



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid boussof Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de master

En: - Filière mathématiques

- Spécialité mathématiques fondamentales et appliquées

Méthode adaptée pour la résolution d'un problème de contrôle optimal

Préparé par :

-Guessoum Imane

- Bouteffous Amina

Soutenue devant le jury

- Président : B. Boufelgha.....M.A.A

- Examineur : A. Zaidi.....M.A.A

- Examineur : A. BaziniarM.A.A

- Encadreur: M. Azi.....M.A.A

Année universitaire: 2014/2015

Remerciements

Nous remercions d'abord et avant le Dieu qui nous
donne le courage et la
patience pour réaliser ce travail.

Nous souhaitons adressé nos remerciements les plus
sincères aux personnes qui
nous apportent leurs aide et qui ont contribué à
l'élaboration de se mémoire ainsi
qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.
Nous tenons à remercier sincèrement Monsieur M.AZI,
qui en tant que encadreur
de mémoire, c'est toujours montré à l'écoute et très
disponible tout au long de la
réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration,
l'aide et le temps qu'il a bien
voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait
jamais vu la jour.

Nos remerciements s'adressent également à toutes les
personnes de l'institut de
sciences et à de la technologie surtout les enseignants
qui nous ont enseigné durant
toutes nos années d'étude.

Nous n'oublions pas notre parents pour leur
contribution, leur soutien et leur
patience.

Enfin, nous adressons nos remerciements à toutes nos
familles et toutes notre amies
qui nous ont aidé de près ou de loin.

Table des matières

Introduction Générale	3
1 Contrôle optimal	4
1.1 Théorie du contrôle	4
1.2 Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire	5
1.3 Exemples	6
1.4 Classe des commandes admissibles	8
1.5 Contrôlabilité des systèmes linéaires	9
1.5.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes dans le cas sans contrainte sur le contrôle	10
1.5.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes dans le cas avec contrainte sur le contrôle	12
1.6 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	14
1.7 Stabilisation	15
1.7.1 Bouclage statique	15
1.7.2 Concepts de stabilité	16
1.7.3 Stabilité des systèmes linéaires	18
1.7.4 Stabilité des systèmes non linéaires	19
2 Condition d'optimalité	24
2.1 Equation d'Euler-Lagrange	24
2.2 Principe d'optimalité de Bellman	26
2.3 Principe du maximum de Pontriaguine	26
2.3.1 Principe du maximum sans contrainte sur le contrôle	28
2.3.2 Principe du maximum sans contrainte sur l'état	30
2.3.3 Principe du maximum avec contraintes sur l'état	30
2.3.4 Principe du maximum dans le cas linéaire	31
2.3.5 Conditions de transversalité	34
2.4 Méthodes numériques en contrôle optimal	35
2.4.1 Méthodes directes	35
2.4.2 Méthodes indirectes	35

2.4.3	Résolution du problème de contrôle optimal	36
2.4.4	Méthode de tir simple pour la résolution du problème de contrôle optimal	38
3	Méthode adaptée pour la résolution d'un problème de Contrôle optimal	44
3.1	Position du problème	44
3.2	Formule de l'accroissement de la fonctionnelle	47
3.3	Critère d'optimalité	49
3.4	Principe du ε -maximum	51
3.5	Algorithme de la méthode	55
3.5.1	Changement de commande	55
3.5.2	Procédure finale	57
3.6	Schéma de l'algorithme	58
3.7	Etude d'un exemple	61
	Conclusion Générale	66
A	Méthode adaptée pour la résolution d'un programme linéaire	67
A.1	Position du problème	67
A.2	Formule d'accroissement de la fonction objectif	69
A.3	Le critère d'optimalité :	69
A.4	Critère de suboptimalité	70
A.5	Algorithme de la méthode	71
	Bibliographie	73

Introduction Générale

L'objectif d'un problème de contrôle est d'amener un système d'un état initial à un certain état final en respectant certaines contraintes. On dit qu'un système est contrôlable si on est capable de l'amener d'un point initial arbitraire vers un point final souhaité.

Historiquement, le problème de contrôle optimal est apparu à la continuation du calcul des variations aux XVI- XVII siècles, qui est fortement lié à la mécanique classique (principe de Fermat, problème de la brachistochrone, équations d'Euler-Lagrange, etc).

La théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans les années 50 avec le principe du maximum de Pontryagin, découvert par L.S. Pontryagin en 1956, qui donne une condition nécessaire d'optimalité. Cette théorie est développée plus tard dans différentes branches des mathématiques : le problème de contrôle optimal d'équations aux dérivées partielles, la théorie de contrôle stochastique. La théorie de contrôle optimal a de nombreuses applications : le guidage aérospatial et aéronautiques, automobile, robotique, réseaux informatiques, bioréacteurs, contrôles des procédés chimiques, économie financière, etc...

Le présent travail est divisé en trois chapitres, une introduction et une conclusion.

Dans le premier chapitre, nous présentons les notions préliminaires sur le contrôle optimal, la contrôlabilité et la stabilisation.

Dans le deuxième chapitre, nous avons donc l'équation d'Euler Lagrange, principe de Bellman, ainsi que le principe de maximum de Pontryagin et quelques méthodes de résolution qui sont les méthodes indirectes découlant du principe de maximum de Pontryagin, et les méthodes directes.

Dans le troisième chapitre, nous exposons une méthode de résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec des contraintes d'égalité sur l'état et commande vectorielle. Cette méthode est constituée de deux procédures : le changement de commande, et la procédure finale.

Chapitre 1

Contrôle optimal

Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des concepts de base de la théorie du contrôle optimal. Après avoir donné un bref aperçu sur la théorie du contrôle et le contrôle optimal, nous présentons par la suite des rappels sur la contrôlabilité des systèmes linéaires et la stabilisation.

1.1 Théorie du contrôle

La théorie du contrôle optimal permet d'amener un système d'un état initial donné à un certain état final.

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôler, une proclamation des contraintes physiques et la détermination du critère de performance. Après modélisation, on obtient un système comportant beaucoup de variables et de paramètres. Les variables nommées variables d'état seront notées x_i , $i = 1, \dots, n$, si le système évolue dans le temps, les variables seront notées $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, où t désigne le temps défini dans un intervalle $[0, t^*]$. Les n variables $x_i(t)$ seront gouvernées généralement, par n équations différentielles du premier ordre, elles sont sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)),$$

où f est un vecteur de n composantes f_i , $i = 1, \dots, n$. f peut être linéaire ou non linéaire.

Définition 1.1.

Un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé contrôle.

1.2 Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire

Le problème général étudié dans cette partie est celui de Bolza. Soient n et m deux entiers naturels non nuls, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient A, B et r trois applications localement intégrables sur I , à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$, et $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Le système de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est :

$$\begin{cases} \forall t \in I : \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où l'ensemble des contrôles U considérés, est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur I , à valeurs dans le sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$.

Donc le problème de contrôle optimale s'écrit par :

$$\begin{cases} \max Z(u) = G(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = x_0, \\ x(t^*) = x_1, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $x_0 = x(0)$ est la position initiale du système (1.1), $x(t^*)$ est sa position terminale (finale). En pratique, la position du système peut représentée la vitesse, la position, la température, ...etc. $u(\cdot)$ est la commande du système (1.1). La fonctionnelle :

$$Z(u) = G(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt,$$

est appelé coût, critère de qualité ou but du problème (1.2).

Outre la forme de Bolza on distingue deux autre forme de problème de contrôle optimale celle de Lagrange et de Mayer :

Problème de Lagrange.

