

N° Réf :.....

**Centre Universitaire
Abdelhafid boussof Mila**

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de master

**En: - Filière mathématiques
- spécialité mathématiques fondamentales et appliquées**

***Les problèmes d'optimisation en économie
financière***

Préparé par :

- Debbache Houda
- Guezira Wassila

Soutenue devant le jury

- **Président** : I. BOUFELGHA.....M.A.B
- **Examineur** : A. ZAIDI.....M.A.B
- **Examineur** : A. BAZINIAR.....M.A.B
- **Encadrer** : M. AZI.....M.A.B

Année universitaire : 2014/2015



Remerciements

Nous tenons à remercier en premier et avant tout, notre créateur <<ALLAH>>, qui nous aide à réaliser ce travail.

Nos sincères gratitudee et remerciements à notre encadreur Monsieur Mourad Azi pour le grand soutien moral et leur aides précieuses qui nous apportez durant tout ce travail.

Nous adressons, également, mes remerciements chaleureux aux membres de l'institut des sciences et de la technologie et à tous ceux qui ont pris part de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Houda et Wassila

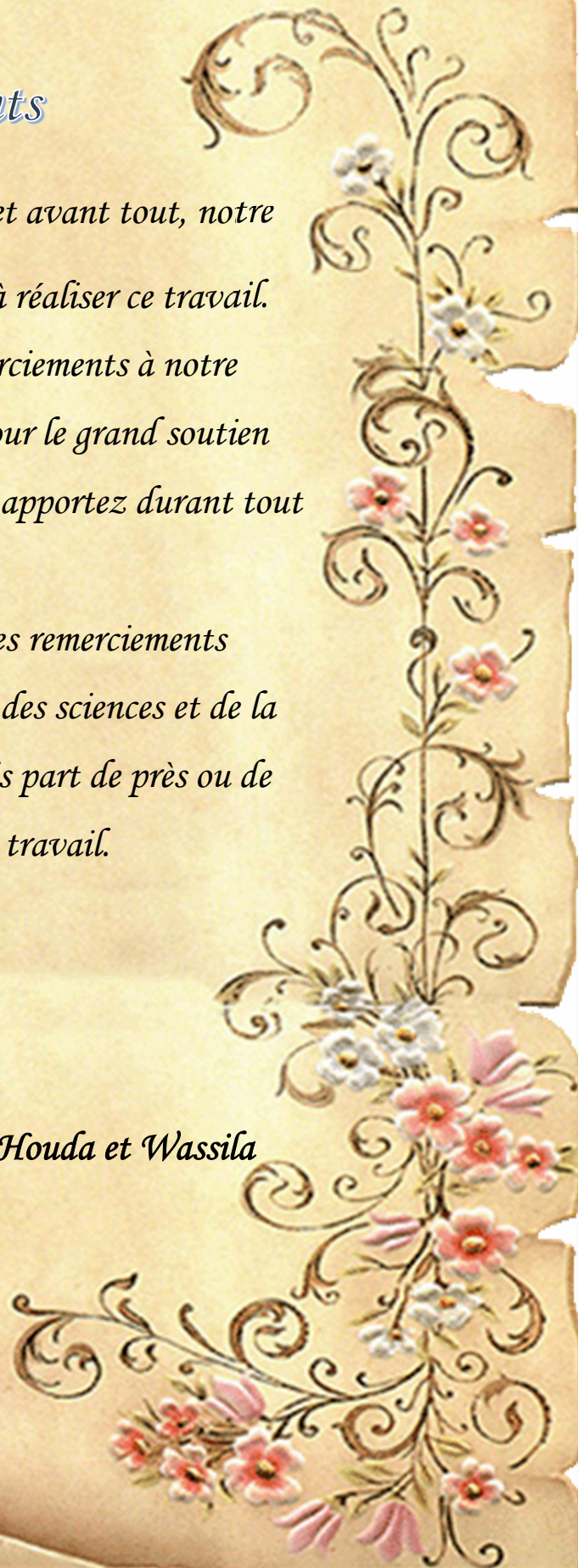


Table des matières

Introduction Générale	2
1 Gestion financière d'entreprise	4
1.1 Les cycles d'opérations dans l'entreprise	4
1.1.1 Le cycle d'exploitation	4
1.1.2 Le cycle d'investissement	5
1.1.3 Le cycle de financement	6
1.2 La fonction financière de l'entreprise	7
1.2.1 Les variables financières	7
1.2.2 Le choix d'objectif de finance d'entreprise	9
1.2.3 Le circuit financier	10
1.3 La décision de financement	11
1.3.1 Principales sources de financement	11
1.3.2 Le choix des sources de financement	15
1.4 Décision d'investissement	15
1.4.1 Les déterminants de l'investissement	16
1.4.2 Facteurs de production et fonction de production	16
1.4.3 Les types d'investissement	19
1.4.4 Critères du choix d'investissement	20
1.5 Coûts des capitaux	21
1.5.1 Coûts des capitaux propres	22
1.5.2 Coût de la dette	22
1.6 Gestion de la trésorerie des entreprises	23
1.6.1 La trésorerie	23
1.6.2 Gestion de trésorerie	23
1.6.3 Trésorerie et équilibre financier de la firme	25
1.6.4 La prévision des flux de trésorerie	28
1.6.5 Le placement des excédents de trésorerie	29

2	Contrôle optimal d'un système dynamique	31
2.1	Formulation mathématique d'un problème de contrôle	32
2.1.1	Boucle ouverte/Boucle fermée	32
2.1.2	Le but de la commande	33
2.1.3	Classe des commandes admissibles	33
2.1.4	Critère de qualité	34
2.2	Contrôlabilité	35
2.2.1	Contrôlabilité des systèmes linéaires	36
2.2.2	Contrôlabilité des systèmes continus	38
2.3	Problème de contrôle optimal	38
2.3.1	Principe du maximum de Pontriaguine	39
3	Modèles de contrôle optimale en finance d'entreprise	42
3.1	Modèle dynamique de la firme	42
3.2	Modèle de gestion de trésorerie	45
3.2.1	Description du modèle	45
3.2.2	Solution du modèle de gestion de trésorerie	47
	Conclusion Générale	51
	Table des figures	52
	Bibliographie	52

Introduction Générale

La gestion financière regroupe l'ensemble des activités d'une organisation qui visent à planifier et à contrôler l'utilisation des liquidités (argent) et des avoirs (biens) qui sont possédés par l'entité pour réaliser sa stratégie. La gestion financière est donc un outil de gestion prévisionnel, elle est nécessaire et indispensable au pilotage de l'entreprise. La fonction financière d'une entreprise a le rôle d'agir et d'adapter les ressources financières aux besoins, de respecter les contraintes, mais aussi de rechercher la concordance entre la fonction objectif de l'entreprise et celle des actionnaires et des prêteurs.

La finance d'entreprise inclut l'ensemble des décisions des entreprise. En matière de prise de décision, il n'y a qu'un seul objectif en finance d'entreprise : maximiser la valeur de l'entreprise. Cette dernière détermine non seulement par la façon dont elle gère les actifs, mais aussi par la façon dont elle traite le problème des investissements et des nouveaux actifs.

Ce mémoire a pour objet l'étude des modèles de contrôle optimal qui décrivent les différents problèmes posés au niveau d'une entreprise, et de résoudre ensuite ces modèles en appliquant une méthode de contrôle. La théorie du contrôle optimale permet de déterminer la commande d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance sur un domaine délimité par des contraintes.

Ce mémoire est réparti sur une introduction générale, et trois chapitres, une conclusion, et une bibliographie.

Dans le premier chapitre, on présente brièvement les différentes notions de la finance d'entreprise, où nous décrivons en première lieu, les cycles d'opération dans l'entreprise, la fonction objectif de l'entreprise. Par la suite, nous exposons les décisions de financement et d'investissement, finalement, nous présentons la gestion de la trésorerie des entreprises.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la théorie de contrôle optimal, dont on s'intéresse aux fondements théorique du contrôle optimal, ainsi que les conditions

d'optimalités.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation et à la résolution de quelques modèles de contrôle optimale en économie financière, telque : le modèle de firme qui discute les décisions de financement et d'investissement, afin de maximiser la valeur de l'entreprise ; le modèle de gestion optimale de la trésorerie, dont on cherche à investir les réserves de liquidités dans des actifs pour maximiser la valeur de ces réserves à l'instant final.

Chapitre 1

Gestion financière d'entreprise

Introduction

La finance d'entreprise s'intéresse à toutes les décisions et opérations qui affectent la finance de l'entreprise. Son objet essentiel est l'analyse et la maximisation de la valeur de la firme. Les entreprises doivent s'assurer de disposer des moyens financiers nécessaires à leur fonctionnement et à leur développement, rentabiliser au mieux ces moyens.

Ce chapitre présente la gestion financière de l'entreprise. Après la présentation de différents cycles d'opération dans l'entreprise et l'objectif de la finance d'entreprise, nous abordons la décision de financement et de choix d'investissement. Par la suite on termine, ce chapitre, par la gestion de trésorerie d'une entreprise.

1.1 Les cycles d'opérations dans l'entreprise

L'entreprise est une structure humaine organisée visant à mobiliser des ressources pour produire des biens et/ou des services.

L'activité d'une entreprise est rythmée par les opérations effectuées que l'on peut classer selon trois catégories : les opérations d'exploitation, d'investissement et de financement.

1.1.1 Le cycle d'exploitation

Le cycle d'exploitation désigne l'ensemble des opérations liées à l'activité courante de l'entreprise (de l'achat des matières à l'encaissement des ventes).

Le cycle d'exploitation comprend donc toutes les opérations relatives à la production et à la vente des produits ou services de l'entreprise.

Le schéma ci-dessous reproduit le cycle d'exploitation d'une entreprise industrielle :

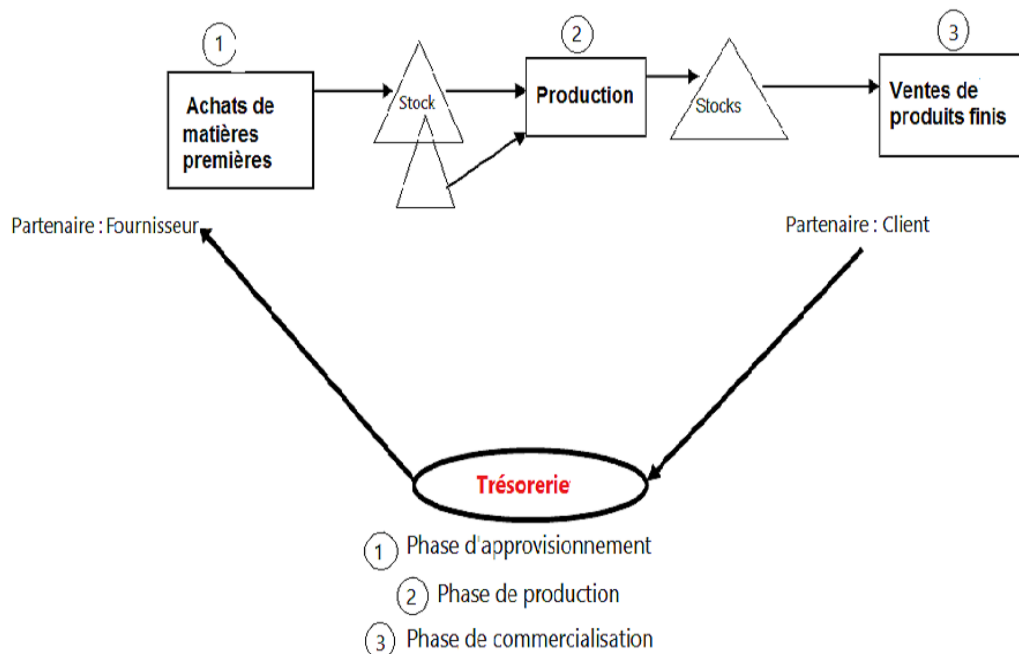


Figure 1.1. Le cycle d'exploitation d'une entreprise.

Ce schéma met en évidence les trois phases du cycle d'exploitation qu'il débute avec la livraison des fournisseurs et se termine avec le règlement des clients :

◆ **La phase d'approvisionnement** : achats et stockage de matières premières. Cette phase commence par un décaissement.

◆ **La phase de production** : fabrication des produits, stockage des produits finis.

◆ **La phase de commercialisation** : vente des produits finis et services. Cette phase est terminée par l'encaissement.

La différence entre les encaissements (recettes) et les décaissements (dépenses) générés par les opérations d'exploitation est appelée l'excédent de trésorerie d'exploitation (**ETE**).

1.1.2 Le cycle d'investissement

Le cycle d'investissement est le processus qui caractérise l'activité économique de l'entreprise et concourt à la modification du périmètre de l'entreprise, de son appareil productif et de sa stratégie. Les investissements comprennent les investissements de

capacité et les investissements de productivité, qu'ils prennent la forme d'acquisitions ou la cession d'immobilisations corporelles (machines, terrains, bâtiments...) ou incorporelles (dépenses de R&D capitalisées, brevets, licences...). Ce calcul doit être effectué pour chaque période, l'investissement n'étant pas obligatoirement concentré sur une année ni même étalé uniformément sur la période. Ce cycle est long (plusieurs années) et il couvre plusieurs cycles d'exploitation successifs et dépend de l'usure (amortissement) des biens investis.

