الجمهوريـــة الجزائـــريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـــــم العالـــي والبحـــث العلمـــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N°Réf :……………

Centre Universitaire
Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatiques

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

en: Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Théorèmes de sélection continue

Préparé par : Souici Dounia
Labid Messaouda

Soutenue devant le jury

Encadré par : F. Selamnia……………………..M.A.A
Président : K. Boubellouta……….............M.A.B
Examinateur : L. Benaouicha …………………M.A.B

Année Universitaire : 2015/2016

Remerciements

*Nous tenons à remercier en premier et avant tout, notre créateur **Allah**, qui nous aide à réaliser ce travail.*

Nos sincères gratitudes et remerciements à notre encadreur Mme F. Selamnia pour le grand soutien moral et leurs aides précieuses qui nous apportez durant tout ce travail.

Nous adressons, également, mes remerciements chaleureux aux membres de l'institut des sciences et de la technologie du centre universitaire de Mila et à tous ceux qui ont pris part de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Dounia, Messaouda.

Dédicace

En guise de remerciement et en termes de gratitude, je dédie ce modeste travail, aux personnages les plus chers du monde et les plus chers à mon cœur, qui ont été si généreux, si patients, si noble avec moi pendant mes années d'étude.

A mon père source de force et de courage, qui n'a jamais cessé de donner de sa sympathie et son éducation. A l'exemple de ma vie ma mère qui toujours présent à mes coté, avec sa tendresse et son amour.

A mes frères et à mes sœurs.

A mes amies et mes collègues.

A mon binôme Messaouda qui je la souhaite une vie plaine de joie.

A tous qui occupe une place dans ma vie, dans mon cœur et surtout aux étudiants de master de mathématiques appliqués et fondamentales.

DOUNIA

Dédicace

En guise de remerciement et en termes de gratitude, je dédie ce modeste travail, aux personnages les plus chers du monde et les plus chers à mon cœur, qui ont été si généreux, si patients, si noble avec moi pendant mes années d'étude.

A mon père source de force et de courage, qui n'a jamais cessé de donner de sa sympathie et son éducation. A l'exemple de ma vie ma mère qui toujours présent à mes coté, avec sa tendresse et son amour.

A mes frères et à mes sœurs.

A mes amies et mes collègues.

A mon binôme Dounia qui je la souhaite une vie plaine de joie.

A tous qui occupe une place dans ma vie, dans mon cœur et surtout aux étudiants de master de mathématiques appliqués et fondamentales.

MESSAOUDA

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Soit l'équation différentielle $y'^2(x) = y^2(x)$, alors $y'(x) = \pm\sqrt{|y(x)|}$, c'est à dire

$$y'(x) \in \left\{\sqrt{|y(x)|}, -\sqrt{|y(x)|}\right\}.$$

Soit $F(y(x)) = \left\{\sqrt{|y(x)|}, -\sqrt{|y(x)|}\right\}$ donc $y'(x) \in F(y(x)) \qquad (P_F)$.
(P_F) est dite inclusion différentielle pour une équation différentielle $y'(x) = f(y(x))$.
Donc une inclusion différentielle est une généralisation d'une équation différentielle.

L'approche la plus simple pour résoudre une inclusion différentielle consiste à réduire le problème à un problème correspondant pour une équation différentielle ordinaire. Ceci revient à rechercher une fonction continue $f(t) \in F(t)$ et on obtient toute solution de $y'(t) = f(y(t))$ et aussi solution de $y'(t) \in F(y(t))$.

Donc l'une des connexions entre l'analyse multivoque et univoque est donnée par la notion de sélection.

Le premier objectif de ce mémoire est de présenter les théorèmes d'existence de sélection continue pour les multi-applications.

Il y'a plusieurs exemples qui montrent que les multi-applications continues ne doivent pas avoir en général des sélections continues pour cela nous commençons avec un théorème de base d'existence de sélection continue pour les multi-applications s.c.i ensuite s.c.s et enfin localement sélectionables à valeurs convexes, ainsi que les théorèmes d'existence de sélection continue non nécessairement à valeurs convexes, et les théorèmes d'existence de sélection pour les multi-applications à valeurs décomposables dans les deux cas s.c.i et s.c.s.

La notion de décomposabilité est dans un sens similaire à la convexité, mais il existe aussi des différences majeures, cependant plusieurs cas, la condition de décomposabilité est un bon remplaçant de la convexité. Dans ce présent mémoire, on s'intéresse à l'étude les Théorèmes de sélection continue qui existent dans la littérature, qui sont des profonds résultats d'analyse fonctionnelle.

Notre travail est partagé en trois chapitres.

Dans le premier, on donne toutes les définitions et les notions de base ayant été utilisées tout au long de ce travail.

Le deuxième chapitre vise à comprendre le concept de multifonctions et leurs propriétés, la continuité et la mesurabilité.

Le troisième est la section la plus importante dans ce mémoire, car le but de ce travail est de donner un aperçu sur les théorèmes d'existence de sélection continue pour les multi-applications.

Nous commençons par les théorèmes d'existence de sélection continue pour les multi-applications à valeurs convexes. Le théorème de **"Michael"** pour les multi-applications s.c.i, le théorème d'approximation de **"Cellina"** et le théorème de **"Browder"** pour les multi-applications s.c.s et enfin les théorèmes de sélection pour les muli-applications localement sèlectionables.

Ensuite on donne des théorèmes de sélection pour les multi-applications continues à valeurs non convexes.

En fin, les théorèmes d'existence de sélection continue pour les multi-applications à valeurs décomposables.

Notations générales

Tout au long de ce travail, nous utilisons les notations suivantes

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ l'ensemble des nombres réels.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

A^c le complémentaire de A.

$\overline{A}$ l'adhérence de A.

$\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A.

$F_r(A)$ la frontière de A.

$co\,(A)$ L'enveloppe convexe de A.

$\overline{co}\,(A)$ L'enveloppe convexe fermée de A.

$\mathcal{B}(X)$ Tribu Borélienne.

X' Dual topologique de X.

X'' Bidual de X.

$\langle ., . \rangle$ produit de dualité entre Xet X'.

$\delta\,(X, X')$ topologie faible sur X.

$\delta\,(X', X)$ topologie faible* sur X'.

$\rightharpoonup, \rightharpoonup^*$ la convergence faible, faible*.

$\rightarrow$ la convergence forte.

$\mathbf{L}^p$ l'ensemble des fonctions $P^{\text{ème}}$ intégrable.

$\mathbf{L}^\infty$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées.

$\|.\|_p$ Norme de $\mathbf{L}^p$.

$\overline{B}_X$ la boule unité fermée de X.

$dom(f)$ le domaine de f.

$Im(f)$ l'image de f.

$gph(f)$ le graphe de f.

$epi(f)$ l'épigraphe de f.

$p.p$ presque partout.

$d(x, A)$ la distance entre le point x et A.

$V(A,\varepsilon)=\{x\in X \,/\, d(x,A)\leq\varepsilon\}, A\subset X.$

$F|_Z$ la restriction de F sur Z.

$\{\Pi_i\}_{i\in I}$ une partition de l'unité.

$\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de X.

$\mathcal{P}_{cv}(X)=\{A\in\mathcal{P}(X),\ A$ est un convexe$\}$ est un ensemble des sous-ensembles convexes de X.

$\mathcal{P}_{cp}(X)=\{A\in\mathcal{P}(X),\ A$ est un compact$\}$ est un ensemble des sous-ensembles compacts de X.

$\mathcal{P}_{cl}(X)=\{A\in\mathcal{P}(X),\ A$ est un fermé$\}$ est un ensemble des sous-ensembles fermés de X.

$\mathcal{P}_{dec}(X)=\{A\in\mathcal{P}(X),\ A$ est un décomposable$\}$ est un ensemble des sous-ensembles décomposables de X.

$\mathcal{P}_{cl,cv}(X)=\mathcal{P}_{cl}\cap\mathcal{P}_{cv}(X)$ est un ensemble des sous-ensembles fermés et convexes de X.

$\mathcal{P}_{cl,dec}(X)=\mathcal{P}_{cl}\cap\mathcal{P}_{dec}(X)$ est un ensemble des sous-ensembles fermés et décomposables de X.

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Pour élaborer notre travail, il est indispensable d'introduire tous les outils et notions de base nécessaires. En effet, ce chapitre comprend les notations et les concepts de base liés à notre étude, on proposera aussi des rappels d'analyse fonctionnelle et des rappels sur la topologie faible et faible* et en fin les espaces $\mathbf{L}^p$.

1.1 quelques rappels d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace vectoriel

Définition 1.1.1. *Un espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}\,(\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K}=\mathbb{C})$ *est un ensemble* $X \neq \emptyset$ *dont les éléments sont appelés des vecteurs et dons lequel sont définies deux opérations* $(+)$ *et* $(.)$ *satisfaisant aux propriétés algébriques usuelles suivantes*

$\forall\, x, , x', x'' \in X, \forall, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

- $x + x' = x' + x$
- $x + (x' + x'') = (x + x') + x''$
- $1 \cdot x = x$

• $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$

• $\alpha \cdot (x + x') = \alpha \cdot x + \alpha \cdot x'$

• $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

▶ *Si* X *est un espace vectoriel,* $A \subset X$, $B \subset X$, $x \in X$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$
les assertions suivantes seront utilisée

✓ $A + x = \Big\{a + x, a \in A\Big\}$

✓ $A - x = \Big\{a - x, a \in A\Big\}$

✓ $A + B = \Big\{a + b, a \in A, b \in B\Big\}$

✓ $\lambda \cdot A = \Big\{\lambda \cdot a, a \in A\Big\}$

• *Un ensemble* $F \subset X$ *est appelé un sous-espace vectoriel de* X *si* F *lui même (muni des mêmes opérations) est un espace vectoriel.*

▶ *On vérifie facilement que* F *est un sous-espace vectoriel de* X *si et seulement si* $F \neq \emptyset$ *et* $\alpha x + \beta y \in F, \quad \forall\, x, y \in F, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

• *Un espace vectoriel* X *est de dimension* n $(dim X = n)$, *si* X *admet une base* $\Big\{x_1, x_2, ..., x_n\Big\}$ *ceci signifie facilement que pour tout* $x \in X$
il existe $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ *uniques tels que*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n.$$

▶ *Si* $\dim X = n$ *pour un certain* $n \in \mathbb{N}, (n < \infty)$, X *est dit de dimension finie.*

1.1.2 Espace Topologique

Définition 1.1.2. *On appelle espace topologique un couple* $(X, \mathcal{T})$ *òu* X *est un ensemble et* $\mathcal{T}$ *est une famille de parties de* X, *appelées ouverts, vérifiant les*
propriétés suivantes

• $\emptyset, X$ *sont des ouverts.*

• *toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

C'est à dire

$\forall\, (\mathcal{T}_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{T}, \bigcap\limits_{i=1} \mathcal{T}_i \in \mathcal{T}.$

- *toute réunion (quelconque) d'ouverts est un ouvert.*

C'est à dire

$\forall \left(\mathcal{T}_i\right)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{T}, \underset{i=1}{\cup}\mathcal{T}_i \in \mathcal{T}.$

Exemple 1.1.1.

1) *L'ensemble $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ formé par l'ensemble des parties de X définit une topologie appelée la topologie discrète. Un espace muni de la topologie discrète est appelé un espace discret.*

2) *L'ensemble $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}$ définit une topologie appelée la topologie grossière.*

3) *Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des parties constituées d'unions d'intervalles ouverts et de l'ensemble vide définit une topologie appelée la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.*

Définition 1.1.3. *On appelle complémentaire de A dans X et on note A^c lorsque'il n'y a pas d'ambiguïté l'ensemble $\left\{x \in X,\ x \notin A\right\}$.*

Définition 1.1.4. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de x si elle contient un ouvert qui contient x, c'est à dire*

$$V \text{ voisinage de } x \Leftrightarrow \exists\, U \in \mathcal{T},\ x \in U \subset V.$$

Exemple 1.1.2. *Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $x \in \mathbb{R}$, $\left]x-2, x+2\right]$ est un voisinage de x.*

Proposition 1.1.1. *Les familles $\mathcal{V}(x)$ voisinage de x, $x \in X$ vérifient les propriétés suivantes*

- *Pour tout $x \in X, \mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ et pour toute $V \in \mathcal{V}(x)$ on a $x \in V$.*
- *Toute partie de X qui contient un élément de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.*
- *L'intersection de deux éléments de $\mathcal{V}(x)$ est élément de $\mathcal{V}(x)$.*
- *Pour tout $x \in X$ et tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que pour tout $y \in W$, on ait $\mathcal{V} \in V(y)$.*

Définition 1.1.5. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et A un sous-ensemble de X.*

- *On dit que A est un ensemble ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points.*

- *On dit que A est un ensemble fermé de X, si son complémentaire est un ouvert.*

Définition 1.1.6. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts.*
On dit que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $(X, \mathcal{T})$ si tout ouvert non vide de X est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.
En général, il n'y a pas unicité de la base d'ouverts.

Définition 1.1.7. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On appelle base de voisinages de x toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subset V$.*
Notez que si $\mathcal{B}(x)$ est une base de voisinages de x alors on a

$$\mathcal{V}(x) = \Big\{ V \subset X, \text{ il existe } W \in \mathcal{B}(x) \text{ avec } W \subset V \Big\}.$$

Exemple 1.1.3. *Si $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle et $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble des intervalles de la forme $\left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[$ constitue une base de voisinages du point x formée d'ensembles ouverts.*

Définition 1.1.8.

- *On dit que x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x dans X contient un point de A distinct de x lui même.*

- *On dit qu'un point $a \in A$ est un point isolé dans A s'il existe un voisinage V de a dans X tel que $V \cap A = a$.*

Définition 1.1.9.

- *On dit que x est adhérent à A lorsque tout voisinage de x rencontre A.*

- *L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note $\overline{A}$, est le plus petit fermé qui contient A.*

Corollaire 1.1.1. *Une partie A de X est fermé si et seulment si $A = \overline{A}$.*

Définition 1.1.10.

- *On dit que x est intérieur à A si A est un voisinage de x.*
- *L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert inclue dans A.*

Définition 1.1.11.

- *On dit que x est un point frontière de A si $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{A^c}$.*
- *L'ensemble des points frontière de A s'appelle la frontière de A et se note $F_r(A)$.*

Proposition 1.1.2. *Ona $F_r(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$.*

Définition 1.1.12. *On dit que X est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. C'est à dire, si on peut énumérer ses points en une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ce qui implique notamment que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$) c'est le cas de $\mathbb{N}$ lui-même ou de $\mathbb{N}^*$, de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$, ou encore des entiers pairs, ou de toute suite strictement croissante d'entiers.*

Définition 1.1.13. *On dit qu'une partie A est dense dans X si $\overline{A} = X$.*

Définition 1.1.14. *On dit qu'un espace topologique est séparable s'il admet une partie dénombrable et dense.*

Définition 1.1.15. *On dit qu'un point l de X est limite de la suite $(x_n)_{n>0}$ si pour tout voisinage V de l dans X, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ on ait, $x_n \in V$.*

Définition 1.1.16. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que X est séparé, si quelque soient deux éléments distincts $x, y \in X$, il existe V_x voisinage de x et V_y voisinage de y tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Définition 1.1.17. *On appelle espace de Hausdorff tout espace vectoriel topologique séparé.*

Proposition 1.1.3. *Soit X un espace topologique séparé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, cette limite est unique. On dit alors que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l quand n tend vers $+\infty$, et on note : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x = l$.*

Définition 1.1.18. *Soient* $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ *deux espaces topologiques et* $f : X \to Y$

- *On dit que* f *est continue au point* $x_0 \in X$ *si et seulement si*

$$\forall\, W \in \mathcal{V}(f(x_0)), \exists\, V \in \mathcal{V}(x_0) \;/\; f(V) \subset W \Leftrightarrow \forall\, W \in \mathcal{V}(f(x_0)),\; f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x_0).$$

- *On dit que* f *est séquentiellement continue au point* $x_0 \in X$ *si et seulement si, pour toute suite* $(x_n)_n$ *de point de* X *convergeant vers* x_0*, la suite* $(f(x_n))_n$ *converge vers* $f(x_0)$*. Dans un espace métrique la continuité est équivalent à la continuité séquentielle.*
- *On dit que* f *est continue sur* X *si elle est continue en chaque point de* X*.*

Définition 1.1.19. *Soient* (X, d) *et* (T, d') *des espaces métriques, et soit* $f : X \to T$ *une application.*
f *est dite lipschitzienne de constante (ou :de rapport)* λ *s'il existe* λ *réel* ≥ 0 *tel que :*

$$\forall\, x \in X, \forall\, y \in X : d'(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x, y).$$

Définition 1.1.20. *Soient* X *un ensemble quelconque et* A *une partie de* X*.*

Un recouvrement de A *est une famille* $(B_i)_{i\in I}$ *des parties de* X *vérifiant* $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} B_i$*.*

- *Si* I *est fini, on dit recouvrement fini.*
- *Si* I *est dénombrable, on dit recouvrement dénombrable.*
- *Si* $A = X$ *et comme* $\bigcup\limits_{i\in I} B_i \subset X$*, on a l'égalité* $X = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$*.*

Définition 1.1.21. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique,* $\{U_i\}_{i\in I}$*,* $\{V_j\}_{j\in J}$ *deux recouvrements de* X*.*

- *On dit que* $\{U_i\}_{i\in I}$ *est une raffinement de* $\{V_j\}_{j\in J}$*, si* $\forall i \in I, \exists j \in J$ *tel que* $U_i \subset V_j$*.*
- *On dit que* $\{U_i\}_{i\in I}$ *est localement fini, si* $\forall\, x \in X$*,* $\exists\, V \in \mathcal{V}(x)$ *tel que* $U_i \cap V \neq \emptyset$*,* $\forall\, i \in I$ *et* I *fini.*

Définition 1.1.22. *Un sous ensemble* A *de* X *est dit*

- *Compact si de tout recouvrement ouvert de* A *on peut extraire un sous recouvrement finie.*
- *Séquentielement compact si toute suite de point de* A *admet une sous suite qui converge vers un point de* A*.*

• *Relativement compact si son adhérence est compact.*

• *Relativement séquentiellement compact si tout suite de A admet une sous suite qui converge vers un point de X.*

Définition 1.1.23. *On dit que un espace topologique X est paracompacte s'il est séparé et que, pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, il existe un recouvrement ouvert localement fini $(V_j)_{j\in J}$ de X plus fin que $(U_i)_{i\in I}$.*

Définition 1.1.24. *Soit X un espace topologique. une partition de l'unité est une famille $(\Pi_i)_{i\in I}$ d'applications continues de $X \longrightarrow [0,1]$ telle que*

$$\forall\, x \in X, \sum_{i\in I}\Pi_i(x) = 1.$$

Définition 1.1.25. *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur X est une application $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant pour x et y dans X et λ dans $\mathbb{K}$:*

1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(l'inégalité triangulaire)*

Définition 1.1.26. *Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé.*

Exemple 1.1.4.