Un problème de contrôle optimal est dit de Lagrange si la fonction coût $F : [0, t^*] \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$, est comme suit :

$$\max \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt.$$

Problème de Mayer.

Dans ce cas, le critère à optimiser il dépend uniquement de la valeur terminale de l'état. On considère le système (1.1) et soit la fonction $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on définit le problème d'optimisation de Mayer par :

$$\begin{cases} \max G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1.3 Exemples

Exemple 1.1.

On considère un véhicule sur un rail, il a deux moteurs, un à l'avant (pour accélérer) et l'autre à l'arrière (pour freiner). À l'instant $t = 0$, le véhicule est à la position p_0 , à la vitesse v_0 . On veut que le véhicule s'arrête à l'origine 0 (la vitesse x est donc nulle). Pour cela, il faut allumer les moteurs au bon moment, d'une manière correcte et si possible optimale (en mettant par exemple le moins de temps possible et on consommant le moins d'énergie possible). Cet exemple peut modéliser de façon très simplifiée, une voiture lancée à $60 km/h$ qui doit s'arrêter à un feu situé à une certaine distance p_0 .

Dans ce cas le système est le véhicule. La fonction d'état est donnée par le vecteur $x(t) = (p(t), \frac{dp}{dt}(t))$ (c'est-à-dire (position, vitesse)), avec les conditions d'états initiales $x_0 = (p_0, v_0)$. Le contrôle $u(t)$ est la force appliquée au véhicule, due à l'allumage des moteurs à l'instant t . Si le moteur arrière s'allume la force est négative. La dynamique du système est donnée par la loi fondamentale de la dynamique « force = masse $\times$ accélération », qu'on peut écrire ici $\frac{d^2p}{dt^2}(t) = u(t)$ (on normalise la masse supposée constante). On obtient :

$$x(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ \frac{dp}{dt}(t) \end{bmatrix}, \text{ et } \frac{dx}{dt}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

L'équation d'état est donc une équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$. De plus, il y a des contraintes sur u dues à la taille des moteurs et à la limitation de l'accélération. En changeant les notations, la dynamique du système est décrite par :

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt}(t) = q(t), & p(0) = 0, \\ \frac{dq}{dt}(t) = u(t), & q(0) = 0. \end{cases}$$

On va définir une fonctionnelle coût grâce aux critères suivants :

- le processus doit être fini en temps raisonnable, on va donc minimiser :

$$T = \int_0^{t^*} dt;$$

- l'énergie cinétique autorisée doit être limitée pour être sûr qu'on ne cassera pas les moteurs. Cette énergie est donnée par :

$$E_c = \int_0^{t^*} q(t)^2 dt;$$

- la dépense de carburant doit être aussi raisonnable, en supposant qu'elle est proportionnelle à la force, nous avons :

$$D_c = \int_0^{t^*} |u(t)| dt.$$

Nous avons rassemblé toutes ces informations dans une fonctionnelle en attribuant à chaque terme un poids différent selon qu'on privilégie l'une à l'autre. Ainsi on obtient :

$$Z(p, q, u, T) = \int_0^{t^*} (\lambda_1 + \lambda_2 q(t)^2 + \lambda_3 |u(t)|) dt,$$

avec $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$ fixés et $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$. On cherche en suite à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \min J(p, q, u, T), \\ \frac{dp}{dt}(t) = q(t), & p(0) = 0, \\ \frac{dq}{dt}(t) = u(t), & q(0) = 0. \end{cases}$$

Exemple 1.2.

Considérons le gestionnaire d'un barrage hydraulique. Grâce aux données hydrométriques historiques, il connaît les apports en eau $a(t)$ sur lesquels il peut compter. Par ailleurs, grâce à sa connaissance du marché de l'électricité, il connaît à l'avance le prix de gros de l'électricité $\pi(t)$. Enfin, il dispose de tables permettant de calculer la puissance électrique P délivrée par ses turbines en fonction du débit $u(t)$ qu'il choisit et de la hauteur d'eau H dans le barrage. En notant $x(t)$ le volume d'eau présent dans son réservoir, on obtient le système de contrôle avec contrainte sur l'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t) - u(t), \\ 0 \leq x(t) \leq x_{\max}, \\ 0 \leq u(t) \leq u_{\max}. \end{cases}$$

Supposons que le gestionnaire souhaite avoir vidé son barrage en $t = t^*$ afin de réaliser une maintenance. Il doit donc imposer $x(t^*) = 0$. Enfin, il cherche à maximiser la quantité :

$$\int_0^{t^*} \pi(t) P(u(t), H(x(t))) dt.$$

1.4 Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble admissible des contrôles admissible qui peut être non bornés, borné ou du type Bang-Bang.

Commande bornée

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les $u_j(t)$ par les constantes. Considérons ce type de problème avec $a_j \leq u_j \leq b_j$. Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j en posons $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$. Donc lorsque u est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1 .

Commande Bang-Bang

Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$, on a $|u_j(t)| = 1$. En d'autres termes, une commande Bang-Bang est une commande qui possède au moins un instant de commutation.

1.5 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Les théorèmes d'existence de solutions d'équation différentielle nous assurent que, pour tout contrôle u , le système (1.1) admet une unique solution $x(.) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, absolument continue. Soit $S(.) : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, défini par :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = A(t)S(t), \\ S(0) = Id. \end{cases}$$

Notons que si $A(t) = A$ est constante sur I , alors $S(t) = e^{A \cdot t}$. La solution $x(t)$ du système (1.1) associée au contrôle u est donnée par :

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t)S(\tau)^{-1}(B(\tau)u(\tau) + r(\tau))d\tau,$$

pour tout $t \in I$.

Définition 1.2 (L'ensemble accessible).

Considérons le système contrôlé (1.1) :

$$\begin{cases} \forall t \in I : \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(t) = x_0. \end{cases}$$

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t^* > 0$ est défini par :

$$Acc(x_0, t^*) = \left\{ x_u(t^*) \mid u \in L^\infty([0, t^*], U) \right\},$$

où $x_u(.)$ est la solution du système (1.1) associée au contrôle u .

Autrement dit, $Acc(x_0, t^*)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.1) au temps t^* .

Définition 1.3 (La contrôlabilité).

Le système contrôlé $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est dit contrôlable en temps t^* si $Acc(x_0, t^*) = \mathbb{R}^n$.

i.e. pour tous $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps t^* .

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité des systèmes linéaires :

Théorème 1.1. [15]

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t^* si et seulement si la matrice :

$$C(t^*) = \int_0^{t^*} S(t)^{-1} B(t) B(t)' (S(t)^{-1})' dt, \quad (1.3)$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

Cette condition dépend de x_0 , c-à-d que un système linéaire est contrôlable en temps t^* depuis x_0 , alors il est contrôlable en temps t^* depuis tout point. Avant de résoudre un problème de contrôle optimal, on se pose les questions suivantes :

Question 1 : Existe-t-il un contrôle $u \in U$ tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne l'état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ à un état final $x_1 \in \mathbb{R}^n$ en un temps fini ?

C'est le problème de contrôlabilité appelé aussi problème de commandabilité.

Question 2 : Si le système est contrôlable, on peut vouloir déterminer un contrôle $u \in U$ tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne l'état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ à un état terminal $x_1 = x(t^*) \in \mathbb{R}^n$, et qui de plus maximise un certain critère fonctionnelle $Z(u)$?

1.5.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes dans le cas sans contrainte sur le contrôle

Le système (1.1) est dite autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t .

Lemme 1.1. [15]

La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \phi : L^\infty([0, t^*], U) &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ u &\rightarrow \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} B u(t) dt, \end{aligned}$$

est surjective.