En résumé les investissements corporels, incorporels et financiers sont complémentaires. Ils représentent les moyens de mise en oeuvre de la stratégie de l'entreprise dont ils constituent les éléments du développement futur (obtenir des encaissements dans le futur ou de baisser les coûts).

1.1.3 Le cycle de financement

Les fonds tirés de l'exploitation sont souvent insuffisants pour financer les activités d'investissement des entreprises. Celles-ci ont alors recours à cycle de financement.

Le cycle de financement est un processus regroupant l'ensemble des opérations financières qui permettent à l'entreprise de disposer des ressources nécessaires à son activité . Elles concernent les opérations d'endettement et de remboursement des emprunts, mais également les opérations sur fonds propres (augmentations de capital, distribution de dividendes).

Ce cycle est la contrepartie des cycles d'exploitation et d'investissement puisqu'il consiste à trouver des capitaux permettant à la fois de financer le court et le long terme.

L'un des objectifs de la gestion financière est d'optimiser la structure des décalages de flux monétaires pour permettre à l'entreprise de disposer des ressources suffisantes à son activité et à son développement.

Les trois principaux cycles ne sont pas totalement indépendants. Les différents flux doivent être considérés comme concourant tous à l'atteinte des objectifs de l'entreprise puisque c'est, par exemple, le niveau de l'excédent de trésorerie d'exploitation qui déterminera les besoins de l'entreprise en matière de flux de financement. De la même manière, les flux d'investissement ont pour but d'améliorer le cycle d'exploitation.

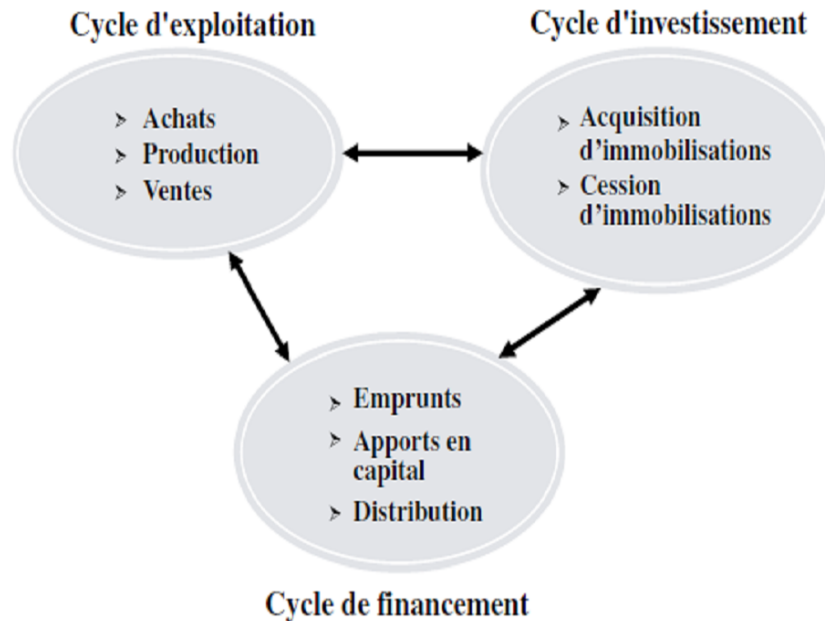


Figure 1.2. Les cycles d'opération de l'entreprise.

1.2 La fonction financière de l'entreprise

La fonction financière peut être définie comme le point de contact entre les flux de dépenses et les flux de recettes. Elle est celle qui est chargée d'analyser la situation et le fonctionnement de l'entreprise, de gérer les flux financiers liés à son activité, et de préparer et exécuter les décisions financières en matière de choix entre la détention des différents types de biens. En matière de gestion des ressources de l'entreprise, la fonction financière privilège trois variables : la solvabilité, la rentabilité et le risque.

Ainsi, la fonction financière a pour mission de veiller à la disponibilité des ressources financières nécessaires au fonctionnement de l'entreprise, à les développer et à les contrôler dans un souci d'efficience.

1.2.1 Les variables financières

La solvabilité La solvabilité traduit l'aptitude de l'entreprise à faire face à ces engagements en cas de liquidation, c'est-à-dire d'arrêt de l'exploitation et de mise en vente des

actifs.

Une entreprise peut donc être considérée comme insolvable dès lors que ses capitaux propres sont négatifs. Elle doit alors plus qu'elle ne possède. Mais sa liquidité à court terme peut être suffisante pour lui permettre de poursuivre quelque temps son activité, voire se rétablir.

La solvabilité dépend :

◆ De la valeur liquidative des actifs,

◆ De l'importance des dettes.

La rentabilité

La rentabilité est la capacité de l'entreprise à maintenir et à rémunérer les capitaux mis à sa disposition de façon permanente la principale contrainte étant la confiance des partenaires (prêteurs, actionnaires, clients, fournisseur). En effet, si la confiance baisse le niveau d'engagement s'en ressent et l'entreprise peut alors être conduite à déposer le bilan. Toute action économique a pour objectif d'obtenir des résultats à partir des moyens mis en oeuvre par l'entreprise. Une action est jugée rentable lorsque les résultats réalisés sont supérieurs aux moyens, c'est-à-dire s'il y a création d'un surplus monétaire.

Un investissement au sein de l'entreprise est rentable lorsqu'il dégage un flux de revenu. Ce rapport entre flux dégagé par les investissements et flux de revenu permet de mesurer la rentabilité. Cette notion ne doit pas être confondue avec la profitabilité, qui permet de mesurer le rapport entre chiffre d'affaires et revenu dégagé.

La rentabilité du capital d'exploitation, se détermine par le rapport entre le résultat d'exploitation et le capital d'exploitation ou, plus précisément, le capital économique. Il s'agit d'identifier clairement le montant des ressources dégagées par l'entreprise à travers son activité économique.

Le risque

En finance, le risque se réfère à la probabilité de recevoir un revenu qui est différent du revenu que nous avons espéré. Donc le risque inclut non seulement les mauvais résultats, c'est-à-dire des revenus inférieurs aux résultats anticipés, mais aussi les bons résultats, c'est-à-dire des revenus supérieurs aux résultats anticipés. Nous nous référons donc au premier comme étant le risque de perte et au second comme étant le risque de gain, mais nous considérons les deux quand nous mesurons le risque.

La notion de risque est associée à celle de danger ou d'inconvénient futur dont on n'est pas certain de l'occurrence, mais seulement de la probabilité de leur survenue.

1.2.2 Le choix d'objectif de finance d'entreprise

En matière de prise de décision, l'objectif en finance d'entreprise est généralement, de maximiser la valeur de l'entreprise. Pour atteindre cet objectif, trois séries de principes financiers doivent être respectés ; principe d'investissement, de financement et politique de dividende.

L'objectif de maximiser la valeur de l'entreprise

Si l'objectif choisi dans l'établissement de la structure de financement de l'entreprise est la maximisation de la valeur de l'entreprise, alors qu'est ce qui détermine la valeur de l'entreprise ? Dans un premier temps, on peut dire que la valeur d'une entreprise est ce qu'on est prêt à payer pour l'acquérir. Les comptables utilisent souvent cette approche de la valeur et ils l'appellent valeur comptable.

Nous déterminerons la valeur de l'entreprise non seulement par la façon dont elle gère les actifs, mais aussi par la façon dont elle traite le problème des investissements et des nouveaux actifs.

L'objectif de maximiser les cours des actions

Le cours de l'action est la vraie mesure de la richesse des actionnaires, puisque les actionnaires peuvent vendre leur action et en recevoir le prix, au cours du jour, immédiatement. Pour ceci les dirigeants de l'entreprise ont seulement besoin de se concentrer sur l'objectif de maximiser le prix des actions. Mais cette vision simpliste de penser peut engendrer des dommages pour les autres secteurs de l'entreprise (prêteurs, employés, milieu social...).

L'objectif de maximiser les profits

Certaines entreprises ont des objectifs qui portent plus sur la rentabilité que sur la valeur. Leur raisonnement est basé sur le fait que les profits peuvent être mesurés plus facilement et que les profits plus élevés se traduisent en valeur plus élevée à long terme.

L'objectif du bien être social

Centaines entreprises, spécialement celles du secteur public, ont des objectifs qui recherchent le bien être social. A titre d'exemple, une entreprise visant à maximiser l'emploi

qu'elle fournit dans la région où elle opère, prendra des décisions dans ce sens, peut se trouver face à des pertes de rentabilité.

1.2.3 Le circuit financier

La meilleure façon d'aborder la finance est sans doute celle qui consiste à observer les problèmes financiers qui touchent l'entreprise. Nous les avons résumés sous forme d'un circuit dans le schéma ci-dessous. La partie supérieure du schéma correspond à l'utilisation des capitaux par l'entreprise. La partie inférieure traduit quant à elle la discipline du coût et du revenu de ces mêmes capitaux.

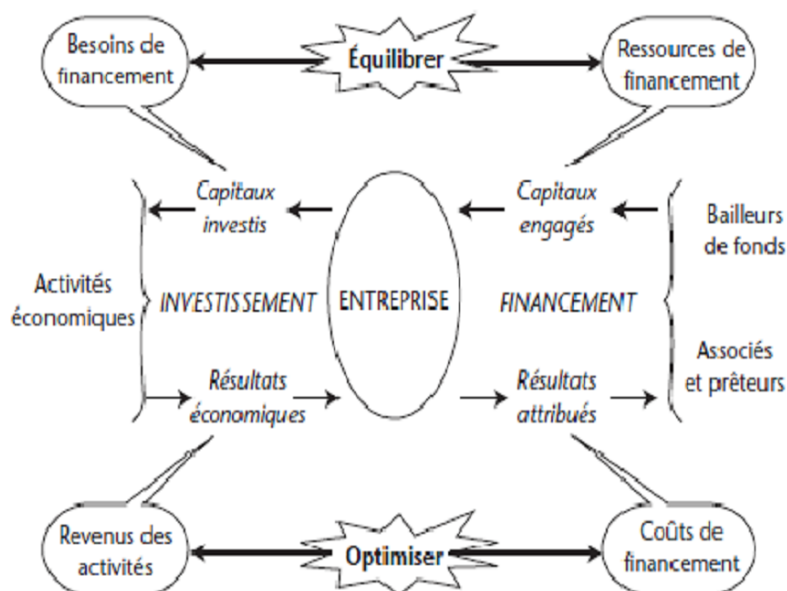


Figure 1.3. Le circuit financier.

Pour créer une entreprise, il faut le plus souvent disposer de capitaux importants pour financer les investissements et les activités à développer. Pour faire face à ces besoins de financement, l'entreprise doit se procurer des capitaux auprès de bailleurs de fonds qui acceptent de mettre des ressources à sa disposition pendant un certain temps en échange d'une rémunération.

La première problématique financière est celle de l'équilibre qui s'instaure entre ses besoins et ses ressources. Il a un aspect quantitatif puisqu'il est obligatoire que les res-

sources soient supérieures aux besoins. Il a un aspect qualitatif du fait que les ressources doivent présenter un degré de stabilité comparable à celui des besoins. Il a également un aspect structurel en ce sens que les ressources doivent être proportionnées entre elles et que les besoins doivent être adaptés au niveau de l'activité.

Les apporteurs de capitaux, qu'ils aient choisi d'intervenir comme associés ou comme prêteurs, attendent une juste rémunération de leur placement et de leur risque. Cela constitue une contrainte forte pour l'entreprise qui doit satisfaire leur attente en faisant face à ce qu'il est convenu de nommer le coût du capital. Pour cela, l'entreprise n'a pas d'autre choix que de dégager de ses activités un excédent de revenu économique sur ses coûts d'exploitation.

La seconde problématique financière est celle de l'optimisation qui se mesure par la relation qui s'instaure entre les revenus économiques et le coût moyen du capital. Si le revenu économique est supérieur ou égal au coût du capital, la satisfaction des apporteurs de capitaux est acquise et la pérennité de la firme est garantie. Mieux, cette situation caractérise une certaine création de valeur au profit des associés dont les droits dans la firme se valorisent sur le marché financier. Le cas inverse conduit à une diminution de la richesse des associés et à une destruction de valeur pouvant déboucher sur une situation de crise.

1.3 La décision de financement

1.3.1 Principales sources de financement

Financement par capitaux propres

Les capitaux propres sont composés des capitaux apportés à la création de la société par les actionnaires, lors d'augmentations de capital, ainsi que des capitaux laissés par les actionnaires à disposition de la société sous forme de bénéfices mis en réserve et donc non distribués en dividendes.

D'un point de vue comptable, Les capitaux propres regroupent les principaux éléments suivants :

- L'autofinancement
- Le capital social et les primes, les subventions, et les émissions...

L'action et le capital social

Le capital des sociétés est généralement constitué d'action classiques, mais il peut comprendre des actions à dividende spéciaux et des certificats d'investissement.

L'action est un titre financier dont le remboursement n'est pas prévu (la "sortie" ne peut se faire que par cession ou liquidation) et dont les flux de revenus sont incertains. En contre partie, l'actionnaire participe au contrôle de l'entreprise par le droit de vote attaché à l'action.