1) L'application $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

2) L'application $z \mapsto |z|$ est une norme sur $\mathbb{C}$.

3) Dans $\mathbb{R}^n$, on définit les trois normes suivantes : si $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est dans $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = max\left(|x_1|, ...|x_n|\right).$$

Définition 1.1.27. *Une distance sur un ensemble X est une application d définie sur $X \times X$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ vérifiant, pour tous x, y et z dans X*

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Définition 1.1.28. *Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance.*

Exemple 1.1.5. *Sur $\mathbb{R}$, la distance usuelle est définie par $d(x, y) = |x - y|$.*

Définition 1.1.29. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de X est une suite de Cauchy si*
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Définition 1.1.30. *On appelle espace préhilbertien réel le couple constitué par un espace vectoriel réel X et par un produit scalaire $(./.)$ sur X. On le notera $(X, (./.))$.*
Les espaces de dimension finie sont, c'est de beaucoup préférable, appelés espaces euclidiens.

Définition 1.1.31.

- *Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de X converge dans X.*
- *Un espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach.*
- *Un espace préhilbertien complet est appelé un espace de Hilbert.*

Définition 1.1.32. *Un espace vectoriel topologique X est dit localement convexe si 0_X admet un système de voisinage convexes.*

Définition 1.1.33. *Soient X un espace de Banach, X' son dual topologique. On note par X'' le bidual de X, i.e. l'espace des fonctions linéaires continues définies sur X'.*

1.1.3 Ensembles convexes

Définition 1.1.34. *Soit X un espace vectoriel, $x, y \in X$.*

✓ *On appelle segment fermé ou simplement segment d'extrémités* x, y *qu'on note* $\left[x, y\right]$ *l'ensemble*

$$\left\{\lambda x + (1-\lambda)\, y,\ 0 \leq \lambda \leq 1\right\}.$$

✓ *Le segment ouvert est l'ensemble* $\left\{\lambda x + (1-\lambda)\, y,\ 0 < \lambda < 1\right\}$ *noté* $]x, y[$.

Définition 1.1.35. *Une partie* A *d'un espace vectoriel* X *est dite convexe si toutes les fois que deux points* x, y *appartienne à* A*, le segment* $[x, y]$ *est contenu dans* A*, c'est à dire*

$$\forall\, x, y \in A,\ \forall\, \lambda \in [0,1]\,, \lambda x + (1-\lambda)\, y \in A.$$

On pose

$$T_n = \left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1\right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

et

$$T_n^{'} = \left\{(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

et remarquons $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in T_n$ *si* $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in T_n^{'}$ *et que*

$$\left(\lambda_1, ..., \lambda_n, 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \in T_n^{'} \text{ si } (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in T_n.$$

On dit que A *est convexes si et seulement si*

$$\forall\, (x_1, x_2, ...x_n) \in A,\ \forall\, (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in T_n,\ \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A.$$

Propriétés 1.1.1. *soit* X *un espace vectoriel.*

1) Les parties convexes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ *sont des intervalles.*

2) Tout sous espace vectoriel de X *est convexe.*

3) Soit A *une partie convexe de* X*,* $\overset{\circ}{A}$ *et* $\overline{A}$ *sont des parties convexes de* X*.*

4) Une intersection des parties convexes de X *est convexe.*

Définition 1.1.36. *Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel X.*

• *On appelle enveloppe convexe de A que l'on note $co\,(A)$ l'intersection de tous les sous ensembles convexes de X contenant A.*

• *$co\,(A)$ est le plus petit convexe de X qui contient A.*

• *On appelle enveloppe fermé de A, que l'on note $\overline{co}\,(A)$ l'intersection de tous les sous-ensembles convexes fermés de X contenant A.*

Théorème 1.1.1. *Soit X un espace vectoriel et $A \subset X$, alors*

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i \,/k \in 0, 1, ...(\lambda_1....\lambda_{k+1}) \in T'_k, x_1, ..., x_{k+1} \in A \right\}.$$

1.1.4 Les fonctions convexes

Définition 1.1.37. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

✓ *On dit que f est convexe si : $\forall\, x, y \in I$, $\forall\, \lambda \in [0, 1]$*

$$f\,(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

✓ *On dit que f est strictement convexe si : $\forall\, x, y \in I$, $\forall \lambda \in [0, 1]$*

$$f\,(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

✓ *On dit que f est concave si $-f$ est convexe.*

Définition 1.1.38. *Soient X un espace topologique, $f : X \to [-\infty, +\infty]$.*

✓ *On appelle domaine effectif de f qu'on note par $dom\,(f)$ l'ensemble défini par*

$$dom\,(f) = \Big\{ x \in X/f\,(x) < +\infty \Big\}.$$

Définition 1.1.39. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

✓ *On appelle graphe de f qu'on note par $gph\,(f)$ l'ensemble défini par*

$$gph\,(f) = \Big\{\, (x, r) \in I \times \mathbb{R}\,/\,f\,(x) = r \Big\}.$$

✓ *On dit que f est convexe si et seulement si son épigraphe*

$$epi(f) = \Big\{\, (x, r) \in I \times \mathbb{R}\,/\,f\,(x) \leq r \Big\}$$

est un ensemble convexe.

Corollaire 1.1.2. *Soit f une fonction continue et dérivable sur $]a, b[$ tel que f' est croissante, alors f est convexe.*

Proposition 1.1.4.

✓ *Soit f une fonction convexe sur l'intervalle $[a, b]$ alors f est convexe sur $]a, b[$.*

✓ *Si f est convexe sur un intervalle I, elle est Lipschitzienne sur tout segment inclus dans l'intérieur de I.*

1.1.5 Les fonctions semi-continues

Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.1.40. *f est semicontinue inférieurement (s.c.i) au poin $a \in X$ si et seulement si, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h < f(a)$, il existe un voisinage V_a de a*
tel que $h < f(x)$, pour tout $x \in V_a$.
f est semicontinue inférieurement sur X si et seulement si elle est semicontinue inférieurement en tout point de X.

Définition 1.1.41. *f est semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $a \in X$ si et seulement si, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h > f(a)$, il existe un voisinage V_a de a*
tel que $h > f(x)$, pour tout $x \in V_a$.
f est semi-continue supérieurement sur X si et seulement si elle est semi-continue supérieurement en tout point de X.

Définition 1.1.42. *f est continue au point a si et seulement si f est s.c.i et s.c.s au point $a \in X$.*

Remarque 1.1.1. *Si f est à valeurs réelles alors*

i) f est semi continue inférieure au point a si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V_a \in \mathcal{V}(a),\ \forall\, x \in V_a \Rightarrow f(x) - f(a) > -\varepsilon.$$

ii) f est semi continue supérieure au point a si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V_a \in \mathcal{V}(a),\ \forall\, x \in V_a \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon.$$

iii) f est continue au point a si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, V_a \in \mathcal{V}(a),\ \forall\, x \in V_a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.43. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in X$. Alors*

$$\underset{x \longrightarrow a}{lim\sup}\, f(x) = \inf_{w \in \mathcal{V}(a)} \left\{ \sup_{x \in w} f(x) \right\}$$

$$\underset{x \longrightarrow a}{lim\inf}\, f(x) = \sup_{w \in \mathcal{V}(a)} \left\{ \inf_{x \in w} f(x) \right\}.$$

Proposition 1.1.5. *Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors*

$$f \text{est s.c.i au point } a \Leftrightarrow \underset{x \longrightarrow a}{lim\inf}\, f(x) \geq f(a)$$

$$f \text{est s.c.s au point } a \Leftrightarrow \underset{x \longrightarrow a}{lim\sup}\, f(x) \leq f(a).$$

Proposition 1.1.6. *Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors*

$$f \text{ est s.c.i } \Leftrightarrow epi(f) \text{ est fermé.}$$

1.1.6 Quelques notions de mesurabilité

Définition 1.1.44. *Soit X un ensemble quelconque, une tribut (ou σ algèbre) sur X est une famille Σ de parties de X telle que*

1) $X \in \Sigma$

2) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$

3) $A_n \in \Sigma, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.

Définition 1.1.45. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, alors la fonction $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur X si*

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n} \mu(A_n)$ *pour toute famille dénombrable d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

✓ *Le triplet (X, Σ, μ) est appelé espace mesuré.*

✓ *Si $\mu(A) \geq 0$ pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure positive ou que l'espace (X, Σ, μ) est positif.*

✓ *Si $\mu(A) < +\infty$ pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure finie ou que l'espace (X, Σ, μ) est fini.*

• *Si X est un espace topologique, la mesure $\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.*

Définition 1.1.46. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré positif et soit Z un sous ensemble de X, on dit que Z est μ-négligeable s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\mu(A) = 0$.*

Définition 1.1.47. *Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré, T un ensemble et $f, g : X \to T$.*

*On dit que $f = g$ μ-**presque partout** (et on note μ-p.p), si l'ensemble $\{x \in X / \; f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable. C'est à dire*

$$\exists\, A \in \Sigma,\; \mu(A) = 0 \,\wedge\, f(x) = g(x),\, \forall\, x \in \Sigma \backslash A.$$

Définition 1.1.48. *Soient X un espace topologique séparé et μ une mesure Borélienne, alors μ est dit régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert U et un fermé V de X tels que $V \subset A \subset U$ et $\mu(U/V) \leq \varepsilon$.*
Une mesure Borélienne finie et régulière est appelés mesure de Radon.

Définition 1.1.49. *La tribu μ-complétée de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ-négligeables, i.e*

$$\Sigma_\mu = \Big\{A \cup Z \ / \ A \in \Sigma \ et \ Z \ ensemble \ \mu \text{ -négligeable}\Big\}.$$

La tribu Σ est dit complète si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c'est-à-dire, si tout les ensemble μ-négligeable appartient à Σ.

Définition 1.1.50. *Soit (X, Σ) un espace mesurable. On dit que f est μ-intégrable, si*

$$\int_X |f| \, d\mu < +\infty.$$

Théorème 1.1.2. ***(Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$)***
Il existe une unique mesure positif sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ notée m telle que pour tout intervalle

$$I_1, I_2, ..., I_n \ de \, \mathbb{R}, m(I_1 \times I_2 \times ... \times I_n) = \prod_{i=1}^{n} long(I_i),$$

avec $long(I_i)$ est la longueur de l'intervalle I_i.

▶ *La mesure m est appelée la **mesure de Lebesgue**.*

Définition 1.1.51. *On dit que l'espace (X, Σ, μ) est un espace mesuré complet avec une mesure σ-finie si μ est positive et σ-finie et Σ est complèté.*

Définition 1.1.52. *Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré complet σ-finie, alors l'ensemble $A \in \Sigma$ peut être un atome paraport à μ si et seulement si $\mu(A) > 0$ et $\forall A_1 \subset A$ mesurable on a $\mu(A_1) = 0 \ \vee \ \mu(A_1) = \mu(A)$.*

- *μ est dite non- atomique si Σ ne contient pas des atomes.*
- *L'espace (X, Σ, μ) est dit un espace mesuré non-atomique, si μ est une mesure positive et non-atomique.*

- *L'espace (X, Σ, μ) est dit un espace mesuré complet σ-finie non atomique.*

1.2 Rappels sur la topologie faible et faible*

1.2.1 Topologie faible

Définition 1.2.1. *Soit X un espace de Banach et X' son dual topologique, i.e.*
$X' = \Big\{ f : X \longrightarrow \mathbb{R},\ f \textit{linéaire continue} \Big\} = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(X).$

$$\begin{array}{rcl} f : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle f, x \rangle \end{array}$$

(On note l'image de x par f, $\langle f, x \rangle$ au lieu de $f(x)$) avec

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in \overline{B}_X} |\langle f, x \rangle|$$

tel que, $\overline{B}_X$ est la boule unité fermée de X.
Soit $f \in X'$, et considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi_f : X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \varphi_f(x) = \langle f, x \rangle. \end{array}$$

Lorsque f décrit X' nous obtenons une famille d'applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$ définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On appelle topologie faible sur X qu'on note $\sigma(X, X')$ la topologie la moins fine sur X rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$. Cette topologie est séparé.

Proposition 1.2.1. *Soit $x_0 \in X$, alors si on considère tous les ensembles de la forme*

$$V = \Big\{ x \in X, |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon,\ \forall\, i \in I \Big\}$$

òu I est fini, $f_i \in X'$ et $\varepsilon > 0$. Ces ensembles constituent une base de voisinage de x_0 pour la topologie $\sigma(X, X')$.

Notation 1.2.1. $x_n \rightharpoonup x$ *veut dire* $(x_n)_n$ *converge faiblement ou* $\sigma(X, X')$ *vers* x
$x_n \to x$ *veut dire* $(x_n)_n$ *converge fortement vers* x, *i.e.* $\|x_n - x\| \to 0$.

Proposition 1.2.2. *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de points de* X. *Alors*

1) $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle,\ \forall\, f \in X'$.

2) $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.

3) Si $x_n \rightharpoonup x$, *alors* $\|x_n\|$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

4) Si $x_n \rightharpoonup x$ *et si* $f_n \to f$ *fortement dans* X', *alors* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Proposition 1.2.3. *Lorsque* X *est de dimension finie, la topologie forte de* X *et la topologie faible* $\sigma(X, X')$ *coïncident.*

Théorème 1.2.1. ***(Théorème de Krein-Smŭlian)***
Soit X *un espace de Banach et* $A \subset X$. *Si* A *est faiblement compact, alors* $\overline{co}(A)$ *l'est aussi.*

Corollaire 1.2.1. *Si* X *est localement convexe alors* X' *sépare les points de* X.

