الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :...............

Centre Universitaire

Abdelhafid Boussouf Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatiques

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

en: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Etude de la dynamique d'un modèle financier discret

Préparé par :

Ahlam Djamaa

Iman Bounehal

Soutenue devant le jury :

Encadré par	*Mr. Abdelouahab Mohamed Salah*	M. C. A
Président	*Mr. Nasr-Eddine Hamri*	Pr
Examinateur	*Mr. Rabeh Boueden*	M . A. A

Année Universitaire : 2015/2016

Remerciement

Avant tout, nous remercions le grand **Dieu** tout puissant qui donné la santé, la force, le courage et la volonté pour réaliser ce travaille.

Nous tenons à exprimer nos profondes gratitudes et nos remerciements les plus sincères à notre encadreur le Docteur **ABD ELOUAHAB MOHAMED SALAH** en premier lien sa patience, ces conseils constructifs, un deuxième lien à sa collaboration ces critique, et sa rigueurscientifique qu'ont nous permettront de mener ce travail à son terme.
Nous expriment aussi nos pro pondesremerciement à Professeur **N.Hamri** pour son soutien, son collaboration et réponse à toute la question et problème que nous en rencontrés durant l'aboration de notre travail et son aides précieuse
Nous expriment aussi nos pro pondes remerciement à Mr
R.Bouedene pour l'honneur qu'ils nous ont accordé en acceptant d'examiner notretravail et de l'enrichir par leurs propositions.
Nous remercions tous ceux qui de prés et de loin ont contribués à la réalisation de ce mémoire.
Enfin nous exprimons notre très vifs gratitude à nos parents pour son enourayanent et son frères et sœurs soutien toutes au Lang de notre cureuse universitaire et nous les dédions nous remerciement à notre frères et sœurs.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les systèmes dynamiques ont été développés au cours du 19ème siècle et maintenant, ils sont utilisés dans de très nombreux domaines : géophysique, biologie, économie, médecine,...

En mathématiques, en chimique et en physique théorique, un système dynamique est un ensemble très général de composants en interaction (un système), répartis sur plusieurs états et structurés selon certaines propriétés, il est le plus souvent régi par un ensemble d'équations différentielles ou d'équations aux differences décrivant le mouvement des composants (leur dynamique) où interviennent une classe de paramètres accessibles, ou bien un système dynamique consiste en un espace de phases dont les coordonnées décrivent l'état dynamique du système à n'importe quel moment et dont une règle dynamique spécifie la tendance future immédiate de toutes les variables d'état composant le système, donnée par la valeur présente de ces mêmes variables d'état.

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques introduit par Newton depuis 1665. Elle fournit des modèles mathématiques, pour des systèmes évoluant dans le temps et suivant des règles, généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles sont appelés systèmes dynamiques continus ou flots car les points du système évoluent en "flottant" sur des courbes continues. Dans les années 1880, Poincaré trouva commode de remplacer dans certains systèmes dynamiques ces flots par des systèmes dynamiques discrets c'est-à-dire des systèmes dans lesquels le temps évolue par ruptures de séquences régulières. Ainsi, depuis plus de cent ans, les systèmes dynamiques sont définis en deux classes : les systèmes dynamiques continus et les systèmes dynamiques discrets. Les systèmes dynamiques discrets sont généralement définis sous forme d'itérations d'une application d'un espace métrique dans lui-même. Dans ce mémoire nous étudiant souvent les systèmes dynamiques discrets.

Cette mémoire est compose d'une introduction et quatres chapitres organisés comme suite :

Dans le premier chapitre : nous présentons quelque notions importantes sur les systèmes dynamiques.

Le deuxième chapitre : est consacré aux notions de stabilité des points fixes et des points périodiques et aux bifurcations

Dans le troisième chapitre : nous donnons les différents propriétés mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement chaotique, et nous donnons quelques exemples.

En fin, on termine notre travail par un chapitre consacré à l'application des outils théoriques précédentes (points d'équilibres, stabilité, bifurcations, exposant de lyapunov, attracteur étrange) sur un modéle financier discret.

Les résultats théoriques obtenus sont confirmés par des simulations numériques.

CHAPITRE 1

NOTION SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Un système dynamique dècrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps, et décré par une fonction mathématique a deux types de variables : dynamiques et statiques, les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques, encore appelé paramétres du systéme sont fixés. Les systémes dynamiques sont classés en deux catégories :

-Systèmes dynamiques continus.

-Systèmes dynamiques discrets.

1.1 Systèmes dynamiques continus

Définition 1.1. *Un système dynamique continu est décrit par un système d'équations différentielles :*

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, \mu), x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p$$

où $t \in U \subseteq \mathbb{R}_+$ est le temps, $x : t \in I \longrightarrow x(t) \in U \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état du système, $\mathbb{R}^n$est l'éspace des phases, et $\mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p$est le vecteur de paramètres et $f$une application *de classe* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$.

Exemple 1.1. *Le système de Lorenz est défini par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} &= \sigma(v-u), \\ \dfrac{dv}{dt} &= -uw + \rho v - v, \\ \dfrac{dw}{dt} &= uv - \beta w; \end{cases}$$

où u, v *et* w *sont les variables d'état du système,* σ, ρ *et* β *sont des paramètres réels. L' espace de phase est* $\mathbb{R}^3$, *l'espace de paramètre est* $\mathbb{R}^3$.

1.1.1 Systèmes autonomes et non-autonomes

Définition 1.2. *Un système différentielle est dit autonome si* f *ne dépend pas explicitement de* t *dans ce cas on l'écrira :*

$$\dot{x} = f(x, \mu).$$

Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome.

1.1.2 Espace de phase

Définition 1.3. *On appelle espace des phases, un espace abstrait dont les axes sont les variables dynamiques du système, ou bien est une structure correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Ce peut être un espace vectoriel, une variété différentielle ou un fibré vectoriel, un espace mesurable...*

1.1.3 Portrait de phase

Définition 1.4. *le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentative dans l'espace de phase. Étant donné un système dynamique,* $\dot{x} = f(x, t)$. *Sans rèsoudre les équations, on peut toujours, à un instant t donné, représenter graphiquement (à l'aid de flèches) le champ des* $\dot{x}$ *(le champ des* *vitesses si x sont des cordonnées). La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour avoir une idée du comprtement du système.*

1.1.4 Flot

Considérons le système autonome :

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^n, f \in C^r(U), U \subseteq \mathbb{R}^n, (r \geq 1) \quad (*)$$

Définition 1.5. *On appel flot du système dynamique $(*)$ la famille d'applications :*

$$\phi_t : X_0 \in U \longmapsto X(X_0, t), t > 0$$

.

Autrement dit, étant donné un point (matériel) en X de l'espace du phases, le flot du système permet de préciser la position $\phi_t(X)$ du point après un dèplasment d'une durée t. Le flot d'un système dynamique est un point de vue globale et géométrique sur les equation diffrentielles pour t fixé, le flot est représetatife de la maniére dont l'application $X(t, X_0)$ fait évoluer un ensemble donné de point X_0 dans l'espace de phase.

Proposition 1.1. *$\phi_t(x_0)$ posséde les proprétés suivantes :*

1. *$\phi_t(x_0)$ est de classe C^r,*
2. *$\phi_0(x_0) = x_0$,*
3. *$\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$.*

1.2 Système dynamique discret

Une modélisation discrète du temps peut être imposée soit par la nature même du processus soit par le besoin de "discrétiser" un modèle à temps continu pour le traiter numériquement. L'évolution du système est observée en choisissant certains moments du temps que nous allons supposer équidistants. Dans tous les cas le choix de l'unité de temps représente une partie importante de modélisation du systéme. Dans le modèle le temps sera donc noté par une variable n qui prend les valeurs entières $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Voici un exemple élémentaire d'un processus dynamique à temps discret.

Exemple 1.2. *Supposons que nous avons une population de lapins qui au début de notre expérience compte x_0 lapins. Nous savons qu'en une année la population augmente de 10%. Notons par x_n le nombre de lapins de la n-ème année. Nous voulons décrire l'évolution de x_n.*
Après une année on obtient x_1 lapins.

$$x_1 = x_0 + 0.1x_0 = 1.1x_0,$$

$$x_2 = x_1 + 0.1x_1 = 1.1x_1,$$

Au cours de la deuxième année la quantité de lapins augmente de la même façon. En continuant on trouve pour une année quelconque

$$x_{n+1} = x_n + 0.1x_n = 1.1x_n.$$

Ainsi nous pouvons remarquer que pour chaque période de temps

$$x_{n+1} = p(x_n),$$

avec

$$p(x) = 1.1x.$$

Autrement dit, la dynamique de la population peut être décrite, comme dans l'exemple *précédent, par l'itération d'une fonction* $p(x)$*. En connaissant cette fonction nous pouvons reconstituer l'état du système a chaque moment du temps.*

Définition 1.6. *Dans le cas général un système dynamique discret est décrit par un système d'équations aux différences finies, autrement dit, par une récurrence.*

Exemple 1.3. *L'application de Hénon :*

$$\begin{cases} x_{n+1} &= & y_n + 1 - ax_n^2, \\ y_{n+1} &= & bx_n, \end{cases}$$

où a *et* b *sont des paramètre réels. L'espace des phases est* $\mathbb{R}^2$ *et l'espace des paramètres est* $\mathbb{R}^2$*.*

Définition 1.7. *Soit* $D \subset \mathbb{R}^m$ *un ensemble et* $f : D \longmapsto D$ *une fonction continue et dérivable. On appelle "SDD" d'ordre 1 en dimension* m *la récurrente suivante :*

$$x(0) = x_0 \in D;\ x_{n+1} = f(x_n), n \geq 0$$

Si la fonction f est dépend explicitement de l'état x et de la variable du temps n alors le système s'appelle non-autonome :

$$x(0) = x_0, x_{n+1} = f(n, x_n), n \geq 0$$

1.2.1 Systémes dynamiques discrets d'ordre supérieur

Ces systèmes sont décrits par des équations aux différences finies d'ordre $r \geq 2$ autonomes ou non :

$$x_{n+r} = f(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+r-1}), n \geq 0. \tag{1.1}$$

• Il existe une procédure simple qui permet de transformer en un système d'ordre 1 tout système dynamique d'ordre supérieur. Pour cela il suffit de définir un nouvel espace de phases formé des vecteurs de la forme :

$$y_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+r-1} \end{pmatrix}$$

La dimension de cet espace sera mr. Dans cet espace on définit l'application $g : \mathbb{R}^{mr} \longmapsto \mathbb{R}^{mr}$ par la formule :

$$g(y) = \begin{pmatrix} g_1(y) \\ g_2(y) \\ \vdots \\ g_r(y) \end{pmatrix}$$

$$g_k(y) = \begin{pmatrix} g_{k.m+1} \\ g_{k.m+2} \\ \vdots \\ g_{k.m+m} \end{pmatrix}$$

tel que $k = 1, \ldots, r-1$

$$g_r(y) = f(y)$$

Alors, l'équation (1.1) est équivalente à l'équation suivante pour y_n :

$$y_{n+1} = g(y_n)$$

Dans certains cas (surtout linéaires) cette transformation permet d'appliquer aux systèmes d'ordre supérieur les mêmes méthodes d'analyse qu'aux systèmes d'ordre 1.

1.2.2 Point fixe et point périodique

Définition 1.8. *On appelle "point fixe" d'un système dynamique tout point x_s tel que $x_s = f(x_s)$. Parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou points d'équilibre.[5]*

Exemple 1.4. *Soit le système défini par :*

$$x_{n+1} = x_n^2.$$

Les points $x = 1$ est $x = 0$ sont les points fixes de ce système, parce que $1^2 = 1$ et $0^2 = 0$. En général, on trouve les points fixes en résolvant l'équation $f(x) = x$.

Les trois théorèmes suivants donnent respectivement l'existence et l'unicité des points fixes.

Théorème 1.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a, b]$. Supposons que*

$$|f^{'}(x)| < 1,\ \forall x \in [a, b]$$

Alors la fonction $f(x)$ a un unique point fixe x_s tel que $f(x_s) = x_s$ dans l'intervalle $[a, b]$.

Théorème 1.2 (*Théorème de Brouwer*)**.** *Toute application continue $f : \bar{B}^n \to \bar{B}^n$ avec $\bar{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \|x\| \leq 1\}$, admet un point fixe c'est-à-dire l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans $\bar{B}^n$.*

Théorème 1.3 (*Théorème de contraction de Banach*)**.** *Soit $f : \bar{B}^2 \to \bar{B}^2$ application continue, où $\bar{B}^2$ est le disque unitaire fermé ($\bar{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \|x\| \leq 1\}$).*
Supposons que :

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \lambda|x_1 - x_2|.$$

pour touts vecteurs $x_{i,j} \in \bar{B}^2$ et un certain $0 < \lambda < 1$. Alors il exist un point fixe uniqe $x_s \in \bar{B}^2$. De plus on a :

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_s \text{ pour tout } x \in \bar{B}^2.$$

Définition 1.9. *Un point x est dit périodique pour f s'il existe $p > 0$ tel que $f^p(x) = x$ et on définit la période comme étant le plus petit des entiers p strictement positifs vérifiant*

$f^p(x) = x$ *où* $f^p(x) = \underbrace{f(f(f(f(...f)}_{pfois}(x))...)))$

Remarque 1.4. *Tout point fixe, est un point périodique de période* $p = 1$.

1.2.3 Notion d'orbite

Nous allons étudier dans la suite seulement les systèmes d'ordre 1. Notre but sera décrire l'évolution des états du système en fonction des conditions initiales.
Nous aurons donc besoin d'introduire la notion de trajectoire ou orbite du système.
Soit un (SDD) d'ordre 1 défini par l'itération d'une fonction $f(x)$:

$$x(0) = x_0,\ x_{n+1} = f(x_n),\ n \geq 0. \tag{1.2}$$

Définition 1.10. *Étant donné le point initial* x_0*, on appelle orbite (ou trajectoire) du système(1.2) la suite :*

$$O(x_0) = \{x_0, x_1 = f(x_0), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots\}.$$

Exemple 1.5. *Soit un (SDD) en dimension* 1 *défini par la fonction* $f(x) = x^2$ *sur l'intervalle* $[0, +\infty[$*. Prenons pour condition initiale* $x_0 = \frac{1}{2}$.
L'orbite correspondante est :

$$x_0 = \frac{1}{2},$$

$$x_1 = f(x_0) = \frac{1}{4},$$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{1}{16}, ...$$

Remarquons que $x_n = f(x_{n-1}) = f^{(n)}(x_0) = (\frac{1}{2})^{2^n} \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$.
Prenons un autre point initial, $x_0 = 2$*. Alors*

$$x_0 = 2,$$

$$x_1 = f(x_0) = 4,$$

$$x_2 = f(x_1) = 16, ...$$

Dans ce cas, quand $n \longrightarrow +\infty$ *on a :* $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0) = 2^{2^n} \longrightarrow +\infty$.
Et enfin, si l'on choisit pour point initial $x_0 = 1$ *on voit que*

$$O(x_0) = \{1, 1, x_n = 1^{2^n} = 1, \ldots\}$$

On observe donc ici trois comportements différents du même système en fonction du point initial choisi. Ainsi nous pouvons parler des propriétés d'un système, en décrivant toutes ses orbites possibles.

Définition 1.11. *Une orbite* $O(x_0)$ *est dit périodique s'il existe un* $p > 0$ *t.q :*

$$x_{n+p} = x_n, \ \forall n \geq 0. \tag{1.3}$$

Une orbite périodique $O(x_0)$ *est toujours une suite de points périodiques. Tous ces points s'appellent points périodiques de période p du système*(1.2).

Définition 1.12. *Une orbite est dite éventuellement périodique s'il existe un* $p > 0$ *et un* $N > 0$ *tel que l'égalité(1.3) est vérifiée pour tout* $n > N$.

Définition 1.13. *Le plus petit nombre p qui vérifie (1.3) s'appelle "période fondamentale " de l'orbite* $O(x_0)$.

1.2.4 Étude graphique des systèmes dynamiques

Nous allons parler dans cette partie de moyens très simples de visualiser le comportement de certains systèmes. Ces représentations nous permettront de mieux comprendre les phénomènes que nous allons étudier.

Systèmes dynamiques discrets de dimension 1

Soit un (SDD) de dimension 1 défini par une fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x(0) = x_0,\ x_{n+1} = f(x_n)$$

On peut visualiser sur le plan (x, y) l'évolution d'une orbite $O(x_0)$ en utilisant le graphe de la fonction f et la droite $y = x$. Prenons par exemple la fonction

$$f(x) = 4.5x - 3.5x^2$$

Nous allons représenter l'orbite qui commence dans le point $x_0 = 0.2$. Traçons d'abord le graphe de la fonction f et la droite $y = x$ (voir la figure 1.1). Sur le plan (x, y) l'orbite commence dans le point $(x_0, 0)$. Nous traçons maintenant une ligne verticale du point $(x_0, 0)$ jusqu'au graphe de la fonction $f(x)$. Le point d'intersection est exactement le point (x_0, x_1) avec $x_1 = f(x_0)$. Ensuite, nous traçons une ligne horizontale à partir du point (x_0, x_1) jusqu'au point (x_1, x_1) d'intersection avec la droite $y = x$.