Il s'agit ici du montant comptable des capitaux propres divisé par le nombre d'actions. C'est l'estimation comptable de la valeur d'une action. A priori directement comparables à la valeur financière, ils résultent d'une logique profondément différente. Les capitaux propres par action sont en effet le résultat des politiques menées jusqu'à la date de l'analyse et correspondent au montant investi par les actionnaires (augmentation de capitale et bénéfices nets réinvestis) dans l'entreprise.

L'actionnaires à le droit de participer aux décisions de la société. Son pouvoir est fonction de sa participation dans le capitale de la société.

L'autofinancement

L'autofinancement est défini comme le surplus monétaire que l'entreprise tire de son activité d'exploitation et qui reste à sa disposition de façon plus ou durable.

L'autofinancement représente l'épargne interne dégagée par l'activité de l'entreprise et consacrée au financement de ses investissements sous différentes formes (investissements de remplacement ou de maintien et investissements de croissance) ou à l'enrichissement de ses fonds propres. Les prévisions de capacités annuelles l'autofinancement sont issues de la prévision des excédents bruts d'exploitation.

Financement par dettes

L'endettement est une notion globale pour déterminer la nature de l'ensemble des moyens de financement octroyés par les prêteurs. Généralement, on trouve :

- Dettes à long et moyen terme : sont celles dont l'échéance de remboursement dépasse 1an ;
- Dette à court terme : sont toutes les dettes à rembourser dans l'exercice à venir.

Financement par dettes à long terme

Il s'agit de dettes conclues avec des prêteurs dans une optique de long terme même si, avec le temps, une fraction de ces ressources va être amortie. l'objectif de l'entreprise est de disposer d'une ressource durable.

On y retrouve tous les postes "d'emprunts" qui induisent l'intervention d'un intermédiaire financier (banque ou établissement financier) ou d'un emprunt direct sur les marchés financiers (obligations).

Globalement, on distingue trois grandes catégories. Les dettes bancaires, les emprunts auprès du public (obligation) et le crédit-bail (leasing).

- **Les emprunts bancaires** : Les emprunts bancaires contractés auprès d'un prêteur unique s'appellent des emprunts indivis, qui est une avance de fonds ou un engagement d'avancer des fonds accordés avec ou sans garantie à un débiteur qui est tenu de le rembourser dans un délai fixe (généralement remboursables par annuités constantes) et déterminé à l'avance ainsi que les frais et les intérêts payables.

Donc, les emprunts auprès des établissements de crédit se différencient par les durées, les modalités de remboursement, les taux d'intérêt, les garanties, les conditions de remboursement.

- **Les emprunts obligataires** : Il se fait par appel public à l'épargne. Ainsi, l'entreprise n'est pas financée par un seul prêteur mais par l'ensemble des investisseurs qui ont acheté les obligations émises. Toutefois, seules les sociétés de capitaux peuvent émettre des obligations.

L'obligation est un titre de créance qui se caractérise par :

- Une valeur nominale, c'est la pour laquelle est calculée l'intérêt appelé coupon ;
- Un prix d'émission, c'est le prix auquel l'obligataire (le prêteur) devra payer le titre ou le prix pour acheter le titre ;
- Un taux d'intérêt nominal qui est généralement fixe et qui permet de déterminer le montant des coupons annuels versés aux obligations ;
- Un prix de remboursement, c'est la somme qui sera remboursée à l'obligataire.

Le titre que détient un obligataire porte les taux d'intérêt peuvent être fixes ou variables. Les taux variables sont souvent définis par référence au taux observé sur le marché financier ou sur le marché monétaire. Il existe des obligations à coupon unique, l'intérêt est versé en une seule fois lors du remboursement des obligations et des obligations à coupon zéro, la prime de remboursement est alors élevée.

- **Crédit bail (leasing)** : Le crédit bail consiste à louer aux entreprises des biens mobiliers et immobiliers à usage professionnel, spécialement achetés en vue de la location par les sociétés de crédit bail qui en demeurent propriétaires. A l'échéance, le locataire a la possibilité, moyennant un prix convenu dans le contrat et baptisé valeur résiduelle de racheter le bien. C'est un contrat de location avec option d'achat.

Le contrat prévoit généralement une période de location égale à la durée d'amortissement fiscal du bien, au cours de laquelle le contrat ne peut pas être résilié, et une clause dite "de fin de contrat" qui comporte plusieurs options au choix du locataire.

L'entreprise peut restituer le bien, ou l'acquérir moyennant un prix fixé dans le contrat, ou encore renouveler de contrat. Le loyer payé ou plusieurs versements annuels comprend la charge d'amortissement, le coût des capitaux immobilisés et le prix des services fournis par la société de crédit bail.

Le cession bail ou **lease back** permet à une entreprise d'obtenir des liquidités tout en continuant à se servir des biens. L'opération consiste à vendre des biens immobiliers ou d'équipement à une société de crédit bail qui les loue à l'entreprise moyennant un loyer. Des clauses de rachat progressives ou en fin de contrat sont généralement prévues.

Le crédit-bail s'analysant comme l'un des moyens de financement des projets de l'entreprise, il conviendra de le retraiter tant au niveau du bilan qu'à celui du compte de résultat.

Financement par des dettes à court terme

Une dette à court terme correspond à une somme d'argent empruntée à court terme (souvent inférieure à 1 an) par un agent économique (particuliers, entreprises, Etats, . . .) et qui reste due au créancier prêteur.

Les moyens de financement à court terme concernent la partie des besoins de financement d'exploitation qui n'est pas couverte par le fonds de roulement, c'est-à-dire par des ressources stables : destinées à financer les besoins habituels de l'exploitation ou des besoins plus momentanés liés à une activité précise (stockage de matières premières, industries saisonnières, campagne de production, etc.), l'entreprise dispose de plusieurs sources de fonds dont les plus importantes sont :

- **Les dettes fournisseurs** : Il s'agit de l'octroi de délais de paiement. Les délais de règlement accordés par les fournisseurs constituent une forme de crédit inter-entreprises qui permet le financement des stocks immobilisés et d'une partie des délais de paiement accordés aux clients.

- **L'affacturage** : C'est un procédé de gestion commerciale et de recouvrement de créances commerciales. Il donne lieu à la conclusion d'un contrat d'affacturage. Le facteur ou société d'affacturage assure la gestion complète des comptes clients : suivi des créances, recouvrement, relance des mauvais payeurs.

Le facteur peut également acheter ferme les créances de l'entreprise. Dans ce cas, l'affacturage n'est pas seulement un moyen de recouvrement mais aussi un moyen de crédit.

- **Les facilités de caisse** : Les facilités de caisse sont des crédits de trésorerie qui ont pour objet de faire face aux difficultés de trésorerie de court échéance (règlement des salariés en fin de mois par exemple).

- **Le crédit relais** : Il permet à une entreprise d'obtenir des fonds dans l'attente d'encaissements de trésorerie précis tels qu'une émission prévue d'actions ou d'obligations ou la vente d'un actif.

- **Les crédit de campagne** : Ces crédit sont sollicités par les entreprises à activité saisonnière qui se trouvent confrontées aux problèmes de décalage dans la temps entre leurs dépenses et leurs recettes.

- **Le découvert bancaire** : C'est un crédit à court terme, accordé par la banque à l'entreprise. Ce crédit permet à l'entreprise de dépasser les disponibilités de son compte jusqu' à un montant déterminé et pendant une durée finie.

1.3.2 Le choix des sources de financement

Parmi les différentes sources de financement de l'entreprise, l'équilibre financier de l'entreprise représente une contrainte forte à prendre en considération pour le choix du mode de financement .

Plusieurs règles peuvent alors s'appliquer .

En ce qui concerne la règle de l'endettement maximum implique que le montant des dettes financières à moyen et à long terme n'excède pas le montant des capitaux propres ;

La règle de la capacité de remboursement indique que le montant de l'endettement financier ne doit pas dépasser 3 ou 4 fois la capacité d'autofinancement annuelle

La règle du minimum d'autofinancement implique que l'entreprise soit capable de financer une partie (généralement 30%) des investissements pour lesquels elle sollicite des crédits. En effet, l'entreprise ne trouvera pas, généralement, un crédit pour la totalité du montant de l'investissement. Alors elle devra trouver un financement propre complémentaire ;

La règle de la maximisation de la rentabilité financière se traduit par la maximisation de la richesse des actionnaires. Ceci revient à maximiser le rapport entre la rentabilité nette et les capitaux propres.

1.4 Décision d'investissement

De toutes les décisions à long terme prises par l'entreprise, la décision d'investissement est certainement la plus importante et essentielle à la pérennité et à la croissance d'une entreprise. Elle doit faire l'objet d'une analyse préalable, exhaustive et rigoureuse, car c'est une décision de nature stratégique qui engage l'avenir de l'entreprise. Une mauvaise orientation peut condamner la survie de la société. En effet, l'investissement est un choix irréversible qui nécessite des fonds substantiels. C'est pourquoi, des outils d'aide à la décision basés sur l'appl l'application de techniques quantitatives sont proposés afin de permettre une meilleure évaluation de la décision d'investissement.

La décision d'investissement est une décision complexe parce qu'elle est prise à partir d'une réflexion anticipant l'évolution économique générale et celle de l'entreprise en particulier, compte tenu des contraintes financières.

Une bonne règle de décision d'investissement maintient un bon équilibre entre flexibilité et logique, conduit à la maximisation de la valeur d l'entreprise et s'applique à tous les types de projets.

1.4.1 Les déterminants de l'investissement

On distingue :

- La demande anticipée

Lorsque l'entreprise anticipe une augmentation durable de la consommation de ses produits et que ses propres capacités de production sont saturées, elle sera conduite à investir ;

- La rentabilité

la rentabilité est le rapport entre l'accroissement de richesse(le résultat) et les capitaux investis, elle permet à un agent économique d'apprécier si le capital investi procure les ressources nécessaires à la rémunération et au remboursement du capital utilisé ;

- La situation financière de l'entreprise

Si l'entreprise est déjà fortement endettée, elle ne recherchera pas à augmenter son passif pour financer de nouveaux investissements. Au contraire, elle utilisera l'augmentation de capitaux pour alléger ses dettes. A l'inverse, une entreprise disposant de fonds propres ou cash flow importants, sera incitée à réaliser de nouveaux investissements ;

- Le coût des facteurs de production

Si le coût du travail augmente, l'entreprise sera incitée à recourir à l'investissement dans les facteurs de production pour augmenter sa productivité ;

- Taux d'utilisation des capacités productives

Une sous utilisation des machines ne favorisera pas l'investissement de l'entreprise. En revanche, si les machines fonctionnent à plein régime, l'entreprise sera incitée à investir pour répondre à toute augmentation de la demande.

1.4.2 Facteurs de production et fonction de production

Facteurs de production

Les facteurs de production sont les moyens mis en œuvre par une organisation (entreprise, administration...) pour produire et commercialiser sur le marché des biens et des services. Ils ont pour objectif la satisfaction des besoins de l'homme.

On distingue habituellement deux facteurs principaux : le travail et le capital :

- Le travail

Est une activité humaine rémunérée qui donne lieu à une contrepartie en monnaie ou en nature.

L'entreprise va devoir recruter de la main-d'œuvre pour pouvoir produire. Le travail peut être qualifié ou non-qualifié, d'exécution, de conception ou de direction. Il y a différents niveaux de hiérarchie mais aussi de responsabilités.

La rémunération du facteur travail est essentiellement sous forme de salaire auquel il faudra rajouter les cotisations sociales ce qui formera le coût salarial pour l'entreprise.

- Le capital

Au sens financier, le capital désigne les fonds propres d'une entreprise (somme d'argent que les propriétaires lui apportent à son démarrage, puis pour lui permettre de se développer).

Au sens technique, le capital désigne l'ensemble des moyens de production, c'est-à-dire les moyens matériels (terrains, bâtiments, machines, matières premières) et immatériels (brevets, logiciels).

Le capital technique comprend le capital fixe (détenu pendant plus d'un an dans l'entreprise) et le capital circulant (moyens de production détruits au cours du processus de production).

Les objectifs du processus productif

Dans une économie de marché, l'objectif primordial de l'entreprise est de réaliser un profit, c'est ce qui lui permettra de poursuivre son activité en investissant en fonction de l'évolution des besoins des consommateurs et du progrès technique.

$\text{Profit} = \text{CA} - \text{coût de production}$,
où CA = chiffre d'affaires, c'est-à-dire montant des ventes.

Dans ce but, le chef d'entreprise recherche en permanence la meilleure combinaison des facteurs de production, capital-travail : compte tenu du coût du facteur travail dans les pays à forte protection sociale, les entrepreneurs substituent autant que possible le capital au travail.

Le deuxième objectif de l'entreprise est de réussir à affronter avec succès la concurrence : l'entreprise détermine son prix de vente et la qualité de son produit en fonction du prix et de la qualité des produits comparables vendus sur le marché.

Elle est donc dépendante de plusieurs facteurs : le coût et l'organisation du travail, le coût du capital (l'entreprise emprunte sur les marchés monétaire et financier, émet des actions nouvelles), la fiscalité nationale, l'évolution de la recherche, la conjoncture.