Preuve.

" $\Rightarrow$ " Supposons tout d'abord, que $\text{rang } C < n$, et montrons que ϕ n'est pas surjective. L'application C étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que l'on supposera être un vecteur ligne tel que :

$$\psi C = 0.$$

Par conséquent,

$$\psi B = \psi AB = \dots\dots\dots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Or d'après le théorème d'hamilton-cayley, il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tel que :

$$A^n = a_0 I + \dots\dots\dots + a_{n-1} A^{n-1},$$

on déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier k :

$$\psi A^k B = 0,$$

en effet, pour tout $t \in [0, t^*]$:

$$\psi e^{At} B = 0,$$

par conséquent, pour tout contrôle u , on a :

$$\psi \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} B u(t) dt = 0.$$

i.e : $\psi \phi(u) = 0$, ce qui montre que ϕ n'est pas surjective.

" $\Leftarrow$ " Réciproquement, si ϕ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que pour tout contrôle u on ait :

$$\psi \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} B u(t) dt = 0,$$

ce ci implique que, pour tout $t \in [0, t^*]$:

$$\psi e^{(t^*-t)A} B = 0.$$

En $t = t^*$ on obtient $\psi B = 0$. En suite, en dérivant par rapport à t , puis en prenant $t = t^*$, on obtient $\psi AB = 0$. Ainsi, par dérivation successives, on obtient finalement :

$$\psi B = \psi AB = \dots\dots\dots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Donc, $\psi C = 0$, et donc rang $C < n$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas sans contrainte sur le contrôle.

Théorème 1.2. [15]

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en t^* si et seulement si la matrice :

$$C = [B, AB, A^2B, \dots\dots\dots, A^{n-1}B]$$

est de rang n . La matrice C est appelée matrice de kalman, et la condition $\text{rang } C = n$ est appelée condition de kalman.

Preuve.

" $\Leftarrow$ " Si la matrice C est de rang n , alors d'après le lemme l'application ϕ est surjective, i.e : $\phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. Or pour tout contrôle u , l'extrémité au temps t^* de la trajectoire associée à u est donnée par :

$$x(t^*) = e^{At^*} x_0 + \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} (B(t)u(t) + r(t)) dt.$$

L'ensemble accessible en temps t^* depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est :

$$Acc(t^*, x_0) = e^{At^*} x_0 + \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} r(t) dt + \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

ce qui montre que le système est contrôlable.

" $\Rightarrow$ " Réciproquement, si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable depuis x_0 définit par :

$$x_0 = -e^{-At^*} \int_0^{t^*} e^{(t^*-t)A} r(t) dt.$$

Or en ce point l'ensemble accessible en temps t^* s'écrit :

$$Acc(t^*, x_0) = \phi(L^\infty),$$

et le système étant contrôlable cet ensemble est égal à $\mathbb{R}^n$.

Cela prouve que ϕ est surjective, donc, d'après le lemme, la matrice C est de rang n .

Remarque 1.1.

La condition de Kalman ne dépend ni de t^* ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t^* depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

1.5.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes dans le cas avec contrainte sur le contrôle

Dans le théorème (1.2), on n'a pas mis de contrainte sur le contrôle. Cependant en adaptant la preuve on obtient aisément le résultat suivant.

Corollaire 1.1.

Sous la condition de Kalman précédente, si $r = 0$ et si $0 \in \text{int } U$, alors l'ensemble accessible $Acc(x_0, t)$ en temps t contient un voisinage du point $e^{At}x_0$.

Théorème 1.3. [15]

Considérons le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, avec $0 \in U$. Alors tout point de l'origine x_0 on peut être attendre en temps fini si et seulement si la paire (A, B) vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.

Exemple 1.3.

Soit le système d'écrit par l'équation :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

où $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nous sommes dans la situation où $n = 2$ et $m = 2$.

La matrice de contrôlabilité associée est :

$$C(A, B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2 \times 4},$$

$$AB = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

en effet :

$$C(A, B) = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons $\text{rang } C(A, B) = 2$, donc le système est contrôlable.

Exemple 1.4.

Considérons maintenant ce système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons $n = 2$ états, et $m = 2$.

La matrice de contrôlabilité du système est :

$$C(A, B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \alpha & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha - 4 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$C(A, B) = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix},$$

le système est contrôlable si et seulement si le $\det C(A, B)$ est non nul, c'est-à-dire $\alpha \neq 3$.

1.6 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaires, on a tendance à utiliser le système linéarisé partant du fait que la contrôlabilité du système non linéarisé d'une manière locale. Mais la non contrôlabilité du système non linéarisé n'implique pas forcément la non contrôlabilité des systèmes non linéaires.

Considérons le système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Définition 1.4.

Soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (1.4) est localement contrôlable au voisinage de x_1 en temps t^* depuis x_0 , si $x_1 \in Acc(x_0, t^*)$.

Autrement dit, il existe un voisinage V dans $V(x_1)$ tel que $V \subset Acc(x_0, t^*)$.

Proposition 1.1.

Considérons le système (1.4) avec $f(x_0, u^0) = 0$.

On note $A = \frac{df}{dx}(x_0, u^0)$ et $B = \frac{df}{du}(x_0, u^0)$.

Si

$$\text{rang}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n,$$

alors le système est localement contrôlable en x_0 .

En générale, le problème de contrôlabilité est difficile. Cependant, il existe des techniques qui permettent de déduire la contrôlabilité locale dans le cas de système linéarisés.

1.7 Stabilisation

Un contrôle (ou une commande) en boucle ouverte est une application $t \rightarrow u(t)$ d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles. Un contrôle en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction, ou un bouclage, ou encore un feedback, est une application $u \rightarrow R(x)$ définie sur les variables d'état du système. Un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des rétroactions qui stabilisent le système en un état particulier.

1.7.1 Bouclage statique

Définition 1.5 (Point d'équilibre).

On appelle point d'équilibre de

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.5}$$

est la solution constante $x^* = a$ qui vérifie :

$$\dot{x} = f(x^*) = 0.$$

Définition 1.6 (Bouclage statique).

On dit que u est un bouclage statique du système $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ si sa valeur $u(t)$ à l'instant t ne dépend que de $x(t)$, c'est à dire $u = R(x)$ où R est une fonction.

Ce système s'écrit tout simplement :

$$\dot{x} = f(x, R(x)), \tag{1.6}$$

il est représenté par le diagramme suivant :

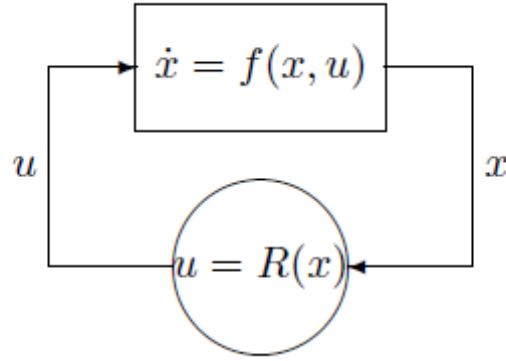


FIGURE 1.1 – Bouclage

Le problème de la stabilisation (ou régulation) consiste à maintenir le système près d'un équilibre $x = 0$. Il s'agit donc de construire une loi de commande telle que $x = 0$ soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée (1.6).

1.7.2 Concepts de stabilité

On se donne un système :

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.7)$$

tel que $f(0) = 0$, admettant $x = 0$ comme équilibre (noter que par un changement de variable on peut toujours ramener l'équilibre à l'origine).

Définition 1.7.