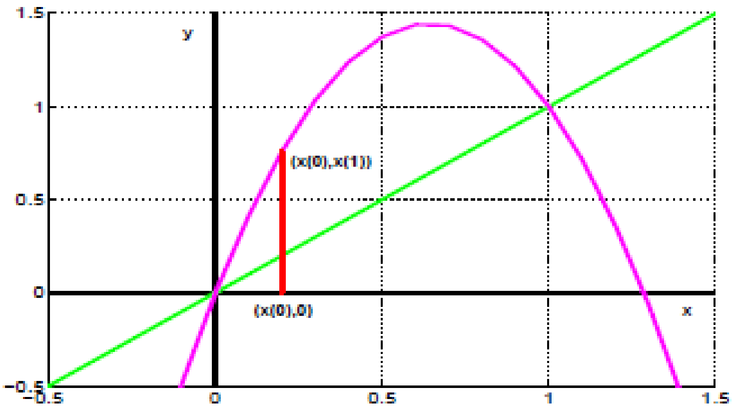

FIGURE 1.1 – L'orbite du système $x_n = 4.5x_n - 3.5x_n^2$: premier pas.

A partir de ce point nous traçons encore une ligne verticale vers le graphe de la fonction $f(x)$ pour trouver le point suivant $x_2 = f(x_1)$ (voir la figure (1.2)). En continuant ainsi nous pouvons suivre l'évolution de l'orbite sur autant de points que nous le voulons. Cette représentation graphique des systèmes est particuliérement utile parce qu'elle permet de voir clairement les points fixes (ce sont les points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ et de la droite).

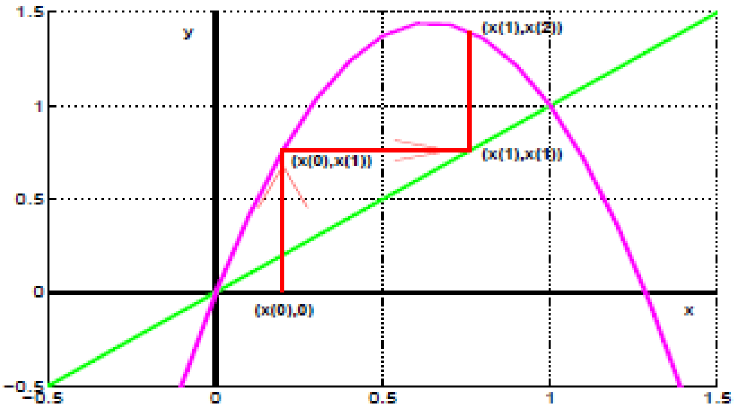

FIGURE 1.2 – L'orbite du système $x_n = 4.5x_n - 3.5x_n^2$: deuxième pas.

Systèmes dynamiques de dimension 2 (Portraits de phases)

Un système dynamique discret de dimension 2 est décrit par deux équations :

$$x_1(n+1) = f_1(x_1(n), x_2(n))$$

$$x_2(n+1) = f_2(x_1(n), x_2(n))$$

Pour étudier ces systèmes on utilise souvent des portraits de phases. Pour tracer le portrait de phases d'un système dynamique défini par l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

on choisit sur le plan une grille de points (x_1, x_2) assez dense et l'on trace dans chaque point la direction du départ de l'orbite qui commence dans ce point. Cette direction pour un point initial

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

est définie par le vecteur

$$X(1) - X(0) = f(X(0)) - X(0)$$

Cela donne un aperçu (voir le figure 1.3) de toutes les orbites possibles du système. Si l'on s'intéresse à une orbite particulière, on peut la retrouver sur le portrait de phases, en suivant les directions du champ de vecteurs tracées à partir du point initial de l'orbite.

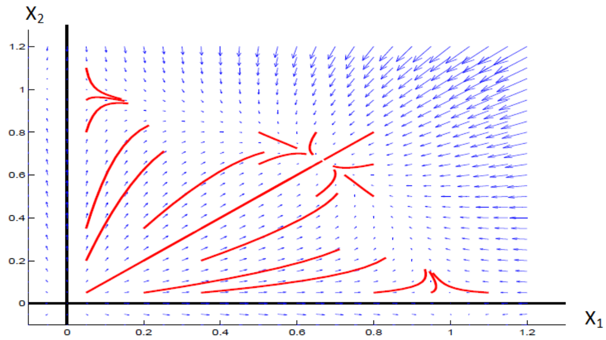

FIGURE 1.3 – Le portrait de phases d'un système dynamique non-linéaire.

On peut observer à l'aide d'un portrait de phases les points fixes du système. Ce sont les points tels que $f(x_s) = x_s$. Donc, le vecteur de direction du portrait de phases doit être nul dans un point fixe. Le comportement des orbites du système autour d'un point fixe est important. Le portrait de phases nous permet une première analyse qualitative de ce comportement. Sur la figure (1.3) sont tracées quelques orbites commençant dans des points proches des points fixes.

Sur un portrait de phases on peut également apercevoir des orbites périodiques, si le système en a. Dans ce cas, on peut distinguer des courbes closes formées par un groupe de vecteurs de directions.

1.3 Les attracteurs

Lors de l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système dynamique, on trouve des objets dans l'espace des phases qui attirent un grand nombre de solutions issues de conditions initiales différentes. Ces objets sont appelés attracteurs et ensembles attractantes.

Définition 1.14 (ensemble invariant). *Soit A un sous ensemble de l'espace des phases $\mathbb{R}^n$, A est dit invariant (resp positivement invariant) par un flots ϕ_t, si pour tout t dans $\mathbb{R}$ (resp dans $[0, +\infty]$), $\phi_t(A)$ est inclus dans A.*

Définition 1.15 (ensemble attractant). *Un ensemble invariant fermé A est un ensemble attractant s'il existe un voisinage U tel que :*

$$\begin{cases} F(U) \subset U \\ \forall x \in U,\ F^{(n)}(x) \to A, \quad pour\ \ n \to +\infty \end{cases}$$

2)Attracteur

Définition 1.16. *Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteur. En général, un attracteur est défini comme une sous partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.*

Attracteur dans le cas discret

Définition 1.17 (Guckenheimer - Holmes). *Soit (D, f) un système dynamique discret, une sous partie A de D est appelée attracteur si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :*

1. *A est fermée,*

2. *A est positivement invariante,*

3. *A est attractive, c'est-a-dire, il existe un voisinage ouvert U de A tel que :*

(a) U est positivement invariant,

(b) U est attiré par A : $\forall u \in U$,

$$\lim_{t \to +\infty} d(f^t(u), A) = 0.$$

1.3.1 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux type attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1) Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

a) **points fixes** : L'attracteur "points fixes" est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante, satisfait $f(x) = x$.

b) **points périodiques** : L'attracteur "points périodiques" est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.

c) **Courbe invariant** : Les courbes invariantes des systèmes discretes sont analogues au tore des flots contunies, on peut reduire la dynamique sur un courbe fermée invariant à cel d'une application du cercle unité dans lui même appelé "cercle-application".
La dynamique sur la courbe fermé peut être complexe, en particulier lorsque les paramétres varies ces courbes perd sa régularitè et peut se transformée en des ensembles invariants.

2) Attracteurs chaotiques(ou étrange)

Définition 1.18. *Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors A est appelé attracteur étrange si'l est chaotique (l'attracteur vérifié la notion de sensibilité aux conditions initiales).*

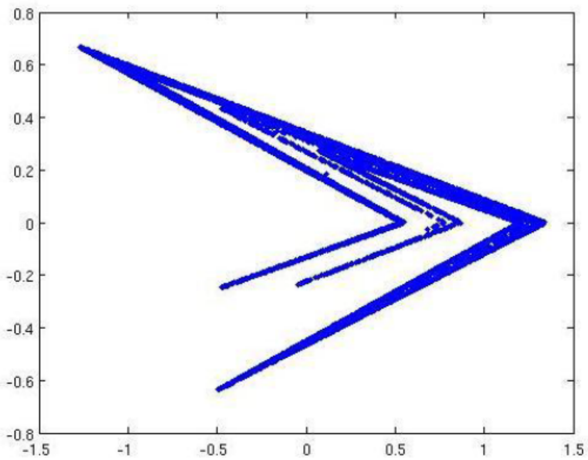

FIGURE 1.4 – Attracteur étrange de Lozi.

Les caractéristiques d'un attracteur étranges

- La dimension d de l'attracteur est fractale (non entier) avec $0 < d < n$, ou n est la dimension de l'espace des phases.
- Sensibilité aux conditions initiales : deux trajectoires initialement voisines finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre.
- Dans l'espace des phases l'attracteur est de volume nul.

1.3.2 Bassin d'attraction

On rappelle que tout voisinage ouvert qui satisfait les conditions $3.a$ et $3.b$ dans la définition (1.17) est appelée voisinage attiré par A. Il faut remarquer que bien qu'il existe un voisinage attiré U, on ne peut pas affirmer qu'il est unique : en effet A peut admettre plusieurs voisinages attires par lui même.

On donne quelques définitions du bassin d'attractions :

Définition 1.19. *On appelle bassin d'attraction $B(A)$ de A le plus grand voisinage attiré par A, c'est-à-dire*

$$B(A) = \bigcup \{U \in V(A) : U \textit{est un voisinage attiré par } A\},$$

avec $V(A)$ l'ensemble de tous les voisinages de A.

Définition 1.20. *Le bassin d'attraction $B(A)$ de A, c'est l'ensemble des points dont les trajectoires convergent asymptotiquement vers A, donc*

$$B(A) = \bigcup_{t<0} \varphi_t(U)$$

Voici quelques notes et remarques intéressantes sur le bassin d'attraction :

- Le comportement qualitatif d'un système dynamique dépend fondamentalement du bassin d'attraction.
- La frontière d'un bassin peut être lisse ou fractale, la fractalité est une conséquence du mouvement chaotique des orbites sur la frontière.
- Les frontières d'un bassin peut avoir de types qualitativement différents. Par exemple la nature d'un bassin peut changer à partir d'une courbe simple lisse à un autre fractale.

CHAPITRE 2

STABILITÉS ET BIFURCATIONS

2.1 Stabilité

L'étude du comportement d'un système dynamique discret, correspond à l'étude de stabilité des points fixes et des points périodiques.

2.1.1 Stabilité des points fixes

Soit un SDD d'ordre 1 de dimension m défini par une fonction $f : D \to D$. Ici $D \subset \mathbb{R}^m$ est un intervalle. Supposons que ce système possède un point fixe x_s.

Définition 2.1. *L'équilibre est stable si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\delta > 0$ et un $n_0 > 0$ telle que :*

$$/x_0 - x_s/ < \delta \Rightarrow /x_n - x_s/ < \varepsilon$$

Définition 2.2. *L'équilibre est globalement asymptotiquement stable (ou globalement attractif) si pour chaque $x_0 \in D$*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_s$$

Définition 2.3. *L'équilibre est localement asymptotiquement stable (ou localement attractif) s'il existe $\eta > 0$, telle que pour chaque*
$x(0) \in D \cap B(x_0, \eta)$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_s$$

Définition 2.4. *Soit x_s un point fixe du SDD défini par une fonction $f(x)$. On dit que x_s est un point répulsif (instable) s'il existe un $\varepsilon > 0$, tel que : $\forall x_0 \in U_\varepsilon(x_s)$ il exite $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n > n_0$*

$$/x_n - x_s/ > \varepsilon$$

Définition 2.5. *Soit x_s un point fixe d'un système dynamique défini par une fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Supposons que f est dérivable au point x_s. On dit que x_s est un point selle si dans le spectre du Jacobienne $Df(x_s)$ de la fonction f une partie des valeurs propres sont de valeur absolue inférieure à 1 est les autres sont de valeur absolue supérieure à 1.*

2.1.2 Stabilité des points périodiques

Définition 2.6. *Soit $f : R \to R$ une application définissant un SDD. Soit $O(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{p-1}\}$ une orbite périodique de période p de ce système d'ordre 1. On dit que cette orbite est attractive (ou répulsive) si chacun de ses points est un point fixe attractif (respectivement un point répulsif) de l'application $f^{(p)}$.*

Définition 2.7 (point hyperbolique)**.** *Le point x_s est dit hyperbolique si aucun des multiplicateurs caractéristiques (les valeurs propres) n'est de module égal à* 1.

Théorème 2.1 (Grobman - Hartman)**.** *[20] Si un système dynamique discret admet un point fixe hyperbolique x_s dans $\mathbb{R}^2$, alors il existe un homéomorphisme h (application continue bijective et d'invers continue) défini localement autour de x_s, tel que :*

$$f = h^{-1} \circ Df \circ h$$

On dit alors que f et Df sont topologiquement conjugués.

2.1.3 Étude de la stabilité d'un SDD de dimenssion 1

Théorème 2.2 (Critères de stabilité des points fixes)**.** *Soit $I = [a, b]$ un intervalle. Soit $f : I \to I$ une fonction continue sur I ayant un point fixe $x_s \in I$. Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la fonction f est dérivable sur tout le voisinage $U_\varepsilon(x_s)$ du point x_s et que la dérivée de la fonction f est continue au point x_s. Alors le point x_s est :*
– Attractif si

$$\left| \frac{d}{dx} f(x_s) \right| < 1$$

– Répulsif si

$$\left| \frac{d}{dx} f(x_s) \right| > 1$$

Exemple 2.1. *Considérons la fonction*

$$f(x, a, b) = ax^3 - bx$$

Quel que soit le choix des paramètres a et b le point $x_s = 0$ est un point fixe du système. La dérivée de la fonction $f(x)$ est

$$\frac{d}{dx} f(x) = 3ax^2 - b$$

La fonction est dérivable dans tout un voisinage du point fixe $x_s = 0$.
La dérivée calculée au point x_s est égale à :

$$\frac{d}{dx} f(x_s) = -b$$

Alors, d'après les théorèmes 2.2 si $|b| > 1$, x_s est un point répulsif et si $|b| < 1$, x_s est un point attractif

Situation indéterminée : $|\frac{d}{dx} f(x_s)| = 1$ On remarque que les théoréme 2.2 et ne disent rien sur le comportement du système autour d'un point fixe si la dérivée de la fonction $f(x)$ dans ce point est égale à ± 1.

Dans ce cas, il ya d'autre théoréme qui déduire la nature de point fixe.

Théorème 2.3. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \to I$ une fonction continue et dérivable sur I. Soit $x_s \in I$ un point fixe de l'application f tel que :*

$$|\frac{d}{dx} f(x_s)| = 1$$

Supposons qu'il existe un voisinage U_δ du point x_s tel que la seconde dérivée $f^{''}$ existe sur tout ce voisinage.

i) Si $f^{''}(x_s) > 0$ ($f^{'}$ est strictement croissante) alors x_s est un point semi-stable à gauche.

ii) Si $f^{''}(x_s) < 0$ ($f^{'}$ est strictement décroissante) alors x_s est un point semi-stable à droite.

iii) Si $f^{''}(x_s) = 0$ ($f^{'}$ a un point d'extremum local) et si la troisième dérivée existe alors :

iii).1 si $f^{'''}(x_s) < 0$ (maximum local) x_s est un point attractif faible.

iii).2 si $f^{'''}(x_s) > 0$ (minimum local) x_s est une source faible.

Théorème 2.4 (Critères de stabilité des points périodiques)**.** *Soient $I = [a, b]$ un intervalle et $f : I \to I$ une fonction continue sur I. Supposons que le SDD défini par la fonction $f(x)$ possède une orbite périodique $O(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{p-1}\} \subset I$ de période p. Supposons en plus qu'autour de chaque point de l'orbite $x(i) \in O(x_0), i = 0, 1, ..., p-1$ il existe un voisinage $U_{\delta_i}(x(i)) \subset I$ tel que la fonction $f(x)$ est dérivable dans ce voisinage est que sa dérivée est continue en $x(i)$. Alors*
l'orbite $O(x_0)$ est répulsive si :

$$\left|\frac{d}{dx} f^p(x_0)\right| = \left|\prod_{j=0}^{p-1} f^{'}(x(j))\right| > 1$$

Le cas est indéterminé si :

$$\left|\frac{d}{dx} f^p(x_0)\right| = \left|\prod_{j=0}^{p-1} f^{'}(x(j))\right| = 1$$

l'orbite $O(x_0)$ est attractive si :

$$\left|\frac{d}{dx}\, f^p(x_0)\right| = \left|\prod_{j=0}^{p-1} f'(x(j))\right| < 1$$

2.1.4 Étude de la stabilité d'un SDD de dimenssion m

Théorème 2.5 (Critère de stabilité du point fixe)**.** *Soient $U \in \mathbb{R}^m$ un ensemble ouvert et $f : U \to U$ une application continue sur cet ensemble. Supposons que le système dynamique défini par la fonction f possède un point fixe $x_s \in U$. Supposons ensuite qu'il existe un voisinage $U_\varepsilon(x_s)$ du point fixe tel que la fonction f est dérivable et que sa dérivée $Df(x)$ est continue sur ce voisinage, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que*

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|Df(x) - Df(y)\| < \varepsilon$$

Alors
− Si toutes les valeurs propres de la matrice $Df(x_s)$ ont les valeurs absolues inférieure à 1 le point x_s est un point fixe atractif.
− Si la valeur absolue d'une valeur propre est supérieure à 1, le point x_s est un point fixe répulsif.