Fonction de production

On appelle fonction de production la relation technique qui existe entre différentes quantités utilisées de facteurs de production et la quantité maximale du bien qui peut être produite. On distingue le plus souvent deux facteurs de production le travail, désigné par la lettre L , et le capital représenté par la lettre K . Le capital comprend tous les biens durables (outils, machines, bâtiments, etc.) utilisés par le producteur pour produire d'autres biens. La fonction de production d'un bien Q s'écrit alors :

$$Q = f(K, L),$$

où Q désigne la quantité d'output produite et K et L désignent les quantités d'inputs utilisés.

La fonction de production est définie pour des valeurs non négatives des inputs et de l'output.

En effet, pour produire, l'entreprise doit payer les facteurs de production qu'elle utilise.

Elle va donc subir un coût qui s'exprime mathématiquement comme la somme des rémunérations de chaque facteur.

Si le travail et le capital sont les seuls facteurs variables, et si on note w le salaire versé pour chaque unité de travail utilisée et r le taux de rémunération du capital, alors le coût de production (ou dépense engagée par l'entreprise) est donné par la formule :

$$C(K, L) = wL + rK + f,$$

où f représente la rémunération de l'ensemble des facteurs fixes de l'entreprise.

Le profit étant défini comme la différence entre le chiffre d'affaires réalisé et les coûts, il s'écrit mathématiquement comme suit :

$$\pi(K, L) = pf(K, L) - wL - rK - f,$$

où p représente le prix du bien ou du service produit.

De manière générale, une fonction de production s'exprime sous la forme :

$$Q = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

où Q est la quantité produite et $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les facteurs de production.

- Une fonction de production additive prend la forme :

$$Q = c + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n,$$

où $c, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes déterminées par la technologie. Dans ce cas, on dit que les facteurs sont parfaitement substituables.

- Une fonction de Cobb-Douglas prend la forme :

$$Q = c \cdot K^\alpha \cdot L^\beta; A, \alpha, \beta > 0 \text{ et } \alpha, \beta < 1,$$

où A (défini comme paramètre d'efficacité), α, β sont des paramètres.

- Une fonction de Leontieff prend la forme :

$$Q = \min(a_1 \cdot x_1, a_2 \cdot x_2, \dots, a_n \cdot x_n).$$

Les facteurs de production sont complémentaires.

- La fonction de Domar, elle prend en compte qu'un seul facteur de production (le capital K), et elle s'écrit comme suit :

$$Q = \frac{K}{v},$$

où v est le coefficient de capital, qui donne la quantité de capital nécessaire pour produire une unité de biens et services.

1.4.3 Les types d'investissement

L'investissement peut se représenter comme le comportement du producteur visant à fixer le niveau de facteurs de production nécessaires pour assurer un certain niveau de production. On distingue ainsi trois types d'investissements différents :

L'investissement de remplacement : C'est l'acquisition de biens de production dans le but de faire face à l'usure physique et à l'obsolescence des capitaux amortis.

L'investissement de capacité : Il consiste à augmenter les capacités à produire d'une entreprise ainsi que les quantités produites. L'investissement de capacité entraîne une augmentation des emplois dans l'entreprise. Ex : achats de machines supplémentaires (les mêmes que celles déjà possédées) afin de produire plus → création de nouveaux postes pour s'occuper des machines nouvelles.

L'investissement de productivité : il vise à augmenter la productivité. Il réduit les coûts de production mais en gardant les mêmes quantités de biens ou de services produits. Cet investissement a tendance à diminuer le nombre d'emploi dans l'entreprise, les emplois sont substitués par le capital.

1.4.4 Critères du choix d'investissement

Une fois estimés les flux de trésorerie requis par un investissement et ceux que l'on peut espérer retirer de son exploitation, il est nécessaire d'appliquer certains critères ou règles de décision pour déterminer si le projet doit être retenu ou non. Pour qu'un projet soit acceptable, il est nécessaire que son rendement soit au moins égal au coût des capitaux qui serviront à le financer. Nous utilisons couramment les critères suivants : la valeur actuelle nette (VAN) qui mesure la création de la valeur engendrée par l'investissement et le taux de rentabilité interne (TRI) qui donne le taux de rentabilité actuariel de l'investissement.

Nous exposerons leurs avantages et leurs lacunes, et avant de ce faire, nous abordons tout d'abord la notion de capitalisation et d'actualisation.

Actualisation et capitalisation

Capitaliser une somme, c'est renoncer à la consommer immédiatement et la projeter en une valeur future supérieure compte tenu du taux d'intérêt auquel elle est placée. La capitalisation est le processus qui passe de la valeur actuelle (VA) à la valeur future (VF).

Actualiser une somme future, c'est déterminer sa valeur d'aujourd'hui, que l'on appelle valeur actuelle, compte tenu de l'exigence de rentabilité de l'investisseur. L'actualisation consiste à calculer la valeur actuelle d'une somme future, permet de rendre comparables des flux qui ne sont pas perçus à la même date.

Actualisation et capitalisation sont les deux faces d'un même phénomène : le prix du temps.

La capitalisation repose sur la technique des intérêts composés :

$$V_n = V_0 \times (1 + t)^n,$$

où V_0 est la valeur initiale du placement, t le taux de placement, n la durée du placement en années. $(1 + t)^n$ est le coefficient de capitalisation.

L'actualisation est l'inverse de la capitalisation :

$$V_0 = \frac{V_n}{(1 + t)^n},$$

et $1/(1 + t)^n$ est le coefficient d'actualisation.

La Valeur Actuelle Nette (VAN)

La valeur actuelle nette d'un projet est la somme des valeurs actualisées des cash-flows (positifs aussi bien que négatifs) qui se produisent pendant la durée de vie du projet, qui est le meilleur critère puisqu'elle mesure la création de valeur engendrée par l'investissement.

En généralisant, on obtient :

$$VAN = \sum_{t=1}^{t=N} \frac{Cash\ flow_t}{(1 + taux)^t} - I,$$

où $Cash\ flow_t$ est le flux attendu de l'investissement pour période t , I est montant l'investissement initial, $taux$ est le taux d'actualisation qui est, généralement, estimé par les coûts de capitaux.

Ainsi, Si la VAN est positive, on a plus de gains que ce qu'on a dépensé alors dans ce cas le projet est rentable ($VAN > 0 \rightarrow$ Acceptation du projet).

Si la VAN est négative, cela signifie que l'investissement n'est pas couvert par les gains donc le projet n'est pas rentable ($VAN < 0 \rightarrow$ rejet du projet).

VAN positive montre que l'entreprise va réussir par le biais du projet d'investissement à :

- récupérer le capital investi ;
- rémunérer les fonds immobilisés à un taux égal au taux d'actualisation.

Critère de Taux Interne de Rentabilité (TIR ou TRI)

Est le taux d'actualisation qui rend la valeur actuelle nette nulle. Il mesure le taux de rentabilité actuariel de l'investissement. Par conséquent, le taux de rentabilité interne (TRI) peut être dérivé de cette équation :

$$VAN = 0 = \sum_{p=1}^{p=N} \frac{FT_p}{(1 + TRI)^p} - I.$$

Si le TRI est plus grand que le taux d'actualisation, le projet est bon ; si le TRI est inférieur au taux d'actualisation, le projet doit être rejeté.

1.5 Coûts des capitaux

Le cout du capital est le taux de rentabilité minimum que doivent dégager les investissements de l'entreprise afin que celle-ci puisse satisfaire à la fois l'exigence de rentabilité des actionnaire (soit le cout des capitaux propres) et l'exigence de rentabilité des créanciers (soit le cout de l'endettement net). Le coût du capital est donc le coût de financement global de l'entreprise. Selon la théorie des marchés en équilibre, et en l'absence de toute distorsion fiscale, ce coût est indépendant de la structure financière de l'entreprise ; il n'existe donc pas de structure financière optimale. À partir de ces informations, on peut calculer le coût moyen de ces ressources financières, aussi appelé «coût moyen pondéré du capital» (CMPC) comme suit :

$$CMPC = r_p \frac{CP}{(CP + D)} + r_d \frac{D}{(CP + D)},$$

où :

CP : fonds propres,

D : fonds de tiers,

r_p : Cout des capitaux propres,

r_d : Cout de la dette.

Le $CMPC$ mesure ce que l'entreprise doit à tous ceux qui ont apporté des capitaux. Pour l'entreprise, c'est une aide au choix du mode de financement ; pour les associés, il apporte une information sur l'opportunité d'investir dans une entreprise ; pour les créanciers, c'est une mesure du risque qu'ils prennent en faisant un crédit à une entreprise.

1.5.1 Coûts des capitaux propres

Le coût des capitaux propres est le taux de rentabilité qui est exigé par les actionnaires de la société à la rémunération qu'ils pourraient obtenir d'un placement présentant le même profil pour le même risque sur le marché.

Le coût des capitaux propres peut aussi se définir comme étant le taux d'actualisation qui permet d'égaliser d'une part la valeur de l'action (représentative des capitaux propres) et, d'autre part, la somme des flux de trésorerie actualisée à ce taux qu'elle procure aux actionnaires, à savoir, les dividendes et le prix espéré de revente future.

Pour mieux comprendre sa logique, présentons l'approche principale d'évaluation du coût des capitaux propres, appelée modèle de Gordon-Shapiro.

La formule proposée par Gordon et Shapiro est la suivante :

$$P_0 = \frac{D}{k - g},$$

avec :

P_0 : valeur théorique de l'action,

D : dividende anticipé de la première période,

k : Taux de rendement attendu par l'actionnaire,

g : Taux de croissance du bénéfice brut par action (BPA).

1.5.2 Coût de la dette

Comptablement, le coût de la dette correspond aux charges financières nettes des produits rapportées au niveau d'endettement net. Financièrement, le coût de la dette représente le taux de rentabilité exigé par les créanciers d'une entreprise pour refinancer

son passif. Il est estimé par la somme du taux de rendement de l'actif sans risque et du spread de financement reflétant le niveau de risque de crédit propre à l'entreprise.

On distingue le coût de la dette brut (avant prise en compte de l'effet fiscal) du coût de la dette net qui intègre les économies fiscales liées à la déductibilité des charges financières.

1.6 Gestion de la trésorerie des entreprises

Toute entreprise doit disposer de ressources suffisantes pour faire face à ses engagements financiers quotidiens (salaires, fournisseurs, charges sociales...).

La trésorerie constituée par le solde de votre compte à la banque ainsi que votre argent disponible en caisse peut être utilisée à cet effet.

La trésorerie peut être positive, elle représente alors des liquidités disponibles. Elle peut aussi être négative, on parle alors de besoin de trésorerie.

1.6.1 La trésorerie

La trésorerie représente l'argent disponible sur le compte bancaire, une fois vos recettes encaissées et vos dépenses payées. Elle peut être excédentaire ou positive : dans ce cas, les recettes dépassent les dépenses et le solde du compte bancaire est créditeur. Il peut alors être utile d'étudier une formule de placement dit de "trésorerie". Elle peut être déficitaire ou négative : dans ce cas, les dépenses dépassent les recettes et le solde du compte bancaire est débiteur. Il peut alors être nécessaire de mener une action afin de revenir en situation créditrice ou d'obtenir un financement court terme de votre partenaire bancaire.

La bonne gestion de la trésorerie permet de contrôler les entrées et sorties d'argent avec pour principal objectif d'optimiser l'équilibre financier de la structure.

1.6.2 Gestion de trésorerie

La gestion de la trésorerie s'attache au traitement des encaissements et décaissements de liquidités.

Une bonne gestion de la trésorerie consiste à assurer la solvabilité de l'entreprise au moindre coût ; cela signifie que l'entreprise doit être en mesure d'honorer ses échéances financières à tout moment, en maintenant une encaisse minimum. Par ailleurs, elle doit chercher à minimiser le coût de crédits de trésorerie auxquels elle peut faire appel, ou au contraire à maximiser le rendement des placements de ses excédents de trésorerie éventuels. La gestion de la trésorerie repose par conséquent sur le couple (Sécurité/Rentabilité).

Pour parer au risque d'illiquidité ou d'insolvabilité, l'entreprise doit maintenir un certain niveau de trésorerie. Dans le même temps, elle doit viser à réduire l'impact négatif de cette trésorerie sur la rentabilité (coût des crédits, frais financiers, etc.) ou au contraire à améliorer la rentabilité des disponibilités oisives en leur assurant de bons placements financiers.

Généralement, les objectifs des trésorier sont les suivants :

- prévoir l'évolution des soldes débiteurs ou créditeurs des comptes de l'entreprise,
- réduire au minimum les fonds dormants,
- assurer le meilleur placement des liquidités,
- financer les besoins au moindre coût.

Et avant tout ça il faut mettre un budget de trésorerie qui a pour but de déterminer les besoins excédents de trésorerie en montant et en durée. Il enregistre toutes les recettes et toutes les dépenses dont l'entreprise prévoit la perception ou l'engagement. Il peut s'agir de dépenses, des recettes liées au processus d'investissement, au processus d'exploitation, ou à la politique de financement de l'entreprise.