L'équilibre $x = 0$ du système (1.6) est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.6) on ait :

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad \|x(t)\| < \varepsilon.$$

Si l'équilibre n'est pas stable on dit qu'il est instable.

Définition 1.8.

L'équilibre $x = 0$ du système (1.7) est dit attractif s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.7) on ait :

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

L'équilibre $x = 0$ du système (1.7) est dit globalement attractif si pour toute solution $x(t)$ de (1.7) on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

L'ensemble β défini par la propriété :

$$x(0) \in \beta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0,$$

s'appelle le bassin d'attraction de l'origine. Ainsi $x = 0$ est attractif si β est un voisinage de 0. Il est globalement attractif si $\beta = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.9.

L'équilibre $x = 0$ du système (1.7) est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif. Il est dit globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est stable et globalement attractif.

Définition 1.10.

L'équilibre $x = 0$ du système (1.7) est dit exponentiellement stable s'il existe $r > 0$, $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ on ait :

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

L'équilibre $x = 0$ du système (1.7) est dit globalement exponentiellement stable s'il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ de (1.7) on a :

$$\|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

On montre que, en général, stable n'implique pas attractif, attractif n'implique pas stable, exponentiellement stable implique asymptotiquement stable, et asymptotiquement stable n'implique pas exponentiellement stable.

1.7.3 Stabilité des systèmes linéaires

Dans le cas des systèmes linéaires, attractif implique stable (donc asymptotiquement stable équivaut à attractif) et asymptotiquement stable équivaut à exponentiellement stable. De plus l'attractivité est toujours globale. En effet, considérons le système linéaire :

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.8}$$

où A est une matrice carrée d'ordre n . La solution de (1.8) s'écrit :

$$x(t) = e^{tA}x(0). \tag{1.9}$$

La matrice exponentielle e^{tA} est définie par la série :

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}. \quad (1.10)$$

Pour calculer cette matrice exponentielle on cherche les valeurs propres de la matrice A , c'est à dire les racines du polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Le polynôme caractéristique est de degré n en λ . Il admet donc s racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ de multiplicités algébriques $m(\lambda_i)$ satisfaisant :

$$m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_s) = n.$$

Par conséquent :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m(\lambda_s)}.$$

L'indice $\nu(\lambda)$ d'une valeur propre λ est le premier entier tel que la suite croissante des noyaux :

$$\ker(A - \lambda I)^\nu \subseteq \ker(A - \lambda I)^{\nu+1},$$

soit stationnaire pour $\nu \geq \nu(\lambda)$.

Pour toute valeur propre λ de A on a :

$$1 \leq \nu(\lambda) \leq m(\lambda).$$

Le polynôme minimal $M_A(\lambda)$ de A est donné par :

$$M_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu(\lambda_1)} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\nu(\lambda_s)}.$$

Les valeurs propres de A sont réelles ou complexes. Si elles sont complexes, alors elles sont conjuguées deux à deux. Les composantes $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, de la solution (1.9) sont des combinaisons linéaires, à coefficients constants, de termes de la forme :

- 1- $t^j e^{t\lambda}$ où λ est une valeur propre réelle de A et $0 \leq j < \nu(\lambda)$;
- 2- $t^j e^{ta} \cos bt$ et $t^j e^{ta} \sin bt$, c'est à dire les parties réelles et imaginaires de $t^j e^{t\lambda}$, où $\lambda = a + ib$ est une valeur propre complexe de A et $0 \leq j < \nu(\lambda)$.

On en déduit alors le résultat suivant.

Théorème 1.4. [10]

- 1- Si $\exists j, \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ ou si $\exists k, \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ et $\nu(\lambda_k) > 1$ alors $x = 0$ est instable.

- 2- Si $\forall j, \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.
 3- Si $\forall j, \operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow \nu(\lambda_j) = 1$ et s'il existe k tel que $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ alors $x = 0$ est stable mais non attractif.

Par conséquent pour un système linéaire $\dot{x} = Ax$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) l'origine est attractive ;
- b) l'origine est globalement attractive ;
- c) l'origine est asymptotiquement stable ;
- d) l'origine est globalement asymptotiquement stable ;
- e) l'origine est exponentiellement stable ;
- f) l'origine est globalement exponentiellement stable ;
- g) toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative (on dit que la matrice A est de Hurwitz).

1.7.4 Stabilité des systèmes non linéaires

Pour étudier la stabilité d'un système non linéaire on a deux méthodes :

- Méthode indirecte basé sur la linéarisation de la fonction F ;
- Méthode directe basé sur l'utilisation d'une fonction appelé fonction de lyapunov.

Méthode indirecte :(linéarisation d'un système non linéaire)

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Donc soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de class c^1 , c'est-à-dire $F = (f_1, \dots, f_n)$ où $f_1, \dots, f_n$ sont des application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ tel que les dérivée partielles $\frac{df_i}{dx_j}$ tel que : $i, j = (1, \dots, n)$ existent en tout point $(x_1, \dots, x_n)$.

On appelle matrice jacobienne de F en un point $X_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, la matrice formés des dérivées partielles de $f_1, \dots, f_n$ calculés en X_0 :

$$DF(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0^1, \dots, x_0^n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0^1, \dots, x_0^n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0^1, \dots, x_0^n) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0^1, \dots, x_0^n) \end{bmatrix}.$$

Le point fixe de (1.11) se ramène à l'origine $f(0) = 0$ par $x = X - a$, alors, le système devient :

$$\dot{x} = f(x).$$

Le développement de Taylor autour de $x = 0$ donne :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \dots$$

La méthode indirecte étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre consiste à étudier le système linéaire, avec :

$$A = Df(0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(0) \end{bmatrix},$$

la matrice jacobienne de f en 0.

- Si A possède n valeur propre distinctes $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, alors la solution de (1.7) est :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} v_i,$$

v_i sont les vecteurs propres associés au valeur λ_i d'où le théorème suivant.

Théorème 1.5.

Considérons le système d'équation différentielle (1.11), soit $\bar{X} = 0$ un point d'équilibre de F où F est continue et différentiable dans un voisinage $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine.

La linéarisation du système (1.11) autour du point d'équilibre donne le système linéaire suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec la matrice jacobienne $A = \frac{dF}{dx} \big|_{X=\bar{X}}$ alors si :

- la partie réelle des valeurs propres du système linéaire à partie réelle sont strictement négative $Re(\lambda) < 0$, alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable (λ valeur propre de A).
- si le système linéarisé possède des valeurs propres à partie réelle strictement positive $Re(\lambda) > 0$, alors le point d'équilibre est instable.

Notion de stable

Définition 1.11.

Un point d'équilibre de (1.11) est dit point hyperbolique si au moins une valeur propre de la matrice $A = Df(a)$ n'a pas la partie réelle nulle.

Définition 1.12.

Un point d'équilibre de (1.11) est appelé puit si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(0)$ ont des parties réelles négatives il est appelé source si toutes les valeurs propres ont des parties réelles positives.

Si au moins une valeur propre a une partie réelle négative et au moins une valeur propre a une partie réelle positive le point d'équilibre a est appelé point selle (col).

Méthode directe :(Fonction de Lyapunov)

Les fonctions de Lyapunov sont un outil puissant pour étudier la stabilité d'un équilibre. Considérons de nouveau le système :

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.12)$$

tel que $f(0) = 0$, admettant $x = 0$ comme équilibre. Soit $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un voisinage U de l'origine et admettant des dérivées partielles continues. On note la dérivée de la fonction V dans la direction du champ de vecteurs f par :

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx}(x)f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{dV}{dx_i}(x)f(x_i).$$

Cette dérivée s'appelle aussi la dérivée de Lie de V et se note $L_f V$. Pour toute solution $x(t)$ de (1.11) on a :

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)).$$

Définition 1.13.