Théorème 2.6 (Critères de stabilité des points périodiques)**.** *Soit x le point périodique d'un cycle d'ordre p. Si le spectre de la matrice $Df^p(x)$ est contenu à l'intérieur du cercle unité, le cycle est stable, si une des valeurs propres a un module plus grand que un, le cycle est instable.*

2.1.5 Critère de Jery

Le critère de Jury est un test algébrique (analogue au critère de Routh - Hurwitz dans le cas continue), qui détermine si les racines d'un polynôme sont situe dans le cercle unité.

Soit l'équation caractéristique suivante :

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

Avec $a_0 > 0$.

Tabl de Jery

Rang	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	$\cdots$	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	a_0
2	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	b_0	
4	b_0	b_1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	$\cdots$	c_0		
6	c_0	c_1	$\cdots$	$\cdots$	c_{n-2}		
	$\cdots\cdots\cdots$						
	$\cdots\cdots\cdots$						
	$\cdots\cdots\cdots$						
$2n-3$	q_2	q_1	q_0				

Avec

$$\mathrm{b}_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$$

$$\mathrm{c}_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-2$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{q}_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2$$

Le système est stable si :

1. $|a_n| < a_0$

2. $P(z)|_{z=1} > 0$

3. $P(z)|_{z=-1} > 0$ pour n pair et $P(z)|z = -1 < 0$ pour n impair

4.
$$|b_{n-1}| > |b_0|$$
$$|c_{n-2}| > |c_0|$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|q_2| > |q_0|$$

Exemple 2.2. *L'équation caractéristique :*

$$P(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08 = 0$$

avec $a_0 = 1$, $a_1 = -1.2$, $a_2 = 0.07$, $a_3 = 0.3$, $a_4 = -0.08$

Nous avons

1. $|a_n| = |a_4| = 0.08 < a_0 = 1 \Rightarrow$ *premiére condition est satisfie.*

2. $P(1) = 1 - 1.2 + 0.07 + 0.3 - 0.08 = 0.09 > 0 \Rightarrow$ *deuxième condition est satisfie.*

3. $P(-1) = 1 + 1.2 + 0.07 - 0.3 - 0.08 = 1.89 > 0 \Rightarrow$ *troisième condition est satisfie.*

4. Tabl de Jery

$$\mathrm{b}_3 = \begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix} = 0.0064 - 1 = -0.9936$$

$$\mathrm{b}_2 = \begin{vmatrix} a_n & a_1 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix} - 0.08 \times 0.3 + 1.2 = 1.176$$

Les eléments sont : $b_1 = -0.0756$, $b_0 = -0.204$, $c_2 = 0.946$, $c_1 = -1.184$,

$c_0 = 0.315.$

On trouve :

$$|b_3| = 0.9936 > |b_0| = 0.204$$
$$|c_2| = 0.946 > |c_0| = 0.315$$

Tous les conditions de critére de Jery sont satisfis, alors le système est stable.

2.2 Nature des singularités

pour caractériser la nature des singularités (points fixes et orbites), on introduit la notion des multiplicateurs caractéristiques :

(a) Si la dimension de la récurrence $p = 1$, le multiplicateur d'un point fixe x_s est $S = f^{'}(x_s)$ et le multiplicateur d'un cycle d'ordre n, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est

$$S = \prod_{i=1}^{n} f^{'}(x_i)$$

Un point fixe ou un cycle est dit attractif si $|S|< 1$ et répulsif si $|S|> 1$.

(b) Si $p > 1$, le multiplicateur d'un point fixe x_s ou d'un cycle d'order n sont les valeurs propres de la matrice jacobienne de $f(x_s)$ ou de $f^n(x_i),\ i = 1, ..., n.$

(b.1) Si $p = 2$, on associe à un point fixe ou à un cycle, deux multiplicateurs $S_i(i = 1, 2)$ qui sont les valeurs propres de la linéarisation de f ou de $f^n(n = 1, 2, ...)$ en ces singularités.

On distingue alors les singularités suivantes :

Col : S_1 et S_2 sont réels : $|S_1| < 1$ et $|S_2| > 1$ Un col est un point instable :

– de type 1 si $S_1 > 0$ et $S_2 > 0$,

– de type 2 si $S_1 > 0$ et $S_2 < 0$(ou $S_1 < 0$ et $S_2 > 0$),

– de type 3 si $S_1 < 0$ et $S_2 < 0$;

La figure (2.1) illustre une trajectoire dans le cas d'un col de type 1.

Noeud : S_1 et S_2 sont réels

– stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2$,

– instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2$,

Comme pour le col, le noeud peut être de type $1, 2$ ou 3.

La figure (2.1) illustre une trajectoire dans le cas d'un noeud de type 2 ;

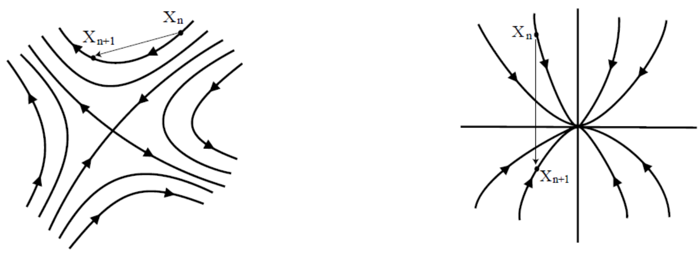

FIGURE 2.1 – A gauche : Col de type 1, a droite : Noeud de type 2

Foyer : S_1 et S_2 sont conjugée et $\rho = |S_i|,\ i = 1, 2$,

– stable si $\rho < 1$,

– instable si $\rho > 1$, $i = 1, 2$.

Si $Re(S_i)_{i=1,2} > 0$ foyer de type 1.

Si $Re(S_i)_{i=1,2} < 0$ foyer de type 2.

(b.2) Si $p = 3$ il ya trois multiplicateurs $S_i (i = 1, 2, 3)$ qui sont les valeurs propres d'un point fixe ou d'un cycle dans $\mathbb{R}^3$.

Col : S_1, S_2 et S_3 sont réels

– de type 1 si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2$ et $|S_3| > 1$,

– de type 2 si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2$ et $|S_3| < 1$,

Col-foyer : S_1 et S_2 sont complexes conjugées, et S_3 est réel

– de type 1 si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2$ et $|S_3| > 1$,

– de type 2 si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2$ et $|S_3| < 1$,

Noeud : S_1, S_2 et S_3 sont réels

– stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$

– instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2, 3$,

Noeud-foyer : S_1 et S_2 sont complexes conjugées, et S_3 est réel

– stable si $|S_i| < 1$, $i = 1, 2, 3$

– instable si $|S_i| > 1$, $i = 1, 2, 3$

2.3 Bifurcations

Dans cette section, le comportement de bifurcation des systèmes discret est analysé, de la même manière que dans les systèmes continu, les bifurcations fondamentaux unidimensionnels de point fixe sont étudiées est : bifurcation transcritique, bifurcation selle-noeud, bifurcation fourche, et le nouveau concept est la bifurcation par doublement de période. Pour un systèmes dynamique discret de dimension deux (ou plus), on peut avoir la bifurcation de Neimark-Sacker.

Avant l'étude des différents types de bifurcation nous allant presenter quelques définitions.

Définition 2.8. *La bifurcation signifie un changement qualitatif de la dynamique du système, qui résulte du changement d'un des paramètres du système. par exemple, déstabilisation d'un équilibre stable, apparition ou disparition d'un cycle ou d'un attracteur, ...*

La valeur du paramètre pour laquelle la bifurcation se produit est nommée le point de bifurcation.

Définition 2.9. *Une famille d'applications $f_\mu : X \to X$ dépendant d'un paramètre μ admet une bifurcation en μ_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe μ appartenant à $[\ \mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$ tel que f_μ et f_{μ_0} ne sont pas topologiquement conjuguées.*

Proposition 2.1. *L'application f_μ a une bifurcation en μ_0 si et seulement s'il existe un point fixe x_s de f_{μ_0} tel que $f'_{\mu_0}(x_s) = \pm 1$.*

Il existe deux classes principales de bifurcations :

a) Bifurcations locales qui peuvent être analysés entièrement par des changements dans les propriétés de stabilité locales (équilibres , orbites périodiques ou d'autres ensembles invariants comme paramètres traversent seuils critiques).

Des exemples des bifurcations locales :

- Bifurcation Selle-noeud.
- Bifurcation transcritique.
- Bifurcation de fourche (Pitchfork en englais).

– Bifurcation par doublement de Période (bifurcation de Flip).
– Bifurcation de Neimark-Sacker.

b) Bifurcations globales Qui se produisent souvent lorsque les plus grands ensembles invariants du système entrent en collision avec l'autre, ou avec équilibres du système. Ils ne peuvent pas être détectés uniquement à une analyse de la stabilité des équilibres (points fixes).
Des exemples des bifurcations globales :
– Bifurcation homocline dans lequel un cycle limite entre en collision avec un point selle.
– Bifurcation hétéroclinique dans laquelle un cycle limite entre en collision avec deux ou plusieurs points selles.
– Bifurcation de période infini dans laquel un noeud et un point selle stable se produisent simultanément sur un cycle limite.

Branche de point fixe

Définition 2.10. *On appel branche de point fixe toute application continue $\gamma : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie la condition :*

$$f(\mu, \gamma(\mu)) = \gamma(\mu); \forall \mu \in I.$$

Point de bifurcation

Définition 2.11. *Soit une famille de SDD de dimension 1 dépendant d'un paramètre réel $\mu \in I$ tel que :*

$$x(0) = x_0, x_{n+1} = f(\mu, x_n), n = 1, 2, 3, ...$$

Un point $\mu_0 \in I$ s'appelle point de bifurcation de cette famille de systèmes s'il existe au moins deux branches différentes de point périodique qui se croisent en le point μ_0. Autrement dit, si le point μ_0 vérifie les conditions suivantes :

i) $\exists\ \gamma_1(\mu) : I_1 \to \mathbb{R}$ et $\exists\ \gamma_2(\mu) : I_2 \to \mathbb{R}$ deux branches de point périodique de f

tels que :

$$\gamma_1(\mu_0) = \gamma_2(\mu_0)$$

ii) $I_1 \cap I_2 \neq \{\mu_0\}$ *et* $\gamma_1(\mu) \neq \gamma_2(\mu)$ *pour tout* $\mu \in I_1 \cap I_2 \backslash \{\mu_0\}$.

Diagramme de bifurcation En mathématiques, en particulier dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation indique les valeurs visités ou approchés asymptotiquement (points fixes, orbites périodiques ou attracteurs chaotiques) d'un système en fonction d'un paramètre de bifurcation. Il est habituel de représenter des valeurs stables avec une ligne solide et des valeurs instables avec une ligne en pointillés, diagrammes de bifurcation permettent la visualisation de la théorie des bifurcations.

Définition 2.12 (Codimension)**.** *La codimension d'une bifurcation est le nombre de paramètres qui doivent être modifiés pour que la bifurcation se produire. Ceci correspond à la codimension de l'ensemble des paramètres pour lequel la bifurcation se produit dans l'espace rempli des paramètres. bifurcations noeud-selle et bifurcations de Hopf sont les seuls bifurcations locales génériques qui sont vraiment de codimension un (les autres ayant tous codimension ultérieure). Cependant, bifurcation transcritiques et bifurcation de fourche sont également souvent considérés de codimension un, parce que les formes normales peuvent être écrites avec un seul paramètre.*

2.3.1 Etude des différents types de bifurcations locales d'un système dynamique discret

Nous allons étudier des familles du systèmes dynamiques dépendant d'un paramètre réel $\mu \in \mathbb{R}$:

$$x(0) = x_0,\ x_{n+1} = f(\mu, x_n),\ n = 1, 2, 3, ...$$

Le but est d'observer les changements éventuels de la dynamique d'un système en fonction des changements de ses paramètres. Intuitivement, le changement de la dynamique signifie le changement du nombre des points fixes ou de leur caractère (attractivité, répulsivité, etc). Si au passage d'une valeur du paramètre un tel changement se produit on dit que le système passe par un point de bifurcation.

1) Bifurcation transcritique

Ce type de bifurcation est caractérisé par un échange de stabilité de deux solutions d'équilibre. Le système a initialement une solution d'équilibre stable et une solution d'équilibre instable. Lorsqu'un paramètre varie et atteint une valeur critique, la solution d'équilibre stable devient instable, tandis que l'équilibre instable devient stable.

Le diagramme de cette bifurcation est illustrée sur la figure (2.2).

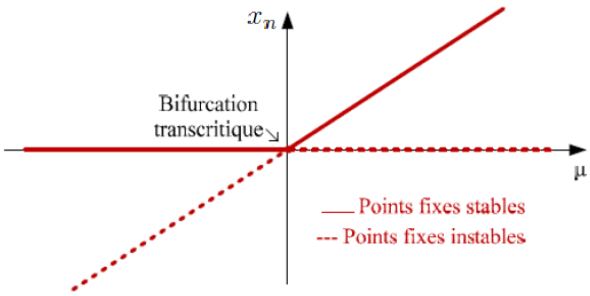

FIGURE 2.2 – Diagramme de bifurcation transcritique.

Théorème 2.7. *Soit une famille de fonction $f(\mu, x)$. Supposons qu'il existe un couple (μ_0, x_s) tel que le système*

$$x_{n+1} = f(\mu_0, x_n)$$

a un point fixe en x_s :

$$f(\mu_0, x_s) = x_s$$

et que

$$\frac{df}{dx}(\mu_0, x_s) = 1$$

Supposons aussi que

$$f_\mu(\mu_0, x_s) = 0,\ f_{xx}(\mu_0, x_s) \neq 0 \text{ et } (f_{\mu x}^2 - f_{xx} f_{\mu\mu}) \mid_{(\mu_0, x_s)} \neq 0.$$

On dit alors que le système subit au point μ_0 *une bifurcation transcritique.*

2) Bifurcation de pli

Ce type de bifurcation est caractérisé par une perte ou l'acquisition soudaine de plusieurs solutions d'équilibre stables ou instables lorsque la valeur d'un paramètre traverse une valeur critique.

Le diagramme de cette bifurcation est illustrée sur la figure (2.3).

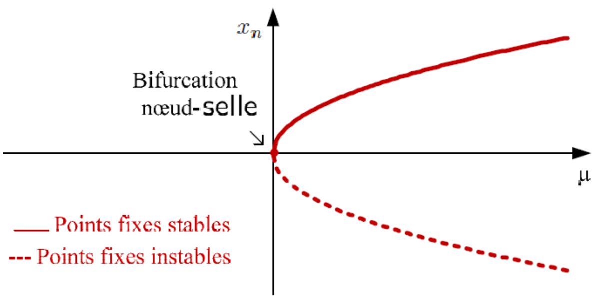

Figure 2.3 – Diagramme de bifurcation pli (neoud-selle).

Théorème 2.8. *Soit une famille de fonction* $f(\mu, x)$*. Supposons qu'il existe un couple* (μ_0, x_s) *tel que le système*

$$x_{n+1} = f(\mu_0, x_n),$$

a un point fixe en x_s *:*

$$f(\mu_0, x_s) = x_s,$$

et que

$$\frac{df}{dx}(\mu_0, x_s) = 1.$$

Supposons aussi que

$$f_\mu(\mu_0, x_s) \neq 0 \text{ et } f_{xx}(\mu_0, x_s) \neq 0.$$

On dit alors que le système subit au point μ_0 une bifurcation de type noeud-selle.

3) Bifurcation fourche (Pitchfork)

En général, une bifurcation fourche se produit, à proximité du point de bifurcation (x_0, μ_0), Le modèle possède deux courbes de point fixe dans le plan (x_n, μ) qui passe par le point de bifurcation et dont l'une se trouve sur les deux côtés de la ligne $\mu = \mu_0$. La forme normal de cette bifurcation est d'écrit par la formule suivante :

$$x_{(n+1)} = \mu x_{(n)} - x_{(n)}^3 \tag{3}$$

avec les points fixes $x_{s_1} = 0$ et $x_{s_{2,3}} = \pm\sqrt{\mu - 1}$. Où $x_{s_1} = 0$ étant attractif pour $\mu < 1$, répulsif pour $\mu > 1$ et les deux solutions symétriques étant attractif pour $\mu > 1$.