Le budget de trésorerie

Le budget de trésorerie donne une prévision des excédents et des déficits de trésorerie, en montant et en durée ; c'est le principal instrument de cette prévisions financières à court terme ; il permet d'établir pour des périodes plus ou moins longues (année, mois, semaine, jour) les prévisions des flux financiers et d'envisager les ajustements nécessaires pour combler les insuffisances ou pour placer les excédents de trésorerie.

Le budget de trésorerie s'appuie sur des données établies avec rigueur. Une distinction est établie entre les recettes et les dépenses liées au processus d'exploitation (vente de marchandises, de produits finis, achat de matières premières, règlement des salaires, etc.) et au processus d'investissement (cession d'immobilisations), ou à la politique de financement de l'entreprise (remboursements d'emprunt, etc.).

Le budget de trésorerie est un tableau de bord prévisionnel de l'offre et de la demande de liquidités de l'entreprise. Il permet au trésorier d'optimiser le résultat financier de la société en mettant en concurrence les différentes banques ainsi que les marchés financiers.

Les budgets flexibles "la prise en compte de l'incertitude" Le budget de trésorerie représente des prévisions d'encaissements et de décaissements qui conduisent à envisager des solutions destinées à l'équilibre, pour assurer une gestion optimale de la trésorerie.

Cependant, le budget de trésorerie constitue l'aboutissement d'autres budgets (ventes, achats, autres charges, ... etc.). Des facteurs aussi bien endogènes (variation de la produc-

tivité, etc.) ou exogènes (évolution de la conjoncture économique ou sectorielle, etc.) peuvent venir perturber les prévisions établies. Si l'entreprise peut agir sur les premiers, par contre, les seconds échappent à son contrôle.

C'est ainsi qu'il est possible d'adopter la méthode des budgets flexibles. Elle consiste à établir des budgets variables en fonction de plusieurs hypothèses, en général au nombre de trois : optimiste (niveau fort), moyenne (niveau vraisemblable) ou pessimiste (niveau bas).

Cette méthode permet d'introduire une certaine souplesse dans les prévisions budgétaires et par conséquent anticipe plusieurs solutions possibles.

Le budget de trésorerie par la méthode des emplois-ressources La méthode consiste à établir des situations mensuelles prévisionnelles, à déterminer le fonds de roulement, le BFR et, par différence, la trésorerie nette prévisionnelle correspondante. Lorsqu'il existe des éléments hors exploitation, on peut déterminer séparément le FR , le BFR et la trésorerie d'exploitation et hors exploitation.

La sommation de la trésorerie d'exploitation et hors exploitation donnera la trésorerie nette.

1.6.3 Trésorerie et équilibre financier de la firme

La trésorerie joue un rôle fondamental dans toute structure économique. Elle réalise l'équilibre financier à court terme entre le fonds de roulement et le besoin en fonds de roulement.

Besoin en fonds de roulement

Le besoin en fonds de roulement (BFR) est un élément essentiel à calculer lorsqu'on crée une entreprise ou lorsqu'on veut la développer, par exemple en lançant de nouveaux produits ou de nouvelles prestations. Ce qu'on appelle BFR correspond aux variations des flux de trésorerie au gré des dépenses et des rentrées d'argent. Au moment du lancement d'une activité, l'entrepreneur est souvent obligé d'engager des dépenses (achat de matières premières, de matériel, fabrication, main d'œuvre, constitution d'un stock), avant d'encaisser les premiers bénéfices de la vente de ses produits ou services. Il est donc important d'estimer le BFR afin d'anticiper le coût de l'activité d'une entreprise.

- Le besoin en fonds de roulement d'exploitation

L'entreprise a besoin de financement qui est lié au décalage naturel qui existe entre les recettes et les dépenses de cycle d'exploitation (achat-production-vente).

Pendant ce laps de temps, l'entreprise doit disposer des capitaux nécessaires pour financer ce cycle d'exploitation : c'est ce que l'on appelle le besoin en fonds de roulement.

Le besoin en fonds de roulement d'exploitation regroupe les emplois et les ressources dits « d'exploitation ».

Les emplois sont constitués par l'ensemble des charges d'exploitation contractées non encore consommées ou vendues (stocks), et par l'ensemble des ventes non encore payées (créances clients).

Les ressources sont constituées par les charges contractées non encore payées (dettes fournisseurs, dettes fiscales et sociales) et par les recettes d'exploitation sur des produits non encore livrés (avances sur commandes).

La différence entre les actifs d'exploitation (emplois) et les passifs d'exploitation (ressources) constitue le besoin en fonds de roulement.

- Le besoin en fonds de roulement hors d'exploitation

Les décalages de trésorerie liés aux opérations hors exploitation (investissements, charges et produits exceptionnels...) forment ce que l'on appelle le besoin en fonds de roulement hors exploitation. De nature conceptuelle pauvre, le besoin en fonds de roulement hors exploitation est difficile à prévoir et à analyser car il est lié à chaque opération, contrairement au besoin en fonds de roulement d'exploitation qui est récurrent. En pratique, le besoin en fonds de roulement hors exploitation permet de classer l'inclassable.

L'équilibre financier

L'entreprise doit maintenir un équilibre entre ses ressources financières et les emplois qu'elle en fait, ainsi qu'un équilibre interne entre les sources de financement utilisées.

Un déséquilibre financier récurrent est coûteux pour l'entreprise. Il révèle, dans certains cas, une faiblesse de la rentabilité, dans d'autres, un défaut d'harmonisation des rythmes d'encaissement et de décaissement. Lorsque la rentabilité des projets est insuffisante, les choix en matière d'investissement sont en cause. La structure de l'outil économique, les processus décisionnels sont à repenser. Lorsque l'harmonisation des degrés de liquidité et d'exigibilité n'est pas assurée, les échéanciers sont en cause et il convient de se conformer à quelques principes de gestion de l'encaisse.

Les investissements ont des effets sur les années à venir. Leur rentabilité est rarement suffisante pour pouvoir les financer en quelques mois. Le financement d'un investissement dans la structure ou dans le cycle d'exploitation dépend donc des flux monétaires engendrés par ceux-ci et de l'utilisation que l'entreprise souhaite en faire. La durée de l'investissement ne fixe pas strictement la durée du financement. Il est plus rigoureux d'affirmer que la liquidité du projet conditionne les échéances liées au financement choisi.

En simplifiant à l'extrême, nous affirmons que l'étude de l'équilibre financier reposant

sur le besoin en fonds de roulement (BFR) et le fonds de roulement (FR) et la trésorerie (T), il permet de porter un jugement sur la trésorerie de la firme, sa politique financière et par conséquent, sur les faits générateurs de risque. En d'autres termes, le fonds de roulement net doit être égal au fonds de roulement normatif pour assurer l'équilibre financier.

Ainsi, la trésorerie se définit comme la différence entre le fonds de roulement et le besoin en fonds de roulement :

$$\text{Trésorerie} = FR - BFR.$$

Si l'entreprise dispose de plusieurs opportunités de financement, les choix effectués seront fonction des coûts associés à chacun d'eux, et des risques liés à leurs modalités. Les critères étudiés seront les taux actuariels, la valeur actuelle nette des fonds propres, le taux interne de rentabilité des fonds propres et les flux monétaires annuels équivalents.

Analyse des situations possibles du BFR

On distingue 3 principaux cas de figure relatifs à la « situation » du Besoin de Fonds de Roulement ; négatif, positif, ou nul.

1) **Si le Besoin de Fonds de Roulement est négatif** : un cas de figure où les ressources d'exploitation de la structure sont supérieures aux emplois d'exploitation. Ce qui implique que la structure n'a pas de besoin d'exploitation à financer, dans la mesure où le passif circulant dépasse les besoins de financement de son actif d'exploitation.

2) **Si le Besoin de Fonds de Roulement est positif** : un cas de figure où les emplois d'exploitation de la structure sont supérieures aux ressources d'exploitation, le solde est positif et il doit être alors financé. Ce qui implique que la structure est obligée de financer ses besoins à court terme. L'entreprise comblera généralement ces besoins par deux principaux moyens :

- En utilisant son excédent de ressources à long terme (fonds de roulement).
- En utilisant ses ressources financières additionnelles à court terme (concours bancaires...).

3) **Si le Besoin de Fonds de Roulement est nul** : un cas de figure où les ressources d'exploitation de la structure sont égales aux emplois d'exploitation. Ce qui implique que la structure n'a pas de besoin d'exploitation à financer, dans la mesure où le passif circulant est suffisant pour financer l'actif circulant.

La gestion du besoin en fonds de roulement

Le besoin en fonds de roulement est un investissement comme un autre et de ce fait il doit être géré. Gérer ne veut pas dire réduire à tout prix. Le *BFR* résulte d'un arbitrage entre liquidité et marge.

Au-delà des gaspillages assez simples à éliminer mais qui nécessitent de la détermination et de la continuité dans l'effort, la réduction du BFR ne peut se faire qu'au détriment du résultat d'exploitation ou au prix d'investissements pour modifier le modèle économique de l'entreprise.

En période de crise, l'entreprise met l'accent sur la réduction du *BFR* afin de générer des liquidités utiles pour se désendetter ou s'autofinancer, l'impact sur la marge est négligé. En période de bonne conjoncture économique, l'entreprise pense plus à la croissance des ventes et des marges qu'au *BFR*.

L'ensemble des techniques et outils de bonne gestion du *BFR* a été présenté.

Le financier d'entreprise ne peut pas mettre en place des mesures de gestion du besoin en fonds de roulement sans une collaboration étroite avec les opérationnels en charge des achats, de la gestion des stocks, de la logistique, de la production, des ventes, des ressources humaines sur lesquels il n'a pas d'autorité hiérarchique. D'autant que souvent, au-delà de la lutte contre les gaspillages, la gestion du *BFR* débouche assez vite sur des décisions stratégiques impliquant la politique commerciale, de production et de logistique de l'entreprise.

1.6.4 La prévision des flux de trésorerie

Les horizons de prévision

Différents budgets correspondent aux différents horizons prévisionnels de l'entreprise. Ils permettent de distinguer le niveau de précision que l'on est en droit d'attendre des anticipations du trésorier.

Les entreprises prévoient les flux en grandes masses pour des périodes lointaines et affinent leurs anticipations lorsque les échéances se rapprochent.

Les prévisions sont affinées sur des périodes allant de 1 à 6 mois, donnant lieu à des budgets de trésorerie glissants le plus souvent mensuels. Ces documents permettent d'actualiser les budgets annuels en s'appuyant sur les encaissements et les décaissements prévus, et non plus sur le compte de résultat prévisionnel.

Une fois les prévisions établies, on pourra apprécier la trésorerie prévisionnelle qui sera soit négative (décaissements > encaissements), soit positive (encaissement > décaissements). L'entreprise devra alors prévoir les ajustements nécessaires.

Dans le premier cas (déficit de trésorerie), il convient d'envisager les actions destinées à combler le déficit et à rétablir l'équilibre (demande de concours bancaires de trésorerie, réajustement des délais de règlement des clients et des délais de paiement des fournisseurs, augmentation de la rotation des stocks, etc).

Dans le second cas (trésorerie abondante), l'entreprise devra envisager soit le placement à court terme des disponibilités oisives ou encore le paiement anticipé de ses dettes, ... etc.

Dans les deux cas, il s'agit d'améliorer indirectement la rentabilité de l'entreprise, soit en minimisant le coût des crédits de trésorerie à solliciter, soit en optimisant l'utilisation de la trésorerie excédentaire.

1.6.5 Le placement des excédents de trésorerie

Excédent de trésorerie

Par définition, l'excédent de trésorerie est le solde ou la différence entre les recettes et les dépenses exploitées par une entreprise active. Il est généralement considéré comme l'un des indicateurs pertinents qui servent à suivre et contrôler la capacité de l'entreprise à procréer des liquidités grâce à son activité d'exploitation au cours d'une période. L'évolution de cet indicateur est positif parce qu'il représente une assurance pour l'entreprise et une prévention des risques de défaillances ou un outil d'autofinancement.

Investissement (placement) des excédents de trésorerie

Les excédents de trésorerie peuvent tout d'abord être utilisés sur des placements financiers, qui constituent une solution largement employée par les entreprises.

Un placement financier permet à l'entreprise de percevoir une rémunération sous forme d'intérêts.

Il existe une multitude de placements financiers possibles, qui se distinguent par leur rémunération et le risque lié au placement. En règle générale, plus un placement financier est risqué, plus il est rémunérateur.

Voici les principaux placements financiers disponibles :

- les dépôts à terme (*DAT*), qui consistent à bloquer pendant une durée des fonds sur un compte spécial rémunéré (la durée et le taux sont connus d'avance),
- les titres de créances négociables, avec les billets de trésorerie et les bons du trésor notamment,
- les placements dans les *SIVAC*, qui consistent à prendre une participation dans une société de portefeuille,
- et les placements dans des fonds communs de placement.

Gestion des excédents de trésorerie Afin de gérer au mieux vos excédents de trésorerie, voici deux conseils :

il faut commencer par établir un budget de trésorerie, qui vous permettra de mesurer à court ou moyen terme la trésorerie minimale dont vous aurez besoin dans le cadre de votre activité. C'est cet éventuel excédent qui pourra être placé (même si certains placements permettent de récupérer immédiatement la trésorerie placée en cas de besoin), ensuite, il convient d'établir l'inventaire des solutions à votre disposition pour placer votre trésorerie, de comparer leur rémunération et leur contrainte (durée du placement minimale, disponibilité des fonds placés...). Une fois que vous avez une idée précise des options à prendre, validez vos choix avec votre expert-comptable.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présentés les opérations d'exploitation, d'investissement et de financement dans une entreprise.