On dit que V est une fonction de Lyapunov pour le système (1.12) en $x = 0$ dans U , si pour tout $x \in U$ on a :

a- $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq 0$;

b- $\dot{V}(x(t)) \leq 0$;

c- Si de plus $\dot{V}(x(t)) < 0$, alors V est une fonction de Lyapunov strict.

C'est le théorème suivant qui sert à utiliser les fonctions de Lyapunov.

Théorème 1.6.

- Si le point d'équilibre $x = 0$ admet une fonction de lyapunov, alors c'est un point d'équilibre stable.
- Si le point d'équilibre $x = 0$ admet une fonction de lyapunov strict, alors c'est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Exemple 1.5.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x(y^2 - 1), \\ \dot{y} = -y(x^2 + 1), \end{cases}$$

qui présente un point d'équilibre à l'origine et considérons la même fonction de lyapunov candidate :

$$V(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{2},$$

et $V(0, 0) = 0$ et $V(x, y) > 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$,

on a alors : $\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2x^2 - 2y^2$,

en effet, $\dot{V} < 0$, nous pouvons conclure, alors, que le système est asymptotiquement stable dans tout l'espace d'état (x, y) .

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudiés la théorie du contrôle qui analyse les propriétés des systèmes commandés, la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires pour atteindre un contrôle qui joigne l'état initial x_0 à un état final x_1 en un temps fini, et enfin nous avons exposés la stabilité pour rendre le système et sensible à certains perturbations, ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

Chapitre 2

Condition d'optimalité

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un ensemble de conditions pour l'optimalité d'une solution d'un problème de contrôle optimal. Ces conditions sont connues sous le nom du "Principe du maximum de Pontriaguine". Par la suite on s'intéresse à l'étude d'une méthode de résolution des problèmes de contrôle optimal qu'est la méthode de tir. Cette méthode, qu'est à la fois, précise et rapide, fait partie des méthodes dites indirectes, elle se base sur le Principe du Maximum de Pontriaguine, en réduisant le problème de contrôle optimal en un problème aux valeurs limites, puis on le résoud numériquement.

2.1 Equation d'Euler-Lagrange

Considérons une fonction $x(t)$ dépendant d'une variable t et une fonction f à trois variables non indépendantes $f(x(t), \dot{x}(t), t)$, où $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$. La fonction $x(t)$ étant connue, la fonction f prend donc une valeur déterminée pour une valeur de t donnée. Remarquons que la fonction f dépend de t explicitement, mais aussi implicitement à travers $x(t)$ et $\dot{x}(t)$. La dérivée totale de f par rapport à t est donc :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \ddot{x}.$$

Définissons la fonctionnelle $Z(x)$ par l'intégrale :

$$Z(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), \dot{x}(t), t) dt.$$

La fonctionnelle $Z(x)$ est donc un nombre qui dépend de la fonction $x(t)$. L'approche variationnelle va nous permettre de déterminer la fonction $x(t)$ telle que

$Z(x)$ soit stationnaire (extrémale), sachant que $x(t_1)$ et $x(t_2)$ sont donnés.

Nous allons montrer que la fonction $x(t)$ qui remplit cette condition ($Z(x)$ soit stationnaire) doit vérifier l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Preuve de l'équation d'Euler-Lagrange

Supposons que l'on connaisse la fonction $x_0(t)$, qui rende Z extrémale. Puisque $Z(x_0(t))$ est stationnaire, une petite variation $\eta(t)$ de la fonction $x(t)$ implique une variation $\delta Z = 0$ au premier ordre en $\eta(t)$. Posons explicitement :

$$x(t) = x_0(t) + \eta(t),$$

où $\forall t, \eta(t) \ll x_0(t)$ et calculons la variation induite de la fonctionnelle pour une valeur de t fixée :

$$\delta Z = \int_{t_1}^{t_2} [f(x_0(t) + \eta(t), \dot{x}_0(t) + \dot{\eta}(t), t) - f(x_0(t), \dot{x}_0(t), t)] dt.$$

Au premier ordre en $\eta(t)$ et en $\dot{\eta}(t)$, on a :

$$f(x_0(t) + \eta(t), \dot{x}_0(t) + \dot{\eta}(t), t) \simeq f(x_0(t), \dot{x}_0(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x} \eta(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \dot{\eta}(t).$$

Donc

$$\delta Z = \int_{t_1}^{t_2} \left[\eta(t) \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\eta}(t) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] dt.$$

En intégrant par parties la seconde intégrale, on obtient :

$$\delta Z = \int_{t_1}^{t_2} \left[\eta(t) \frac{\partial f}{\partial x} - \eta(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] + \left[\eta(t) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Puisque $x(t_1)$ et $x(t_2)$ sont fixés, $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ et le dernier terme de l'équation s'annule, il reste :

$$\delta Z = \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] dt.$$

Comme $\delta Z = 0$, quelle que soit $\eta(t)$ on doit avoir :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0.$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange, qui s'écrit plus explicitement :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x} \partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x} \partial x} \dot{x} - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \ddot{x} = 0.$$

2.2 Principe d'optimalité de Bellman

Soit le critère :

$$Z(x_0, t_0 = 0, u) = G(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x, u, t) dt. \quad (2.1)$$

La trajectoire optimale sur $[0, t^*]$ est $\tilde{u}$ et le critère optimal :

$$\tilde{Z}(x_0, t_0) = \min_{u_{[0, t^*]}} Z(x_0, t_0 = 0, u). \quad (2.2)$$

Soit $t_1 \in [0, t^*]$. Le principe d'optimalité de Bellman énonce que la trajectoire optimale sur $[0, t^*]$ contient la trajectoire optimale sur $[t_1, t^*]$ avec comme condition initiale $x_1 = x(t_1)$. Autrement dit :

$$\tilde{Z}(x_0, t_0) = \min_{u_{[0, t^*]}, x_1} \left(\int_{t_1}^{t^*} F(x, u, t) dt + \tilde{Z}(x_1) \right). \quad (2.3)$$

Ce principe est un résultat classique de la commande optimale et se trouve souvent utilisé dans la littérature. Il permet d'obtenir une solution optimale en découpant l'intervalle et en résolvant un problème récursif.

2.3 Principe du maximum de Pontriaguine

Définition 2.1.

Considérons le problème :

$$\begin{aligned} \max Z(u) &= G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U, t \in [0, t^*]. \end{aligned}$$

Soit $t^* > 0$, l'application entrée-sortie en temps t^* du système contrôlé (1.1) initialisé à x_0 est l'application :

$$E_{t^*} : U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$u \rightarrow x_u(t^*),$$

où U est l'ensemble des contrôles admissibles, i.e. l'ensemble de contrôles u tels que la trajectoire associée est admissible sur $[0, t^*]$.

Proposition 2.1.

Considérons le (1.1), soit $U \subset L^\infty([0, t^*], \mathbb{R}^n)$ le domaine de définition de E_{t^*} c'est-à-dire : l'ensemble des contrôles dont la trajectoire associée est admissible sur $[0, t^*]$. Alors U est un ouvert de $L^\infty([0, t^*], \mathbb{R}^n)$, et E_{t^*} est C^p au sens L^∞ . De plus la différentielle (au sens de Fréchet) de L^∞ en un point $u \in U$ est donnée par le système linéarisé en u de la manière suivante :

Posons, pour tout $t \in [0, t^*]$:

$$\begin{cases} A(t) = \frac{df}{dx}(t, x(t), u(t)), \\ B(t) = \frac{df}{du}(t, x(t), u(t)). \end{cases}$$

Le système de contrôle linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(t) = x_0. \end{cases}$$

La différentielle de Fréchet de E_{t^*} en u est alors l'application $dE_{t^*}(u)$ telle que, pour tout $u \in L^\infty([0, t^*], \mathbb{R}^n)$:

$$dE_{t^*}(u).v = x_v(t^*) = S(t^*) \int_0^{t^*} S(\tau)^{-1} B(\tau) v(\tau) d\tau.$$

Définition 2.2 (Contrôles singuliers).

