupe continue unitaire $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est tel que iG est un opérateur auto-adjoint. Il a pour domaine :

$$D(G) = \{x \in H \mid \lim_{t\to 0} \frac{1}{h}(U_t - Id)x \text{ existe}\},$$

et il est défini par :

$$Gx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U_t - Id)x, \text{pour tout } x \in D(G).$$

En définissant alors l'opérateur auto-adjoint

$$H = ihG,$$

nous trouvons l'équation de Schrödinger :

$$\frac{d}{dt}\psi_t = \lim_{t\to 0}\frac{1}{h}(\psi_{t+h} - \psi_t) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{h}(U_h - Id)U_t\psi_0 = -\frac{i}{h}H\psi_t.$$

Toujours dans le cas où le temps est homogène, nous vérifions que la valeur moyenne de l'observable énergie représentée par l'hamiltonien S est une constante du mouvement, si :

$$\psi \in D(H) \Longrightarrow U_t\psi \in D(H), \forall t \in \mathbb{R}.$$

En outre, par le théorème de Stone, nous avons :

$$U_tH\psi = HU_t\psi, \forall\psi \in D(H).$$

Par conséquent, si $\psi_0 \in D(H)$, nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$< H >_{\psi t} =< \psi_t, H\psi_t >=< U_t\psi_0, HU_t\psi_0 >=< U_t\psi_0, U_tH\psi_0 >=< \psi_0, H\psi_0 >=< H >_{\psi_0} .$$

L'idée selon laquelle à chaque groupe continu de symétrie d'un système physique correspond une quantité conservée par l'évolution temporelle est un principe très générale en physique.

3.2.2 La particule ponctuelle dans $\mathbb{R}$

Dans le cas d'un système formé par une particule ponctuelle dans $\mathbb{R}$, nous étudions à l'aide du théorème spectral et du Théorème de Stone les observables de position et de quantité de mouvement.

Une « particule ponctuelle » dans l'espace unidimensionnel $\mathbb{R}$ est un système quantique caractérisé par les observations suivantes :

1- À tout ensemble $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, il est possible d'associer un appareil de mesure, c'est-à-dire : une observable $\mathcal{P}_\Delta$ représentée par un opérateur auto-adjoint P_Δ, appelée « détecteur de particule », prenant la valeur 0 ou 1 selon que la particule se trouve ou non dans l'ensemble Δ.

2- L'ensemble des opérateurs P_Δ, avec $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, constitue une famille d'opérateurs symétriques qui commutent.

3- À tout élément $a \in \mathbb{R}$, il est possible d'associer une translation sur les appareils de mesure :

$$\tau_a P_\Delta = P_{\Delta - a}.$$

Où

$$\Delta - a = \{x \in \mathbb{R} \mid x + a \in \Delta\}.$$

Cette approche passive admet un équivalent actif, dans le sens où la translation peut aussi être vue comme une opération sur les états du système :

$$U_a\psi = \psi_a, \quad \psi \in H.$$

4- Les seuls observables qui commutent avec tous les P_Δ sont les fonctions de ceux-ci.

Un espace de Hilbert séparable qui réalise les conditions 1) à 4) est l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$. L'observable détecteur $\mathcal{P}_\Delta$ est représentée par la projection :

$$(P_\Delta\psi)(x) = \chi_\Delta(x)\psi(x).$$

Pour tout $\psi \in H$ et pour $x \in \mathbb{R}$.

Interprétation de la fonction d'état ψ

La « fonction d'ondes » normalisée caractérise un état de la particule ponctuelle. Il suit du Postulat V que la valeur moyenne de l'observable $\mathcal{P}_\Delta$, qui n'est autre que la probabilité de trouver la particule dans Δ lorsqu'elle se trouve dans l'état, est donnée par :

$$< P_\Delta >=< \psi, P_\Delta\psi >= \int_\Delta |\psi|^2 \, d\mu.$$

La fonction $|\psi|^2$ représente donc la densité de probabilité d'observer la particule sachant qu'elle se trouve dans l'état représenté par ψ .

L'observable position

Forts de l'interprétation probabiliste de la fonction $|\psi|^2$, nous pouvons écrire la valeur moyenne de la position d'une particule ponctuelle sur $\mathbb{R}$ dans l'état normalisé représenté par $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mu) \setminus \{0\}$, $\|\psi\| = 1$, comme l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned} < X >_\psi &= \int_{\mathbb{R}} x \, |\psi(x)|^2 \, d\mu(x), \\ &= \int_{\mathbb{R}} x\psi(x)\overline{\psi(x)} d\mu(x), \\ &= < X\psi, \psi > . \end{aligned}$$

ou X est l'opérateur auto-adjoint défini par :

$$(X\psi)(x) = x\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sur le domaine :

$$D(X) = \{\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mu), x \mapsto x\psi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mu)\}.$$

Observable quantité de mouvement

Il découle du Premier Principe de la Thermodynamique que la quantité de mouvement est une grandeur extensive associée au groupe des translations dans l'espace (dans notre cas sur $\mathbb{R}$), qui est conservée si l'espace est homogène, c'est-à-dire : si le système est invariant par rapport aux translations de l'espace. Forts du théorème de Stone, nous pouvons déterminer le générateur infinitésimal du groupe des translations de $\mathbb{R}$.