La gestion financière repose sur l'étude des stratégies d'investissement et des politiques de financement. La décision d'investissement est la plus importante à la pérennité et à la croissance d'une entreprise. Une bonne décision d'investissement et de financement prend en compte l'équilibre et l'optimisation de la fonction objectif de l'entreprise.

Chapitre 2

Contrôle optimal d'un système dynamique

Introduction

La théorie du contrôle optimale permet de déterminer la commande d'un système qui minimise (ou maximise) un critère de performance, éventuellement sous des contraintes. Le cas le plus classique (et le plus simple) est celui de contraintes de type inégalité sur la commande, mais on peut aussi envisager des contraintes de même type sur l'état. Cette théorie est une généralisation du calcul des variations. En tant que cette théorie généralise le calcul des variations, elle a également un champ d'application en physique mathématique, économie financière, en automatique.

Un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle(commande). Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc.

Dans ce chapitre, nous étudions le contrôle optimal d'un système dynamique linéaire, nous décrivons, la formulation mathématique d'un problème de contrôle et les différents types de problèmes de contrôle optimal, en suite nous abordons la contrababilité. Finalement, nous exposons le principe du maximum de Pontryagin.

2.1 Formulation mathématique d'un problème de contrôle

On peut décrire le problème de contrôle optimal de la manière suivante :
Considérons le système dynamique explicite :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r.$$

La fonction (ou variable) $x(\cdot)$ est nommée variable d'état. Cette fonction dépend de la variable réelle t et vérifie des relations (souvent différentielles) appelées lois d'état. La variable $u(\cdot)$ qu'on appelle contrôle (commande), elle est soumise à l'hypothèse d'intégrabilité par rapport à t .

f est une application de classe C^1 de $I \times V \times U$ dans $\mathbb{R}^n$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, V ouvert de $\mathbb{R}^n$, U un ouvert de $\mathbb{R}^r$, ($f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$).

Le système à une condition initiale, $x_0 = x(t_0)$, avec $(t_0, x_0) \in I \times V$.

2.1.1 Boucle ouverte/Boucle fermée

Nous allons voir qu'on peut avoir deux types de stratégies pour contrôles (ou commandes) un système dynamique.

a) Stratégie en **boucle ouverte** :

On considère un système donné par son équation d'état et ensemble de contrôles. On cherche un contrôle qui stabilise le système ou un contrôle optimal (ou tout autre type de contrôle) qui ne dépend pas a priori de l'état du système à un moment quelconque. Ce type de stratégie peut se résumer par le schéma suivant :

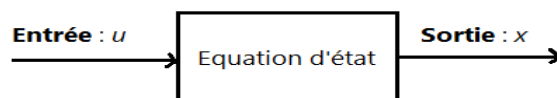


Figure 2.1. Commande en boucle ouverte.

b) Stratégie en **boucle fermée** :

On considère toujours un système donné par son équation d'état et un ensemble de contrôles. On applique le contrôle au système, l'équation d'état retourne une fonction d'état (contrôlée). On introduit alors une **loi de commande** qui permet d'exprimer la fonction de contrôle précisément en fonction de cet état. L'état du système est pris en

compte à chaque instant pour déterminer u en temps réel la commande. Le contrôle est alors appelé contrôle **feedback**. Cette stratégie est schématisée par la figure 2.2.

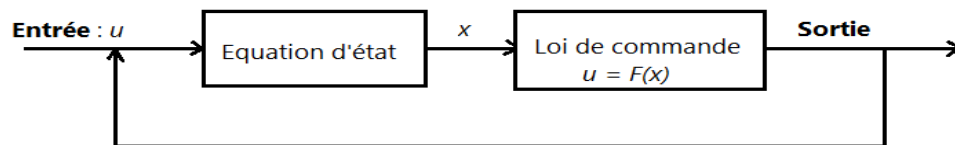


Figure 2.2. Commande en boucle ferme.

Il arrive souvent (nous le soulignerons au moment voulu) qu'une stratégie *a priori* en boucle ouverte donne un contrôle que l'on peut expliciter en fonction de l'état : nous retrouvons alors un contrôle feedback.

2.1.2 Le but de la commande

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet de la position initiale $x_0 = x(t_0)$, ($x_0 \in M_0$) à une autre position $x^* = x(t_f)$, ($x^* \in M_1$) où M_0 est l'ensemble de départ, et M_1 l'ensemble d'arrivée.

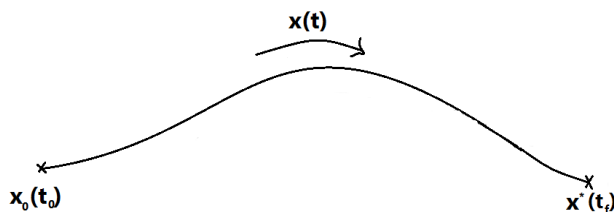


Figure 2.3.

2.1.3 Classe des commandes admissibles

Définition 2.1.1 (Contrôle admissible)

On appelle contrôle admissible toute fonction continue par morceaux $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, à valeur dans U .

U est l'ensemble des commandes admissible qui peut être non bornés, borné ou du type Bang-Bang.

Commande bornée

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les $u_j(t)$ par des constantes. Dans la suite, nous considérons ce type de problème avec $a_j \leq u_j \leq b_j$. Notons que l'on peut remplacer u_j par ν_j en posant $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)\nu_j$ et ainsi ν_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq \nu_j \leq 1$. Donc lorsque U est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1 .

Commande Bang-Bang

Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$, on a $|u_j(t)| = 1$. En d'autres termes, une commande Bang-Bang est une commande qui possède au moins un switch.

2.1.4 Critère de qualité

Le critère de qualité à optimiser, appelé aussi coût ou fonction objectif est, généralement, décrit par la formule :

$$J(x, u) = g(t_f, x^*) + \int_{t_0}^{t_f} k(t, x, u) dt.$$

Cette fonctionnelle comporte deux parties : $g(t, x^*)$ est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final t_f , le second terme intervenant dans la fonction objectif $\int_{t_0}^{t_f} k(t, x, u) dt$ dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, définie par les variables d'état. Cette trajectoire dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u . C'est une fonction d'efficacité de chaque commande sur l'intervalle $T = [t_0, t_f]$.

Différents types de problèmes de contrôle optimal

Par rapport au critère à optimiser, généralement, on distingue trois types de problème de contrôle optimale :

Problème de Mayer-Lagrange (Bolza)

Le problème de Mayer-Lagrange est un problème de contrôle optimal, dont l'objectif à optimiser est le suivant :

$$J(x, u) = g(t_f, x^*) + \int_{t_0}^{t_f} k(t, x, u) dt.$$

Lorsque $g = 0$ dans l'expression de la fonctionnelle J , on parlera d'un **problème de Lagrange** ; lorsque $k = 0$, on parlera d'un **problème de Mayer**.

Proposition 2.1.2 *Considérons le système :*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0, x(t_f) = x^*, u \in U, t \in [t_0, t_f],$$

où f est C^p , $p \geq 1$, et soit $U \subset L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$ le domaine de définition de E_{t_f} , c'est-à-dire l'ensemble des contrôles dont la trajectoire associée est admissible définie sur $[0, t_f]$.

Alors U est un ouvert de $L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$ et E_{t_f} est C^p au sens L^∞ .

De plus, la différentielle (au sens de Fréchet) de E_{t_f} en un point $u \in U$ est donnée par le système linéarisé en u de la manière suivante :

Posons, pour tout $t \in [0, t_f]$,

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t; x_u(t), u(t)), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t; x_u(t), u(t)),$$

Le système de contrôle linéaire

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= A(t)\tilde{x}(t) + B(t)\tilde{u}(t), \\ \tilde{x}(0) &= 0, \end{aligned}$$

est appelé système linéarisé le long de la trajectoire $x_u(\cdot)$.

2.2 Contrôlabilité

Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener (en temps fini) d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit. Pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile.

Pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. La contrôlabilité est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle.

Définition 2.2.1 On appelle trajectoire du système (2.1) toute fonction régulière $t \longrightarrow (x(t), u(t))$ qui satisfait sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ les équation (2.1).

2.2.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires

La formulation mathématique d'un système de contrôle linéaire est la suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x_0, t \in I, \quad (2.1)$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, A, B , et r sont trois applications localement intégrables sur I , à valeurs respectivement dans $M_{n,n}(\mathbb{R})$, $M_{m,n}(\mathbb{R})$, et $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Où $M_{n,n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carré de dimension n , et $M_{m,n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de n ligne et de m colonnes.

L'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeur dans un sous ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$.

Soit $F(\cdot) : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ définie par :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = A(t)F(t) \\ F(t_0) = I_d, \end{cases},$$

où I_d : désigne la matrice identité.

Pour tout contrôle u le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x_0$ admet une unique solution $x(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue donnée par :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_{t_0}^{t_f} F(t)F^{-1}(s)(B(s)u(s) + r(s))ds,$$

pour tout $t \in I$.

Définition 2.2.2 (*Ensemble accessible*)

Considérons le système de contrôle suivant :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t_f > 0$ est défini par :

$$Acc(x_0, t_f) = \{x_u(t_f) \mid u \in L^\infty([0, t_f], \Omega)\},$$

où $x_u(\cdot)$ est la solution du système (2.1) associée au contrôle u .

Autrement dit $Acc(x_0, t_f)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (2.1) au temps t_f .

Définition 2.2.3 (La contrôlabilité)

Le système contrôlé $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est dit contrôlable en temps t_f si $Acc(x_0, t_f) = \mathbb{R}^n$, i.e. pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps t_f .

Proposition 2.2.4 On suppose que $r = 0, x_0 = 0$ et $\Omega = \mathbb{R}^m$. Alors, pour tout $t > 0$, l'ensemble $Acc(0, t)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. De plus, pour tous $0 < t_1 < t_2$, on a $Acc(0, t_1) \subset Acc(0, t_2)$.

Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t),$$

est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t . Dans ce cas, la matrice $F(t) = e^{At}$, et la solution du système associée au contrôle u s'écrit, pour tout $t \in I$:

$$x(t) = e^{At}(x_0 + \int_{t_0}^{t_f} e^{-As}(B(s)u(s) + r(s))ds).$$

Contrôlabilité sans contraintes

Définition 2.2.5 On appelle matrice de contrôlabilité, la matrice de dimension $n \times nm$ définie par :

$$M = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B].$$

Théorème 2.2.6 Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est contrôlable si et seulement si :

$$\text{rang } M = n.$$

La matrice M est appelée matrice de kalman, et la condition $\text{rang } M = n$ est appelée condition de kalman.

Contrôlabilité avec contraintes

Théorème 2.2.7 Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $U \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 dans son intérieur. Considérons le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, avec $u(t) \in U$. Alors tout point de $\mathbb{R}^n$ peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire (A, b) vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.

2.2.2 Contrôlabilité des systèmes continus

L'objet de la contrôlabilité consiste à amener un système d'un état initial $x(t_0) = x_0$ vers un état désiré $x(t_f) = x_1$ à l'instant t_f fini. On considère le système continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continûment différentiable avec $f(0, 0) = 0$ et le contrôle $u \in U$, ensemble des contrôles défini par :

$$U = \{v : \text{fonction mesurable } / v(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m\}.$$

Cet ensemble peut être non borné et sera noté U_u ($\Omega = \mathbb{R}^m$) et peut être borné, noté U_b ($\|u\| \leq c$), ou U_{bb} pour les contrôles tels que $|u_i| = c$ et on a

$$U_{bb} \subset U_b \subset U_u.$$

On note la solution du système (2.2) indifféremment $x(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ ou encore $x[\cdot]$.

Définition 2.2.8 *Le point x_0 état du système (2.2) à l'instant t_0 , est dit contrôlable à x_1 s'il existe $t_1 > t_0$ et $u \in U$ tel que :*

$$x(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)) = x_1,$$

x_1 est dit état atteignables à l'instant t_1 depuis x_0 .

Le système (2.2) est complètement contrôlable si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, x_0 est contrôlable à x_1 .

Définition 2.2.9 *Le système (2.2) est dit complètement contrôlable s'il peut être conduit d'un état initial quelconque fini x_0 vers n'importe quel autre état.*

2.3 Problème de contrôle optimal

Une fois le problème de contrôlabilité est résolu, alors parmi toutes les trajectoires qui transfèrent l'objet de la position initiale $x(t_0)$ à la position finale $x(t_f) = x_1$, on cherche celle qui le fait en temps final, ou celle qui le fait en minimisant un critère donné.