Soit u un contrôle défini sur $[0, t^*]$ tel que sa trajectoire associée x_u issue de $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, t^*]$. On dit que le contrôle u est singulier sur $[0, t^*]$ si la différentielle de Fréchet $dE_{t^*}(u)$ de l'application entrée-sortie au point u n'est pas surjective. Sinon on dit qu'il est régulier.

Lemme 2.1.

Si un contrôle u est optimale sur $[0, t^*]$, alors l'application $dE_{t^*}(u)$ n'est pas submersive au point (t^*, u) , par conséquent dans ce cas l'application $dE_{t^*}(u)$ n'est pas surjective, et donc il existe un vecteur non trivial $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ qui est orthogonal à $Im dE_{t^*}(u)$ i.e : $\lambda dE_{t^*}(u) = 0$.

Proposition 2.2.

Si u est un contrôle régulier sur $[0, t^*]$, alors le système est localement contrôlable le long de la trajectoire associée à ce contrôle.

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 2.1.

Soit u un contrôle défini sur $[0, t^*]$ tel que sa trajectoire associée x_u issue de $x(0) = x_0$ est définie sur $[0, t^*]$ et vérifie :

$$x(t^*) \in \partial Acc(x_0, t^*).$$

Alors le contrôle u est singulier sur $[0, t^*]$.

Définition 2.3 (Fonction Hamiltonien).

L'hamiltonien est une fonction de la forme :

$$H = H(x(t), u(t), \psi(t), t) = \psi' f(x(t), u(t), t).$$

2.3.1 Principe du maximum sans contrainte sur le contrôle

Théorème 2.1. [15]/*Principe du maximum faible*

Si le contrôle u^* associée au système linéaire de contrôle :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

est optimale pour le critère :

$$Z(u) = G(x(t^*), t^*),$$

alors, il existe une application $\psi(\cdot)$ absolument continue $\psi : [0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, appelée vecteur adjoint, telle que les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, t^*]$:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \psi}(x(t), u^*(t), \psi^*(t), t), \\ \dot{\psi}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \psi(t), t), \\ H_u(x(t), u^*(t), \psi(t), t) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Preuve

On suppose que le contrôle u associée au système de contrôle (1.1) est optimal pour le coût sur $[0, t^*]$, alors l'application $dE_{t^*}(u)$ n'est pas surjective, donc il existe un vecteur ligne $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que pour tout contrôle v dans L^∞ , on ait :

$$\lambda dE_{t^*}(u)v = 0 \Rightarrow \lambda \int_0^{t^*} S(t^*)S(\tau)^{-1}B(\tau)v(\tau)d\tau = 0,$$

par conséquent

$$\lambda S(t^*)S(\tau)^{-1}B(\tau) = 0 \quad p.p \quad sur \quad [0, t^*].$$

On pose : $\psi(t) = \lambda S(t^*)S(t)^{-1}$, pour tout $t \in [0, t^*]$. C'est un vecteur ligne de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\psi(t^*) = \lambda$.

On par dérivation :

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t) \frac{df}{dx}(x(t), u(t), t).$$

En introduisant l'hamiltonien $H(t, x, \psi, u) = \psi' f(x, u, t)$, on obtient :

$$f(x(t), u(t), t) = \frac{dH}{d\psi}(x(t), u(t), \psi(t), t),$$

et

$$-\psi(t) \frac{df}{dx}(x(t), u(t), t) = -\frac{dH}{dx}(x(t), u(t), \psi(t), t).$$

Alors :

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{dH}{dx}(x(t), u(t), \psi(t), t).$$

La dernière relation vient de :

$$\psi(t)B(t) = 0 \quad \text{car} \quad B(t) = \frac{df}{du}(x(t), u(t), t).$$

Alors :

$$\psi(t) \frac{df}{du}(x(t), u(t), t) = 0,$$

d'où :

$$\frac{dH}{du}(x(t), u(t), \psi(t), t) = 0.$$

2.3.2 Principe du maximum sans contrainte sur l'état

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{aligned} Z(u) &= G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t \in [0, t^*]. \end{aligned}$$

Théorème 2.2 ((Principe du maximum de Pontriaguine sans contrainte sur l'état)).

Soient $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible où U un ensemble des contrôles admissibles et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$. Alors il existe un vecteur $\psi^*(t)$ tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)), \quad x^*(0) = x_0, \\ \dot{\psi}^*(t) = -H_x(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)), \quad \psi(t^*) = G_x(t^*, x^*(t)), \\ H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) \geq H(t, x^*(t), u(t), \psi^*(t)), \quad \forall u(t) \in U, \quad t \in [0, t^*], \end{cases} \quad (2.5)$$

avec :

$$\begin{aligned} H_x(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) &= \frac{\partial H(x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x} \Big|_{x(t)=x^*(t), u(t)=u^*(t), \psi(t)=\psi^*(t)}, \\ G_x(t^*, x^*(t)) &= \frac{\partial G(t^*, x^*(t))}{\partial x} \Big|_{x(t^*)=x^*(t^*)}. \end{aligned}$$

On voit bien que $u^*(t)$ va fournir un maximum global du Hamiltonien $H(t, x^*(t), u(t), \psi^*(t))$ pour $u(t) \in U$. Pour cette raison, les conditions nécessaires (2.5) sont appelées "Principe du maximum".

Pour la démonstration, voir [14]

2.3.3 Principe du maximum avec contraintes sur l'état

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{aligned} Z(u) &= G(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t \in [0, t^*]. \end{aligned}$$

Ici nous imposons au problème des contraintes sur l'état et les variables de contrôle. Plus précisément, pour chaque instant $t \in T$, $x(t)$ et $u(t)$ doivent satisfaire la contrainte

$$g(x, u, t) \geq 0, \quad g \in \mathbb{R}^p, \quad t \in T. \quad (2.6)$$

Ainsi, nous introduisons la fonction Lagrangien, qui s'écrit

$$\overline{H}(x, u, \psi, \mu, t) = H(x, u, \psi, t) + \mu g(x, u, t), \quad (2.7)$$

le vecteur μ est appelé multiplicateur de Lagrange. Ce multiplicateur de Lagrange doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$\mu \geq 0, \quad \mu g(x, u, t) = 0, \quad (2.8)$$

le vecteur adjoint satisfait l'équation différentielle :

$$\dot{\psi}(t) = -\overline{H}_x(t, x(t), u(t), \psi(t)), \quad \psi(t^*) = G_x(t^*, x(t^*)). \quad (2.9)$$

Théorème 2.3 ((Principe du maximum de Pontriaguine avec contrainte sur l'état)).