1.2.2 Topologie faible*

Définition 1.2.2. *Soit* X *un espace de Banach,* X' *son dual topologique, muni de la norme* $\|f\| = \sup\limits_{x\in\overline{B}_X(0,1)} |\langle f, x\rangle|)$, *et soit* X'' *le dual de* X' *(bidual de* X*) muni de la norme* $\|\zeta\| = \sup\limits_{f\in\overline{B}_{X'}(0,1)} |\langle \zeta, f\rangle|$.
Nous avons une injection canonique $J : X \to X''$ *entre* X *et* X'', *définie comme suite pour tout* $x \in X$ *fixé l'application*

$$\begin{aligned} J_x : X' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto J_x(f) = \langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur X', *c'est à dire, c'est un élément de* X'',*i.e.* $J_x \in X''$, *et*

$$\begin{aligned} J : X &\to X'' \\ x &\mapsto J_x(f) = J(x) \end{aligned}$$

et nous avons

$$\langle J_x, f\rangle_{X'',X'} = \langle f, x\rangle_{X',X},\ \forall x \in X,\ \forall\, f \in X'.$$

Il est claire que J est linéaire continue (de plus c'est une isométrie). En effet

linéarité

pour tout $f \in X'$

$$\begin{aligned}
\langle J_{x+x'}, f\rangle &= \langle f, x+x'\rangle \\
&= \langle f, x\rangle + \langle f, x'\rangle \\
&= \langle J_x, f\rangle + \langle J_{x'}, f\rangle \\
&= \langle J_x + J_{x'}, f\rangle \\
&\Rightarrow J(x+x') = J(x) + J(x')
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle J_{\alpha x}, f\rangle &= \langle f, \alpha x\rangle \\
&= \alpha\langle f, x\rangle \\
&= \alpha\langle J_x, f\rangle \\
&= \langle \alpha J_x, f\rangle \\
&\Rightarrow J(\alpha x) = \alpha J(x).
\end{aligned}$$

Continuité

$$\begin{aligned}
\|J(x)\|_{X''} &= \|J_x\|_{X''} \\
&= \sup_{f\in \overline{B}_{X'}(0,1)} |\langle J_x, f\rangle| \\
&= \sup_{f\in \overline{B}_{X'}(0,1)} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_X.
\end{aligned}$$

Donc J est une isométrie.

$$\begin{aligned} J(x) = J(x') &\Leftrightarrow \langle J_x, f\rangle = \langle J_{x'}, f\rangle,\ \forall\, f \in X' \\ &\Leftrightarrow \langle f, x\rangle = \langle f, x'\rangle,\ \forall\, f \in X' \\ &\Leftrightarrow \langle f, x - x'\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x = x',\ \forall\, f \in X' \end{aligned}$$

J est injective et donc J est une bijection entre X et $J(X) \subset X''$, c'est à dire, on peut toujours identifier X à un sous ensemble de X''(J bijection isométrique entre X et $J(X)$).

✓ *Sur l'espace X' on connait déjà deux topologies, la topologie forte induite par la norme de X'($\|f\| = \sup\limits_{x\in\overline{B}_X(0,1)} |\langle f, x\rangle|$) et la topologie faible $\sigma(X', X'')$ (la topologie la moins fine rendant les applications $(\varphi_\zeta)_{\zeta\in X''}$ continues, avec pour tout $\zeta \in X''$,*

$$\begin{aligned} \varphi_\zeta : X' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \varphi_\zeta(f) = \langle \zeta, f\rangle_{X'',X'} \end{aligned}$$

On définit une troisième topologie sur X' comme suit
pour chaque $x \in X$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \Psi_x : X' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \Psi_x(f) = \langle \Psi_x, f\rangle = \langle f, x\rangle_{X',X} \end{aligned}$$

Ψ_x est une forme linéaire coninue. Quand x parcourt X on obtient une famille de l'application $(\Psi_x)_{x\in X}$ définies sur X' à valeurs dans $\mathbb{R}$.
La topologie la moins fine sur X' rendant ces applications continues est appelée topologie faible et notée $\sigma(X', X)$.*

Proposition 1.2.4. *Soit $(f_n)_n$ une suite de points de X'. Nous avons*

1) $f_n \rightharpoonup^* f$ ((f_n) converge $\sigma(X', X)$ vers f) $\Longleftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, pour tout $x \in X$.

2) $f_n \to f \Rightarrow f_n \rightharpoonup^* f$.

3) $f_n \rightharpoonup f$ ((f_n) converge $\sigma(X', X'')$) $\Rightarrow f_n \rightharpoonup^* f$.

4) Si $f_n \rightharpoonup^* f$, alors $(\|f_n\|)$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.

5) $f_n \rightharpoonup^* f$ et $x_n \to x$ fortement, alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2.1. *La topologie faible* $\sigma(X', X)$ est séparé.*

Proposition 1.2.5. *Si X est de dimension finie, les topologies forte $\mathcal{T}_{X'}$, faible $\sigma(X', X'')$ et faible* $\sigma(X', X)$ coïncident sur X'.*

Théorème 1.2.2. ***(Banach-Aloaglu-Bourbaki)***
Soit X un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de X' est compact pour la topologie faible $\sigma(X', X)$.*

Théorème 1.2.3. ***(Aloaglu)***
Soit X un espace de Banach séparable et soit $B \subset X'$, si B est borné pour la norme de X' et fermé pour la topologie $\sigma(X', X)$. Alors B est compact pour cette topologie.

1.3 Les espaces $\mathbf{L}^p(1 \leq p \leq \infty)$

Soient $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et m la mesure de Lebesgue sur X. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{L}^1(X, m)$ des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ définies m-presque partout et m-intégrables (f mesurable et $\int_X |f| dm < \infty$).
Si $f \in \mathcal{L}^1(X, m)$, nous poserons

$$\|f\|_1 = \int_X |f| dm$$

nous avons

- $\|\alpha f\|_1 = \int_X |\alpha f| dm = |\alpha| \|f\|_1,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, f \in \mathcal{L}^1(X, m)$

$$\begin{aligned} \bullet \|f+g\|_1 &= \int_X |f+g| dm \\ &\leq \int_X |f| dm + \int_X |g| dm \\ &\leq \|f\|_1 + \|g\|_1,\ \forall\, f, g \in \mathcal{L}^1(X, m) \end{aligned}$$

mais $\|.\|_1$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^1(X,m)$ car l'égalité

$$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,\ m.\ \text{p.p}$$

et non pas à $f(x) = 0$, $\forall\, x \in X$ et donc à $f = 0_{\mathcal{L}^1}$.

Par contre, si on considère sur $\mathcal{L}^1(X,m)$, la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f = g\ m.\text{p.p sur } X$$

Soit $\widehat{f}$ la classe d'équivalence de f. Considérons alors

$$\mathbf{L}^1(X,m) = \left\{\widehat{f} \,/\, f \in \mathcal{L}^1(X,m)\right\}$$

et définissons sur cet espace l'application $\widehat{f} \mapsto \|\widehat{f}\|_1 = \|f\|_1$, alors cette application est une norme sur $\mathbf{L}^1(X,m)$. En effet,

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \|f\|_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f = 0,\ m.\ \text{p.p} \\ &\Leftrightarrow \quad \widehat{f} = \widehat{0}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\left(\mathbf{L}^1(X,m), \|\cdot\|_1\right)$ est un espace vectoriel normé. On pose alors

$$\mathbf{L}^1(X,m) = \{f : X \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ mesurable et } \|f\|_1 = \int_X |f|\, dm < \infty\}.$$

Définition 1.3.1. *Si* $1 \leq p < \infty$, *on définit*

$$\boldsymbol{L}^p(X) = \{f : X \to \mathbb{R}/\ f \textit{ mesurable et } \int_X |f(x)|^p\, dm(x) < \infty\}.$$

On munit cet espace de la norme $\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p\, dm\right)^{\frac{1}{p}}$.

Si $p = \infty$, *on définit*

$$\boldsymbol{L}^{\infty}(X) = \{f : X \to \mathbb{R}/\ f \text{ mesurable et },\ \exists\, c > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq c,\ p.p \text{ sur } X\}.$$

On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{c > 0,\ |f(x)| \leq c,\ p.p\ \text{ sur } X\}.$$

Théorème 1.3.1. *Si* X *est de mesure finie* $(m(X) < \infty)$, *alors*

$$\boldsymbol{L}^{\infty} \subset \ldots \subset \boldsymbol{L}^{1}$$

c'est à dire

$$\boldsymbol{L}^{p} \subset \boldsymbol{L}^{q},\ \forall\, p > q.$$

Théorème 1.3.2. $\boldsymbol{L}^{p}(\Omega)$ *est un espace séparable pour* $1 \leq p < \infty$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^{n}$.

Remarque 1.3.1. $\boldsymbol{L}^{\infty}(\Omega)$ *n'est pas séparable.*

Définition 1.3.2. *On dit que* $p, q \in [1, +\infty]$ *sont des exposants conjugues si* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(avec la convention* $\frac{1}{+\infty} = 0$*).*

Proposition 1.3.1. ***(Inégalité de Hölder)***
Soient p, q *des exposants conjugues et* $f \in \boldsymbol{L}^{p}(\Omega)$ *et* $g \in \boldsymbol{L}^{q}(\Omega)$ *sont des fonctions mesurables alors,* $fg \in \boldsymbol{L}^{1}(\Omega)$ *et* $\|fg\|_{1} \leq \|f\|_{p}\|g\|_{q}$.

► *Si* $p, q = 2$ *alors l'inégalité précédent s'écrit* $\|fg\|_{1} \leq \|f\|_{2}\|g\|_{2}$ *est aussi appelée inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Proposition 1.3.2. ***(Inégalité de Hölder généralisée)***
Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ *et* $f \in \boldsymbol{L}^{p}(\Omega)$, $g \in \boldsymbol{L}^{q}(\Omega)$ *sont des fonctions mesurables alors,* $fg \in \boldsymbol{L}^{r}(\Omega)$ *et* $\|fg\|_{r} \leq \|f\|_{p}\|g\|_{q}$.

Théorème 1.3.3. ***(Théorème de la représentation de Riez)***
Soit $1 < p < \infty$ *et* $\varphi \in (\boldsymbol{L}^{p}(X))'$. *Alors il existe une unique fonction*

$u \in \boldsymbol{L}^q(X)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ *telle que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_X u f dm, \; \forall\, f \in \boldsymbol{L}^p(X).$$

De plus,

$$\|u\|_{\boldsymbol{L}^q} = \|\varphi\|_{(\boldsymbol{L}^p)'}.$$

Remarque 1.3.2. *Ce théorème est très important, il exprime que toute forme linéaire continue sur* $\boldsymbol{L}^p$ $(1 < p < \infty)$, *i.e., tout élément de* $(\boldsymbol{L}^p)'$ *se représente d'une façon unique par un élément de* $\boldsymbol{L}^q$

$$\forall\, \varphi \in (\boldsymbol{L}^p)', \; \exists\, u \in \boldsymbol{L}^q / \; \varphi = Tu$$

(T *est un opérateur linéaire continu)*
c'ést à dire,

$$\forall\, f \in \boldsymbol{L}^p, \; \langle \varphi, f \rangle = \langle Tu, f \rangle = \int_X u f dm.$$

On fera donc l'identification $(\boldsymbol{L}^p)' = \boldsymbol{L}^q$, $1 < p < \infty$.
Nous avons aussi $(\boldsymbol{L}^1)' = \boldsymbol{L}^\infty$, *c'est à dire*

$$\forall\, \varphi \in (\boldsymbol{L}^1)', \; \exists\, u \in \boldsymbol{L}^\infty / \; \langle \varphi, f \rangle = \int_X u f dm, \; \forall\, f \in \boldsymbol{L}^1$$

et

$$\|\varphi\|_{(\boldsymbol{L}^1)'} = \|u\|_{\boldsymbol{L}^\infty},$$

l'application $T : \varphi \mapsto u$ *est une isométrie surjective qui permet d'identifier* $(\boldsymbol{L}^1)'$ *et* $\boldsymbol{L}^\infty$ *et donc* $(\boldsymbol{L}^1)' = \boldsymbol{L}^\infty$ *par contre* $\boldsymbol{L}^1 \subsetneqq (\boldsymbol{L}^\infty)'$.

Théorème 1.3.4. ***(Théorème de densité)***
Soit $1 \leq p < \infty$ *et soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *L'ensemble des fonctions constantes par morceaux (dans* $\mathbb{R}$ *on les appelle fonctions en escalier) et l'ensemble* $\boldsymbol{C}_c^\infty(\Omega)$ *(des fonctions* $\boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$ *à support compact) sont denses dans* $\boldsymbol{L}^p$, *c'est à dire, pour tout* $f \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$, *il existe* $(f_n)_n \subset \boldsymbol{C}_c^\infty(\Omega)$ *(où* f_n *constante par morceaux) telles que* $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{\boldsymbol{L}^p} = 0$.

CHAPITRE 2

LES MULTI-APPLICATIONS

ce chapitre, nous rappelons des notions de base, quelques résultats fondamentaux sur les les multi-applications des théorèmes principaux. pour plus d'information et de conaissance sur les multi-applications voir [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12].

2.1 Définitions et préliminaires

Définition 2.1.1. *Soient T, X deux ensembles non vides.*
On appelle multi-application (fonction multivoque ou multi-fonction) définie sur T à valeur dans X, tout application F définie sur T à valeurs dans $\mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties de X), et on note

$$F : T \to \mathcal{P}(X) \text{ ou } F : T \rightrightarrows X.$$

Donc, $\forall\, t \in T$, $F(t)$ est un sous ensemble de X.

Définition 2.1.2. *Soit $F : T \rightrightarrows X$.*

• *On appelle domaine (effectif) de la multi-application F qu'on note $dom\,(F)$, l'ensemble défini par*

$$dom(F) = \Big\{t \in T / \ F(t) \neq \emptyset\Big\}.$$

- *On appelle image de F qu'on note $Im(F)$, l'ensemble défini par*

$$Im(F) = \Big\{x \in X / \exists\, t \in T : x \in F(t)\Big\}.$$

Si $A \subset I$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$, l'ensemble défini par

$$F(A) = \underset{t \in A}{\cup} F(t),$$

ce qui revient à écrire

$$F(A) = \Big\{x \in X / \exists\, t \in A : x \in F(t)\Big\}.$$

Ainsi

$$Im(F) = F(T).$$

- *On appelle graphe de F qu'on note $gph(F)$, le sous ensemble de $T \times X$ définie par*

$$gph(F) = \Big\{\, (t, x) \in T \times X / \, x \in F(t)\Big\}.$$

Proposition 2.1.1.

- *Très souvent nous sommes amenés à considérer la multi-application inverse*

$F^{-1} : X \rightrightarrows T$ définie par

$$t \in F^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in F(t) \Leftrightarrow (t, x) \in gph(F)\ .$$

Nous avons alors $(F^{-1})^{-1} = F$.

- *on a*

1) $dom(F^{-1}) = Im(F)$.

2) $Im(F^{-1}) = dom(F)$.

Preuve.

1)

$$\begin{aligned} Soit\ x \in Im(F) &\Leftrightarrow \exists\, t \in T \ / \ x \in F(t) \\ &\Leftrightarrow \exists\, t \in T \ / \ t \in F^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow F^{-1}(x) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in dom(F^{-1}). \end{aligned}$$

Donc $dom(F^{-1}) = Im(F)$.

2)

$$\begin{aligned} Soit\ t \in dom(F) &\Leftrightarrow F(t) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \exists\, x \in X \ / \ x \in F(t) \\ &\Leftrightarrow \exists\, x \in X / \ t \in F^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow t \in Im(F^{-1}). \end{aligned}$$

Donc $dom(F) = Im(F^{-1})$.

Exemple 2.1.1.

$$\begin{aligned} F : [0,1] &\rightrightarrows [0,1] \\ t &\mapsto F(t) = \begin{cases} [0,1] & si\ \ t \neq \frac{1}{2} \\ [0,1/2] & si\ \ t = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gph(F) &= \Big\{(t,x) \in [0,1]^2 : \ x \in F(t)\Big\} \\ &= \bigg(\Big(\Big[0,\frac{1}{2}\Big[\cup \Big]\frac{1}{2},1\Big[\Big) \times \Big[0,1\Big]\bigg) \cup \bigg(\Big\{\frac{1}{2}\Big\} \times \Big[0,\frac{1}{2}\Big]\bigg). \end{aligned}$$

Corollaire 2.1.1. *Soit* $F : T \rightrightarrows X$, *pour tout* $V \subset X$.

On définit l'image réciproque large de V par la multi-application F par

$$F^{-1}(V) = \Big\{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\Big\}.$$

Preuve.

$F : T \rightrightarrows X.$

$$\begin{aligned} t_0 \in F^{-1}(V) &\Leftrightarrow \exists\, x_0 \in V, t_0 \in F^{-1}(x_0) \\ &\Leftrightarrow \exists\, x_0 \in V, x_0 \in F(t_0) \\ &\Leftrightarrow F(t_0) \cap V \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow t_0 \in \{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

D'où $F^{-1}(V) = \Big\{t \in T : F(t) \cap V \neq \emptyset\Big\}$.

Corollaire 2.1.2. *Soient $F : T \rightrightarrows X$ et $V \subset X$.*
On définit l'image réciproque étroite de V par la multi-application F par

$$F_+^{-1}(V) = \Big\{t \in T : F(t) \subseteq V\Big\}.$$

Et on a

$$1)\; T \backslash F_+^{-1}(V) = F^{-1}(X \backslash V) \qquad (2.1)$$

$$2)\; T \backslash F^{-1}(V) = F_+^{-1}(X \backslash V) \qquad (2.2)$$

Preuve.