En $\mu = 1$, la pente de la fonction $f(x, \mu) = 1$ ce qui implique le changement de la stabilité de l'origine et l'apparition de deux autres points fixes.

La dynamique associée est qualitativement illustrée dans la figure (2.4).

De la même maniére comme dans le cas continue, la bifurcation fourche ci-dessus est appelé supercritique. Il ya aussi une bifurcation sous-critique analogique aux cas continue.

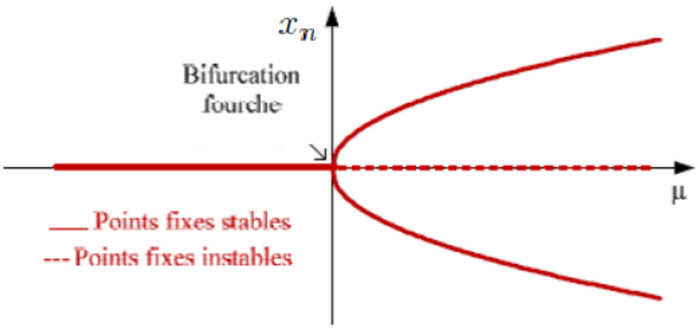

FIGURE 2.4 – Diagramme de la bifurcation fourche.

Théorème 2.9. *Soit une famille de fonction $f(\mu, x)$. Supposons qu'il existe un couple (μ_0, x_s) tel que le système*

$$x_{n+1} = f(\mu_0, x_n)$$

a un point fixe en x_s :

$$f(\mu_0, x_s) = x_s$$

et que

$$f_x(\mu_0, x_s) = 1$$

Supposons aussi que

$$f_\mu(\mu_0, x_s) = f_{xx}(\mu_0, x_s) = 0,\ f_{\mu x}(\mu_0, x_s) \neq 0 \text{ et } f_{xxx}(\mu_0, x_s) \neq 0$$

On dit alors que le système subit au point μ_0 une bifurcation de type fourche.

4) Bifurcation par doublement de Période

Les bifurcations précédentes se produisent lorsque la pente de la fonction $f(x, \mu)$ est égal à 1. Dans le cas où la pente est égale à -1, un changement de comportement différent est observé dans les solutions associé à le comportement d'oscillation d'orbite. Pour analyser cela, considérons le systéme dynamique discret :

$$x_{n+1} = -\mu x_n + x_n^3 = f(x_n, \mu) \tag{4}$$

on utilise la linéarisation de Taylor en $x = 0$, en trouve $-\mu x$, ce qui implique que la pente de la droite est égale -1 à $\mu = 1$. Les points fixes sont donnés par :

$$x_{s_1} = 0, x_{s_{2,3}} = \pm\sqrt{\mu + 1}$$

Il est clair que la seconde paire de point fixe existe seulement pour $\mu > -1$. Il en résulte qu'une bifurcation de fourche se produit à $\mu = -1$ avec $x_{s_1} = 0$ étant répulsif pour $\mu < -1$ (la pente de la droite est localement inférieure à -1), attractif pour $-1 < \mu < 1$, et répulsif pour $\mu > 1$ (la pente de $f(x, \mu)$ est maintenant localement plus grande à 1). Les deux branches des solutions sont répulsif pour une $\mu > -1$. Cela signifie que pour $\mu > 1$, il y a trois points fixes répulsif. Ainsi, les orbites ne peuvent pas rester à proximité de point fixe, mais de toute façon sauter entre eux. Rappelant la notion de mouvements périodiques dans les systèmes en temps discret à une dimension, Il est donc clair que pour $\mu > 1$ la solution n'est plus attractive de période 1, ou de manière équivalente des points fixes, exister, et nous devons examiner la solution de période 2. Par conséquent, considérons l'application $f^2(x, \mu)$, avec f définie dans (4).

$$x_{n+2} = f^2(x_n, \mu) = (\mu^2 - 1)x_n - \mu(1 - \mu^2)x_n^3 + \Theta^4(x_n). \tag{5}$$

De toute évidence, les orbites de période 2 de (4) sont les points fixes de (5), et sont donnés par :

$$x_{s_{4,5}} = 0, \ x_{s_{6,7}} = \pm\sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\mu(1 + \mu^2)}}$$

clairement l'existent que pour $\mu > 1$. En comparant (5) avec la forme normale de la bifurcation fourche supercritique (3), on peut voir que pour $\mu = 1$ la bifurcation fourche (supercritique) a lieu, conduisant à la perte de stabilité de $x = 0$, et l'aspect des deux branches attractantes de période 2, pour être plus précis, le simple changement de variables.

$$\varepsilon_n \approx [\mu(1 - \mu^2)^{\frac{1}{3}}]x_n, \text{telle que } \ x_n = [\mu(1 + \mu^2)]^{\frac{1}{3}}\varepsilon_n$$

Conduit à la dynamique

$$\varepsilon_{n+2} = (\mu^2 - 1)\varepsilon_n - \varepsilon_n^3$$

Qui est exactement de la forme (3). Rappelant que les points fixes de (4) sont des orbites de période 1, l'apparition des orbites de la période 2 par la bifurcation à $\mu = 1$ motive l'appelation bifurcation de doublement de période, et la forme normale de cette bifurcation est exactement (4).

Le schéma de la solution associée à la bifurcation par doublement de période est représentée qualitativement sur la figure(2.5).

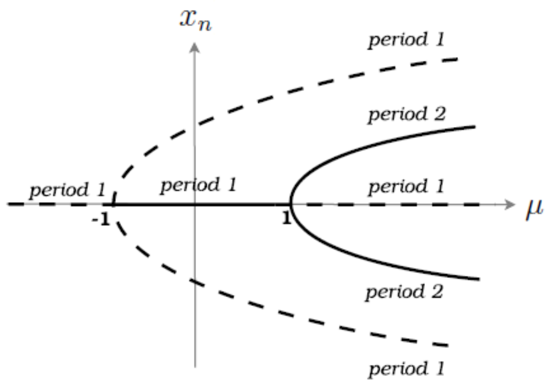

FIGURE 2.5 – Diagrame de bifurcation de doublement de période pour $\mu = 1$.

Théorème 2.10. *Soit une famille de fonctions $f(\mu, x)$. Supposons qu'il existe un couple (μ_0, x_s) tel que le système*

$$x_{n+1} = f(\mu_0, x_n)$$

a un point fixe en x_s :

$$f(\mu_0, x_s) = x_s$$

et que

$$f_x(\mu_0, x_s) = -1$$

Supposons aussi que

$$u(\mu_0, x_s) = 2f_{\mu x}(\mu_0, x_s) + f_\mu(\mu_0, x_s)f_{xx}(\mu_0, x_s) \neq 0$$

et que

$$v(\mu_0, x_s) = \frac{1}{2}f_{xx}^2(\mu_0, x_s) + \frac{1}{3}f_{xxx}(\mu_0, x_s) \neq 0$$

On dit alors que le système subit au point μ_0 une bifurcation de doublement de *période.*

Exemple 2.3. *Considérons l'application :*

$$f(\mu, x) = -(1+\mu)x - x^3$$

L'origine $x_{s_0} = 0$ *est toujours un point fixe, quelle que soit la valeur de* μ. *La dérivée de* f *est :*

$$f_x(\mu, x) = -(1+\mu) - 3x^2$$

Donc, quand $x = 0$ *cela donne :* $f_x(\mu, 0) = -1 - \mu$. *Ainsi, quand* $\mu = \mu_0 = 0$ *on a :* $f_x(0, 0) = -1$. *On calcule facilement les valeurs* $u(0, 0)$ *et* $v(0, 0)$ *définies dans le théorème :*

$$u(0,0) = -2 < 0, v(0,0) = -2 < 0.$$

On a donc bien une bifurcation de doublement de période.

5) Bifurcation de Neimark-Sacker

La bifurcation de Neimark-Sacker est la naissance d'une courbe invariante fermée à partir d'un point fixe dans les systèmes dynamiques discret, lorsque le point fixe change la stabilité via une paire des valeurs propres complexes avec le module égale 1

Cette bifurcation se produit uniquement pour les systèmes dynamique discrets avec dimension supérieur ou égale 2 ($m \geq 2$) et est l'analogue de la bifurcation de Hopf dans un système dynamique continue (EDO), les valeurs propres complexes conjugués sont écrit sous la forme des nombres complexes d'Euler .

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \rho(\mu) \exp(\pm i\theta(\mu))$$

si ces valeurs propres passent le cercle unité pour $\mu = \mu_0$ de telle sorte que $0 < \theta(\mu_0) < \pi$, une courbe invariant fermé apparaît qui est un attracteur fixé pour les orbites du système. Ce phénomène est appelé bifurcation de Neimark-Sacker. Noter que la condition sur l'angle $\theta(\mu_0)$ à la valeur critique de paramètre μ_0 implique que les valeurs propres doivent être strictement complexe. Dans ce cas, la définition du nombre complexe

$$z_n = x_n + iy_n$$

il peut être démontré, que pour autant que $\rho^{'}(\mu_0) \neq 0$ et $\exp(ik\theta(\mu_0)) \neq 0$ pour $k = 1, 2, 3, 4$ le système est localement équivalent à

$$z_{n+1} = (1 + \beta)\exp(i\theta(\beta))z_n + c(\beta)z_n|z_n|^2 + \Theta(|z_n|^4)$$

où β un nouveau paramètre. La situation $\exp(ik\theta(\mu_0)) = 0$ pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ est connu comme une forte résonance, et sont associées aux quatre premières racines de 1 sur le cercle unité complexe.
Comme dans le cas de la bifurcation Andronov-Hopf, à l'état bifurcation supercritique de Neimark-Sacker un point fixe perd la stabilité, et une orbite fermée apparaît avec un rayon croissant. Il est également le cas sous-critique, mais ce ne sera pas traitée.
Pour illustrer la bifurcation de Neimark-Sacker, considérons l'exemple :

Exemple 2.4.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mu x_n - \tfrac{1}{2}y_n - (x_n^2 + y_n^2), \\ y_{n+1} &= \tfrac{1}{2}x_n - \mu y_n - (x_n^2 + y_n^2), \end{aligned}$$

la matrice jacobiennes est donné par :

$$\mathcal{D}f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \mu & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \mu \end{pmatrix}, \ \lambda_{1,2} = \mu \pm i\frac{1}{2},\ \mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Les valeurs propres sont donnés par :

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{4}}\exp(\pm i\arctan(\frac{1}{2\mu})),$$

et l'angle de phase de seuil est donnée par :

$$\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 0,523,$$

ce qui implique que la condition de non-résonance est satisfaite. Pour $\mu < \mu_0$ *l'origine est une foyer stable, et pour* $\mu > \mu_0$ *une orbite fermée entoure l'origine de rayon qui augmente avec* $\mu - \mu_0$*. Ce comportement est illustré sur la figure* (2.6)*.*

La bifurcation de Neimark-Sacker ne fournit pas d'informations sur la périodicité, mais sur l'existence d'un ensemble de courbe fermée qui attire l'orbite.

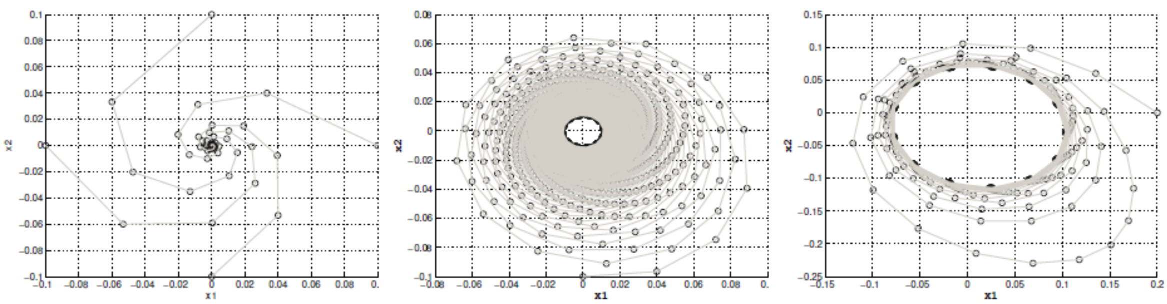

FIGURE 2.6 – Espace de phase du bifurcation de Neimark-Sacker pour $\mu = \mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$: (gauche)$\mu = \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, (centre)$\mu = \mu_0$, et (droite)$\mu = \frac{\sqrt{3}}{2} + 0.01 > \mu_0$

CHAPITRE 3

SYSTÈME CHAOTIQUE

Il existe un comportement entre la régularité et l'aspect aléatoire. Ce comportement s'appelle chaos.

Chaos, ou un système chaotique c'est un système produira des comportements très différents à long terme lorsque les conditions initiales sont perturbées très légèrement.

A la fin de **XIX** siècle le mathématicien, philosophe français **Henri Poincaré** avait déja mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps. Et dans le même siècle le mathématicien russe **Alexandre Lyapunov** effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesure de l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines. Lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales.

En 1963, **Edward Lorenz**, météorologue au Massachusetts Institut de Technologie, met en évidence le caractère chaotique des conditions météorologiques. Pour prévoir ces dernières **Lorenz** étudie alors numériquement des équations différentielles représentant approximativement la convection thermique dans l'atmosphère. Il constate, par hasard, qu'une modification minime des données initiales (de l'ordre de un pour mille) sur son ordinateur entraînent des résultats très différents. Il illustrera ce fait caractéristique par la célèbre métaphore : “battement d’ailes d’un papillon au Brésil peut provoquer une tornade au Texas”. “L’effet papillon” sera par la suite souvent invoqué pour faire allusion à la sensibilité aux conditions initiales.

Depuis la fin des années 70, la théorie du chaos a envahi la plupart des sciences : Physique, Chimique, Mécanique Géophysique, Astronomique, Psychologie, Economie, Sociologie, elle a même envahi le flux et le reflux de la vie élargissant considérablement les possibilités d’emploi des modèles déterministes.

3.1 Chaos

Il n’existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos. Cependant, le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d’un système dynamique caracterisé par :

La non-linéarité : si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.

Le déterminisme : un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).

La sensibilité aux conditions initiales : de très petits changements sur l’état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.

L’imprévisible : en raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

L’irrégularité : ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l’infrastructure des systèmes chaotiques “ordre dans le désordre”plus simplement.

Chaos au sens de Devaney

Soit S un ensemble dans l'espace topologique $\mathbb{R}$ et soit f^p la fonction définie par :

$$f : S \to S$$

on a :

$$f^p = f(f^{p-1}), \;\; p = 1, \; 2, ...$$

et

$$f^0 = I$$

Soit $x \in S$, ce dernier est appelé point périodique de période p s'il satisfait :

$$x = f^p(x)$$

Théorème 3.1 (de Devaney)**.** *Une fonction $f : S \to S$ est chaotique si :*

- *La fonction f est sensible aux conditions initiales, dans le sens que pour tout $x \in S$ et un voisinage V de x dans S, il existe un $\delta > 0$, tel que :*

$$|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$$

pour un point $y \in V$ et pour $n \geq 0$.

- *La fonction f est topologiquement transitive, dans le sens que pour toute paire de sous ensembles ouverts U, $V \subset S$, il existe un nombre entier $n > 0$ tel que :*

$$f^n(U) \cap V \neq \phi$$

- *Les points périodiques de la fonction f sont denses dans S.*

3.1.1 Caractéristiques du chaos

1) Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux condition initiale est un phénomène découvert pour la première fois, dès la fin du **XIXe** siècle par **Poincarée**, puis il a été redécouvert en **1963** par **Lorenz** lors de ses travaux en météorologie. Cette découverte a entrainé un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Cette sensibilité explique le fait que pour un système chaotique, une modification infime des conditions initailes peut entrainer des résultats imprévisibles sur le long terme. Le degré de sensibilité aux conditions initailes quantifie le caractére chaotique du système.

2) Exposants de lyapunov

Les exposants de lyapunov sont des coefficients qui permettent de mesurer la sensibilité aux conditions initiales d'une série temporelle. Par définition, un exposant de lyapunov est le taux exponentiel moyen de divergence ou covergence des trajectoires voisines de l'espace des phases. Il mesure le taux local d'expansion de l'espace dans lequel l'expansion est maximale, c'est-à-dire en général vers l'attracteur.
Le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases.