Soient $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible où U un ensemble des contrôles admissibles et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale solution de l'équation d'état associée à $u^*(t)$. Alors il existe un vecteur adjoint $\psi^*(t)$ et un multiplicateur de Lagrange μ^* tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t)), \quad x^*(0) = x_0, \\ \dot{\psi}^*(t) = -\overline{H}_x(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)), \quad \psi(t^*) = G_x(t^*, x(t^*)), \\ H(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) \geq H(t, x^*(t), u(t), \psi^*(t)), \quad \forall u(t) \in U, \quad t \in [0, t^*], \\ g(x^*(t), u^*, t) \geq 0, \quad t \in T, \\ \frac{\partial \overline{H}}{\partial u} \Big|_{u(t)=u^*(t)} = \frac{\partial (H + \mu g)}{\partial u} \Big|_{u(t)=u^*(t)} = 0, \\ \mu^*(t) \geq 0, \quad \mu^* g(x^*, u^*, t) = 0. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Pour la démonstration, voir [14]

2.3.4 Principe du maximum dans le cas linéaire

Avant d'énoncer le principe du maximum, introduisons certaines définitions essentielles.

Définition 2.4.

Le contrôle u est dit extrémal sur $[0, t]$ si la trajectoire du problème de contrôle (1.1) associée à u vérifie :

$$x(t) \in \partial Acc(x_0, t), \quad t \in [0, t^*].$$

Définition 2.5.

Un contrôle $u^*(t)$, $t \in [0, t^*]$ est dit optimal si $u^*(.)$ est extrémal et $Z(u^*(t)) < Z(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, t^*]$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrémal. C'est un cas particulier du principe du maximum de Pontryagin.

Théorème 2.4. [4]

Considérons le problème de contrôle linéaire :

$$Z(u) = G(x(t^*), t^*),$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0,$$

où le domaine des contraintes $U \in \mathbb{R}^m$ est compact, convexe. Soit $t^* > 0$, le contrôle u est extrémal sur $T = [0, t^*]$ si et seulement s'il existe une solution non triviale $\psi(t)$ de l'équation $\dot{\psi}(t) = -\psi(t)A(t)$ telle que :

$$\psi(t)B(t)u(t) = \max_{V \in U} \psi(t)B(t)V, \quad (2.11)$$

pour presque tout $t \in [0, t^*]$.

Le vecteur ligne $\psi(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.

Preuve

" $\Rightarrow$ " Supposons que u est extrémal sur $[0, t^*]$, soit x la trajectoire associée à u , alors par définition on a : $x(t^*) \in \partial Acc(x_0, t^*)$, où $x(t)$ est donnée par :

$$x(t) = S(t)(x_0 + \int_0^t S^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau).$$

Par convexité de $Acc(x_0, t^*)$, il existe d'après le corollaire du convexe, un hyperplan séparant au sens large $x(t^*)$ et $Acc(x_0, t^*)$. Soit $\bar{\psi}$ un vecteur normal à cet hyperplan, et soit $\psi(t)$ la solution sur $[0, t^*]$ de $\dot{\psi} = -\psi A$ définit pour $0 \leq t \leq t^*$

par : $\psi(t) = \psi_0 S^{-1}(t)$, telle que : $\psi(t^*) = \overline{\psi}$, on obtient donc :

$$\psi(t)x(t) = \psi_0 x_0 + \int_0^t \psi(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (2.12)$$

Supposons qu'il existe un sous-ensemble $[0, t^*]$ de mesure positive de telle sorte que pour tout t dans ce sous ensemble, nous avons :

$$\psi(t)B(t)u(t) < \max_{V \in U} \psi(t)B(t)V.$$

En utilisant un lemme de sélection mesurable de théorie de la mesure, nous pouvons définir une commande mesurables $\hat{u}(\cdot)$ satisfaisant sur $0 \leq t \leq t^*$:

$$\psi(t)B(t)\hat{u}(t) = \max_{V \in U} \psi(t)B(t)V.$$

Soit $\hat{x}(\cdot)$ la trajectoire associée à $\hat{u}(\cdot)$, on obtient :

$$\psi(t^*)x(t^*) = \psi_0 x_0 + \int_0^{t^*} \psi(\tau)B(\tau)\hat{u}(\tau)d\tau.$$

En outre, par la construction de u et de (2.11) l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_0^{t^*} \psi(\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau < \int_0^{t^*} \psi(\tau)B(\tau)\hat{u}(\tau)d\tau,$$

donc, on en déduit que : $\psi(t^*)x(t^*) < \psi(t^*)\hat{x}(t^*)$. Cette contradiction avec le fait que $x(t^*) \in \partial Acc(x_0, t^*)$ et que $\psi(t^*)$ est la normale extérieure à $x(t^*)$. Par conséquent, nous devons avoir :

$$\psi(t)B(t)u(t) < \max_{V \in U} \psi(t)B(t)V.$$

" $\Leftarrow$ " Réciproquement, si $u(\cdot)$ satisfait l'égalité :

$$\psi(t)B(t)u(t) < \max_{V \in U} \psi(t)B(t)V,$$

montrons que $x(t^*) \in \partial Acc(x_0, t^*)$. En effet supposer que $x(t^*) \in \text{int} Acc(x_0, t^*)$. Par conséquent, il existe $\tilde{x}_1 \in Acc(x_0, t^*)$ telle que : $\psi(t^*)x(t^*) < \psi(t^*)\tilde{x}_1$. soit $\tilde{u}(\cdot)$ un contrôle défini sur $[0, t^*]$ à la direction x_0 à x_1 et $\tilde{x}(\cdot)$ la trajectoire correspondante, il ensuit que :

$$\psi(t)B(t)\tilde{u}(t) \leq \psi(t)B(t)u(t). \quad (2.13)$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\psi(t^*)\tilde{x}(t^*) \leq \psi(t^*)x(t^*).$$

Ce qui contredit l'inégalité (2.13). Donc $x(t^*) \in \text{Acc}(x_0, t^*)$, et u est extrémal.

Remarque 2.1.

La condition initiale $\psi(0)$ dépend en fait du point final x_1 , comme on le voit dans la démonstration. Comme elle n'est pas directement connue, l'usage de ce théorème sera plutôt indirect.

Remarque 2.2.

Dans le cas mono-entrée (contrôle scalaire), et si de plus $U = [-a, a]$ où $a > 0$, la condition de maximisation implique immédiatement que $u(t) = \text{asigne}(\psi(t)B(t))$. La fonction $\varphi(t) = \psi(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation, et un temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$ change de signe est appelé un temps de commutation. C'est en particulier un zéro de la fonction φ .

2.3.5 Conditions de transversalité

La condition de transversalité est donnée par la formule suivante :

$$\left[H^* + \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right) \right]_{t^*} \delta t^* + \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^* - \psi^*(t) \right]_{t^*} \delta x_1 = 0. \quad (2.14)$$

Nous obtenons différents cas selon que l'on considère t^* et $x(t^*)$ libre ou fixe.

Type (a) : Si t^* et $x(t^*)$ sont fixes alors, δt^* et δx_1 sont nuls dans la condition de transversalité (2.14), donc, on aura aucune condition supplémentaire.

Type (b) : t^* le temps final libre et $x(t^*)$ est fixe, alors δt^* est arbitraire, et comme $x(t^*)$ est fixe, δx_1 est nul. Le coefficient de δt^* dans la condition de transversalité (2.14) est nul, et on aura :

$$\left[H^* + \frac{\partial G}{\partial t} \right]_{t^*} = 0.$$

Type (c) : t^* est fixe et $x(t^*)$ est libre. Donc δt^* est nul et δx_1 est arbitraire. Alors le coefficient de δx_1 dans la condition de transversalité (2.14) est nul. Ce qui nous donne la relation suivante :

$$\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^* - \psi(t)^* \right]_{t^*} = 0.$$

Type (d) : t^* et $x(t^*)$ sont libres, alors les coefficients de δt^* et de δx_1 dans la condition de transversalité sont nuls :

$$\begin{aligned} \left[H^* + \frac{\partial G}{\partial t} \right]_{t^*} &= 0, \\ \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^* - \psi(t)^* \right]_{t^*} &= 0. \end{aligned}$$

2.4 Méthodes numériques en contrôle optimal

On présente ici deux types de méthode numérique pour résoudre le problème de contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Ces méthodes peuvent traiter un problème de contrôle optimal plus général qui cherche par exemple à minimiser une fonction non linéaire. Les méthodes directes consistent à discrétiser la solution du système et le contrôle en transformant le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes. Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontriaguine.