1)

$$\begin{aligned} \text{Soit } t \in T \backslash F_+^{-1}(V) &\Leftrightarrow t \notin F_+^{-1}(V) \\ &\Leftrightarrow F(t) \nsubseteq V \\ &\Leftrightarrow F(t) \cap (X \backslash V) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow t \in F^{-1}(X \backslash V). \end{aligned}$$

D'où $T \backslash F_+^{-1}(V) = F^{-1}(X \backslash V)$.

2)

$$\begin{aligned} \text{Soit } t \in F_+^{-1}(X \backslash V) &\Leftrightarrow F(t) \subseteq X \backslash V \\ &\Leftrightarrow F(t) \cap V = \emptyset \\ &\Leftrightarrow t \notin F^{-1}(V). \end{aligned}$$

D'où $F_+^{-1}(X \backslash V) = T \backslash F^{-1}(V)$.

Définition 2.1.3. *Soient $F : T \rightrightarrows X$ et $G : T \rightrightarrows X$ deux multi-application, alors on définit l'union*

$$\begin{aligned} F \cup G : T &\rightrightarrows X \\ t &\mapsto (F \cup G)(t) = F(t) \cup G(t) \end{aligned}$$

l'intersection

$$\begin{aligned} (F \cap G) : T &\rightrightarrows X \\ t &\mapsto (F \cap G)(t) = F(t) \cap G(t) \end{aligned}$$

le produit cartésien

$$\begin{aligned} (F \times G) : T &\rightrightarrows X \times X \\ t &= (F \times G)(t) = F(t) \times G(t). \end{aligned}$$

Si $F : T \rightrightarrows X$ et $G : X \rightrightarrows y$, on définit la composition

$$\begin{aligned} G \circ F : T &\rightrightarrows Y \\ t &\mapsto (G \circ F)(t) = G(F(t)) = \bigcup_{x \in F(t)} G(x). \end{aligned}$$

Lemme 2.1.1. *Soient $F : T \rightrightarrows X$, $G : T \rightrightarrows X$ et $H : T \rightrightarrows Y$ trois multi-applications, et soient V, $W \subseteq X$ et $U \subseteq Y$. Alors nous avons les propriétés suivantes*

1) $(F \cup G)_+^{-1}(V) = F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(V)$.

2) $(F \cup G)^{-1}(V) = F^{-1}(V) \cup G^{-1}(V)$.

3) $(F \cap G)_+^{-1}(V) \supseteq F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(V)$.

4) $(F \cap G)^{-1}(V) \subseteq F^{-1}(V) \cap G^{-1}(V)$.

5) $(F \times G)_+^{-1}(V \times W) = F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(W)$.

6) $(F \times G)^{-1}(V \times W) = F^{-1}(V) \cap G^{-1}(W)$.

7) $(H \circ G)_+^{-1}(U) = G_+^{-1}(H_+^{-1}(U))$.

8) $(H \circ G)^{-1}(U) = G^{-1}(H^{-1}(U))$.

Preuve.

1)

$$\begin{aligned}
\textit{Soit } t \in (F \cup G)_+^{-1}(V) &\iff (F \cup G)(t) \subseteq V \\
&\iff (F(t) \cup G(t)) \subseteq V \\
&\iff (F(t) \subseteq V \ \wedge \ G(t) \subseteq V) \\
&\iff t \in F_+^{-1}(V) \ \wedge \ t \in G_+^{-1}(V) \\
&\iff t \in F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(V).
\end{aligned}$$

Donc $(F \cup G)_+^{-1}(V) = F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(V)$.

2)

$$\begin{aligned}
\textit{Soit } t \in (F \cup G)^{-1}(V) &\iff (F \cup G)(t) \cap V \neq \emptyset \\
&\iff (F(t) \cup G(t)) \cap V \neq \emptyset \\
&\iff (F(t) \cap V) \cup (G(t) \cap V) \neq \emptyset \\
&\iff F(t) \cap V \neq \emptyset \ \vee \ G(t) \cap V \neq \emptyset \\
&\iff t \in F^{-1}(V) \ \vee \ t \in G^{-1}(V) \\
&\iff t \in F^{-1}(V) \cup G^{-1}(V).
\end{aligned}$$

Donc $(F \cup G)^{-1}(V) = F^{-1}(V) \cup G^{-1}(V)$.

3)

$$\begin{aligned} Soit\ t \in F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(V) &\Longleftrightarrow t \in F_+^{-1}(V)\ \wedge\ t \in G_+^{-1}(V) \\ &\Longleftrightarrow F(t) \subseteq V\ \wedge\ G(t) \subseteq V \\ &\Rightarrow F(t) \cap G(t) \subseteq V \\ &\Rightarrow (F \cap G)(t) \subseteq V \\ &\Rightarrow t \in (F \cap G)_+^{-1}(V). \end{aligned}$$

$D'ou\ F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(V) \subseteq (F \cap G)_+^{-1}(V).$

4)

$$\begin{aligned} Soit\ t \in (F \cap G)^{-1}(V) &\Longleftrightarrow (F \cap G)(t) \cap V \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow (F(t) \cap G(t)) \cap V \neq \emptyset \\ &\Rightarrow (F(t) \cap V) \cap (G(t) \cap V) \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow F(t) \cap V \neq \emptyset\ \wedge\ G(t) \cap V \neq \emptyset \\ &\Rightarrow t \in F^{-1}(V)\ \wedge\ t \in G^{-1}(V) \\ &\Rightarrow t \in F^{-1}(V) \cap G^{-1}(V). \end{aligned}$$

$D'ou\ F^{-1}(V) \cap G^{-1}(V) \supseteq (F \cap G)^{-1}(V).$

5)

$$\begin{aligned} Soit\ t \in (F \times G)_+^{-1}(V \times W) &\Longleftrightarrow (F \times G)(t) \subseteq (V \times W) \\ &\Longleftrightarrow (F(t) \times G(t)) \subseteq (V \times W) \\ &\Longleftrightarrow F(t) \subseteq V\ \wedge\ G(t) \subseteq W \\ &\Longleftrightarrow t \in F_+^{-1}(V)\ \wedge\ t \in G_+^{-1}(W) \\ &\Longleftrightarrow t \in F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(W). \end{aligned}$$

$Alors\ (F \times G)_+^{-1}(V \times W) = F_+^{-1}(V) \cap G_+^{-1}(W).$

6)

$$\begin{aligned}
\textit{Soit} \quad t \in (F \times G)^{-1}(V \times W) &\iff (F \times G)(t) \cap (V \times W) \neq \emptyset \\
&\iff (F(t) \times G(t)) \cap (V \times W) \neq \emptyset \\
&\iff (F(t) \cap V) \times (G(t) \cap W) \neq \emptyset \\
&\iff F(t) \cap V \neq \emptyset \ \wedge \ G(t) \cap W \neq \emptyset \\
&\iff t \in F^{-1}(V) \cap G^{-1}(W).
\end{aligned}$$

$\textit{Alors} \ (F \times G)^{-1}(V \times W) = F^{-1}(V) \cap G^{-1}(W).$

7)

$$\begin{aligned}
\textit{Soit} \ t \in (H \circ G)_{+}^{-1}(U) &\iff (H \circ G)(t) \subseteq U \\
&\iff H(G(t)) \subseteq U \\
&\iff G(t) \subseteq H_{+}^{-1}(U) \\
&\iff t \in G_{+}^{-1}(H_{+}^{-1}(U)).
\end{aligned}$$

$\textit{Donc} \ (H \circ G)_{+}^{-1}(U) = G_{+}^{-1}(H_{+}^{-1}(U)).$

8)

$$\begin{aligned}
\textit{Soit} \ t \in (H \circ G)^{-1}(U) &\iff (H \circ G)(t) \cap U \neq \emptyset \\
&\iff H(G(t)) \cap U \neq \emptyset \\
&\iff G(t) \cap H^{-1}(U) \neq \emptyset \\
&\iff t \in G^{-1}(H^{-1}(U)).
\end{aligned}$$

$\textit{Donc} \ (H \circ G)^{-1}(U) = G^{-1}(H^{-1}(U)).$

■

Définition 2.1.4. *Soient* $F : T \rightrightarrows X$, $G : T \rightrightarrows X$ *deux multi-applications et* $\alpha : T \to \mathbb{R}$.

On définit

$$\begin{aligned} F+G : T &\rightrightarrows X \\ t &\mapsto (F+G)(t) = F(t)+G(t) = \{x+y : x \in F(t),\ y \in G(t)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha F : T &\rightrightarrows X \\ t &\mapsto (\alpha F)(t) = \alpha(t).F(t) = \{\alpha(t).x : x \in F(t)\}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$dom(F+G) = dom(F) \cap dom(G) \quad et \quad dom(\alpha F) = dom(F).$$

Définition 2.1.5. *Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : T \to X$ vérifiant $f(t) \in F(t)\ \forall\, t \in T$.*

2.2 La continuité des multi-applications

2.2.1 Définitions

Définition 2.2.1. *Soit $A \subset X$, la distance d'un point $x \in X$ à A est donnée par*

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a).$$

✓ *Soient A, B deux sous ensembles de X. On appelle écart entre A et B et on le note $e(A,B)$, la quantité définie par*

$$e(A,B) = \sup_{x \in A} d(x,B) = \sup_{x \in A}(\inf_{y \in B} d(x,y))$$

avec la convention $\sup \emptyset = 0$ *et* $\inf \emptyset = \infty$.

✓ *On appelle distance de Hausdorff entre A et B et on la note $h(A,B)$ ou $\mathcal{H}(A,B)$, la quantité définie par*

$$h(A,B) = \max\Big(e\big(A,B\big), e\big(B,A\big)\Big).$$

Propriétés 2.2.1. *Soient A, B et C des sous-ensembles de X alors*

1) $e(A, \emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$.

2) $e(\emptyset, B) = 0$.

3) $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$.

4) $h(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

5) $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$.

6) $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$.

Preuve.

1) Si $A \neq \emptyset$

$e(A, \emptyset) = \sup\limits_{x \in A} d(x, \emptyset) = \sup\limits_{x \in A} \inf\limits_{y \in \emptyset} d(x, y) = \infty.$

2) $e(\emptyset, B) = \sup\limits_{x \in \emptyset} d(x, B) = 0.$

3) $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{x \in A} d(x, B) = 0 \Leftrightarrow d(x, B) = 0,\ \forall\, x \in A \Leftrightarrow x \in \overline{B},\ \forall\, x \in A \Leftrightarrow A \subset \overline{B}.$

4) $h(A, B) = 0 \Leftrightarrow e(A, B) = 0$ et $e(B, A) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$ et $B \subset \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

5) Nous avons, $\forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B,\ \forall\, z \in C$

$$\begin{aligned}
d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad &\Rightarrow \quad \inf_{z \in C} d(x, z) \leq d(x, y) + \inf_{z \in C} d(y, z) \\
&\Rightarrow \quad d(x, C) \leq d(x, y) + d(y, C) \\
&\Rightarrow \quad d(x, C) \leq \inf_{y \in B} d(x, y) + d(y, C) \\
&\Rightarrow \quad d(x, C) \leq d(x, B) + \sup_{y \in B} d(y, C) \\
&\Rightarrow \quad \sup_{x \in A} d(x, C) \leq \sup_{x \in A} d(x, B) + e(B, C) \\
&\Rightarrow \quad e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C).
\end{aligned}$$

6) Comme $h(A, C) = max\Big(e\big(A, C\big), e\big(C, A\big)\Big)$, alors

$$h(A, C) = e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$$

ou bien

$$h(A,C) = e(C,A) \leq e(C,B) + e(B,A) \leq h(C,B) + h(B,A) = h(A,B) + h(B,C)$$

d'ou

$$h(A,C) \leq h(A,B) + h(B,C).$$

■

Corollaire 2.2.1. *Soient (X,d) un espace métrique et $\mathcal{P}_{cl}(X)$ l'ensemble de tous les sous ensembles fermés de X. Alors $(\mathcal{P}_{cl}(X), h)$ est un espace métrique.*

Preuve.

$\forall A,\ B,\ C \in \mathcal{P}_{cl}(X)$

1) $h(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B} \Leftrightarrow A = B$.

2) $h(A,B) = h(B,A)$.

3) $h(A,C) \leq h(A,B) + h(B,C)$.

■

Proposition 2.2.1. *Soit (X,d) un espace métrique et soient $A,\ B \in \mathcal{P}_{cl}(X)$. Alors*

$$h(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset V(B,\varepsilon) \text{ et } B \subset V(A,\varepsilon)\},$$

avec

$$V(M,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,M) \leq \varepsilon\}, \forall\, M \subset X.$$

Preuve.

Nous avons

$A \subset V(B,\varepsilon) \Leftrightarrow \forall\, x \in A,\ x \in V(B,\varepsilon) \Leftrightarrow \forall\, x \in A,\ d(x,B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \sup\limits_{x \in A} d(x,B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow e(A,B) \leq \varepsilon$.

De la même manière, $B \subset V(A,\varepsilon) \Leftrightarrow e(B,A) \leq \varepsilon$.
D'ou

$$\begin{aligned}\inf\Big\{\varepsilon > 0 : A \subset V(B,\varepsilon) \text{ et } B \subset V(A,\varepsilon)\Big\} &= \inf\Big\{\varepsilon > 0 : e(A,B) \leq \varepsilon \,\text{et}\, e(B,A) \leq \varepsilon\Big\} \\ &= \inf\Big\{\varepsilon > 0 : h(A,B) \leq \varepsilon\Big\} = h(A,B).\end{aligned}$$

■

Propriétés 2.2.2. *Soient (X,d) un espace métrique complet et $\mathcal{P}_{cp}(X)$ la famille de tous les sous ensembles compacts de X. Alors $(\mathcal{P}_{cl}(X),h)$ est complet et $(\mathcal{P}_{cp}(X),h)$ est complet.*
Si (X,d) est un espace séparable alors $(\mathcal{P}_{cp}(X),h)$ est séparable.

Définition 2.2.2. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous ensembles de (X,d).*
On appelle limite supérieure de la suite $(A_n)_n$, le sous ensemble de X défini par

$$\lim_{n\to\infty} sup\, A_n = \Big\{x \in X : \liminf_{n\to\infty} d(x,A_n) = 0\Big\}.$$

Et on appelle limite inférieure de la suite $(A_n)_n$, le sous ensemble de X défini par

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \Big\{x \in X : \lim_{n\to\infty} sup\, d(x,A_n) = 0\Big\}.$$

On dit que A est limite de la suite (A_n) si

$$A = \lim_{n\to\infty} sup\, A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Proposition 2.2.2. *Soit $(A_n)_n$ une suite de sous ensemble d'un espace métrique (X,d). Alors, $\liminf_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des limites des suites $(x_n)_n$ tel que $x_n \in A_n$, et $\limsup_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des points d'accumulation des suites (x_n) tel que $x_n \in A_n$, c'est à dire, l'ensemble des limites des sous suites $(x_{n'})$ tel que $x_{n'} \in A_{n'}$.*

Théorème 2.2.1. *Soit $(A_n)_n$ une suite de sous ensemble de (X, d). Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \bigcup_{n\geq 0} \overline{\bigcap_{m\geq n} A_m}.$$

2.2.2 La semi-continuité des multi-applications

Définition 2.2.3. *Soient T et X deux espaces topologiques et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est semicontinue supérieurement (s.c.s) au point $t_0 \in T$, si pour tout ouvert U de X contenant $F(t_0)$ ($F(t_0) \subset U$), il existe un voisinage Ω de t_0 tel que $F(\Omega) \subset U$, c'est à dire $F(z) \subset U$, $\forall\, z \in \Omega$.*
On dit que F est semicontinue supérieurement sur T si elle est semicontinue supérieurement en tout point $t \in T$.

Définition 2.2.4. *On dit que F est semicontinue inférieurement (s.c.i) au point $t_0 \in T$, si pour tout ouvert U de X vérifiant $F(t_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage Ω de t_0 tel que $F(z) \cap U \neq \emptyset$, $\forall\, z \in \Omega$ (i.e., $F^{-1}(U)$ est un voisinage de t_0).*
On dit que F est semi-continue inférieurement sur T si elle est semi-continue inférieurement en tout point $t \in T$.