Calcul des exposants de lyapunov

Cas d'une application discrète unidimentionnelle Soit une application discrète f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui applique x_n sur x_{n+1} :
Choisissons deux conditions initiales trés proches, soit x_0 et $x_{0+\varepsilon}$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons quelles s'écartent en moyenne à un rythme exponentielle. On pourra trouver un réel λ tel qu' aprés n itérations on a :

$$|f^n(x_0+\varepsilon) - f^n(x_0)| \cong \varepsilon \exp(n\lambda)$$

d'ou

$$n\lambda \cong \ln \frac{|f^n(x_0+\varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon}$$

et pour $\varepsilon \to 0$ on a :

$$n\lambda \cong \ln \frac{|f^n(x_0+\varepsilon) - f^n(x_0)|}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \ln |\frac{df^n(x_0)}{dx_0}|$$

$$\cong \frac{1}{n} \ln |\frac{df^n(x_0)}{df^{n-1}(x_0)} \cdot \frac{df^{n-1}(x_0)}{df^{n-2}(x_0)} \cdots \frac{df^1(x_0)}{d(x_0)}|$$

$$\cong \frac{1}{n} \ln |\frac{df(x_{n-1})}{d(x_{n-1})} \cdot \frac{df(x_{n-2})}{d(x_{n-2})} \cdots \frac{df(x_0)}{d(x_0)}| \cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |\frac{df(x_i)}{dx_i}|$$

finalement pour $n \to \infty$ on a :

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'(x_i)|. \tag{1.1}$$

avec $f'(x_i) = \dfrac{df(x_i)}{dx_i}$.
λ est appelé exposant de Lyapunov il indique le taux moyen de divergence.

- Si $\lambda > 0$, alors il y a une sensibilité aux conditions initiales.
- Si $\lambda < 0$, les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales.

Appliquant la formule précédente pour $x_i = x_s$ tel que x_s est le point d'équilibre, il faut que $\lambda = \ln|f'(x_s)|$.

Cas d'une application discrète multidimensionnelle Soit f une application discrète de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Un système m dimensionenel possède m exposants de Lyapunov, chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initial V_0 évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 \exp(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m)n$$

Pour avoir du chaos, il est nécéssaire qu'au moins un λ_i soit positif, pour avoir étirement selon au moins un axe. Mais il faut aussi que la somme des λ_i soit négative. Puisque, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé et on'aurait plus un attracteur de faible dimension, ce qui signifie qu'on n'aura pas du chaos détèrministe. Tout d'aborde nous devons calculer les λ_i. Nous fixont une hyper sphère dans notre espace m dimensionenel de rayon ε (petit) de conditions initiales, et examinons son évolution. Comme précédemment, nous nous intéressons à :

$$f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)$$

Posons $x'_0 = x_0 + \varepsilon$, on a le développement en série limité d'order 1 de $f^n(x_0)$ au voisinage de x'_0 suivant :

$$x_n - x'_n \approx \frac{df^n(x_0)}{dx_0}(x_0 - x'_0)$$

$$\approx J(x_0)J(x_1)...J(x_n)(x_0 - x'_0)$$

$$\approx \prod_{i=1}^{n} J(x_i)(x_0 - x'_0)$$

On note $\prod_{i=1}^{n} J(x_i)$ par $J^n(x_0)$, ainsi

$$x_n - x'_n \approx J^n(x_0 - x'_0),$$

$J^n(x_0)$ est la matrice jacobienne de f^n au point x_0. Il s'agit d'une matrice carrée $m \times m$, si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_n telle que $D^t_m = P_n^{-1} J^n P^n$, D^t_m est une matrice diagonale des valeurs propres $u_i(f^n(x_0)),\ i = 1, ..., m$ de J^n. On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n\to\infty} \ln|u_i(f^n(x_0))|,\ i = 1, 2, ..., m,$$

Pour le point d'équiliber x_s la formule précédant devient

$$\lambda_i = \ln|u_i(x_s)|,\ i = 1, 2, ..., m.$$

Types d'attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Les différents types d'arracteur d'un système de dimension n en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont représenté dans le tableau suivant :

Type d'attracteur	**Exposants de Lyapunov**
Point fixe	$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_n$
Cycle	$\lambda_1 = 0,\ 0 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots \geq \lambda_n$
Tore	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ 0 > \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \cdots \geq \lambda_n$
K-tore	$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_K = 0,\ 0 > \lambda_{K+1} \geq \lambda_{K+2} \geq \lambda_n$
Attracteur étrange	$\lambda_1 > 0,\ \sum \lambda_i < 0$

3) Dimmension fractale

Il existe plusieurs formule pour le calcule de la dimension fractale (dimension de capacité, dimension d'information, dimension de corrélation,...) pour les attracteurs chaotiques, parmi celle-ci on peut citer :

Dimension de Hausdorff La définition d'une dimension non entière la plus connue et la plus utilisée théoriquement est la dimension de Hausdorff.
Soit M un ensemble de $\mathbb{R}^n$ recouvert par des ensembles A_i de petit diamètre c'est-à-dire :

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ 0 < |A_i| \leq \varepsilon.$$

On définit la mesure de Hausdorff d-dimensionnelle par :

$$\mu_d(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^d \right\},\quad |A_i| \leq \varepsilon.$$

La dimension de Hausdorff de l'ensemble M est le réel d_H tq :

$$\mu_d(M) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad d > d_H \\ +\infty & \text{si} \quad d < d_H \end{cases}$$

Définition 3.1. *On définit la dimension de Hausdorff par :*

$$d_H(M) = \sup\{d,\ \mu_d(M) = +\infty\} = \inf\{d,\ \mu_d(M) = 0\}.$$

Dimension de Lyapunov

Définition 3.2. *Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \ldots \geq \lambda_n$, les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et soit j le grand entier naturel tel que : $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ldots + \lambda_j \geq 0$.*

Alors la dimension de Lyapunov définit par ***Karlan*** *et* ***Yorke*** *est donné par :*

$$D_l = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ldots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}$$

4) Attracteur étrange

L'attracteur étrange est une forme géométrique complexe qui caractérise l'évolution des systèmes dynamiques chaotiques.

3.1.2 Exemples des systèmes chaotiques discrets

1) Fonction logistique

Le système chaotique le plus connu est l'application logistique, cette fonction a été proposée par le biologiste **May** en 1976 pour représenter de manière très simplifiée l'évolution annuelle d'une population d'insectes.

La fonction logistique trés connue dans la théorie des systèmes non linéares, est une application non bijective du domaine $[0, 1]$ dans lui-même qui sert de récurrence à la suite :

$$x_{n+1} = f(x_n) = \mu x_n(1 - x_n)$$

Où $n = 0, 1, ...$ dénote le temp discret, x la variable dynamique et μ un paramètre réel.

a) Sensibilité aux conditions initiales La sensibilité aux conditions initiales de la fonction logistique est illustré sur la figure (3.1) pour deux conditions initiales trés proche $x_1 = 0.1$ et $y_1 = 0.1001$.

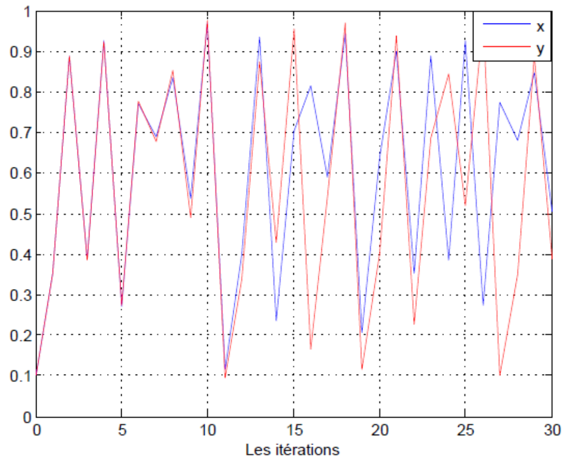

FIGURE 3.1 – Sensibilité aux conditions initiales de la fonction logistique pour $x_1 = 0.1$ et $y_1 = 0.1001$.

b) L'exposant de lyapunov Comme nous avons vu précédemment la fonction logistique est défini par :

$$x_{n+1} = f(x_n) = \mu x_n(1 - x_n)$$

Pour $\mu = 4$ les points fixes sont : $x_{s_1} = 0$ et $x_{s_2} = \dfrac{3}{4}$.

En utilisant la formule $\lambda = \ln |f'(x_s)|$ pour caluler l'exposant de Lyapunov de la fonction logistique on trouve $\lambda_1 = \ln 2 > 0$, d'ou la comportement est chaotique ou voisinage de x_{s_2}.

2) Système de Hénon

Le modèle de Hénon consiste en une itération à deux dimensions qui peut prendre différentes formes. On utilisera la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} &= bx_n \end{cases}$$

a) Sensibilité aux conditions initiales La sensibilité aux conditions initiales de système de Hénon est illustré sur la figure (3.2) pour les conditions initiales $x_1 = 0.1$, $y_1 = 0.1001$, $z_1 = 0.10$ et $k_1 = 0.10001$.

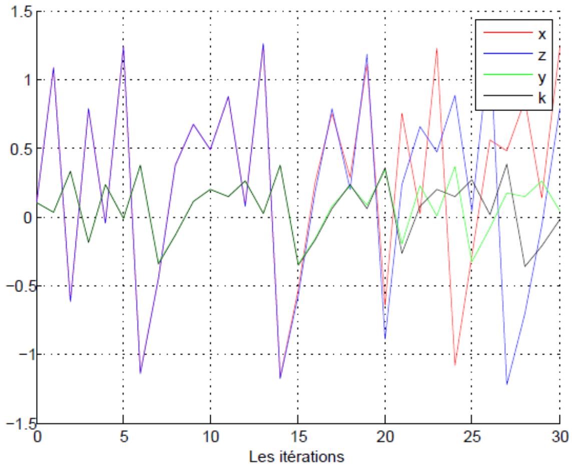

FIGURE 3.2 – Sensibilité aux conditions initiales de système de Hénon pour $x_1 = 0.1$, $y_1 = 0.1001$, $z_1 = 0.10$ et $k_1 = 0.10001$.

b) L'exposant de lyapunov On utilise l'algorithme de A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano [7] pour calculer l'exposants de lyapunov pour $a = 1.4$, $b = 0.3$, on trouve $\lambda_1 = 0.42311$, $\lambda_2 = -1.6271$, la dimension de Lyapunov est égale à $D_L = 1.26$. Voire le figure (3.3).

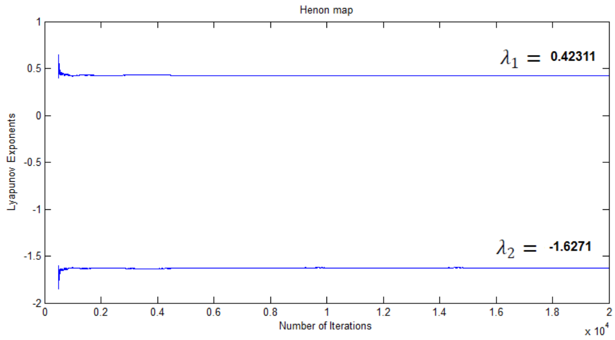

FIGURE 3.3 – Exposant de lyapunov du système de Henon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$

c) Attracteur etrange L'attracteur chaotique de Hénon est représenté sur la Figure (1.4) pour les valeurs numériques $a = 1,4$ et $b = 0,3$.

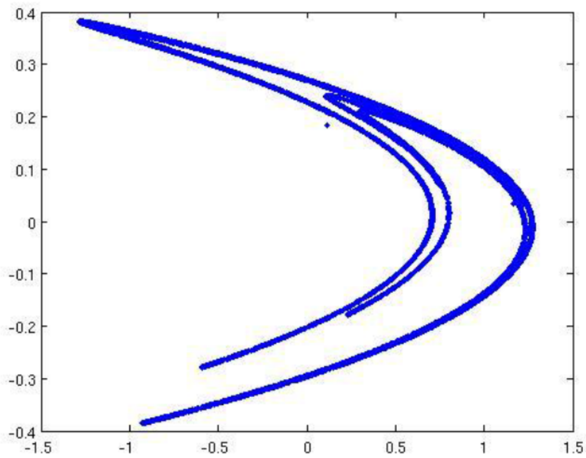

FIGURE 3.4 – Attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$

3.1.3 Scénarios de transition

On ne sait pas à l'heure actuelle dans quelles conditions un système va devenir chaotique. Cependant il existe plusieurs types d'évolution possibles d'un système dynamique régulier vers le chaos.

Supposons que la dynamique étudiée dépende d'un paramètre de contrôle. Lorsqu'on varie ce paramètre, le système peut passer d'un état stationnaire à un état périodique, puis au-delà d'un certain seuil, suivre un scénarion de transition et devenir chaotique. Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos.

1) doublement de période Ce scénarion a été observé dans les années 60 par **R.May** en dynamique des populations sur l'application logistique. Ce scénario est carctérisé par une succession de bifurcation de fourche. A mesure que la contrainte augmente, la période de l'oscillateur est multipliée par deux, puis par quatre, par huit, etc. Ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système est chaotique.

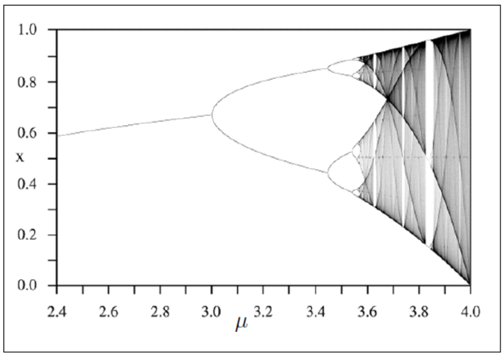

FIGURE 3.5 – Scénarios de transition par doublement de période

.

2) Intermittences Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées chaotiques. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées chaotiques deviennent de plus en plus fréquentes et finalement le chaos apparaît.

3) Quasi-périodicité Le scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de **Ruelle** et **Takens** 1971. Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est ra-

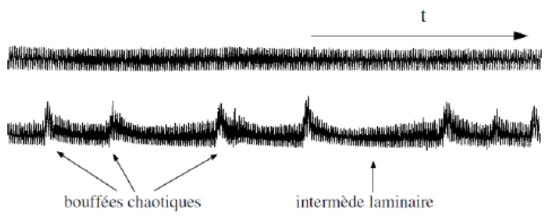

FIGURE 3.6 – Scénarios de transition par intermittences

.

tionnelle, le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau paramètre et il apparaît une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu'au chaos.

CHAPITRE 4

ETUDE D'UN SYSTÈME FINANCIER DISCRET

Récemment, nous avons vu une forte augmentation des activités favorisant la reproduction (recyclage), considérée comme protective de l'environnent, dans de nombreux pays. Toute fois, les produits recyclés peuvent cannibaliser les ventes de nouveaux produits et diminuer le profit des fabricants d'équipement d'origine (OEMs : *Original Equipment Manufacturers*). Ces derniers choisissent généralement de ne pas poursuivre la stratégie de recyclage, permettant à des concurrents tiers de collecter et recycler les produits utilisés vendus originalement par les OEMs. La concurrence entre les OEMs et reproducteurs tiers peut être décrit par le modèle de jeu d'oligopole.

Oligopole est une structure de marché entre le monopole et la concurrence parfaite. Elle est caractérisée par une domination de plusieurs entreprises, qui contrôlent complètement le commerce. Ces entreprises fabriquent des produits homogènes. La concurrence oligopole a été étudiée depuis longtemps. Le plus ancien modèle d'oligopole était le modèle de Cournot proposé par **Cournot** en 1838. Dans le modèle de Cournot, les produits des entreprises en concurrence avec la concurrence de rende-

ment. En 1883, **Bertrand** a présenté un modèle nommé modèle de Bertrand. Dans le modèle de Bertrand, les produits des entreprises en concurrence avec la concurrence des prix. Un autre modèle important dans une étude de marché d'oligopole est le modèle de variation conjecturale qui a été proposée par **Bowley** (1924) et **Frisch** (1933). Depuis lors, beaucoup de travail a été prêté attention à la stabilité et à des phénomènes complexes (tels que la bifurcation, le chaos et attracteurs étranges) dans les modèles dynamiques de Cournot. Dans les modèles de jeux dynamiques mentionnés ci-dessus, les joueurs sont homogènes. Les jeux dynamiques de Cournot avec des acteurs hétérogènes ont également été largement étudiés.
Au cours des dernières années, la théorie des jeux d'oligopole a été utilisée pour étudier d'autres questions réalistes telles que : l'application de la décision retardée dans le marché de l'assurance oligopole, un système financier hyper-chaotique construit sur la base d'un système chaotique, et le modèle de la chaîne logistique double-canal à décision retardée. Dans les modèles d'oligopole dynamique de jeux mentionnés ci-dessus, le joueur à rationalité limitée est supposé maximiser son profit. Cependant, dans la théorie du marketing, la part de marché est également très importante. La relation entre la part de marché et la rentabilité a été largement étudiée.
Par exemple, **Li** et **Ma** ont analysé la complexité du modèle de jeu double-canal avec rationalité limitée, dans lequel les objectifs des vendeurs détaillants ont été suppos és être différents.