À tout élément $t \in \mathbb{R}$, il est possible d'associer une transformation sur les états de la particule comme stipulé par la condition 3. Elle est donnée par :

$$(U_t\psi)(x) = \psi_t(x) = \psi(x-t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il est facile de voir que la famille d'opérateurs $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ forme un groupe unitaire fortement continu sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$. En vertu du théorème de Stone, nous savons qu'il existe un opérateur auto-adjoint T de sorte que :

$$U_t = e^{itT}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De plus, l'opérateur T est tel que iT est le générateur infinitésimal de $(U_a)_{a\in\mathbb{R}}$ et donc

$$iT\psi = \frac{d}{dt}|_{t=0}U_t\psi = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U_t - Id)\psi, \quad \psi \in D(T).$$

Par conséquent,Pour $\psi \in D(T)$:

$$\begin{aligned}(T\psi)(x) &= \frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{\psi(x-t)-\psi(x)}{t}, \\ &= -\frac{1}{i}\lim_{t\to 0}\frac{\psi(x-t)-\psi(x)}{-t}, \\ &= -\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\psi(x).\end{aligned}$$

Pour des questions de dimensions physiques, l'opérateur P représentant l'observable quantité de mouvement se définit alors par :

$$(P\psi)(x) = \frac{h}{i}\frac{d}{dx}\psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{Pour tout } \psi \in D(T),$$

de sorte que :

$$T = -\frac{1}{h}P, \text{et} U_a = \mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}aP} \quad , \forall a \in \mathbb{R}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Virginie Ehrlacher et Gabriel Stoltz,*Analyse spectrale*,*Cours ENPC - IMI - 2ème année*,20 juin 2015.

[2] Yann Pequignot,Boris Buffoni,François Genoud,*Théorie spectrale et Évolution en mécanique quantique*,Section de Mathématiques , Projet de semestre , Automne 2008 Dernière révision, le 8 mai 2014. YP.

[3] Stéphane Maingot , David Manceau,*Introduction à l'analyse fonctionnelle*.

[4] Laurent serlet,*Notes de cours et documents pour le master de mathématiques appliquées* ,Septembre 2004

[5] H.BREZIS,*Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications* ,Massant, (1983).

[6] Frédéric Faure,*Notes de cours sur la Mécanique quantique*,Université Joseph Fourier, Grenoble ,Master Physique M1 ,(version : 11 novembre 2015)

[7] Guillaume AUBRUN,*Théorie des Opérateurs1*,M1 Mathématiques, Université de la Réunion.

[8] Frédéric Paulin,*Compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique*,Cours de deuxième année de magistère,Année 2015-2016.

[9] Paul Laurain,*Compléments d'analyse : Théorie de la mesure et analyse spectrale*,Extrait d'un cours de M2 donné à l'automne 2013 à l'IMJ.

[10] *ANALYSE FONCTIONNELLE ET THÉORIE SPECTRALE MT404*,Année 2001-2002.

ملخص

في هذه المذكرة نقدم بعض تطبيقات النظرية الطيفية في مكانيك الكم لذلك نقوم باستخدام المؤثرات الخطية، زمرة ذات وسط ونظرية سطون ، نقدم في الفصل الأول عموميات عن المؤثرات الخطية المحدودة ثم في الفصل الثاني نقدم المؤثرات الغير محدودة كما نقوم بعرض النظرية الطيفية.

كلمات مفتاحية : مكانيك الكم ، مؤثر خطي، فضاء هلبارت ،النظرية الطيفية.

Résumé

Dans ce mémoire on donne quelque application de la théorie spectrale dans la mécanique quantique. On utilise les opérateurs linéaires, groupe à un paramètre et Théorème de Stone. On donne au chapitre premier des généralités sur les opérateurs linéaires bornés, au chapitre deuxième une contre partie des opérateurs non bornés, une exposition de la théorie spectrale et aussi considérée.

Mots-clés : Mécanique quantique, Opérateur, Espace de Hilbert, Théorie Spectrale.

Abstract

In this memory we give some application of spectral theory in quantum mechanics. Using linear operators. a group setting and Stone Theorem. It gives the first chapter on generalities about linear operators in Chapter against a second portion of unbounded operators, an exhibition of spectral theory and also considered.

Keywords : Quantum mechanics, Operator, Hilbert space, Spectral Theory .