2.3.1 Principe du maximum de Pontriaguine

Ce principe formulé par le mathématicien russe donne une condition nécessaire d'optimalité. Dans ce travail, on considère le problème suivant :

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} k(t, x(t), u(t)) dt + g(x(t_f), t_f) \longrightarrow \max, \quad (2.3)$$

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0 \in M_0, \quad (2.4)$$

$$u(t) \in U, t \in T = [t_0, t_f], \quad (2.5)$$

$$x(t_f) \in M_1. \quad (2.6)$$

Définition 2.3.1 (*Fonction Hamiltonien*)

L'Hamiltonien du problème (2.3) – (2.6) est une fonction de la forme :

$$H = H(x(t), u(t), \psi(t), t) = k(x(t), u(t), t) + \psi^T(t) f(x(t), u(t), t).$$

Principe du maximum sans contrainte sur l'état

Théorème 2.3.2 *Soit u^* un contrôle optimal pour le système (2.4) – (2.6) et soit x^* l'état correspondant, alors il existe un vecteur d'état adjoint $\psi^*(t)$ tel que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \dot{x}^*(t) = \frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t))}{\partial \psi}, \\ 2. \dot{\psi}^*(t) = -\frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t))}{\partial x}, \quad \psi^*(t_f) = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) \quad (\text{condition au limite}), \\ 3. \frac{\partial H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t))}{\partial u} = 0 \quad (\text{pas de contrainte sur le contrôle}), \\ 4. H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) = \max H(t, x^*(t), u(t), \psi^*(t)) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Principe du maximum avec contrainte sur l'état Ici, nous imposons au problème des contraintes sur l'état et sur le contrôle.

Plus précisément, pour chaque instant $t \in T$, $x(t)$ et $u(t)$ doivent satisfaire la contrainte :

$$S(x, u, t) \geq 0, S \in \mathbb{R}^p, t \in T,$$

Ainsi, nous introduisons la fonction Lagrangien, qui s'écrit :

$$L(x, u, \psi, \mu, t) = H(x, u, \psi, t) + \mu S(x, u, t).$$

Le vecteur μ est appelé multiplicateur de Lagrange. Ce multiplicateur doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$\mu \geq 0, \text{ et } \mu S(x, u, t) = 0.$$

Le vecteur adjoint satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial L(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x}, \psi(t_f) = \frac{\partial g(t_f, x(t_f))}{\partial x}.$$

Théorème 2.3.3 Soient $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$. Alors il existe un vecteur adjoint $\psi^*(t)$ et un multiplicateur de Lagrange μ^* tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)), \quad x^*(0) = x_0, \\ \dot{\psi}^*(t) = -\frac{\partial L(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t))}{\partial x}, \quad \psi^*(t_f) = \frac{\partial g(t_f, x(t_f))}{\partial x} \Big|_{x(t_f)=x^*(t_f)} \\ H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*) \geq H(t, x^*(t), u(t), \psi^*) \quad \forall u(t) \in U, t \in [0, t_f], \\ S(x^*(t), u^*, t) \geq 0, t \in T \\ \frac{\partial L}{\partial u} \Big|_{u(t)=u^*(t)} = \frac{\partial (H+\mu S)}{\partial u} \Big|_{u(t)=u^*(t)} = 0 \\ \mu^*(t) \geq 0, \mu^*(t) S(x^*, u^*, t) = 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Condition de transversalité

La condition de transversalité est :

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \psi^*(t_f) \right]^T \delta x_{t_f} + \left[H(t_f, x^*(t_f), u^*(t_f), \psi^*(t_f)) + \frac{\partial g}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0.$$

Cette condition donne une condition supplémentaire qui sert à résoudre l'ensemble des équations (1) et (2) de système (2.7).

On voit bien que $u(t)$ va fournir un maximum global du Hamiltonien $H(t, x(t), u(t), \psi(t))$ pour $u^*(t) \in U$. Pour cette raison, les conditions nécessaires (2.7) sont appelées "Principe du maximum".

Différents cas de transversalité

Type (1) : Si t_f et $x(t_f)$ sont fixes alors, δt_f et δx_f sont nuls dans la condition de transversalité; il n'y a aucune condition supplémentaire à part celles imposées par la formulation du problème.

Type (2) : t_f le temps final libre et $x(t_f)$ est fixe, alors δt_f est arbitraire et comme $x(t_f)$ est fixe, δx_f est nul. Le coefficient de δt_f dans la condition de transversalité est nul,

et on aura :

$$\left[H(t_f, x^*(t_f), u^*(t_f), \psi^*(t_f)) + \frac{\partial g}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] = 0.$$

Type (3) : t_f est fixe et $x(t_f)$ est libre, donc δt_f est nul et δx_f est arbitraire. Ceci signifie que le coefficient de δx_f dans la condition de transversalité est nul. Ce qui nous donne la relation suivante :

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \psi^*(t_f) \right] = 0.$$

Type (4) : t_f et $x(t_f)$ sont libres, ne sont pas reliés, δt_f et δx_f ne le sont pas, alors on a d'après la condition de transversalité le résultat suivant :

$$\left[H(t_f, x^*(t_f), u^*(t_f), \psi^*(t_f)) + \frac{\partial g}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] = 0.$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \psi^*(t_f) \right] = 0.$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudiés le problème de contrôle optimal, dont nous avons présentés les notions de contrôlabilité du système dynamique, par la suite, nous avons exposés le principe du maximum de pontriaguine qui donne une condition nécessaire d'optimalité.

Chapitre 3

Modèles de contrôle optimale en finance d'entreprise

Les méthodes de contrôle optimal ont des applications importantes dans la finance. Au cours du dernier demi-siècle, de nombreux problèmes d'optimisation ont été soulevés dans des domaines tels que la gestion des finances, de l'ingénierie, de l'informatique, de la production, l'industrie et l'économie.

Les modèles présentés dans ce chapitre analyse les relations dynamiques entre l'investissement des entreprises, les politiques financières et les dividendes. Dans un premier lieu, nous discutons un modèle de firme qui cherche les décisions d'investissement de financement, afin de maximiser la valeur de la firme. Dans un second lieu, nous discutons et nous résolvons un modèle de gestion optimale de trésorerie.

3.1 Modèle dynamique de la firme

Ici, nous étudions le comportement d'une entreprise sur un intervalle de temps fini $T = [0, t_f]$, où t_f est un horizon de planification. A chaque instant, l'entreprise produit une quantité de biens

$$Q = Q(t) = qk(t), \quad (3.1)$$

dans laquelle : $k = k(t)$ est le capital de l'entreprise accumulé à instant t (quantité de biens d'équipement).

q : la productivité du capital.

La production est vendue sur le marché et entraîne un chiffre d'affaires noté :

$$S = S(Q(t)) = P(Q).Q, \quad (3.2)$$

où

$S'(Q) > 0$; $S''(Q) < 0$; $S(Q) > 0$ quand $Q > 0$.

S : vente de produit (en valeur).

$P(Q)$: prix de vente (net).

Introduisons la notion de exploitation résultat O , définie comme la différence entre les ventes et les coûts de production :

$$O(K) = (qp(Q) - a)K, \quad (3.3)$$

où a : est le taux d'amortissement.

Le capital de l'entreprise se décompose en capitaux propres $x = x(t)$ et en montants de l'emprunt (dette) $y = y(t)$:

$$k(t) = x(t) + y(t). \quad (3.4)$$

Au début de la période de planification, la valeur de capital de l'entreprise et la valeur des capitaux propres sont connus :

$$k(0) = k_0, \quad x(0) = x_0. \quad (3.5)$$

Nous supposons que l'entreprise peut augmenter ses fonds propres en conservant une partie des bénéfices au lieu de les payer sous forme de dividendes aux actionnaires :

$$\dot{x} = E,$$

avec E : sont les bénéfices non répartis

L'impôt sur les bénéfices se présentent comme suit :

$$F = f(S - ak - rY), \quad (3.6)$$

où

f : taux d'impôt sur les bénéfices des entreprises,

aK : amortissement,

rY : intérêts sur l'emprunt (r est le taux d'intérêt).

De les relations (3.3) et (3.6) la variation des capitaux propres est donnée par :

$$\dot{x} = (1 - f)(O - ry) - D. \quad (3.7)$$

La variation du capital de production en fonction de taux de amortissement est d'écrite par l' équation :

$$\dot{k} = I - ak, \quad (3.8)$$

où I : l'investissement brut.

Cette équation exprime le taux de variation du capital de production qui est, à tout instant, égal aux nouveaux investissements à l'instant t , moins la portion du capital qui se trouve dépréciée au même moment.

En outre, nous supposons que les capitaux empruntés sont non négatifs et ne dépassent pas la valeur des capitaux propres, ce qui est traduit par la contrainte suivante :

$$0 \leq y(t) \leq \alpha x(t), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (3.9)$$

α est la capacité de l'emprunt (taux maximal de l'emprunt par rapport au capitaux propres).

Après (3.4) et (3.9), nous obtenons les contraintes sur les variables d'état suivantes :

$$x(t) \leq k(t) \leq (1 + \alpha)x(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad t \in T. \quad (3.10)$$

Les équations différentielles (3.7) et (3.8) d'écrivent le modèle dynamique de l'entreprise. Les variables x et k sont les variables d'état. Les variables de contrôle sont les dividendes D et l'investissement I .

Les dividendes $D(t)$ et les investissements $I(t)$ obéissent aux contraintes directes suivantes :

$$0 \leq D(t) \leq D_{max}, \quad I_{min} \leq I(t) \leq I_{max}, \quad t \in T, \quad (3.11)$$

où $D_{max} > 0$, $I_{min} < 0$ et $I_{max} > 0$ sont des constantes.

Les commandes $D(t)$ et $I(t)$, $t \in T$, qui vérifient les relations (3.11), et qui génèrent des trajectoires $x(t)$, $k(t)$, $t \in T$, satisfaisant (3.10) sont dites commandes (contrôles) admissible (une politique admissible pour l'entreprise). Les constantes α, q, f, r sont entre 0 et 1.

Nous supposons que la politique de l'entreprise est déterminée par la maximisation de la valeur détenue par les actionnaires (la valeur de l'entreprise) à l'instant t_f , qui est considérée ici comme la somme des dividendes distribués plus la valeur actualisée des capitaux propres à l'instant t_f . En introduisant un taux d'actualisation constant $\rho > 0$, la valeur finale de l'entreprise est donnée par :

$$V(D, I) = \int_0^{t_f} e^{-\rho t} D(t) dt + e^{-\rho t_f} x(t_f). \quad (3.12)$$

Le problème de politique optimale pour l'entreprise se réduit au problème de contrôle

optimal suivant :

$$\begin{aligned} \max_0 \int_0^{t_f} e^{-\rho t} D(t) dt + e^{-\rho t_f} x(t_f), \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (1 - f)(O - rY) - D, \\ \dot{k} = I - ak, \\ x(t) \leq k(t) \leq (1 + \alpha)x(t), \\ 0 \leq D \leq D_{max}, \\ I_{min} \leq I(t) \leq I_{max}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2 Modèle de gestion de trésorerie

Plusieurs modèles ont été élaborés par des théoriciens en vue d'établir des règles de décision qui permettraient de gérer la trésorerie de façon optimale. Chaque modèle s'adresse à un type de fluctuations d'encaissement particulier et essaie de résoudre le problème en utilisant une des méthodes mathématiques appropriées.

Dans ce qui suit, nous présentons un modèle déterministe de gestion de trésorerie avec une extension déterministe en supposant que les dividendes d'actions sont distribués à chaque instant. Ce modèle a été développé par Sethi et Al.

3.2.1 Description du modèle

Prenons une entreprise qui veut gérer le processus de sa trésorerie d'une manière optimale sur un intervalle de temps $[0, t_f]$. Cette gestion consiste à répartir le mieux possible les réserves de liquidités entre argent liquide (placement à court terme, Sethi parle de placement dans des comptes bancaires) et des titres quasi-liquides (action, obligation).

Si l'entreprise conserve trop de liquidités, elle perd de l'argent en termes de coût d'opportunité, dans la mesure où elle peut gagner un rendement supérieur en achetant des actions. D'autre part, si le solde de caisse est trop petit, l'entreprise doit vendre des titres pour répondre à la demande de liquidités. Ce transfert d'argent entre le compte bancaire, l'achat et la vente d'actions encourt le paiement d'une commission de courtier. D'une façon générale, le modèle qui répond à ce genre de problématique, peut être formulé mathématiquement comme suit :

Soient $x = x(t)$ le montant de la réserve de liquidités investi en compte bancaire à l'instant t , et $r_1 = r_1(t)$ le taux d'intérêt perçu de ce placement. Posons aussi $y = y(t)$

pour le montant de la réserve de liquidités investi en action à l'instant t . Le rendement net découlant de cet investissement à l'instant t prend deux formes : les gains financiers sur le capital investi (croissance du prix des actions) $r_2 = r_2(t)$, et un taux de distribution de dividende $r_3 = r_3(t)$, qui sera ajouté aux montants investis dans le compte bancaire. A chaque instant t , l'entreprise reçoit une demande de liquidités $d = d(t)$. Cette dernière peut être positive ou négative : une demande positive représente les flux d'encaissement (recette ou entrée de liquidités), et celle négative reflète les flux de décaissement (dépense ou sortie de liquidités).