4.1 Présentation du modéle oligopole

Nous considérons un fabricant d'équipement d'origine (OEM) et un fabricant tiers sur le marché, nous supposons que l'OEM ne produit que de nouveaux produits et le compétiteur tiers ne produit que des produits recyclés différenciés. Le client établit une distinction entre le produit neuf vendu par l'OEM et le produit recyclé i.e : la volonté de paie du client (WTP : willingness-to-pay) pour les produits d'origine et recyclés est différente. L'OEM et la partie tierce compètent les uns avec les autres de façon répétée. Dans la période n, l'OEM fabrique et commercialise de nouveaux produits. Ces produits peuvent être retournés et fabriqués par le fabricant tiers pendant la période $n+1$. c_m et c_r sont les coûts marginaux de l'OEM et du compétiteur tiers, respectivement, et $c_m > c_r$.

L'OEM et le tiers compètent dans la production et les deux fabricants ne pouvaient obtenir que de l'information partielle du marché. La volonté de paie de chaque consommateur pour un produit recyclé est une fraction δ de leur volonté de payer pour le nouveau produit, et la volonté des consommateurs à paie est hétérogène et répartie uniformément dans l'intervalle $[0,1]$. Laisser X_m et X_r désignent la demande pour les nouveaux produits et pour les produits recyclés, respectivement. Ces constructions conduisent à des fonctions de demande inverse linéaire ci-dessous :

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - X_m - \delta X_r \\ p_r &= \delta(1 - X_m - X_r) \end{aligned}$$

Si $\delta = 0$, les consommateurs ne sont pas prêts à payer quoi que ce soit pour le produit recyclé. Si $\delta = 1$, les consommateurs sont prêts à payer le même montant pour le produit neuf et recyclé. Nous supposons $0 < \delta < 1$.

La fonction de coût de chaque producteur a la forme linéaire suivante :

$$C_i(X_i) = c_i X_i \quad , i = m, r$$

Par conséquent, les fonctions de profit de l'OEM et du compétiteur tiers sont donnés par :

$$\Pi_m = p_n X_m - c_m(X_m) = (1 - X_m - \delta X_r - c_m)X_m \tag{1}$$

$$\Pi_r = p_r X_r - c_r(X_r) = (\delta(1 - X_m - X_r) - c_r)X_r \tag{2}$$

Ensuite, nous obtenons les fonctions marginales de deux compétiteurs :

$$\frac{\partial \Pi_m}{\partial X_m} = (1 - 2X_m - \delta X_r - c_m) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Pi_r}{\partial X_r} = \delta(1 - X_m - 2X_r) - c_r \tag{4}$$

Dans le monde réel, les informations obtenues sur le marché est généralement incomplète. Les producteurs font des décisions sur la base des informations partielles. Dans ce travail, nous supposons que l'OEM et le compétiteur tiers sont hétérogènes. Ils adoptent différents mécanismes d'ajustement pour mettre à jour leur production. Ainsi, ils prennent différentes stratégies. L'OEM est supposé être un joueur à rationalité limitée visant à maximiser son profit. Il met à jour sa production sur la base du bénéfice marginal attendu de la période en cours. Cela signifie que chaque compétiteur tieres augmentera sa production dans la prochaine période si le bénéfice marginal dans la période actuelle est positif sinon, le compétiteur va diminuer sa production. Ce mécanisme d'ajustement dynamique a été utilisé dans les travaux en cours sur les jeux de duopole. Le mécanisme de réglage du débit de l'OEM peut être modélisé sous la forme :

$$X_m(n+1) = X_m(n) + \alpha X_m(n) \frac{\partial \Pi_m(n)}{\partial X_m(n)} \tag{5}$$

Où α est un paramètre positif qui représente la vitesse relative de l'ajustement de sortie (production). Le fabricant tiers maximise la part de marché sur la base de l'obtention d'un certain profit. Autrement dit, le fabricant tiers prend moyenne pondéré de l'expansion des parts de marché et maximise son profit. Lorsque le compétiteur tiers cherche la maximisation totale de sa part de marché son profit est 0 ($\Pi_r = 0$) Selon l'équation (2), la production optimale du fabricant tiers est :

$$X^*_{r-\text{part de marché max}} = 1 - X_m - \frac{c_r}{\delta}$$

Lorsque le fabricant tiers vise la maximisation complète du profit, le bénéfice marginal du fabricant tiers est 0 ($\frac{\partial \Pi_r}{\partial X_r} = 0$).
Selon l'équation (4), la production optimale du fabricant tiers est :

$$X^*_{r-\text{profit max}} = \frac{1}{2}(1 - X_m - \frac{c_r}{\delta})$$

Selon l'hypothèse sur le fabricant tiers, laissez :

$$X_r^* = \nu X_{r-\text{part de marché max}}^* + (1-\nu)X_{r-\text{profit max}}^* = \frac{1+\nu}{2}(1 - X_m - \frac{c_r}{\delta}) \tag{6}$$

Où $\nu \in [0,1]$ représente l'attitude qui est un compromis entre le bénéfice et la part de marché. Si $\nu = 0$ et $\nu = 1$ représentent la maximisation du profit et la maximisation de la part de marché, respectivement. Et quand $0 < \nu < 1$, le fabricant tiers prend une stratégie mixte.

En outre, le fabricant tiers est un joueur adaptatif. Il calcule sa sortie (production) pour la période $n+1$ avec un poid entre la sortie $X_r(n)$ des dernières périodes n et sa fonction de réaction $X_r^*(n)$. Le processus d'ajustement de sortie du fabricant tierce a la forme :

$$X_r(n+1) = (1-\beta)X_r(n) + \beta X_r^*(n)$$

Où $\beta \in [0,1]$ est la vitesse d'ajustement du fabricant tiers. Nous considérons $\beta \in [0,1]$. Par ailleurs, selon les hypothèses ci-dessus, la sortie du fabricant tiers dans la période $n+1$ est inférieure ou égale à la sortie de l'OEM pendant la période n, i.e, $X_r(n+1) \leq X_m(n)$. Par conséquent, le mécanisme de réglage de la sortie du fabricant tiers peut être modifié comme suit :

$$X_r(n+1) = min\{(1-\beta)X_r(n) + \beta X_r^*(n), X_m(n)\} \tag{7}$$

À l'aide d'équations (3) et (6), et en combinant les équations (5) et (7), on obtient un système dynamique discret à deux dimensions du modèle de fabrication de jeu de duopole avec des stratégies de concurrence différentes et hétérogènes comme suit :

$$\begin{cases} X_m(n+1) = X_m(n) + \alpha X_m(n)(1 - 2X_m(n) - \delta X_r(n) - c_m) \\ X_r(n+1) = min\{(1-\beta)X_r(n) + \dfrac{1+\nu}{2}\beta(1 - X_m - \dfrac{c_r}{\delta})(n), X_m(n)\} \end{cases}$$

4.2 Analyse du modél

Soit le système dynamique discret suivant :

$$\begin{cases} X_m(n+1) = X_m(n) + \alpha X_m(n)(1 - 2X_m(n) - \delta X_r(n) - c_m) \\ X_r(n+1) = min\{(1-\beta)X_r(n) + \dfrac{1+\nu}{2}\beta(1 - X_m - \dfrac{c_r}{\delta})(n), X_m(n)\} \end{cases} \tag{4.1}$$

L'espase de phase est $\mathbb{R}^2$, L'espase des paramètres est $\mathbb{R}^4$

On pose :

$$f_r(n) = (1-\beta)X_r(n) + \frac{1+\nu}{2}\beta(1 - X_m - \frac{c_r}{\delta})$$

4.2.1 Points fixes

pour étudier le système (4.1) on distincte deux cas :

a) Si $f_r(n) > X_m(n)$

Le système (4.1) s'écrit :

$$\begin{cases} X_m(n+1) = X_m(n) + \alpha X_m(n)(1 - 2X_m(n) - \delta X_r(n) - c_n) \\ X_r(n+1) = X_m(n) \end{cases}$$

Les points fixes sont solutions des équations suivantes :

$$X_m(n+1) = X_m(n)$$
$$X_r(n+1) = X_r(n)$$

C'est- à- dire

$$\alpha X_m(n)(1 - 2X_m(n) - \delta X_r(n) - c_n) = 0$$
$$X_r(n) = X_m(n)$$

Après les calcules on trouve deux points fixes qui sont :

$$E = (0, 0)$$

Et

$$F = (X^*_{m-f}, X^*_{r-f}) = (\frac{1-c_m}{2+\delta}, \frac{1-c_m}{2+\delta})$$

Avec $1 - c_m > 0$

On substitue X^*_{m-f} et X^*_{r-f} dans $f_r(n) > X_m(n)$ on trouve :

$$\delta^{root} < \delta < 1$$

Avec :

$$\delta^{root} = \frac{1-\nu-(3+\nu)c_m+(1+\nu)c_r+\sqrt{(1-\nu-(3+\nu)c_m+(1+\nu)c_r)^2+8(1+\nu)^2c_r}}{2(1+\nu)}$$

b) Si $f_r(n) \leq X_m(n)$

Le système (4.1) s'ecrit :

$$\begin{cases} X_m(n+1) = X_m(n) + \alpha X_m(n)(1 - 2X_m(n) - \delta X_r(n) - c_m) \\ X_r(n+1) = (1-\beta)X_r(n) + \dfrac{1+\nu}{2}\beta((1 - X_m(n) - \dfrac{c_r}{\delta})) \end{cases}$$

Les points fixes sont solutions des équations suivantes :

$$X_m(n+1) = X_m(n)$$
$$X_r(n+1) = X_r(n)$$

C'est- à- dire

$$\alpha X_m(n)(1 - 2X_m(n) - \delta X_r(n) - c_m) = 0$$

$$-\beta X_r(n) + \frac{1+\nu}{2}\beta(1 - X_m(n) - \frac{c_r}{\delta}) = 0$$

Aprés les calcules on trouve deux points fixes qui sont :

$$E_1 = (0, \frac{(1+\nu)(\delta - c_r)}{2\delta})$$

Le premier point est rejeté car $(f_r(n) \leq X_m(n))$

Et

$$F_1 = (q_m^*, q_r^*)(\frac{2-(1+\nu)\delta - 2c_m + (1+\nu)c_r}{4-(1+\nu)\delta}, \frac{(\delta c_m - 2c_r + \delta)(1+\nu)}{\delta(4-(1+\nu)\delta)})$$

Le point fixe F_1 est egalement l'équilibre de Nash du jeu à condition que :

$$\begin{cases} 2-(1+\nu)\delta - 2c_m + (1+\nu)c_r > 0 \\ \delta c_m - 2c_r + \delta > 0 \end{cases}$$

Elle peut ètre rèduit à :
$\dfrac{2c_r}{1+c_m} < \delta < \dfrac{2(1-c_m)}{1+\nu} + c_r$
On substitue q_m^* et q_r^* dans $f_r(n) \leq X_m(n)$ on trouve :

$$0 < \delta < \delta^{root}$$

Avec :

$$\delta^{root} = \frac{1-\nu-(3+\nu)c_m + (1+\nu)c_r + \sqrt{(1-\nu-(3+\nu)c_m+(1+\nu)c_r)^2 + 8(1+\nu)^2 c_r}}{2(1+\nu)}$$

4.2.2 Stabilité

Stabilité du point E et F

- pour étudier la stabilité du E et F on utilise la matrice Jacobienne suivantes :

$$\mathcal{A}_{(X_m,X_r)} = \begin{pmatrix} 1+\alpha(1-4X_m-\delta X_r - c_m) & -\delta\alpha X_m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Stabilité du point $E = (0, 0)$

La martice jacobienne associée est :

$$\mathcal{A}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha(1 - c_m) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$P_1(\lambda) = \lambda(-1 - \alpha(1 - c_m) + \lambda)$$

Les valeurs propres de la matrice jacobienne A sont les racines du polynôme $P_1(\lambda)$ qui sont :

$$\lambda_1 = 0 \ \text{ et } \ \lambda_2 = 1 + \alpha(1 - c_m)$$

Ona $\lambda_1 < 1$ et $\lambda_2 > 1$ (car α paramètre positif et $1 - c_m > 0$) donc le point d'équilibre E est un point sell (point sell est toujour instable)

Stabilité du point $F = (\frac{1 - c_m}{2 + \delta}, \frac{1 - c_m}{2 + \delta})$

La martice jacobienne associée est :

$$\mathcal{A}_{(F)} = \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha(\frac{1 - c_m}{2 + \delta}) & -\delta\alpha(\frac{1 - c_m}{2 + \delta}) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + Det(A)$$

Oú $Tr(A)$ et $Det(A)$ sont respectivement la trace et le déterminant de la matrice jacobienne qui sont donné par :

$$Tr(A) = 1 - 2\alpha(\frac{1 - c_m}{2 + \delta}) \ \text{ et } \ Det(A) = \delta\alpha(\frac{1 - c_m}{2 + \delta})$$

Les valeurs propres de la matrice jacobienne A sont les racines du polynôme $P_2(\lambda)$. Le point fixe F est asymptotiquement stable (attractif) si les trois conditions suivant sont vérifier :

1) $P_2(1) > 0 \Leftrightarrow (2+\delta)\alpha(\dfrac{1-c_m}{2+\delta}) > 0$

2) $P_2(-1) > 0 \Leftrightarrow 2-(2-\delta)\alpha(\dfrac{1-c_m}{2+\delta}) > 0$

3) $\delta\alpha q^*_{m-f} < 1 \Leftrightarrow 1-\delta\alpha(\dfrac{1-c_m}{2+\delta}) > 0$

La première condition est toujour satisfaite (car α paramétre positif,

$\delta \in [0,1]$)

La deuxiéme et la troisième conditions sont satisfaits si :

$$\begin{cases} \alpha < \alpha^F \;\text{ si }\; 0 \leq \delta \leq \dfrac{2}{3} \\ \alpha < \alpha^{NS} \;\text{ si }\; \dfrac{2}{3} \leq \delta \leq \; 1 \end{cases}$$

Tel que :

$\alpha^F = \dfrac{2(2+\delta)}{(2-\delta)(1-c_m)}$

$\alpha^{NS} = \dfrac{(2+\delta)}{\delta(1-c_m)}$

On compare δ^{root} avec $\dfrac{2}{3}$ on trouve :

$$\begin{cases} \delta^{root} \leq \dfrac{2}{3} \;\text{ si }\; 0 \leq c_m \leq \dfrac{5\nu+3(3+\nu)c_m-1}{12(1+\nu)} \\ \delta^{root} > \dfrac{2}{3} \;\text{ si }\; \dfrac{5\nu+3(3+\nu)c_m-1}{12(1+\nu)} < c_r < c_m \end{cases}$$

Donc le point fixe F est asymptotiquement stable (attractif) à condition que :

$$\begin{cases} \alpha < \alpha^F \;\text{ si }\; 0 \leq c_r \leq \dfrac{5\nu+3(3+\nu)c_m-1}{12(1+\nu)} \;\text{ et }\; \delta^{root} < \delta < \dfrac{2}{3} \\ \alpha < \alpha^{NS} \;\text{ si }\; 0 < c_r < \dfrac{5\nu+3(3+\nu)c_m-1}{12(1+\nu)} \;\text{ et }\; \dfrac{2}{3} < \delta < 1 \\ \alpha < \alpha^{NS} \;\text{ si }\; \dfrac{5\nu+3(3+\nu)c_m-1}{12(1+\nu)} < c_r < c_m \;\text{ et }\; \delta^{root} < \delta < 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

- pour étudier la stabilité du F_1 on utilise la matrice Jacobienne suivantes :

$$\mathcal{A}_{(X_m,X_r)} = \begin{pmatrix} 1+\alpha(1-4X_m-\delta X_r-c_m) & -\delta\alpha X_m \\ -\frac{1+\nu}{2}\beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Stabilité du point F_1

La martice jacobienne associée est :

$$\mathcal{A}_{(F_1)} = \begin{pmatrix} 1-2\alpha q_m^* & -\delta\alpha q_m^* \\ -\frac{1+\nu}{2}\beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractèristique associe est :

$$P_3(\lambda) = \lambda^2 - \lambda Tr(A) + Det(A)$$

avec $Tr(A) = 2-\beta-2\alpha q_m^*$ et $Det(A) = 1-\beta-2\alpha(1-\beta)q_m^* - \frac{1+\nu}{2}\delta\alpha\beta q_m^*$.
Les valeurs propres de la matrice jacobienne A sont les racines du polynôme $P_3(\lambda)$
.
D'après le critère de Jury on a F_1 est localement asymptotiquement stable si les trois conditions sont vérifier.