Définition 2.2.5. *On dit que F est continue au point $t_0 \in T$ si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i. au point t_0, et F continue si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i.*

Corollaire 2.2.2. *Soit $F : T \rightrightarrows X$. La semi-continuité supérieure de F est équivalente à chacune des conditions suivantes*

i) $F_+^{-1}(U)$ *est un ouvert de T pour tout ouvert U de X.*

ii) $F^{-1}(V)$ *est un fermé de T pour tout fermé V de X.*

iii) $\overline{F^{-1}(M)} \subseteq F^{-1}(\overline{M})$ *pour tout ensemble M de X.*

Corollaire 2.2.3. *La semi-continuité inférieure de F est équivalente à chacune des conditions suivantes*

i) $F^{-1}(U)$ *est un ouvert de T pour tout ouvert U de X.*

ii) $F_+^{-1}(V)$ *est un fermé de* T *pour tout fermé* V *de* X.

iii) $\overline{F_+^{-1}(M)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{M})$ *pour tout ensemble* M *de* X.

Preuve.

• $F s.c.i \Rightarrow$ **i)**.

Soit U un ouvert de X, montrons que $F^{-1}(U)$ est un ouvert de T.

Pour cela, il suffit de montrer que $F^{-1}(U)$ est un voisinage de tous ses points.

Soit $t \in F^{-1}(U) \Leftrightarrow F(t) \cap U \neq \emptyset$. U étant un ouvert de X et F est s.c.i au point t, alors il existe Ω un voisinage de t, tel que $\Omega \subset F^{-1}(U)$, ce ci implique que $F^{-1}(U)$ est un voisinage de t, donc $F^{-1}(U)$ est un ouvert de T.

• **i)** $\Rightarrow$ **ii)**.

Soit V un fermé de X. Montrons que $F_+^{-1}(V)$ est un fermé de T.

En utilisant la relation (2.1), nous avons

$$\begin{aligned} V \text{ est un fermé de } X &\Leftrightarrow X\backslash V \text{ est un ouvert de } X \\ &\Rightarrow F^{-1}(X\backslash V) \text{ est un ouvert de } T \\ &\Rightarrow T\backslash F_+^{-1}(V) \text{ est un ouvert de } T \\ &\Leftrightarrow F_+^{-1}(V) \text{ est un fermé de } T. \end{aligned}$$

• **ii)** $\Rightarrow$ **iii)**.

Soit $M \subseteq X$, nous avons $F_+^{-1}(M) \subseteq F_+^{-1}(\overline{M})$.

En effet, $\forall\, t \in F_+^{-1}(M)$

$$F(t) \subseteq M \subseteq \overline{M} \Leftrightarrow t \in F_+^{-1}(\overline{M}).$$

$\overline{M}$ est un fermé de X, alors $F_+^{-1}(\overline{M})$ est un fermé de T contenant $F_+^{-1}(M)$ d'ou

$$\overline{F_+^{-1}(M)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{M}).$$

• **iii)** $\Rightarrow F s.c.i.$

Soit $t_0 \in T$ et soit U un ouvert de X tel que $F(t_0) \cap U \neq \emptyset$.

Montrons que $F^{-1}(U)$ est un voisinage de t_0.

Nous avons

$$T\backslash F^{-1}(U) = F_+^{-1}(X\backslash U) = \overline{F_+^{-1}(X\backslash U)},$$

et donc, $T\backslash F^{-1}(U)$ est un fermé de T, i.e., $F^{-1}(U)$ est un ouvert de T, c'est à dire, $F^{-1}(U)$ est un voisinage de t_0.

■

Exemple 2.2.1. *Soit*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightrightarrows \mathbb{R} \\ t &\mapsto F(t) = \begin{cases} [-1, 1] & si \ \ t \neq 0 \\ \{0\} & si \ \ t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que F est s.c.i sur $\mathbb{R}$ et qu'elle n'est pas s.c.s au point 0.

Preuve.

Soit V un fermé de $\mathbb{R}$. Montrons que $F_+^{-1}(V)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

$$F_+^{-1}(V) = \Big\{t \in \mathbb{R} : F(t) \subseteq V\Big\}.$$

- Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $[-1, 1]$ et contenant 0, alors

$$F_+^{-1}(V) = \Big\{0\Big\}, \text{ qui est un fermé de } \mathbb{R}.$$

- Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ contenant $[-1, 1]$, alors

$$F_+^{-1}(V) = \mathbb{R}, \text{ qui est un fermé de } \mathbb{R}.$$

- Si V est un fermé de $\mathbb{R}$ ne contenant pas $[-1, 1]$ *et* 0, alors

$$F_+^{-1}(V) = \emptyset, \text{ qui est un fermé de } \mathbb{R}.$$

D'où la semi-continuité inférieure de F.

Montrons maintenant que F n'est pas s.c.s au point 0.

En effet , $\exists\, U =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $F(0) \subset U$, par contre

$\forall\, \varepsilon > 0,\ F(]-\varepsilon, +\varepsilon[) = \bigcup\limits_{x \in]-\varepsilon,+\varepsilon[} F(x) = [-1, +1] \nsubseteq U$.

Donc F n'est pas s.c.s au point 0.

■

Théorème 2.2.2. *Soient T, X deux espaces métriques, $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. F est semi-continue inférieure au point t_0 si et seulement si pour toute suite (t_n) de points de T, telle que $t_n \to t_0$ et pour tout $x_0 \in F(t_0)$, il existe une suite (x_n) telle que $x_n \in F(t_n)$ et $x_n \to x_0$.*

Preuve.

$\Rightarrow /$

Soit $(t_n) \subset T$, tell que $t_n \to t_0 \Leftrightarrow$

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(t_0),\ \exists\, n_0 > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow t_n \in V.$$

Soit $x_0 \in F(t_0)$ et soit $U \in \mathcal{V}(x_0)$.

Nous avons $F(t_0) \cap U \neq \emptyset$, comme F est s.c.i,

$$\exists\, \Omega \in \mathcal{V}(t_0)/\ F(t) \cap U \neq \emptyset,\ \forall\, t \in \Omega.$$

$\Omega \in \mathcal{V}(t_0) \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ t_n \in \Omega \Rightarrow F(t_n) \cap U \neq \emptyset,\ \forall\, n \geq n_0$.

Soit alors $x_n \in F(t_n) \cap U$ $(n \geq n_0)$, on conclut que

$$\forall\, U \in \mathcal{V}(x_0),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ x_n \in U \Rightarrow x_n \to x_0.$$

Par conséquent, $\exists\, (x_n) \subset X$ tel que $x_n \in F(t_n)$ et $x_n \to x_0$.

$\Leftarrow /$

Supposons le contraire, c'est à dire F n'est pas s.c.i au point t_0.

F n'est pas s.c.i au point $t_0 \Leftrightarrow$

$\exists\, U$ ouvert de X tel que $F(t_0) \cap U \neq \emptyset$ et $\forall\, \Omega \in \mathcal{V}(t_0),\ \exists\, z \in \Omega, F(z) \cap U = \emptyset$

$$\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, t_n \in B(t_0,\ \frac{1}{n}),\ F(t_n) \cap U = \emptyset.$$

On obtient alors la suite (t_n) avec $t_n \to t_0$.
Par contre, il n'existe pas de suite (x_n) , telle que $x_n \in F(t_n)$ et $x_n \to x_0 \in F(t_0) \cap U$, car sinon on aura

$$\forall\, W \in \mathcal{V}(x_0),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in W.$$

En particulier pour $U = W$, donc $x_n \in U$. Contradiction avec $F(t_n) \cap U = \emptyset$. D'où le résultat.

■

Théorème 2.2.3. *Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application semi continue supérieure à valeurs fermées. Alors le graphe de F est fermé.*

Preuve.

$gph(F) = \{(t, x) \in T \times X/\ x \in F(t)\}$.
Soit (t_n, x_n) une suite de $gph(F)$ qui converge vers (t, x).
Montrons que $(t, x) \in gph(F)$.
F s.c.s $\Rightarrow F$ s.c.s au point $t \Rightarrow$
$\forall\, U$ ouvert de X tel que $F(t) \subset U$, $\exists\, \Omega \in \mathcal{V}(t)$ tel que $F(z) \subset U$, $\forall\, z \in \Omega$.
D'autre part, $\Omega \in \mathcal{V}(t)$ et $t_n \to t \Rightarrow$

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow t_n \in \Omega \Rightarrow F(t_n) \subset U,\ \forall\, n \geq n_0.$$

Nous avons alors pour tout voisinage ouvert U de $F(t)$

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow F(t_n) \subset U.$$

Or,

$$\begin{aligned}
x_n \in F(t_n) &\Rightarrow x_n \in U,\ \forall\, n \geq n_0 \\
&\Rightarrow \forall\, U \text{ voisinage de } F(t),\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U \\
&\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, F(t)) \leq \varepsilon \\
&\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \overline{F(t)} = F(t).
\end{aligned}$$

Comme $x_n \to x$ et $F(t)$ est fermé, alors $x \in F(t)$ et donc $(t, x) \in gph(F)$.
Par conséquent le graphe de F est fermé.

■

Théorème 2.2.4. *Soient $F : T \rightrightarrows X$, $G : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications telles que, $\forall\, t \in T,\ F(t) \cap G(t) \neq \emptyset$. On suppose que*

i) *F est s.c.s. au point $t_0 \in T$.*

ii) *$F(t_0)$ est compact.*

iii) *Le graphe de G est fermé.*

Alors, la multi-application $F \cap G$ est semi-continue supérieure au point t_0.

Corollaire 2.2.4. *Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vide, avec X un espace compacte. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.*

Preuve.

Appliquant le théorème précédent aux multi-applications F et G tel que

$$\begin{aligned}
G : T &\rightrightarrows X \\
t &\mapsto G(t) = X.
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\forall\, t \in T,\ G(t) \cap F(t) = X \cap F(t) = F(t) \neq \emptyset\,.$$

Pour tout $t_0 \in T$

1) $G(t_0) = X$ est compact.

2) G est s.c.s au point t_0 (car G est constante).

3) $gph(F)$ est fermé.

Alors $F = G \cap F$ est s.c.s au point t_0 et donc F est s.c.s sur T.

■

Lemme 2.2.1. *Soient (T, d), (X, d') deux espaces métriques et $F_1, F_2 : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications. Si F_1 est s.c.i sur T et F_2 est à graphe ouvert, telles que $F_1(t) \cap F_2(t) \neq \emptyset$, $\forall\, t \in T$ alors $F_1 \cap F_2$ est s.c.i sur T.*

Théorème 2.2.5. *Soient T, X deux espaces métriques, $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application semi continue supérieure à valeurs compactes, alors*

$$\limsup_{t' \to t} F(t') = F(t).$$

Corollaire 2.2.5. *La composition de deux multi-application (s.c.i)(res s.c.s) est s.c.i (res s.c.s).*

Proposition 2.2.3. *Soient T, X deux espaces topologiques et F_1, $F_2 : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications. Alors*

a) si F_1 et F_2 sont s.c.i au point $t_0 \in T$, alors $t \mapsto F_1(t) \cup F_2(t)$ est s.c.i au point t_0 (ce résultat n'a pas lieu pour l'intersection).

b) si F_1 et F_2 sont s.c.s au point t_0, alors $t \mapsto F_1(t) \cup F_2(t)$ est s.c.s au point t_0.

c) supposons que X est métrisable. si F_1, F_2 sont à valeurs fermées et s.c.s au point t_0, alors $t \mapsto F_1(t) \cap F_2(t)$ est s.c.s au point t_0.

Définition 2.2.6. *Soient (T, d), (X, d') deux espaces métriques et soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application.*

- *On dit que F est H-s.c.s au point $t_0 \in T$ si et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,/\, F\left(B\left(t_0, \delta\right)\right) \subset V\left(F\left(t_0\right), \varepsilon\right) = \Big\{x \in X : d\left(x, F\left(t_0\right)\right) \leq \varepsilon\Big\}.$$

• *On dit que F est H-s.c.s sur T si et seulement si elle est H-s.c.s en tout point de T.*

Définition 2.2.7. *Soient (T, d), (X, d') deux espaces métriques et $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application.*

• *On dit que F est H-s.c.i au point $t_0 \in T$ si et seulement si*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ /\ F(t_0) \subset [V(F(t), \varepsilon)]^\circ,\ \forall\, t \in B(t_0, \delta).$$

• *On dit que F est H-s.c.i sur T si et seulement si elle est H-s.c.i en tout point de T.*

Corollaire 2.2.6. *si F est s.c.s au point t_0 alors F est H-s.c.s au point t_0 (l'implication inverse est fausse).*

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $U = [V(F(t_0),\ \varepsilon)]^\circ = \{x \in X,\ d(x, F(t_0)) < \varepsilon\}$.
Nous avons, $F(t_0) \subset U$, or F est s.c.s au point $t_0 \Rightarrow \exists\, \Omega$ voisinage de t_0
tel que $F(t) \subset U$, $\forall\, t \in \Omega$.
$\Omega \in \mathcal{V}(t_0) \Rightarrow \exists\, \delta > 0,\ B(t_0, \delta) \subset \Omega$
$\Rightarrow F(B(t_0, \delta)) \subset F(\Omega) \subset U = [V(F(t_0), \varepsilon)]^\circ \subset V(F(t_0), \varepsilon)$.
D'où, $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ F(B(t_0, \delta)) \subset V(F(t_0), \varepsilon)$.
Par conséquent, F est H-s.c.s au point t_0.

■

Corollaire 2.2.7. *Si F est H-s.c.i au point t_0 alors F est s.c.i au point t_0.*

Preuve.

Supposons que F est H-s.c.i au point t_0 et qu'elle n'est pas s.c.i en ce point. Donc nous avons l'existence d'un ouvert U de X vérifiant

$F(t_0) \cap U \neq \emptyset$ et $\forall\, V \in \mathcal{V}(t_0),\ \exists\, t' \in V \;/\; F(t') \cap U = \emptyset \Leftrightarrow$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, t_n \in B(t_0, \frac{1}{n}) \;/\; F(t_n) \cap U = \emptyset\,.$$

D'une autre part, par la H-s.c.i de F au point t_0 nous avons

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow F(t_0) \subset [V(F(t_n), \varepsilon)]^\circ$$

alors

$$F(t_0) \cap U \subset [V(F(t_n), \varepsilon)]^\circ,\ \forall\, n \geq n_0\,.$$

Soit $x \in F(t_0) \cap U \Rightarrow x \in [V(F(t_n), \varepsilon)]^\circ \Rightarrow d'(x, F(t_n)) < \varepsilon$

$$\inf_{x_n \in F(t_n)} d'(x, x_n) < \varepsilon \Rightarrow \forall\, k > 0,\ \exists\, x_k \in F(t_{n_k}) \text{ tel que } d'(x, x_k) < \frac{1}{k}\,.$$

Pour k assez grand, on obtient $x_k \in U$, contradiction avec $F(t_n) \cap U = \emptyset$. Par conséquent, F H- s.c.i $\Rightarrow Fs.c.i.$

■

Corollaire 2.2.8.

✓ *Si $F(t_0)$ est compact alors F est H-s.c.i au point $t_0 \Leftrightarrow F$ est s.c.i au point t_0.*

✓ *Si $F(t_0)$ est compact alors F est H-s.c.s au point $t_0 \Leftrightarrow F$ est s.c.i au point t_0.*

2.3 La mesurabilité des multi-applications

2.3.1 Application mesurable

Définition 2.3.1. *Soit (T, Σ) un espace mesurable et soient X un espace métrique, $\mathcal{B}(X)$ la tribu Borélienne sur X et $f : T \to X$.*

- *On dit que f est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$ mesurable si et seulement si $\forall\, A \in \mathcal{B}(X),\ f^{-1}(A) \in \Sigma$.*
- *On dit que f est Σ-étagée (resp. dénombrablement Σ-étagée) si f est Σ-mesurable et $f(T)$ est fini (resp. $f(T)$ est dénombrable).*

Ceci revient à dire qu'il existe une Σ-partition finie (resp. dénombrable) $(T_j)_{j\in J}$ de T, telle que f soit constante sur chaque T_j,

$$f = \sum_{j\in J} a_j \chi_{T_J}, \text{ avec } T_j = \{x \in T \ / \ f(x) = a_j\}.$$

• *On dit que f est Bochner Σ-mesurable si f est Σ-mesurable et $f(T)$ est un sous ensemble séparable de X.*

Remarque 2.3.1. *Si X est un espace métrique séparable, alors*
f est Bochner Σ-mesurable $\Leftrightarrow$ f est Σ-mesurable.

Corollaire 2.3.1. *Les caractérisations suivantes sont équivalentes*

a) f est Bochner Σ-mesurable.

b) il existe une suite d'applications $(f_n)_n$ Σ-étagée convergeant simplement sur T vers f, (i.e. $\forall\, t \in T$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$).

c) il existe une suite d'applications $(f_n)_n$ dénombrablement Σ-étagée convergeant uniformément vers f (i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in T} \|f_n(t) - f(t)\| = 0$).