Pour répondre à la demande de liquidités et pour mieux répartir les fonds, l'entreprise peut prendre la décision d'engager un montant $u = u(t)$ en vendant des actions, une valeur négative de $u(t)$ représente un achat. En outre, la variable de contrôle $u(t)$ est bornée, c'est-à-dire :

$$-M_1 \leq u(t) \leq M_2, \quad \text{où } M_1 > 0, M_2 > 0. \quad (3.14)$$

Pour chaque unité d'action qui est achetée ou vendue $u(t)$, l'entreprise verse une valeur positive d'une commission de courtier $\alpha |u(t)|$.

À la lumière de cette discussion, la variation des montants investis en compte bancaire et en achat d'actions, s'écrit comme suit :

$$\frac{dx}{dt} = r_1(t)x(t) - d(t) + u(t) - \alpha |u(t)| + r_3(t)y(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.15)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_2(t)y(t) - u(t), \quad y(0) = y_0. \quad (3.16)$$

Dans ce modèle, nous n'imposons aucune autre contrainte sur les variables d'état $x(t)$ et $y(t)$. Cela signifie que les découverts sur les liquidités et la vente à découvert d'actions sont autorisés.

Le problème de la gestion de trésorerie, dans sa forme la plus simple, consiste à formuler des règles de décision qui contrôlent le niveau du solde de trésorerie d'une entreprise et qui répondent à ses besoins de liquidités à un coût total minimum. Une formulation équivalente peut être obtenue en termes de maximisation de la valeur terminale des actifs.

En effet, la fonction objectif s'écrit :

$$\max[x(t_f) + y(t_f)]. \quad (3.17)$$

Pour plus de commodité, le modèle optimal de gestion de la trésorerie se représente comme suit :

$$V = x(t_f) + y(t_f) \longrightarrow \max$$

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1x - d + u - \alpha |u| + r_3y, \\ \dot{y} = r_2y - u, \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, \\ -M_1 \leq u(t) \leq M_2, M_1 > 0, M_2 > 0, t \in [0, t_f]. \end{cases} \quad (3.18)$$

Pour surmonter le problème de la valeur absolue, supposons que l'entreprise répond à la demande de liquidités en vendant des actions à un montant $u_1 \geq 0$. Elle peut prendre au même temps la décision d'acheter des actions à un montant $u_2 \geq 0$.

Ainsi, selon cette nouvelle hypothèse, l'équation d'état peut être écrite comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1x - d + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2) + r_3y, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = r_2(t)y(t) - u_1 + u_2, & y(0) = y_0, \end{cases} \quad (3.19)$$

avec : $0 \leq u_1 \leq M_2$ et $0 \leq u_2 \leq M_2$.

Ainsi, le modèle peut s'écrire comme suit :

$$V = x(t_f) + y(t_f) \longrightarrow \max$$

$$\begin{cases} \dot{x} = r_1x - d + u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2) + r_3y, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = r_2(t)x(t) - u_1 + u_2, & y(0) = y_0, \\ 0 \leq u_1 \leq M_1, 0 \leq u_2 \leq M_2, t \in [0, t_f]. \end{cases} \quad (3.20)$$

Dans le cas où les découverts sur les liquidités et la vente à découvert d'actions ne sont pas autorisés, ce qui veut dire que les variables d'état $x(t)$ et $y(t)$ seront positives.

3.2.2 Solution du modèle de gestion de trésorerie

Nous résolvons le modèle de gestion de trésorerie déjà discuté avec le principe du maximum de Pontriaguine. Ce modèle se présente comme suit :

$$\begin{cases} V = x(t_f) + y(t_f) \rightarrow \max \\ \dot{x} = r_1x - d + u - \alpha |u|, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = r_2y - u, & y(0) = y_0, \\ -M_1 \leq u(t) \leq M_2, M_1 > 0, M_2 > 0, t \in [0, t_f]. \end{cases} \quad (3.21)$$

Introduisons le vecteur d'état adjoint $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, ainsi que la fonction Hamiltonien H définie comme suit :

$$H = \psi_1(r_1x - d + u - \alpha |u|) + \psi_2(r_2y - u). \quad (3.22)$$

Le vecteur d'état adjoint satisfait aux équations suivantes :

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\psi_1 r_1, \quad \psi_1(t_f) = 1, \quad (3.23)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\psi_2 r_2, \quad \psi_2(t_f) = 1. \quad (3.24)$$

Les solutions de ces deux équations sont triviales : elles sont données, respectivement, comme suit (si on suppose que les rendements ne sont pas des constantes) :

$$\psi_1(t) = e^{\int_t^{t_f} r_1(\tau) d\tau}, \quad (3.25)$$

$$\psi_2(t) = e^{\int_t^{t_f} r_2(\tau) d\tau}. \quad (3.26)$$

Les interprétations de ces solutions sont tout aussi claires. La variable $\psi_1(t)$ est la valeur future (à l'instant t) d'une unité de capital détenus dans le compte de trésorerie (banque) entre t et t_f , de la même manière, la variable $\psi_2(t)$ est la valeur future (à l'instant t) d'une unité de capital investi dans des actions à partir de t .

Calculons maintenant la politique optimale en choisissant la variable de contrôle u qui maximise la fonction Hamiltonien. Afin de faire face à la valeur absolue, écrivons la variable de contrôle u comme la différence de deux variables positives, c'est- à-dire :

$$u = u_1 - u_2, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0. \quad (3.27)$$

Cependant, les propriétés de la solution optimale seront automatiquement influencées par cette contrainte. La raison est que la commission du courtier doit être payée sur chaque transaction (achat ou vente d'action), ce qui ne rend pas optimales les transactions. Donc à chaque transaction, on va supposer que l'entreprise, va acheter ou va vendre, ce qui impose la contrainte quadratique suivante :

$$u_1 u_2 = 0. \quad (3.28)$$

Compte tenu de (3.27) et (3.28) nous pouvons écrire :

$$|u| = u_1 + u_2. \quad (3.29)$$

Nous pouvons maintenant utiliser les relations (3.27) et (3.29) dans le Hamiltonien pour substituer u par u_1 et u_2 . Ainsi, on prend la partie qui dépend de u_1 et u_2 notée W ,

qui s'écrit sous la forme suivante :

$$W = u_1 [(1 - \alpha) \psi_1 - \psi_2] - u_2 [(1 + \alpha) \psi_1 - \psi_2]. \quad (3.30)$$

Maximiser le Hamiltonien (3.22) par rapport à u , revient à maximiser W par rapport à u_1 et u_2 . La fonction W est linéaire par rapport à u_1 et u_2 , ainsi la stratégie optimale en prenant en compte la relation (3.28) est bang-bang décrite comme suit :

$$u^* = u_1^* - u_2^*, \quad (3.31)$$

avec

$$u_1^* = \begin{cases} 0 & \text{si } (1 - \alpha) \psi_1 - \psi_2 < 0, \\ \text{indéterminée} & \text{si } (1 - \alpha) \psi_1 - \psi_2 = 0, \\ M_1 & \text{si } (1 - \alpha) \psi_1 - \psi_2 > 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

$$u_1^* = \begin{cases} 0 & \text{si } (1 + \alpha) \psi_1 - \psi_2 > 0, \\ \text{indéterminée} & \text{si } -(1 + \alpha) \psi_1 + \psi_2 = 0, \\ M_2 & \text{si } -(1 + \alpha) \psi_1 + \psi_2 < 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

La commande $u_1(t)$ représente la quantité d'action à vendre, elle est optimale : lorsque on vend en valeur maximale autorisée si la valeur à l'instant t de $(1 - \alpha)$ d'une unité de capital détenus dans le compte bancaire à partir de t est supérieur à la valeur future (à l'instant t) d'une unité de capital investi dans des actions ; dans le cas contraire, l'optimum est de ne pas vendre.

De la même manière pour la commande $u_2(t)$, qui représente l'achat d'actions. La politique optimale est d'acheter, de ne pas acheter, ou il est indifférent, si la valeur à l'instant t d'une unité de capital dans la banque plus la commission est inférieure, supérieure, ou égale à la valeur à l'instant t d'une unité de capital investi dans des actions, respectivement.

Ainsi, si

$$(1 - \alpha) \psi_1(t) \geq \psi_2(t), \quad (3.34)$$

et

$$(1 + \alpha) \psi_1(t) > \psi_2(t), \quad (3.35)$$

alors on prend $u_1(t) > 0$, et $u_2(t) = 0$.

D'autre part, si

$$(1 + \alpha) \psi_1(t) \leq \psi_2(t), \quad (3.36)$$

et

$$(1 - \alpha) \psi_1(t) < \psi_2(t), \quad (3.37)$$

alors on prend $u_2(t) > 0$, et $u_1(t) = 0$. On voit bien qu'avec ces stratégies, la condition (3.28) est vérifiée.

Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présentés des modèles dynamique de contrôle optimale de différentes questions financières au niveau d'une entreprise. Premièrement, nous avons présentés un modèle dynamique de firme qui cherche à maximiser la valeur de l'entreprise. Par la suite, nous avons discutés le modèle de la gestion optimale de trésorerie, la résolution de ce modèle avec le principe du maximum de Pontriaguine montre que la solution optimale dépend d'une manière directe du vecteur adjoint et de la valeur de la commission de courtier.

Conclusion Générale

L'objectif principal de ce mémoire est de discuter les modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise, et ensuite d'appliquer le principe du maximum de Pontriaguine, pour résoudre ces modèles. Pour cela, dans le premier chapitre nous avons présenté l'essentiel de la gestion financière de l'entreprise, qui repose sur l'étude des stratégies d'investissement et des politiques de financement pour optimiser la valeur future de l'entreprise.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté la théorie du contrôle optimale qui permet de déterminer la commande qui

minimise (ou maximise) un critère de performance, éventuellement sous des contraintes, qui est une condition nécessaire d'optimalité. Dans le dernier chapitre, nous avons présenté les modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise, dont nous avons exposés, en premier lieu, le modèle de firme qui cherche à maximiser la valeur des capitaux propres et les dividendes distribués, tout en prenant en compte les facteurs économiques et les décisions financières, par la suite nous présentons et nous résolvons le modèle de gestion optimale de trésorerie qui modélise la décision d'investir les excédents de la trésorerie en compte bancaire ou dans l'achat des actions, afin de maximiser la valeur finale de ces excédents.

Table des figures

1.1	Le cycle d'exploitation d'une entreprise	5
1.2	Les cycles d'opération de l'entreprise	7
1.3	Le circuit financier	10
2.1	Commande en boucle ouvert	32
2.2	Commande en boucle fermée	33
2.3		33

Bibliographie

- [1] Alainach Y et Daniel. C, *Finance d'entreprise du diagnostic à la création de valeur*, Paris, 2004.
- [2] Vernimmen P, *Finance d'entreprise*, Par Quiry P et Yann Le Fur, 2013.
- [3] Chiha KH, *Finance d'entreprise, Approche stratégique*, Houmma, Alger, 2009.
- [4] Damodaran A, *Finance d'entreprise : théorie et pratique*, De Boek Université, Bruxelles, 2007.
- [5] Chiha KH, *Gestion et stratégie financière*, 2006.
- [6] Fortin A, *État des flux de trésorerie*, presses de l'Université du Québec, boul. Laurier, Sainte-Foy, 1998.
- [7] Legros G, *mini manuel finance d'entreprise : Cours et Exos*, Dunod, Paris, 2010.
- [8] Onno van H. Peter M. Kort.Paul J. J. M. van Loon, *Dynamic Policies of the Firm : An Optimal Control Approach*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.
- [9] Gabasov R, Kirillova F. M and Prischipova S. V, *Optimal feedback control*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [10] Trélat E, *contrôle optimal théorie et applications*, Vuibert- Société mathématique de France, Paris cedex 13, avril 2005.
- [11] Azi M, *Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire et application en économie financière*, Université A. Mira de Béjaia, 2010.
- [12] El Jai A, Zerrik E et Ztot K, *Systèmes dynamiques, Analyse et contrôle des systèmes localisés*, Universitaires de Perpignan , 2008.
- [13] Bergounioux M, *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires : Cours et exercices avec solutions*, Paris, 2001.
- [14] Gabasov O. R and Dmitruk N. M, *The Optimal Policy of Dividends, Investments, and Capital Distribution for the Dynamic Model of a Company*, Belarussian State University, Minsk, Belarus Received January 10, 2000.

Résumé

Ce mémoire pour but d'étudier les problèmes d'optimisation en finance d'entreprise. Nous avons abordés, au premier lieu, les fondaments et les concepts essentiels de la gestion financière de l'entreprise. Au second lieu, nous avons étudié la théorie de contrôle optimal, qui se base sur le principe du maximum de Pontriaguine. Finalement, nous présentons des modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise qui décrivent les différents problèmes posés au niveau d'une entreprise, puis nous donnons une solution d'un de ces modèles avec le principe du maximum de Pontriaguine.

Mots clés : Contrôle optimal, Décision financière, Principe du maximum, Modèle de firme, Gestion de trésorerie.

Abstract

The aim of this works is to study the optimal control problems in corporate finance. In the first, we present the concepts of the financial management. In the second, we discuss the optimal control theory, which it based on the maximum principle. Finally, we present the optimal control models in corporate finance that describe the various problems posed at a company, after that, we solve one of these models with the maximum principle.

Keywords : Optimal control, Financial decision, Maximum principle, Model of the firm, Cash management.