1) $P_3(1) = 1 - Tr(A) + Det(A) = (2 - \frac{1+\nu}{2}\delta)\alpha\beta q_m^* > 0.$

2) $P_3(-1) = 1 + Tr(A) + Det(A) = 4 - 2\beta - 4\alpha q_m^* + (2 - \frac{1+\nu}{2}\delta)\alpha\beta q_m^* > 0.$

3) $1 - Det(A) = \beta + 2\alpha(1-\beta)q_m^* + \frac{1+\nu}{2}\delta\alpha\beta q_m^* > 0$

Il est evident que les conditions 1 et 3 sont toujour vérifier

La condition 2 est vérifier si et seulement si
$2\beta + 4\alpha q_m^* - (2 - \frac{1+\nu}{2}\delta)\alpha\beta q_m^* - 4 < 0.$

D'oú l'équilibre de Nash du jeu est asymptotiquement stable (attractif) si
$2\beta + 4\alpha q_m^* - (2 - \frac{1+\nu}{2}\delta)\alpha\beta q_m^* - 4 < 0.$

Région de stabilité de F

- Quand $0 \le c_r \le \frac{5\nu + 3(3+\nu)c_m - 1}{12(1+\nu)}$ et $\delta^{root} < \delta < \frac{2}{3}$ la région de stabilité de l'équilibre F devient plus grand lorsque δ augmente. Ainsi, une plus grand de la volonté de paie du client peut améliorer la stabilité du systéme et l'équilibre F peut perdre la stabilité via une bifurcation de doublement de période.

- Quand $0 \leq c_r \leq \dfrac{5\nu + 3(3+\nu)c_m - 1}{12(1+\nu)}$ et $\dfrac{2}{3} < \delta < 1$ l'équilibre F peut perder la stabilité via une bifurcation de Naimark-Saker et la région de stabilité devient faible avec δ croissant. autrement dit, une plus grand de la volonté de paie du client peut accélérer l'instabilité du système.

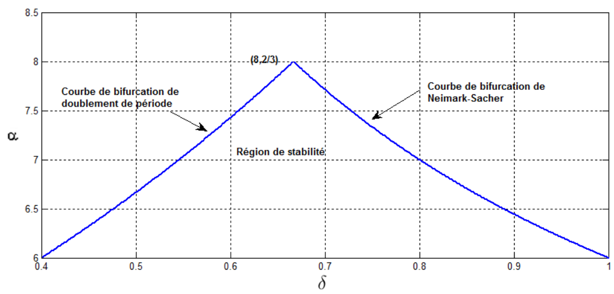

FIGURE 4.1 – Région de stabilité pour $c_r = 0.2$, $c_m = 0.5$ et $\nu = 0.5$.

- Quand $\dfrac{5\nu + 3(3+\nu)c_m - 1}{12(1+\nu)} < c_r < c_m$ et $\delta^{root} < \delta < 1$ la région de stabilité devient faible avec δ croissant, ainssi l'instabilité du système peut être accéléré si la volonté de paie du client est plus grand et l'équilibre F peut aussi perder la stabilité via une bifurcation de Naimark-Saker.

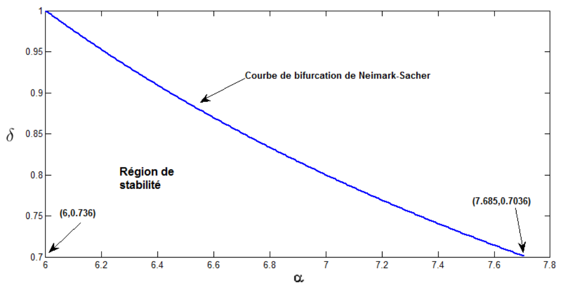

FIGURE 4.2 – Région de stabilité pour $c_r = 0.4$, $c_m = 0.5$ et $\nu = 0.5$.

Région de stabilité de F_1

L'inégalité $2\beta + 4\alpha q_n^* - (2 - \frac{1+\nu}{2}\delta)\alpha\beta q_n^* - 4 < 0$ définie une région de stabilité dilimitée, situe dans le quartier positif de (α, β).
l'équilibre de Nash est asymptotiquement stable lorsque les valeurs de α et β situe dans la région stable. Cependant, l'équilibre de Nash perd sa stabilité via une bifurcation de doublement de période lorsque une ou les deux valeurs de α et β traverse la courbe de bifurcation de doublement de période. Autrement dit, la région de stabilité devient grande lorsque δ et ν croissant. Ainsi une plus grand valeur de la volonté de paie du client peut améliorer la stabilité de Nash et la concurence accrue peut stabiliser l'équilibre de Nash.

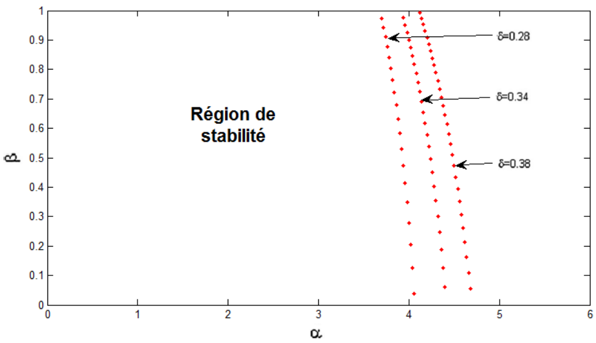

FIGURE 4.3 – Région de stabilité de l'équilibre F_1 pour quelque valeur de δ.

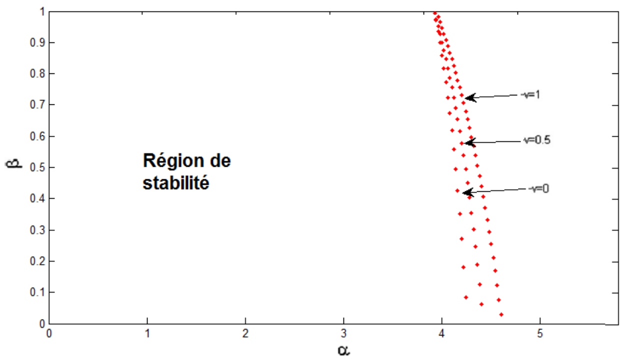

FIGURE 4.4 – Région de stabilité de l'équilibre F_1 pour quelques valeurs de ν.

4.2.3 Bifurcations et chaos

Le point fixe E est toujour instable donc on va analyser les bifurcations à traverse les deux autres points F et F_1.

a) Bifurcations à traverse le point F

Si deux inégalités de (4.1) sont satisfaites en même temps on déduit qu'il existe :

1) Une bifurcation noeud - col ou bien une bifurcation transcritique si :

$$(2+\delta)\alpha(\frac{1-c_m}{2+\delta}) = 0 \Leftrightarrow \alpha(1-c_m) = 0$$

2) Une bifurcation de doublement de période si :

$$2-(2-\delta)\alpha\frac{1-c_m}{2+\delta} = 0$$

3) Une bifurcation de Naimark-Saker si :

$$1-\delta\alpha\frac{1-c_m}{2+\delta} = 0$$

Diagramme de bifurcation

1) Premièr diagramme

La construction du premièr diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre $\alpha \in [6.2, 7[$ et les autres paramètres sont fixés comme suit : $c_m = 0.5$, $c_r = 0.2$, $\delta = 0.5$, $\nu = 0.5$ (Figure (4.5)).

1. Pour $6.2 \leq \alpha < 6.66$, le point fixe F attractif (asymptotiquement stable).
2. Pour $6.66 \leq \alpha < 6.68$, le système posséde un attracteur qui est une orbite périodique de période 2.
3. Pour $6.68 \leq \alpha < 6.89$ le système posséde un attracteur qui est une orbite transitive.
4. Pour $6.89 \leq \alpha \leq 6.93$ le système posséde un attracteur chaotique.

D'oú la bifurcation est de type de doublement de période.

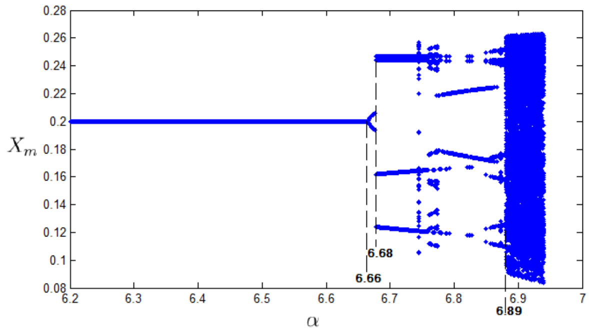

FIGURE 4.5 – Diagramme de bifurcation pour $c_r = 0.2$, $c_m = 0.5$, $\delta = 0.5$, $x = 0.23$ et $y = 0.16$.

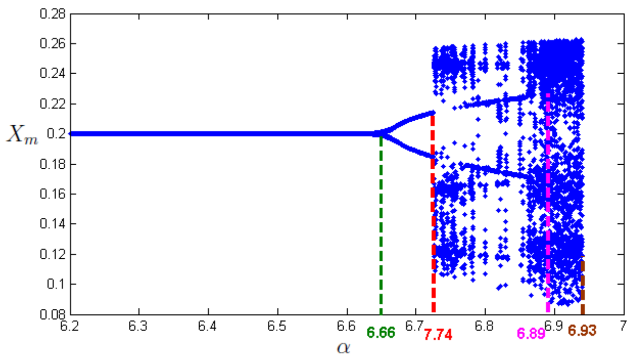

FIGURE 4.6 – Diagramme de bifurcation pour $c_r = 0.2$, $c_m = 0.5$, $\delta = 0.5$, $x = 0.19$ et $y = 0.16$.

La transition vers le chaos dans ce cas est via le scénarion d'intermittences car on remarque qu'il ya une régime périodique intercoupé par des bouffées chaotiques lorsque le paramètre α varie dans l'intervalle $]6.68, 6.89\,[$.

2) Deuxième diagramme

La construction de deuxième diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre $\alpha \in [6.2, 7.1]$ et les autres paramètres sont fixés comme suit : $c_m = 0.5$, $c_r = 0.2$, $\delta = 0.8$, $\nu = 0.5$. Figure (4.7).

1. Pour $\alpha < 7$, le point fixe F est attractif.

2. Pour $\alpha = 7$, les valeurs propres sont complexe donc il existe une bifurcation de Naimark-Saker.

3. Pour $\alpha > 7$, le système posséde une courbe invariant.

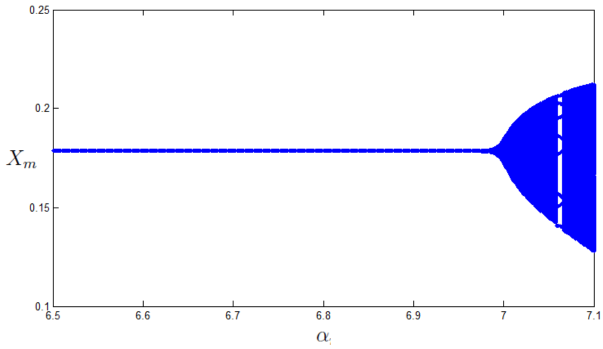

FIGURE 4.7 – Diagramme de bifurcation pour $c_r = 0.2,\ c_m = 0.5$ et $\delta = 0.8$.

b) Bifurcations à traverse le point F_1

Diagramme de bifurcation

1) Premièr diagramme

La construction du premièr diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre $\alpha \in [0, 6]$ et les autres paramètres sont fixés comme suit : $c_m = 0.5$, $c_r = 0.2$, $\beta = 0.5$, $\nu = 0.5$, $\delta = 0.34$. (Figure (4.8)).

1. Pour $\alpha < 4.24$, le point fixe F_1 est attractif, qui devient instable lorsque $\alpha = 4.24$.

2. Pour $4.24 \leq \alpha \leq 4.92$ le système posséde un attracteur qui est une orbite périodique de période 2.

3. Pour $4.92 < \alpha \leq 5.21$ le système posséde un attracteur qui est une orbite périodique de période 4.

4. Pour $5.21 < \alpha \leq 5.3$ le système posséde un attracteur qui est une orbite périodique de période 8.

5. Pour $\alpha > 5.3$ le système posséde un attracteur chaotique.

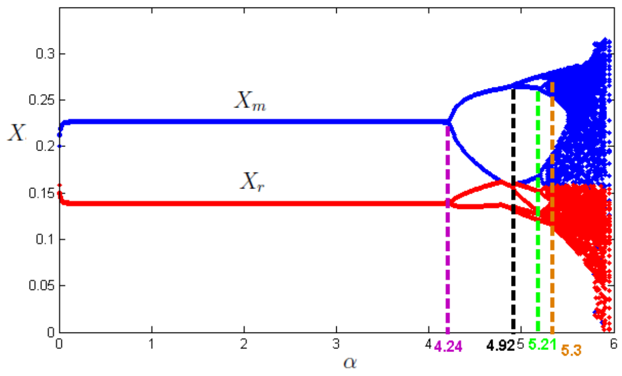

FIGURE 4.8 – Diagramme de bifurcation pour $\nu = 0.5$, $\beta = 0.5$ et $\delta = 0.34$.

La transition vers le chaos dans ce cas est via le scénarion de doublement de période car on remarque que la période de l'oxillateur est multiplier par deux, puis par quatre, par huit, et puis passer au chaos lorsque le paramètre α varie dans l'intervalle $]4.24, 6[$.

2) Deuxiéme diagramme

La construction du deuxiéme diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre $\beta \in [0, 1]$ et les autres paramètres sont fixés comme suit : $c_m = 0.5$, $c_r = 0.2$, $\alpha = 4.1$, $\nu = 0.5$, $\delta = 0.34$. (Figure (4.9)).

1. Pour $0 \leq \beta < 0.76$ le point fixe F_1 est attractif, qui devient instable lorsque $\alpha = 0.76$.
2. Pour $\beta > 0.76$ le système posséde un attracteur qui est une orbite périodique de période 2.

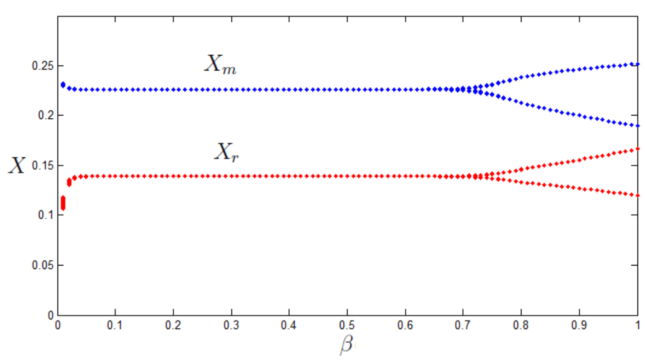

FIGURE 4.9 – Diagramme de bifurcation pour $\nu = 0.5$, $\alpha = 4.1$ et $\delta = 0.34$.

On remarque que le paramètre β na pas une grande influence sur la dynamique du modele par rapport le paramètre α.

Exposant de lyapunov

1) Les exposants de lyapunov qui correspond la figure (4.5) est illustré dans la figure (4.10).

Les signes des exposants de lyapunov et les comportements du système est comme suite :

• Pour $\alpha \in (6.2, 6.66($, on a deux exposants de lyapunov négatives ($\lambda_2 < \lambda_1$) alors le comportement est stationaire (le point F est asymptotiquement stable).

• Pour $\alpha \simeq 6.66$, on a $\lambda_1 \simeq 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors $\alpha \simeq 6.66$ est une point de bifurcation c'est-à-dire le point fixe perd la stabilité et apparaît deux points périodiques qui prolonger jusqu'a $\alpha \simeq 6.74$.

• Pour $\alpha \in (6.74, 6.89($, les deux exposants sont négatives mais on remarque que la courbe n'est pas lisse c'est-à-dire une evolution instable ce qu'indique une transition via l'intermitance vers le chaos.

• Pour $\alpha \in (6.89, 6.93($, on a $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors le comportement est chaotique. Ce résultat nous avons confirme précédemment sur la figure (4.5)

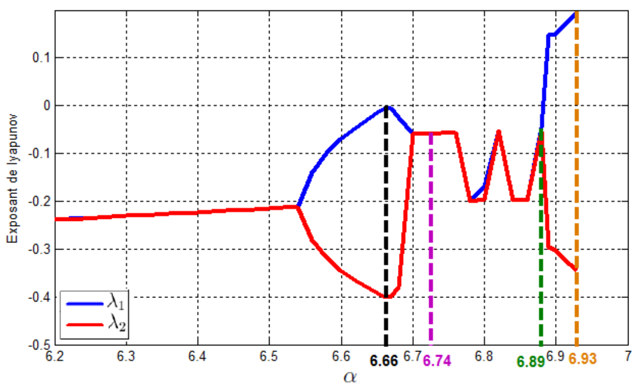

FIGURE 4.10 – Exposant de lyapunov pour $c_m = 0.5$, $c_r = 0.2$ et $\delta = 0.5$.

2) L'exposant de lyapunov qui correspond la figure (4.8) est illustré dans la figure(4.11).

Les signes des exposants de lyapunov et les comportements du système est comme suite :

• Pour $\alpha \in (0.1,\ 4.24($, on a deux exposants négative ($\lambda_2 < \lambda_1$) alors le comportement est stationnaire (le point F_1 est asymptotiquement stable).