Corollaire 2.3.2. *Soit $f : T \to X$ et soit $(f_n)_n$ une suite d'applications Σ-mesurables définies sur T à valeurs dans X telle que pour chaque $t \in T$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ alors f est Σ-mesurable.*

Théorème 2.3.1. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique séparable et $f : T \to X$. Pour chaque $x \in X$, considérons la fonction*

$$\begin{array}{rcl} g_x : T & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & d(x, f(t)). \end{array}$$

Alors, f est Σ-mesurable $\Longleftrightarrow$ g_x est Σ-mesurable pour chaque $x \in X$.

Définition 2.3.2. *Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré positif. On considère la tribu μ-complétée de Σ*

$$\Sigma_\mu = \left[\Sigma \cup \mathcal{N}\right] = \left\{A \cup N \ A \in \Sigma \ \text{ et } \ N \in \mathcal{N}\right\}$$

avec

$$\mathcal{N} = \Big\{ N \in T /\, \exists\, B \in \Sigma \text{ et } \mu(B) = 0 \Big\}$$

$\mathcal{N}$ est l'ensemble des parties μ-négligeables de T.
On dit que $f : T \to X$ est Bochner Σ_μ-mesurable si f est Σ_μ-mesurable et il existe $N \in \mathcal{N}$ tel que $f(T \setminus N)$ est séparable.

Théorème 2.3.2. ***(Théorème de Lusin)***
Soient T un espace métrique compact et (T, Σ, μ) un espace mesuré de Radon avec $\mu \geq 0$. Alors, pour toute fonction $\varphi : T \to \mathbb{R}$ μ-mesurable et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ tel que $\mu(T \backslash T_\varepsilon) < \varepsilon$ et $\varphi|_{T_\varepsilon}$ est continue (i.e., la restriction de φ à T_ε est continue).

Lemme 2.3.1. *Soient T un espace métrique compact, (T, Σ, μ) un espace mesuré positif de Radon. Soit Z un espace métrique séparable et $h : T \times Z \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable par rapport à t et lipschitzienne par rapport à z, i.e.,*

$$\exists\, \alpha > 0,\ \Big| h(t, z) - h(t, z') \Big| \leq \alpha d_Z(z, z'),\ \forall z,\ z' \in Z.$$

Alors, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ tel que $\mu(T \backslash T_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de h à $T_\varepsilon \times Z$ est continue.

Corollaire 2.3.3. ***(Théorème de Scorza Dragoni pour les fonctions)***
Soient T un espace compact, (T, Σ, μ) un espace mesuré de Radon avec $\mu \geq 0$. Soit X un espace métrique séparable complet et soit $h : T \times X \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ tel que $\mu(T \backslash T_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de h à $T_\varepsilon \times X$ est continue.

2.3.2 Applications implicites mesurables

Proposition 2.3.1. *Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré avec Σ une tribu μ-complète. Soient X, Y deux espaces métriques complets séparables, $F : T \rightrightarrows Y$ et $G : T \rightrightarrows X$ deux multi-applications Σ-mesurables à valeurs fermées et soit $f : T \times X \to Y$ une application Carathéodory.*

Supposons que pour tout $t \in dom(F) \cap dom(G)$, *nous avons*

$$G(t) \cap (f(t,\cdot))^{-1}(F(t)) \neq \emptyset \, .$$

Alors, il existe une application $u : dom(F) \cap dom(G) \to X$ *telle que*

$$u(t) \in G(t) \text{ et } f(t,u(t)) \in F(t), \forall\, t \in dom(F) \cap dom(G) \, .$$

Proposition 2.3.2. *Soient* (T, Σ, μ) *un espace mesuré positif avec* μ *une mesure* σ*-finie. Soit* $(f_j)_{j\in J}$ *une famille quelconque de fonctions* Σ*-mesurable définies sur* T *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$. *Alors, il existe une fonction* Σ*-mesurable* $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ *telle que*

i) Pour chaque $j \in J$, $f_j \leq f$ μ*-p.p.*

ii) Pour toute autre fonction $g : T \to \overline{\mathbb{R}}$ *vérifiant i), on a* $f \leq g$ μ*-p.p.*

De plus, la fonction f *est unique à* μ*-équivalence, et il existe un ensemble dénombrable* $J_0 \subset J$ *tel que*

$$f(t) = \sup_{j\in J_0} f_j(t) \;\; \mu\text{-}p.p.$$

La fonction f *est appelée la borne supérieure essentielle de la famille* $(f_j)_{j\in J}$. *On note*

$$f(t) = (ess \sup_{j\in J} f_j)(t).$$

Nous avons le même résultat pour la borne inférieure essentielle.

Exemple 2.3.1. *Soit* $T = [0,1]$ *muni de la tribu et la mesure de Lebesgue, et soit* $J = [0,1]$. *Considérons pour chaque* $j \in J$ *la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f_j : T & \rightrightarrows & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f_j(t) = \chi_j(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; t = j \\ 0 & sinon. \end{cases} \end{array}$$

Alors pour $j \in J$, *nous avons* $f_j = 0$ *p.p et donc ess* $\sup_{j\in J} f_j = 0$.
Alors que $\sup_{j\in J} f_j(t) = 1$.

2.3.3 Multi-applications mesurables

Définition 2.3.3. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique. Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est Σ-mesurable si pour tout ouvert V de X, $F^{-1}(V) \in \Sigma$, avec*

$$F^{-1}(V) = \Big\{t \in T \ / \ F(t) \cap V \neq \emptyset\Big\}.$$

Il est intéressant d'avoir une caractérisation scalaire de la mesurabilité des multi-applications, c'est à dire peut on caractériser la mesurabilité d'une multi-application à partir de la mesurabilité de certaines fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On s'intéresse essentiellement à deux types de fonctions, la fonction distance et la fonction support.

Proposition 2.3.3. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. Alors les assertions suivantes sont équivalent*

i) F est Σ-mesurable.

ii) pour chaque $x \in X$, la fonction

$$\begin{array}{rcl} g_x : T & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & d(x, F(t)) \end{array}$$

est Σ-mesurable.

Exemple 2.3.2.

1. *Toute multi-application constante est Σ-mesurable.*
2. *Toute multi-application Σ-étagée (resp. dénombrablement Σ-étagée) est Σ-mesurable.*
3. *Si A est un sous ensemble non vide d'un espace de Banach séparable et si $f : T \to X$ est une application Σ-mesurable, alors la multi-application*

$$\begin{array}{rcl} F : T & \rightrightarrows & X \\ t & \longmapsto & F(t) = f(t) + A \end{array}$$

est Σ-mesurable.

4. *Si A est un sous ensemble non vide d'un espace de Banach séparable X et si $\alpha : T \to \mathbb{R}$ est une fonction Σ-mesurable alors la multi-application*

$$\begin{aligned} F : T &\rightrightarrows X \\ t &\longmapsto F(t) = \alpha(t).A \end{aligned}$$

est Σ-mesurable.

5. *Si $F : T \rightrightarrows X$ est Σ-mesurable, alors la multi-application*

$$\begin{aligned} G : T &\rightrightarrows X \\ t &\longmapsto G(t) = \overline{F(t)} \end{aligned}$$

est Σ-mesurable.

Proposition 2.3.4. ***(Bornes supérieure et inférieure de Valadier pour les multi-applications)***
Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré avec Σ une tribu μ-complète et μ une mesure σ-finie et soit X un espace métrique séparable. Soit $(F_j)_{j\in J}$ une famille de multi-applications mesurables à valeurs fermées définies sur T à valeurs dans X. Alors, il existe une multi-application $F : T \rightrightarrows X$ Σ-mesurable à valeurs fermées telle que

i) Pour chaque $j \in J$, $F_j(t) \subset F(t)$ μ-p.p.

ii) Pour toute multi-application $G : T \rightrightarrows X$ Σ-mesurable à valeurs fermées vérifiant la condition i) on a $F(t) \subset G(t)$ μ-p.p.

De plus, il existe un ensemble dénombrable $J_0 \subset J$ tel que

$$F(t) = \overline{\underset{j\in J_0}{\cup} F_j(t)} \ \mu\text{-p.p.}$$

Corollaire 2.3.4. *Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré avec Σ une tribu μ-complète et μ une mesure σ-finie et soit X un espace métrique séparable. Alors, pour toute multi-application $F : T \rightrightarrows X$ Σ-mesurable à valeurs fermées, il existe une μ-p.p plus grande multi-application $F_0 : T \rightrightarrows X$ Σ-mesurable à valeurs fermées et à images contenues μ-p.p dans celles de F au sens suivant*

1) $F_0(t) \subset F(t)$ *μ-p.p sur* T.

2) pour toute autre multi-application $\widetilde{F} : T \rightrightarrows X$ *Σ-mesurable à valeurs fermées vérifiant* $\widetilde{F}(t) \subset F(t)$ *μ-p.p sur* T, *nous avons* $\widetilde{F}(t) \subset F_0(t)$ *μ-p.p sur* T. *En particulier pour toute sélection Σ-mesurable* f *de* F *nous avons,* $f(t) \in F_0(t)$ *μ-p.p sur* T.

Théorème 2.3.3. ***Théorème de Scorza Dragoni (Version multivoque)***

Soient T *un espace métrique compact,* (T, Σ, μ) *un espace mesuré de Radon tel que* $\mu \geq 0$, X *un espace métrique séparable complet et* Y *un espace métrique compact.*

Soit $F : T \times X \rightrightarrows Y$ *une multi-application de Carathéodory à valeurs fermées non vides, i.e.,*

i) Pour chaque $t \in T$, $gph(F(t, .))$ *est fermé dans* $X \times Y$ $(F(t, .)$ *est s.c.s).*

ii) Pour chaque $x \in X$, $F(., x)$ *est mesurable (admet une sélection mesurable).*

Alors, il existe une multi-application $F_0 : T \times X \rightrightarrows Y$ *telle que*

1) $gph(F_0) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$.

2) Il existe une ensemble μ-négligeable N *indépendant de* (t, x) *vérifiant* $F_0(t, x) \neq \emptyset$ *et* $F_0(t, x) \subset F(t, x)$, $\forall\, t \in T \backslash N$ *et* $\forall\, x \in X$.

3) Pour toutes applications mesurables $u : T \to X$ *et* $v : T \to Y$ *vérifiant* $v(t) \in F(t, u(t))$ *μ-p.p., nous avons* $v(t) \in F_0(t, u(t))$ *μ-p.p.*

4) Pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* $T_\varepsilon \subset T$ *tel que* $\mu(T \backslash T_\varepsilon) < \varepsilon$ *et tel que le graphe de la restriction de* F_0 *à* $T_\varepsilon \times X$ *soit fermé (i.e.,* $F_{0 \backslash T_\varepsilon \times X}$ *est semi continue supérieure).*

Définition 2.3.4. ***(Multi-applications à graphes mesurables).***

Soient (T, Σ) *un espace mesurable,* Y *et* X *deux espaces métriques.*

Soit $f : T \times Y \to X$. *On dit que* f *est une application de Carathéodory si*

$$\begin{aligned} f_y : T &\to X \\ t &\mapsto f_y(t) = f(t, y) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable pour chaque $y \in Y$ *fixé et*

$$\begin{aligned} f_t : Y &\to X \\ y &\mapsto f_t(y) = f(t, y) \end{aligned}$$

est continue sur Y pour chaque $t \in T$ fixé.
On dit aussi que f est séparément mesurable séparément continue.

Proposition 2.3.5. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et X un espace métrique. Soit $f : T \times Y \to X$ une application de Carathéodory, alors f est $(\Sigma \otimes \mathcal{B}(Y), \mathcal{B}(X))$-mesurable.*

Proposition 2.3.6. *Soient X un espace métrique séparable, $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs fermées. Alors, si F est Σ-mesurable le graphe de F appartient à $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$*

$$gph(F) = \Big\{(t, x) \in T \times X/\ x \in F(t)\Big\}.$$

Définition 2.3.5. *Soit $G \subset T \times X$. On appelle projection de G sur T l'ensemble $Proj_T(G)$ définie par*

$$Proj_T(G) = \Big\{t \in T : \exists\, x \in X,\ (t, x) \in G\Big\}.$$

Théorème 2.3.4. ***(Projection d'ensembles mesurables)***
Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré, X un espace métrique. Alors, pour tout $G \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$ nous avons

$$Proj_T(G) \in \Sigma_\mu.$$

Σ_μ est la tribu complétée de Σ par rapport à la mesure μ.

Théorème 2.3.5. *Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré avec μ σ-finie. On suppose que la tribu Σ est μ-complète. Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs fermées. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *F est Σ-mesurable.*

ii) *$gph(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.*

iii) *$F^{-1}(B) \in \Sigma$, pour tout borélien B de X.*

iv) *$F^{-1}(C) \in \Sigma$, pour tout fermé C de X.*

Remarque 2.3.2. *Quand Σ est μ-complète, l'implication **ii)** $\Longrightarrow$ **i)** est vraie même si F n'est pas à valeurs fermées.*

Proposition 2.3.7. *Soit* $(F_j)_{j\in J}$ *une famille dénombrable de multi-applications définies sur* T *à valeurs dans* X *et soit* $F, G : T \rightrightarrows X$ *deux multi-applications telles que*

$$F(t) = \bigcap_{j\in J} F_j(t),\ G(t) = \bigcup_{j\in J} F_j(t)\ .$$

Alors,

1) Si les multi-applications F_j *sont de graphes mesurables,* F *et* G *sont aussi de graphes mesurables.*

2) Si Σ *est complète et si les* F_j *sont* Σ*-mesurables à valeurs fermées alors* F *est* Σ*-mesurable.*

CHAPITRE 3

THÉORÈMES DE SÉLECTION CONTINUE

Dans ce chapitre, nous allons considérer les théorèmes de base de sélection continue pour les multi-applications à valeurs convexes et à valeurs non convexes aussi à valeurs décomposables.
On commence par le théorème de Micheal pour les multi-applications s.c.i et le théorème de Browder pour les multiapplications s.c.s et un théorème pour les multi-applications localement sélectionable et en fin la version décomposable, nous ont amené à présenter quelques résultats de ce chapitre avec des démonstrations bien détaillées.

3.1 Théorème d'existence de sélection continue pour les multi-applications s.c.i à valeurs convexes

Lemme 3.1.1. *Soient (T, d) un espace métrique, X un espace de Banach et $F : T \to \mathcal{P}_{cv}(X)$ une multi-application semi-continue inférieurement (s.c.i) sur T. Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $f_\varepsilon : T \to X$ telle que pour tout $t \in T$, on a $f_\varepsilon(t) \in V(F(t), \varepsilon)$.*

Démonstration.

Puisque F est s.c.i sur T, nous associons à chaque $t \in T$ et à chaque $x_t \in F(t)$ un voisinage ouvert U_t de t tel que $F(t') \cap B(x_t, \varepsilon) \neq \emptyset$, $\forall\, t' \in U_t$. On prend $\{U_t\}_{t\in T}$ un recouvrement ouvert de T, et comme T est paracompacte alors, il existe une raffinement ouverte localement finie $\{U'_t\}_{t\in T}$ de $\{U_t\}_{t\in T}$. Soit $\{\Pi_t\}_{t\in T}$ une partition d'unité continue associe à $\{U_t\}_{t\in T}$. On définit $f_\varepsilon(z) = \sum\limits_{t\in T} \Pi_t(z) x_t, \forall\, z \in U'_t$. Alors f_ε est continue car est une somme localement finie des fonctions continues.

$\forall\, z \in U'_t \subset U_t$ on a, $x_t \in V(F(z), \varepsilon)$. Et si $\Pi_t(z) > 0$ et puisque $F(t)$ est convexe $\forall\, t \in T$.

Alors, $f_\varepsilon(z) \in V(F(z), \varepsilon), \forall\, z \in U'_t$.

Donc, $f_\varepsilon(z) \in V(F(z), \varepsilon) \forall\, z \in T$.

■

Théorème 3.1.1. ***(Théorème de sélection de Michael)***

Soient (T, d) un espace métrique compact, X un espace de Banach et

$F : T \to \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$ une multi-application semi-continue inférieurement sur T. Alors, il existe $f : T \to X$ une sélection continue de F.

Démonstration.

Nous définissons une suite des fonctions continues $u_i : T \to X,\ i = 1, 2, ...$ qui vérifie les assertions suivantes :

- **a)** $\forall\, t \in T,\ d(u_i(t), F(t)) < \frac{1}{2^i},\ \forall\, i \in \mathbb{N}^*$
- **b)** $\forall\, t \in T,\ \|u_i(t) - u_{i-1}(t)\| < \frac{1}{2^{i-2}},\ \forall\, i = 2, 3, ...$

Première cas

lorsque $i = 1$, on utilise le lemme (3.1.1) avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Deuxième cas

lorsque $i = n + 1$, supposons que nous avons définis les fonctions $u_1, u_2, ..., u_n$ telles que **a)** et **b)** sont vérifies et nous construirons la fonction u_{n+1}.