• Pour $\alpha \simeq 4.24, \alpha \simeq 4.92$ et $\alpha \simeq 5.21$ on a $\lambda_1 \simeq 0$, $\lambda_2 < 0$ alors $\alpha \simeq 4.24, \alpha \simeq 4.92$ et $\alpha \simeq 5.21$ sont des points du bifurcation, c'est-à-dire le point fixe perd la stabilité et apparaît bifurcation doublement de période.

• Pour $\alpha \in (5.35,\ 6($, on a $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors la comportement chaotique. Tout les résultat confirme ce que nous avons vu dans la figure(4.8).

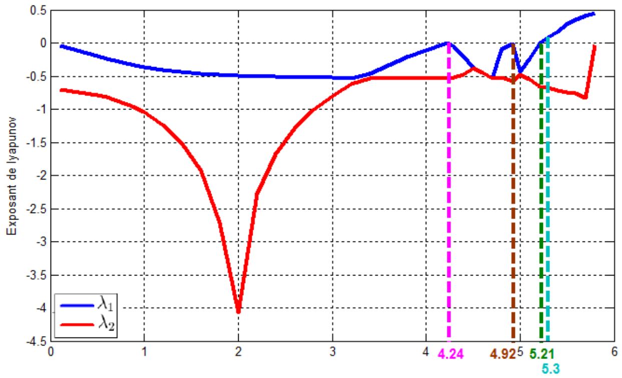

FIGURE 4.11 – Exposant de lyapunov pour $\nu = 0.5$,$\beta = 0.5$ et $\delta = 0.34$

.

Les attracteurs

Le portrait de phase pour $\alpha = 7.08$ est illustrée dans la figure (4.12) dans laquelle on observe une courbe invariante ce qui signifier que le comportement du système (4.1) est changé d'un comportement stationnaire vers un comportement quasi-périodique.

La figure (4.13) représente un attracteur étrange dans un portrait de phase de dimension 2 pour $\alpha = 6.93$ qui illustre les détails du comportement de système (4.1). On utilise l'algorithme de A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano [7] pour calculer l'exposants de lyapunov, on trouve $\lambda_1 = 0.19746$ et $\lambda_2 = -0.34776$. Maintenant pour calculer la dimension de l'attracteur on utilise la formule de Ka-

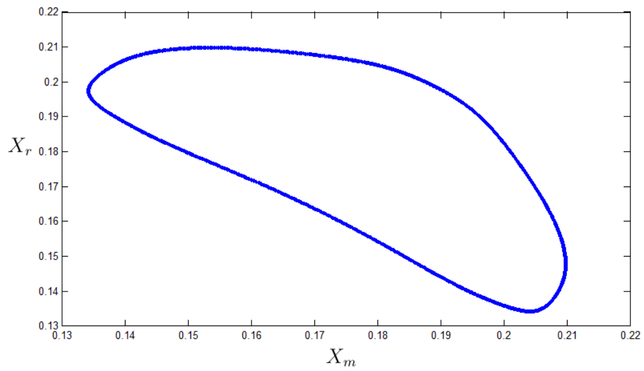

FIGURE 4.12 – Courbe invariant pour $\delta = 0.8$ et $\alpha = 7.08$.

plan et York on obtient $D_L = 1.5678$.

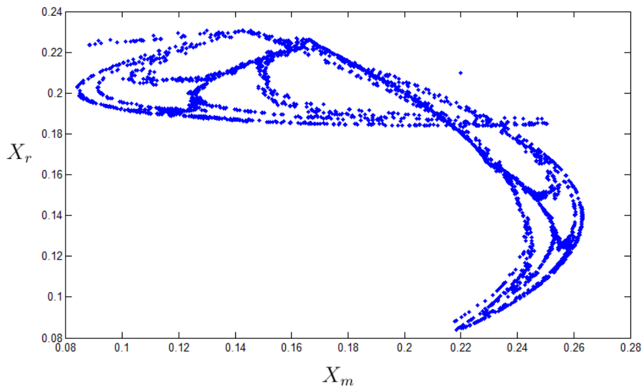

FIGURE 4.13 – Attracteur étrange pour $\delta = 0.5$ et $\alpha = 6.93$

.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à étudier un modèle financier décrit par des équations aux différences finies de dimension 2 d'ordre 1, qui modélise la concurrence enter les OEMs et le compétiteur tiers. Pour analyses les points fixes on a divisé le système en deux cas :

Dans le premier cas : le système converge vers l'équilibre F pour certaine valeur du paramètre. Aussi une plus grand valeur de la volonté de payer peut améliorer la stabilité, Autrement dit il n'existe pas une relation entre la stabilité du système et la vitesse d'ajustement du fabricant tiers β.

Dans le deuxième cas : le système converge vers l'équilibre de Nash F_1 pour certaine valeur du paramètre. La région de stabilité devient grand avec δ et ν augmente et l'équilibre de Nash perd la stabilité via une bifurcation doublement de période.

ANNEXE

Dans cette partie, nous introduisons des algorithmes en Matlab.

Diagrame de bifurcation doublement de période(Figure 4.6).

```
clear all
close all
clc ;
a=0.5 ;
c=0.5 ;
z=0.5 ;
b=0.2 ;
v=0.5 ;
m=6.2 :0.001 :6.97 ;
x( :,1)=zeros(size(m,2),1) ;
y( :,1)=zeros(size(m,2),1) ;
n1=120 ;
n2=135 ;
n=n2-n1+1 ;
for k=1 : size(m,2)
x(k,1)=0.19 ;
y(k,1)=0.16 ;
```

```
for i=1 :n2
x(k,i+1)=x(k,i)+m(k)*x(k,i)*(1-2*x(k,i)-c*y(k,i)-a) ;
y(k,i+1)=min((1-z)*y(k,i)+((1+v)/2)*z*((1-x(k,i)-b/c)),x(k,i)) ;
end
end
r=m(1,1)*ones(1,n) ;
h=x(1,n1 :n2) ;
for k=2 : size(m,2)
r=[r,m(1,k)*ones(1,n)] ;
h=[h,x(k,n1 :n2)] ;
end
plot(r,h,'.b') ;hold on
```

Diagrame de bifurcation doublement de période(Figure 4.8)

```
clear all
close all
clc ;
a=0.5 ;
c=0.34 ;
z=0.5 ;
b=0.2 ;
v=0.5 ;
m=0 :0.01 :6 ;
x( :,1)=zeros(size(m,2),1) ;
y( :,1)=zeros(size(m,2),1) ;
n1=150 ;
n2=200 ;
n=n2-n1+1 ; for k=1 : size(m,2)
x(k,1)=0.2 ;
y(k,1)=0.15 ;
for i=1 :n2
```

```
x(k,i+1)=x(k,i)+m(k)*x(k,i)*(1-2*x(k,i)-c*y(k,i)-a) ;
y(k,i+1)=min((1-z)*y(k,i)+((1+v)/2)*z*((1-x(k,i)-b/c)),x(k,i)) ;
end
end
r=m(1,1)*ones(1,n) ;
h=x(1,n1 :n2) ;
l=y(1,n1 :n2) ;
for k=2 : size(m,2)
r=[r,m(1,k)*ones(1,n)] ;
h=[h,x(k,n1 :n2)] ;
l=[l,y(k,n1 :n2)] ;
end
plot(r,h,'.b') ;hold on
plot(r,l,'.r') ;
```

Attracteur étrange(Figure 4.13)

```
clear all
close all
clc ;
n=3000 ;
a=0.5 ;
c=0.5 ;
m=6.94 ;
z=0.5 ;
b=0.2 ;
v=0.5 ;
x(1,1)=0.22 ;
y(1,1)=0.21 ;
k=1 ;
for i=1 :n
x(k,i+1)=x(k,i)+m*x(k,i)*(1-2*x(k,i)-c*y(k,i)-a) ;
```

```
y(k,i+1)=min((1-z)*y(k,i)+((1+v)/2)*z*((1-x(k,i)-b/c)),x(k,i)) ;
end
plot(x(k, :),y(k, :),'.b') ;hold on
```

Diagrame de bifurcation de Neimark-Sacher(Figure 4.7)

```
clear all
close all
clc ;
a=0.5 ;
c=0.8 ;
z=0.5 ;
b=0.2 ;
v=0.5 ;
m=6.5 :0.001 :7.1 ;
x( :,1)=zeros(size(m,2),1) ;
y( :,1)=zeros(size(m,2),1) ;
n1=3000 ;
n2=4000 ;
n=n2-n1+1 ;
for k=1 : size(m,2)
x(k,1)=0.19 ;
y(k,1)=0.16 ;
for i=1 :n2
x(k,i+1)=x(k,i)+m(k)*x(k,i)*(1-2*x(k,i)-c*y(k,i)-a) ;
y(k,i+1)=min((1-z)*y(k,i)+((1+v)/2)*z*((1-x(k,i)-b/c)),x(k,i)) ;
end
end
r=m(1,1)*ones(1,n) ;
h=x(1,n1 :n2) ;
for k=2 : size(m,2)
r=[r,m(1,k)*ones(1,n)] ;
```

```
h=[h,x(k,n1 :n2)] ;
end
plot(r,h,'.b') ;hold on
```

BIBLIOGRAPHIE

[1] **M. S. Abdelouhabe.** *Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires.* Mémoire de magistère, Université de Mentouri. Constantine, 2009.

[2] **R. Ana.** *Les bifurcations de l'application logistique*, Seigneur Agathe sous la direction de Rechtman Ana, (2012).

[3] **A. Atasu, V. D. R. Guide, L. N.Van Wassenhove.** *So what if remanufacturing cannibalizes new product sales.* Calif. Manag. Rev. 52(2), 56–76 (2010).

[4] **J. Bertrand.** *Théorie mathématique de la richesse sociale.* J. Savants 48, 499–508 (1883).

[5] **G. Bontempi.** *Modélisation et simulation.* Département d'Informatique Boulevard de Triomphe.

[6] **A. Boukabou.** *Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation.* Contribution à l'élaboration de nouvelles approches. Université de Constantine. Thése de doctorat, 2006.

[7] **A. Cournot.** *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théoris des Richesses.* Paris (1838).

[8] **A. Désilles.** *Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret.* 2003.

[9] **T. Dubiel-Teleszynski.** *Nonlinear dynamics in a heterogeneous duopoly game with adjusting players and diseconomies of scale.* Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 16, 296–308, 2011.

[10] **A. A. Elsadany.** *A dynamic Cournot duopoly model with different strategies.* Journal of the Egyptian Mathematical Society,2014.

[11] **M. E. Ferguson, L. B. Toktay.** *The effect of competition on recovery strategies.* Prod. Oper. Manag. 15(3), 351–368 (2006).

[12] **G. Ferrer, J. M. Swaminathan.** *Managing new and remanufactured products.* Manag. Sci. 52(1), 15–26 (2006).

[13] **E. Goncalvés Da Silva.** *Introduction aux système dynamique et chaos.* École d'ingénieur, Institut Polytechnique de Grenoble, 2004.

[14] **M. Halimi.** *Observation et détection de modespour la synchronisation des systèemes chaotiques : une approche unifée.* Universitée de Lorraine. Thése de Doctorat, 2013.

[15] **H. Hamiche.** *Inversion à des Systèmes Dynamiques Hybrides Chaotiques, Application à la Transmission Sécurisée de Données.* Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou. Thése de Doctorat, 2011.

[16] **T.Hamaizia.** *Systèmes Dynamiques et Chaos "Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique".* Constantine. Thése de doctorat, 2013.

[17] **T. Li, J. H. Ma.** *Complexity analysis of the dual-channel supply chain model with delay decision.* Nonlinear Dyn 78(4), 2617–2626 (2014).

[18] **T. Li, J. H. Ma.** *Complexity analysis of dual-channel game model with different manager's business objectives.* Commun. Nonlinear Sci. 20(1), 199–208 (2015)

[19] **J. H. Ma, J. L. Zhang.** *Research on the price game and the application of delayed decision in oligopoly insurance market.* Nonlinear Dyn 52(9–10), 1479–1489 (2012).

[20] **O. Megherbi.** *Etude et réalisation d'un système sécurisé à base de systèmes chaotiques.* Universite Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, Thése de Doctorat, 2013.

[21] **S. Mitra, S.Webster.** *Competition in remanufacturing and the effects of government subsidies.* Int. J. Prod. Econ. 111(2), 287–298 (2008).

[22] **M. Mohammed.** *Sur la stabilité Structurelle des Difféomorphismes Quadratiques en Dimension 2.* Ouargla, Mémoire de Magistère, 2011.

[23] **T. Puu.** *Chaos in duopoly pricing. Chaos Soliton Fractals.* 1(6), 573–581 (1991).

[24] **L. Shi, Z. Sheng, X. Feng.** *Complexity analysis of remanufacturing duopoly game with different competition strategies and heterogeneous players.* Nonlinear Dyn 82 :1081–1092, 2015.

[25] **R. Subramanian, M. E. Ferguson, L. B. Toktay.** *Remanufacturing and the component commonality decision.* Prod Oper Manag, 22(1), 36–53 (2013).

[26] **I. Talbi.** *Systèmes dynamiques non linéaires et phénomènes de chaos.* Constantine, (Mémoire de Magistère), 2010.

[27] **A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano.** *Determining Lyapunov Exponents from a Time Series.* Physica D, Vol. 16, pp. 285–317, 1985.

[28] **J. XU.** *Dynamique chaotique en vue d'application aux télécommunication.* Université de Toulouse, Thése de doctorat, 2008.

[29] **H. J.Yu, G. L. Cai, Y. X. Li.** *Dynamic analysis and control of a newhyperchaotic finance system.* Nonlinear Dyn. 67(3), 2171–2182 (2012).

[30] **W. Yu, Y. Yu.** *A dynamic duopoly model with bounded rationality based on constant conjectural variation.* Economic Modelling 37, 103–112, (2014).

Résumé

Dans ce travail, nous avons énoncé certains outils nécessaires pour étudier les systèmes dynamiques (points d'équilibre, stabilité, bifurcations, chaos et l'exposant de lyapunov) et comme application, nous avons étudié un système financier composé de deux équations aux différences finies, chaque équation représente un joueur et chaque joueur cherche à maximiser les profits et maximiser la part de marché en utilisant des différentes stratégies.

Dans sa modèle, les points d'équilibre ont été analysés dans deux situations: Le premier cas: si la volonté de paie du client est grande, nous avons trouvé deux points d'équilibre le premier est stable mais le deuxième est instable dans certaines conditions qu'on a bien déterminés.

Le deuxième cas: si la volonté de paie du client est faible il ya un seul point d'équilibre appelé équilibre de Nash, ce point est stable en certaines conditions que nous avons déterminés.

Enfin nous avons présenté des simulations numériques pour illustrer la dynamique complexe de ce modèle tel que la présence de bifurcations et le chaos qui a été validé par l'existence d'un exposant de Lyapunov positif.

Abstract

In this work, we have outlined some tools to study dynamical systems (equilibrium points, stability, bifurcations, chaos and the Lyapunov exponents), and as an application, we have studied a financial model composed by two finite difference equations, each equation represent a player and each player tries to maximize profits and maximize market share by using different strategies.

The equilibrium point was analyzed on two situations:

The first case: if the consumer's willingness-to-pay is higher, we found two equilibrium, the first is stable but the second is unstable under certain conditions.

The second case: if the consumer's willingness-to-pay is lower then there is only one equilibrium point called the Nash equilibrium point which is stable in certain conditions.

Using computer simulations we have illustrated the complex dynamic behavior of this system such as the presence of bifurcations and chaos which carried out by the presence of positive Lyapunov exponents.

ملخص

في هذه المذكرة تطرقنا إلى بعض المفاهيم الأساسية لدراسة نظام ديناميكي متقطع (نقاط التوازن، الاستقرار، التشعبات، الفوضى، الجاذب الفوضوي، وأسس ليابنوف)، وكتطبيق درسنا نظام مالي يتألف من معادلتين تراجعيتين (معادلتي فروق) تمثل كل معادلة بلاعب حيث يسعى كل لاعب إلى تعظيم الربح وتعظيم حصته السوقية باستعمال استراتجيات مختلفة.

في هذا النظام تم تحليل نقاط التوازن انطلاقا من حالتين:

الحالة الأولى:عندما يكون استعداد العملاء للدفع عال في هذه الحالة وجدنا نقطتي توازن الأولى غير مستقرة أما الثانية فهي مستقرة تحت بعض الشروط.

الحالة الثانية: عندما يكون استعداد العملاء للدفع منخفض فإنه توجد نقطة توازن واحدة تسمى توازن ناش وهي مستقرة تحت بعض الشروط.

كما تم استعمال المحاكاة العددية لتوضيح السلوكيات الديناميكية المعقدة لتطور هذا النظام حيث تم الكشف عن وجود التشعبات والفوضى ... الخ