Maintenant nous considérons la multi-application F_{n+1} donnée par :

$F_{n+1}(t) = F(t) \cap B(u_n(t), \frac{1}{2^n}),\ \forall\, t \in T$.

D'après **a)** on obtient $F_{n+1}(t) \neq \emptyset$, $\forall\, t \in T$.

D'autre part, $F_{n+1}(t)$ est convexe, $\forall\, t \in T$. D'après le lemme (2.2.1) ona, F_{n+1} est s.c.i sur T.

Et d'après le lemme (3.1.1), il existe une fonction $u_{n+1} : T \to X$ continue sur T telle que : $d(u_{n+1}(t), F_{n+1}(t)) \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \forall\, t \in T$. Donc,

$d(u_{n+1}(t), F(t)) < \frac{1}{2^{n+1}}$, $\forall\, t \in T$.

En même temps on a, $u_{n+1} \in V(F_{n+1}(t), \frac{1}{2^{n+1}})$, $\forall\, t \in T$.

D'où, $\forall\, t \in T, \|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Alors, on a $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy converge uniformément vers une fonction continue $u : T \to X$ et d'après **a)** et puisque $F(t)$ est fermé, $\forall\, t \in T$, on obtient, $u(t) \in F(t)$, $\forall\, t \in T$. Donc, u est une sélection continue de F.

■

Corollaire 3.1.1. *Soient (T, d) un espace métrique, X un espace de Banach et $F : T \to \mathcal{P}_{cl,cv}(X)$ une multi-application semi-continue inférieurement sur T.*

- ***i)*** *Soient $Z \subset T$ un sous-ensemble non vide et $\varphi : Z \to X$ une sélection continue de $F|_Z$ ($F|_Z$ est la restriction de F sur Z).*
  Alors, φ admet une extension d'une sélection continue de F.
  En particulier, *$\forall\, x_0 \in F(t_0), \forall\, t_0 \in T$, il existe une sélection continue φ de F telle que $\varphi(t_0) = x_0$.*
- ***ii)*** *Soit $G : T \to \mathcal{P}(X)$ une multi-application à graphe ouvert.*
  Si $F(t) \cap G(t) \neq \emptyset$, $\forall\, t \in T$, alors $F \cap G$ admet une sélection continue.

3.2 Théorèmes d'existence de sélection continue pour les multi-applications s.c.s à valeurs convexes

Théorème 3.2.1. ***(Théorème de sélection approximation de Cellina)***
Soient (T, d) un espace métrique, $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et $F : T \to \mathcal{P}_{cv}(X)$ une multi-application semi-continue supérieurement sur T. Alors, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f_\varepsilon : T \to X$ localement Lipschitzienne telle que :

a) $f_\varepsilon(T) \in co(F(T))$.

b) $gph(f_\varepsilon) \subset V(gph(F), \varepsilon)$.

Démonstration.

Soient $\varepsilon > 0$ fixé, $t \in T$, puisque F est s.c.s au point t, donc elle est H-s.c.s au point t, c'est à dire,
$\exists\, \delta'(t) > 0 \;/\; F(B(t, \delta'(t))) \subset V(F(t), \varepsilon)$.
$\Rightarrow \exists\, \delta'(t) > 0, \forall\, z \in B(t, \delta'(t)) \;/\; F(z) \subset V(F(t), \varepsilon)$.
$\Rightarrow \exists\, \delta(t) < \delta'(t), \forall\, z \in B(t, \delta(t)) \subset B(t, \delta'(t)) \;/\; F(z) \subset V(F(t), \varepsilon)$.
On peut choisit $\delta(t) < \frac{1}{2}\varepsilon$ tel que $\forall\, z \in B(t, \delta(t)) \subset B(t, \frac{1}{2}\varepsilon) \;/\; F(z) \subset V(F(t), \varepsilon)$.
Soit $\{B(t, \frac{\delta(t)}{4})\}_{t\in T}$ un recouvrement ouvert de T, puisque T est un espace paracompact alors, il existe une raffinement ouverte localement finie $\{U_i\}_{i\in I}$.
Soit $\{\Pi_i(.)\}_{i\in I}$ une partition de l'unité localement Lipschitzienne de T subordonné.
Pour $i \in I$, on pose $t_i \in U_i$ et on définit f_ε par :

$$f_\varepsilon(t) = \sum_{i\in I} \Pi_i(t) y_i, \forall\, t \in T \text{ et } \forall\, y_i \in F(t_i).$$

On a f_ε est bien définie et localement lipschitzienne et comme $F(t)$ est convexe, on a $f_\varepsilon(t) \in F(t), \forall\, t \in T$.
Donc, $f_\varepsilon(t) \in co(F(t))$.
Soit $t \in T$ fixé, $\exists\, I(t) \subset I$ fini tel que $\Pi_i(t) > 0, \forall\, i \in I(t)$.
Soit t_i tel que $U_i \subset B(t_i, \frac{1}{4}\delta(t_i))$.
Soit $j \in I(t_i)$ tel que $\delta_j = \max\limits_{i\in I(t_i)} \delta(t_i)$. Alors,
$t_i \in B(t_j, \frac{1}{4}\delta_j) \subset B(t_j, \frac{1}{2}\delta_j)$ et $U_j \subset B(t_j, \frac{1}{4}\delta_j) \subset B(t_j, \delta_j)$.
D'autre part, $\forall\, j \in I(t)$, on a $y_j \in F(U_j) \subset F(B(t_j, \delta_j)) \subset V(F(t_j), \frac{1}{2}\varepsilon)$. Puisque F est à valeurs convexes alors, $V(F(t_j), \frac{1}{2}\varepsilon)$ est convexe. Donc,
$f_\varepsilon(t) \in V(F(t_j), \frac{1}{2}\varepsilon), \forall\, t \in T$.
Alors, $\exists\, y_j \in F(t_j)$ tel que $\|f_\varepsilon(t) - y_j\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.
D'autre part, $\begin{cases} d(t_i, t_j) < \frac{1}{2}\delta_j < \frac{1}{4}\varepsilon, \\ d(t, t_i) < \frac{1}{4}\delta_j < \frac{1}{2}\delta_j < \frac{1}{4}\varepsilon\,. \end{cases}$

D'où, $d(t, t_j) \leq d(t, t_i) + d(t_i, t_j) < \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon$.

Alors, $d[(t, f_\varepsilon(t)), (t_j, y_j)] \leq d(t, t_j) + \|f_\varepsilon(t) - y_j\| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.

Donc, $(t, f_\varepsilon(t)) \in V(gph(F), \varepsilon), \forall\, t \in T$.

C'est à dire, $gph(f_\varepsilon) \subset V(gph(F), \varepsilon)$.

■

Théorème 3.2.2. ***(Théorème de sélection de Browder)***
Soient T, X deux espaces vectoriels topologiques de Hausdorff et K un sous ensemble compact de T. Soit $F : K \to \mathcal{P}_{cv}(X)$ une multi-application telle que $F^{-1}(x)$ est un ouvert de T, $\forall\, x \in X$. Alors, il existe une sélection continue f de F.

Démonstration.

Puisque K est un compact on a, $\{F^{-1}(x)\}_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de K, alors il existe un sous recouvrement ouvert fini de K noté par $\{F^{-1}(x_i)\}_{i=\overline{1,n}}$.

Soit $\{\Pi_i\}_{i=\overline{1,n}}$ une partition d'unité continue correspondant à ce recouvrement. On définit f de K vers X par :

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i(t) x_i \,.$$

Alors, f est continue car est une somme finie des fonctions continues. D'autre part, $\forall t \in T$ on a, $x_i \in F(t)$, et pour $\Pi_i(t) > 0$, et comme F est convexe on a,

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi_i(t) x_i \in F(t).$$

D'où, $f(t) \in F(t)$, $\forall\, t \in T$.

C'est à dire, f est une sélection continue de F.

■

3.3 Théorèmes d'existence de sélection continue pour les multi-applications localement sèlectionables à valeurs convexes

Définition 3.3.1. *Soient T, X deux espaces topologiques de Hausdorff et $F : T \to \mathcal{P}(X)$ une multi-application. Alors F est dite localement sélectionable en $t_0 \in T$, si pour chaque $x_0 \in F(t_0)$, il existe un voisinage ouvert V de t_0 et une fonction continue $f : V \to X$ telle que $f(t_0) = x_0$ et $f(t) \in F(t), \forall\, t \in V$.*

✓ *F est dite localement sélectionable sur T si et seulement si elle est localement sélectionable en tout point t_0 de T.*

Lemme 3.3.1. *Soient T, X deux espaces topologiques de Hausdorff et $F : T \to \mathcal{P}(X)$ une multi-application telle que $F^{-1}(x)$ est un ouvert de T, $\forall\, x \in X$. Alors, F est localements sèlectionabl sur T.*
En particulier, *si le graphe de F est un ouvert, alors F est localement sèlectionable.*

Démonstration.

Soit $t_0 \in T$ et $x_0 \in F(t_0)$.
Puisque $F^{-1}(x_0)$ est un ouvert de T, on peut prend $V = F^{-1}(x_0)$ un voisinage ouvert de t_0 et on définit $f : V \to X$ par $f(t) = x_0, \forall\, t \in V$.
On a f est continue sur V et $f(t) \in F(t), \forall\, t \in V$.
Donc, F est localement sélectionable.

■

Lemme 3.3.2. *Soient T, X deux espaces topologiques de Hausdorff et $F, G : T \to \mathcal{P}(X)$ deux multi-applications telles que $F(t) \cap G(t) \neq \emptyset, \forall\, t \in T$. Si F est localement sélectionable et le graphe de G est un ouvert, alors la multi-application $F \cap G$ est localement sélectionable.*

Démonstration.

En sait que F est localement sélectionable au point $t_0 \in T$, alors il existe un voisinage ouvert V de t_0 et une fonction continue $f : V \to X$ définie par
$f(t_0) = x_0$ et $f(t) \in F(t), \forall\, t \in V$. De plus, $gph(G)$ est un ouvert, donc il existe un voisinage V_1 de t_0 et un voisinage V' de x_0 tels que $V_1 \times V' \subset gph(G)$.
D'autre part, f est continue, alors il existe un voisinage ouvert $V_2 \subset V$ de t_0 tel que $f(t) \in V'$, $\forall\, t \in V_2$.
Alors, $\forall\, x_0 \in F(t_0)$, il existe un voisinage ouvert U de t_0 donné par $U = V_1 \cap V_2$ et $f(t) \in F(t), \forall\, t \in U$ $(f(t) = x_0 \in F(t) \cap G(t),\ \forall\, t \in U)$.
Donc, $F \cap G$ est localement sélectionable.

■

Proposition 3.3.1. *Soient T, X deux espaces topologiques de Hausdorff et $F : T \to \mathcal{P}(X)$ une multi-application. Si F est localement sélectionable sur T, alors F est semicontinue supérieurement (s.c.s) sur T.*

Démonstration.

On sait que F est s.c.s sur T si et seulement si elle est s.c.s en tout point de T.
Soit $t_0 \in T$, comme F est localement sélectionable en t_0, alors, $\forall\, x_0 \in X$, il existe un voisinage ouvert U_1 de t_0 et une fonction $f : U_1 \to X$ continue telle que $f(t_0) = x_0$ et $f(t) \in F(t), \forall\, t \in U_1$.
Soit V un voisinage ouvert de x_0 tel que $F(t_0) \subset V$.
D'aprés la continuité de f, il existe un voisinage ouvert U_2 de t_0 tel que
$f(t) \in V$, $\forall\, t \in U_2$.
Il suffit de prend $U_1 = U_2$, on obtient $f(t) \in V$, $\forall\, t \in U_1$.
Donc, pour chaque V un voisinage ouvert de $x_0 \in F(t_0)$ tel que $F(t_0) \subset V$, il existe un voisinage ouvert U_1 de t_0 tel que $F(t) \subset V$, $\forall\, t \in U_1$.
D'où, F est s.c.s au point t_0. Donc, F est s.c.s sur T.

Théorème 3.3.1. ***(Aubin-Cellina)***
Soient T un espace paracompact, X un espace vectoriel topologique de Hausdorff et

$F : T \to \mathcal{P}_{cv}(X)$ *une multi-application localement sélectionable.*
Alors, F *admet une sélection continue.*

Démonstration.

Nous associons à chaque $y \in T$ un élément $x \in F(t)$.
Soit $t_0 \in T$, puisque F est localement sélectionable alors, $\forall\, x_0 \in F(t_0)$, il existe un voisinage ouvert V de t_0 et une fonction $f_y : V \to X$ continue telle que $f_y(t_0) = x_0$ et $f_y(t) \in F(t), \forall\, t \in V$.
On prend $\{V(y) \,/\, y \in T\}$ un recouvrement ouvert de T.
De plus, T est un espace paracompact, alors il existe une raffinement ouverte localement finie de T, noté $\{V'(y) \,/\, y \in T\}$. Soit $\{\Pi_y\}_{y \in T}$ une partition d'unité continue associe à $\{V(y) \,/\, y \in T\}$.
On note par $I(t)$ l'ensemble fini non vide des points $y \in T$ ayant la propriété que $\Pi_y(t) > 0, \forall\, t \in T$. On définit la fonction f de T vers X par

$$f(t) = \sum_{y \in I(t)} \Pi_y(t) f_y(t), \forall\, t \in T\,.$$

Alors, f est une fonction continue car est une somme finie des fonctions continues. Et puisque $\forall\, t \in T, \forall\, y \in I(t), f_y(t) \in F(t)$ et $F(t)$ est convexe, donc
$f(t) \in F(t), \forall\, t \in T$.
D'où, f est une sélection continue de F.

■

3.4 Théorème d'existence de sélection continue pour les multi-applications continues à valeurs non nécessairement convexes

Théorème 3.4.1. ***(Théorème de sélection de Strother)***
Soit $F : [0,1] \to \mathcal{P}([0,1])$*, une multi-application continue. Alors,* F *admet une sélection*

continue.

Démonstration.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction définie par $f(t) = \inf\{x \,/\, x \in F(t)\}$.
On doit montrer que f est une sélection continue de F.
Soient $t_0 \in [0,1]$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et V_{2r} un intervalle ouvert de longueur $2r$ et de centre $f(t_0)$.
Donc, V_r est un intervalle ouvert de longueur r qui contient $f(t_0)$.
Comme F est continue sur $[0,1]$, on utilise la s.c.i de F au point t_0 alors, il existe un voisinage ouvert U_1 de t_0 tel que $F(t) \cap V_r \neq \emptyset$, $\forall\, t \in U_1$.
Par conséquent, $\inf\{x \,/\, x \in F(t)\} \geq f(t_0) - r, \forall\, t \in U_1$.
D'autre part, on considère, $V = \{x \,/\, x < r + f(t_0)\}$ un ouvert qui contient $F(t_0)$, et on utilise la s.c.s de F au point t_0, on obtient l'existence d'un voisinage ouvert U_2 de t_0 tel que $F(t) \subset V, \forall\, t \in U_2$. Alors, $\forall\, t \in U_2$ on a,
$f(t) = \inf\{x \,/\, x \in F(t)\} \leq f(t_0) + r$.
Soit $U = U_1 \cap U_2$. Donc, $\forall\, t \in U$ on obtient $|f(t) - f(t_0)| \leq r$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in U,\ |f(t)| &= |f(t) - f(t_0) + f(t_0)| \\
&\leq |f(t) - f(t_0)| + |f(t_0)| \\
&\leq r + r = 2r.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $f(t) \in V_{2r}, \forall\, t \in U$.
Donc, $f(t) \in F(t), \forall\, t \in [0,1]$.
D'où, f est une sélection continue de F.

■

3.5 Théorèmes d'existence de sélection continue pour les multi-applications à valeurs décomposables

Définition 3.5.1. *Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré complet σ-finie non atomique et E un espace de Banach. Soit $\boldsymbol{L}^1(X, E)$ un espace de Banach de tous les fonctions mesurables $u : X \to E$ Bochner μ-intégrable.*
*On dit que l'ensemble $K \subset \boldsymbol{L}^1(X, E)$ est **décomposable**, si*
$\forall\, u, v \in K,\ \forall\, A \in \Sigma :\ u\mathcal{X}_A + v\mathcal{X}_{X\setminus A} \in K.$
$\mathcal{X}_A$: la fonction caractéristique de A.

Remarque 3.5.1. *Cette notion est de façon ou d'autre similaire à la convexité, mais il existe aussi une grande différence. Cependant, dans plusieurs cas avec la condition de décomposabilité est un bon produit de remplacement pour la convexité. Le but de cette section est de présent quelques résultats dans le domaine des multi-applications avec la convexité remplacer par la décomposabilité.*

*Un ensemble décomposable à été considéré pour la première fois dans le domaine des multi-applications par **Antosiewiez** et **Cellina** en liaison avec le problème de l'existence d'une sélection continue pour une multi-application continue à valeurs non nécessairement convexes.*

Il y 'a plusieurs résultats dans les multi-applications dans le cas la condition de convexité peut être remplacé par la décomposabilité.
Somme de ces théorèmes sera considéré dans ce qui suit.

*Le premier théorème est la version "décomposable" de théorème du sélection de **Michael** pour les multi-application s.c.i. à valeurs convexes.*

Lemme 3.5.1. *Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \boldsymbol{L}^1(X, E)$ avec $g_0 = 1$. Alors, $\exists\, S : \mathbb{R}^+ \times [0, 1] \to \Sigma$ telle que $\forall\, \tau, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall\, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ on a :*

a) $S(\tau, \lambda_1) \subseteq S(\tau, \lambda_2),\ si\, \lambda_1 \leq \lambda_2.$

b) $\mu(S(\tau_1, \lambda_1) \triangle S(\tau_2, \lambda_2)) \leq |\lambda_1 - \lambda_2| + 2|\tau_1 - \tau_2|.$

c) $\int\limits_{S(\tau,\lambda)} g_n\, d\mu = \lambda \int\limits_{S} g_n\, d\mu, \forall\, n \leq \tau.$
$(S(\tau_1, \lambda_1) \triangle S(\tau_2, \lambda_2) = (S(\tau_1, \lambda_1) \setminus S(\tau_2, \lambda_2)) \cup (S(\tau_2, \lambda_2) \setminus S(\tau_1, \lambda_1))).$

Lemme 3.5.2. *Soient T un espace métrique séparable, E un espace de Banach séparable et $F : T \to \mathcal{P}_{cl,dec}(\boldsymbol{L}^1(X,E))$ une multi-application s.c.i. sur T. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f_\varepsilon : T \to \boldsymbol{L}^1(X,E)$ et une fonction continue $g_\varepsilon : T \to \boldsymbol{L}^1(X,E)$ tel que la multi-application*
$F_\varepsilon(t) = \{u \in F(t) \,/\, \| u(x) - f_\varepsilon(t)(x)\| < \|g_\varepsilon(t)(x)\| \, p, p\}$ à valeurs non vides
et $\|g_\varepsilon(t)\| < \varepsilon$, $\forall\, t \in T$.

Maintenant on donne la version décomposable de théorème du sélection continue de ***Michael****.*

Théorème 3.5.1. ***(Pryszkowski, Bressan-Colombo)***
Soient (T,d) un espace métrique séparable, E un espace de Banach séparable et
$F : T \to \mathcal{P}_{cl,dec}(\boldsymbol{L}^1(X,E))$ une multi-application s.c.i sur T. Alors, F admet une sélection continue.

Démonstration.

En utilise le lemme (3.5.2), par induction on généralise deux suites des fonctions continues $f_n : T \to (\mathbf{L}^1(X,E))$ et $g_n : T \to (\mathbf{L}^1(X,E))$ et une suite des multi-applications
$F_n : T \to \mathcal{P}_{cl}(\mathbf{L}^1(X,E))$ tel que

i)$\|g_n(t)\| \leq 2^{-n}$

ii)$\|f_n(t)(x) - f_{n-1}(t)(x)\| \leq \|g_n(t)(x) + g_{n-1}(t)(x)\|$ p,p.

et pour chaque $n \geq 2$ on a

iii)$F_n(t) = \{u \in F(t) \,/\, \|u(x) - f_n(t)(x)\| < \|g_n(t)(x)\| \text{ p,p}\} \neq \emptyset$, $\forall t \in T$.

En effet,
Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbf{L}^1(X,E))$, alors $f_n(t)$ converges vers $f(t)$ avec f est une fonction continue de T vers $(\mathbf{L}^1(X,E))$.
Aussi puisque $d(f_n(t), F_n(t)) < 2^{-n}$, $\forall n \geq 1$ et F à valeurs fermés alors f est une sélection continue de F.

■

Théorème 3.5.2. ***(Bressan-Colombo)*** *Soient (T, d) un espace métrique séparable et $F : T \to \mathcal{P}_{dec}(\boldsymbol{L}^1(X, E))$ une multi-application H-s.c.s. sur T. Si T ou $\boldsymbol{L}^1(X, E)$ est séparable alors, $\forall \varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $f_\varepsilon : T \to \boldsymbol{L}^1(X, E)$ telle que*

a) $f_\varepsilon(T) \in \mathcal{P}_{dec}(F(T))$.

b) $\boldsymbol{gph}(f_\varepsilon) \subseteq V(\boldsymbol{gph}(F), \varepsilon)$.

Montrons maintenant un résultat auxiliaire, concernant l'existence de sélections continues pour une multi-application **localement sélectionable** à valeurs décomposables.

Lemme 3.5.3. *Soient (T, d) un espace métrique séparable, (X, Σ, μ) un espace mesuré complet σ-finie non atomique et E un espace de Banach.*
Soit $F : T \to \mathcal{P}_{dec}(\boldsymbol{L}^1(X, E))$ une multi-application localement sélectionable.
Alors, F admet une sélection continue.

Démonstration.

On associe à chaque $y \in T$ et $z \in F(y)$ un voisinage ouvert $N(y)$ et une sélection localement continue $f_y : N(y) \to \mathbf{L}^1(X, E)$ satisfait
$f_y(y) = z, f_y(t) \in F(t), \forall\, t \in N(y)$.
On note par $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une raffinement ouverte dénombrable localement finie d'un recouvrement $\{N(y)/y \in T\}$ et par $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une partition de l'unité continues associe à $\{N(y)/y \in T\}$.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, y_n \in T$ tel que $V_n \subset N(y_n)$ et $\exists\, f_{y_n} : N(y_n) \to \mathbf{L}^1(X, E)$ une fonction continue avec $f_{y_n}(y_n) = z_n$ et $f_{y_n}(t) \in F(t)$, $\forall\, t \in N(y_n)$.
Nous définissons $\lambda_0(t) = 0$ et $\lambda_n(t) = \sum\limits_{m\leq n} \Pi_m(t), n \in \mathbb{N}^*$. Soit $g_{m,n} \in \mathbf{L}^1(X, \mathbb{R}_+)$ une fonction définie par $g_{m,n}(x) = \|z_n(x) - z_m(x)\|$, $\forall\, m, n \geq 1$.
Nous organisons ces fonctions dans une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Considérons la fonction
$\tau(t) = \sum\limits_{m,n\geq 1} \Pi_m(t)\Pi_n(t)$. Par le lemme (3.5.1), il existe $\{X(\tau, \lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille des sous ensembles mesurables de X telle que

a) $X(\tau, \lambda_1) \subset X(\tau, \lambda_2)$, si, $\lambda_1 \leq \lambda_2$

b) $\mu\left(X(\tau_1, \lambda_1) \triangle X(\tau_2, \lambda_2)\right) \leq |\lambda_1 - \lambda_2| + 2|\tau_1 - \tau_2|$

c) $\int\limits_{X(\tau,\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}} g_n\, d\mu = \lambda \int\limits_X g_n\, d\mu,\ \forall\, n \leq \tau, \forall\, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1],\ \forall\, \tau, \tau_1, \tau_2 \geq 0.$

Nous définissons $f_n(t) = f_{y_n}(t)$ et $\mathcal{X}_n(t) = \mathcal{X}_{X(\tau(t),\lambda_n(t))\setminus X_{(\tau(t),\lambda_{n-1}(t))}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
On consédère une fonction $f : T \to \mathbf{L}^1(X,E)$, définie par

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} f_n(t)\mathcal{X}_n(t),\ \forall\, t \in T\ .$$

Alors, f est continue car Π_m sont des fonctions continues, donc les fonctions caractéristiques de l'ensemble $\{X(\tau,\lambda_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont continues, et puisque la somme est localement finie. Et puisque F est à valeurs décomposables on a, f est une sélection continue de F.

■

Le résultat suivant est similaire au corollaire (**3.1.1.ii)**)

Théorème 3.5.3. *Soient (T,d) un espace métrique séparable, E un espace de Banach séparable, $F : T \to \mathcal{P}_{cl,dec}(\boldsymbol{L}^1(X,E))$ une multi-application s.c.i et*
$G : T \to \mathcal{P}_{dec}(\boldsymbol{L}^1(X,E))$ une multi-application à graphe ouvert.
Si $F(t)\cap G(t) \neq \emptyset$, $\forall\, t \in T$, alors il existe une sélection continue de $F \cap G$.

Démonstration.

Soit $t_0 \in T$, $x_o \in F(t_o)$.
Nous définissons la multi-application F_0 par :

$$F_0(t) = \begin{cases} \{x_0\}\,,\ \text{si}\ t = t_0, \\ F(t),\ \text{si}\ t \neq t_0. \end{cases}$$

Comme F est s.c.i sur T alors $F_0 : T \to \mathcal{P}_{cl,dec}(\mathbf{L}^1(X,E))$ est s.c.i. sur T.
D'aprés le théorème(3.5.1), il existe une sélection continue f_0 de F_0.
C'est à dire, $f_0(t_0) = x_0$ et $f_0(t) \in F(t), \forall t \in T, t \neq t_0$. D'ou, F est localement sélectionable en t_0 . Et comme G est à graphe ouvert, alors d'aprés le lemme (3.3.2) on a $F \cap G$ est une multi-application localement sélectionable en t_0 et à valeurs décomposables.

D'après le lemme(3.5.3) on a, $F \cap G$ admet une sélection continue.

■

Théorème 3.5.4. *Soit E un espace de Banach tel que $\boldsymbol{L}^1(X, E)$ est séparable. Soit K un sous ensemble non vide, paracompact et décomposable de $\boldsymbol{L}^1(X, E)$ et soit $F : K \to \mathcal{P}_{dec}(K)$ une multi-application telle que pour tout $y \in K$, $F^{-1}(y)$ est un ouvert. Alors, F admet une sélection continue.*

Démonstration.

Pour chaque $y \in K$, $F^{-1}(y)$ est un sous-ensemble ouvert de K. Puisque K est paracompact alors le recouvrement ouvert $\{F^{-1}(y)\}_{y \in K}$ admet une raffinement ouverte localement finie, $K = \bigcup\limits_{j \in J} F^{-1}(y_j)$ avec $y_j \in K$, $J = \{1, 2, ...\}$.
Soit $\{\Pi_j\}_{j \in J}$ une partition de l'unité subordonné de $\{F^{-1}(y_j)\}_{j \in J}$.
En suite , $\forall\, j \in J$, $\exists\, y_j \in K$ et $f_{y_j} : \{F^{-1}(y_j)\}_{y_j \in K} \to \mathbf{L}^1(X, E)$ une fonction continue avec $f_{y_j}(y_j) = z_j$, $f_{y_j}(t) \in F(t)$, $\forall\, t \in \{F^{-1}(y_j)\}_{y_j \in K}$.
On définissons $\lambda_0(t) = 0$ et $\lambda_i(t) = \sum\limits_{j \leq i} \Pi_j(t)$, $i \in J$. Soit $g_{j,i} \in \mathbf{L}^1(X, \mathbb{R}_+)$ une fonction définie par $g_{j,i}(x) = \|z_i(x) - z_j(x)\|$, $\forall\, i, j \in J$.
Nous organisons ces fonctions dans une suite $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$.
Considérons une fonction $\tau(t) = \sum\limits_{j,i \in J} \Pi_j(t)\Pi_i(t)$. Par le lemme(3.5.1), il existe $\{X(\tau, \lambda_i)\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille des sous-ensemble de X mesurable telle que
$\forall\, \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, $\forall\, \tau, \tau_1, \tau_2 \geq 0$ on a

- **a)** $X(\tau, \lambda_1) \subseteq X(\tau, \lambda_2)$, si $\lambda_1 \leq \lambda_2$.
- **b)** $\mu\left(X(\tau_1, \lambda_1) \triangle X(\tau_2, \lambda_2)\right) \leq |\lambda_1 - \lambda_2| + 2|\tau_1 - \tau_2|$.
- **c)** $\int\limits_{X(\tau, \lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}} g_i \, d\mu = \lambda \int\limits_X g_i \, d\mu$, $\forall\, i \leq \tau$.

Nous définissons $f_j(t) = f_{y_j}(t)$ et $\mathcal{X}_j(t) = \mathcal{X}_{X(\tau(t), \lambda_j(t)) \setminus X_{(\tau(t), \lambda_{j-1}(t))}}$, $\forall\, j \in J$.
Considérons la fonctions $f : K \to K$ définie par $f(t) = \sum\limits_{j \in J} f_j(t)\mathcal{X}_j(t)$, $\forall\, t \in T$, alors f est continue, puisque Π_j sont des fonctions continues, donc les fonctions caractéristiques de l'ensemble $\{X(\tau, \lambda_i)\}_{i \in J}$ sont continues et la somme est localement finie. Et comme F

est à valeurs décomposables alors f est une sélection continue de F.

$\blacksquare$

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce mémoire a pour objectif d'étudier les théorèmes de sélection continue. En premier lieu, nous présentons quelques préliminaires d'analyse fonctionnelle, d'analyse multivoque sur les multi-applications. En fin nous donnons quelque théorèmes de sélection continue pour les multi-applications à valeurs convexes et à valeurs décomposables.

BIBLIOGRAPHIE

[1]] L. Aicha Faik : Contribution lAnalyse des Multifonctions et ltude de Quelques Problmes dvolution, Thse de Doctorat (30 mai 1995), univ. Monpellier II.

[2] J.P. Aubin et A. Cellina, Differential Inclusions, Set valued maps ans viability theory, Spring-Verlag, Berlin MR 91d : 49001 (1984).

[3] D. Azzam-Laouir, Contribution à l'étude de problème d'évolution du second ordre. Thèse de doctorat d'état, Université de Constantine (2003).

[4] A.Bouzid, J. Galbux, Théorié de la mesure et de l'intégration.

[5] N. Bourbaki, topologie générale, Masson, 1990.

[6] H.Bresis. Analyse Fonctionelle (Théorie et Applications). Masson, Paris, (1993).

[7] Bressana. And Colombog. Generalized Baire Category and différential inclusion in Banach space, J. Différentil equations 76 (1987),135-158.

[8] C. Castaing, M. Valadier, convexe analysis and mesurable multi-fonction. Lectures Notes in mathematics, Vol. 580, springer-verlag, Berlin(1977).

[9] W. Rudin, Analyse fonctionnelle, Ediscience internqtional. Paris(1995).

[10] L. Schwartz, Analyse, Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann, Paris (1970).

[11] L. Schwartz, Analyse III. Hermann, Paris, 1998.

[12] "Symposium-School on Ordinary Differential Equations", TIPAZA, May 13-18, 2006.

[13] Jean-Pierre Aubin and Hélène Frankowska, sel-valude Analysis, 1990.

ملخص

الغرض من هذة الرسالة هو اثبات بعض النظريات الرئيسية للإختيار المستمر للتطبيقات المتعددة.

أولا مفهوم التطبيقات المتعددة وخصائصها التي نستخدمها في إثبات نظريات الإختيارات المستمرة للتطبيقات المتعددة والنظريات الأساسية لوجود اختيار مستمر.

في الواقع طرق حل احتواء تفاضلي ترجع إلى البحث عن اختيار مستمر للتطبيق المتعدد لهذا الاحتواء.

نأمل أن يساعد هذا العمل الباحثين المهتمين بالاحتواءات التفاضلية والتطبيقات المتعددة.

Résumé

Le but de ce mémoire est prouver quelques théorèmes principaux de sélection continue pour les multi-applications.

D'abord le concept des multi-applications et leurs propriétés que nous utilisons dans les démonstrations du théorèmes des sélections continues de multi-applications et les théorèmes de base d'existence de sélection continue.

En effet, les méthodes de résolution d'une inclusion différentielle revient à chercher une sélection continue de la multi-application de cette inclusion.

Nous espérons que cet ouvrage sera d'une grande aide aux chercheurs intéressés par les inclusions différentielles et les multi-applications.

Abstract

The purpose of this thesis is to prove some main theorems of continuous selection for the multi-applications.

First, the concept of the multi-application and their characteristics which we use in the demonstrations of theorems of the continuous selections of multi-applications and the basic theorems if the existence of continuous selections.

In fact, the methods of resolution of a differential inclusion mean looking for a continuous selection of multi-application of this inclusion. We hope that this work will help the researchers who are interested in differential inclusions and the multi-applications.