2.4.1 Méthodes directes

Parmi les méthodes directes, on trouve la méthode de résolution par l'approche de la programmation mathématique, qui est la méthode adaptée appelée aussi méthode du support. Elle permet d'avoir une solution approchée ou une solution exacte. Une autre méthode directe est la méthode de discrétisation du problème initial. Pour un problème de départ linéaire, on fait une discrétisation de la commande. De là, on obtient un problème de programmation linéaire facile à résoudre. L'inconvénient de cette dernière approche est l'obtention d'une solution approchée. La mise en œuvre des méthodes directes est simple, car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable, on n'a pas à étudier les variables adjointes ou bien à connaître à l'avance la structure des commutations.

2.4.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin qui donne une condition nécessaire d'optimalité, il faut vérifier à posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée. Ces méthodes ont l'extrême précision numérique, mais elles sont très sensibles au choix de la condition initiale. Contrairement aux méthodes directes, les méthodes indirectes nécessitent une étude théorique préalable

et l'étude des variables adjointes. Pour ces méthodes, la structure des commutations doit être connue à l'avance, elles sont efficaces en toute dimension.

2.4.3 Résolution du problème de contrôle optimal

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\max Z(u) = G(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt,$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t).$$

La solution du problème de contrôle optimal à travers les étapes suivantes :

- 1- Construire l'Hamiltonien.
- 2- Obtenir l'équations d'état et l'équation adjoint.
- 3- Obtenir la condition nécessaire d'optimalité par rapport à u .
- 4- Donner les conditions de transversalité.

Les différentes étapes de la résolution du problème :

Type (1) : Hamiltonien

Nous construisons l'Hamiltonien H pour le problème décrit par le système :

$$H = H(x(t), u(t), \psi(t), t) = F(x(t), u(t), t) + \psi'(t)f(x(t), u(t), t),$$

où $\psi(t)$ est l'état adjoint.

Type (2) : Équation d'état et équation adjoint.

Soient $x^*(t)$, $u^*(t)$ et $(t)^*(t)$ les valeurs optimales, alors L'équation d'état et l'équation adjoint sont données respectivement par :

$$\dot{x}^*(t) = \left(\frac{dH}{d\psi} \right)^* = f(x^*(t), u^*(t), t^*),$$

avec les conditions initiale $\dot{x}^*(t_0) = x(t_0)$,

$$\text{et } \dot{\psi}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^* = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \psi' \frac{\partial f}{\partial x} \right)^*.$$

Type (3) : Condition d'optimalité

La condition d'optimalité est donnée par :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^* = \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \psi' \frac{\partial f}{\partial u} \right)^* = 0.$$

Type (4) : Condition de transversalité

La condition de transversalité est donné par la formule suivante :

$$\left[H^* + \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right) \right]_{t^*} \delta t^* + \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^* - \psi^*(t) \right]_{t^*} \delta x_1 = 0,$$

cette relation donne la condition supplémentaire qui sert à résoudre l'ensemble des équations d'état et adjoint avec les différents cas de transversalité selon que l'on considère t^* et / ou $x(t^*)$ libre ou fixe.

Exemple 2.1.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \min Z(x, u) = \int_0^1 u(t)^3, \\ \dot{x}(t) = u(t), \\ x(0) = 0, \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

L'hamiltonien H est :

$$H(x(t), u(t), \psi(t), t) = u^3(t) + \psi u.$$

D'après les conditions nécessaires d'optimalité on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \psi} = \dot{x}^* = u, \\ -\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{\psi}^* = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 3u^{*2}(t) + \psi^*. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \psi} = \dot{x}^* = u, \\ -\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{\psi}^* = 0, \\ \psi^*(t) = -3u^{*2}(t). \end{cases}$$

La résolution des équation d'état et adjointe donne :

$$\psi^*(t) = \psi^*(t_f) = \psi^*(1),$$

$$x^* = ut + x(0) = ut,$$

$$\text{on a : } \psi^*(t) = -3u^{*2}(t).$$

$$\text{D'autre part : } u^* = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(t) < 0 \\ 0 & \text{si } \psi(t) > 0 \end{cases} \text{ donc : } u^* = 1,$$

$$\text{ce qui implique : } \psi^* = -3.$$

Finalement, la trajectoire optimale est donnée par : $x^* = t$.

2.4.4 Méthode de tir simple pour la résolution du problème de contrôle optimal

Le principe général de la méthode de tir simple, est transformé le problème de contrôle optimal d'origine en la résolution d'une équation non linéaire. La méthode de tir simple est une méthode indirectes, qui consiste à transformer le problème de contrôle optimal en un problème de la recherche de zéro d'une fonction de tir associée, cette méthode est basée sur le principe du maximum de pontriaguine.

Problème aux deux bouts

On considère un problème général de contrôle optimal, sous la forme de Bolza :

$$\begin{cases} \max Z(u) = G(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(0) = x_0, \\ x(t^*) = x_1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. En écrivant les conditions initiales et finales sous la forme de deux fonctions, alors on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} \max Z(u) = G(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ g_0(0, x(0)) = 0, \\ g^*(t^*, x(t^*)) = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

telle que $g_0(0, x(0)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_0}$ et $g^*(t^*, x(t^*)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_1}$. La condition nécessaire d'optimalité (PMP) nous conduit à un système différentiel à $2n$ équations avec $n_0 + n_1$ conditions initiales et terminales, alors résoudre (2,16) équivaut à résoudre le problème aux deux bouts suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ \dot{\psi}(t) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x(t), u(t), t) - \psi' \frac{\partial [Ax(t) + Bu(t) + r(t)]}{\partial x}, \\ u(t) = h(\psi(t)), \\ g_0(x(0)) = 0, \\ g^*(x(t^*)) = 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

où $u(t) = h(\psi(t))$ est donné par la maximisation de l'Hamiltonien.

Problème à valeur initiale

Nous allons maintenant définir la méthode de tir pour résoudre ce problème aux deux bouts. Posons $z(t)$ le couple (état, état adjoint)

$$z(t) = (y(t), \psi(t)) = (z_1(t), z_2(t)),$$

et en posant aussi $z(., z_0)$ la solution du problème à valeur initiale (problème de Cauchy) suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Ez(t) + Du(t) + K(t), \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (2.18)$$

où $E \in M_{2n}(\mathbb{R})$, $D \in M_{2n,m}(\mathbb{R})$ et $K \in M_{2n,1}(\mathbb{R})$.

On introduit maintenant une application L appelée fonction de tir, qui à la valeur initiale z_0 , telle que $z_0 = (x(0), \psi(0)) = (x_0, \beta)$, les conditions initiales g_0 du problème (2.17) fixent déjà une partie de $z(0)$, et l'inconnue de la fonction de tir est donc réduite à la partie "manquante", que l'on note β .

Une situation fréquente est celle où les conditions initiales déterminent l'état initial $(x(0), \beta)$, étant alors finalement la valeur de l'état adjoint initial $\psi(0)$. La valeur de la fonction de tir est alors donnée par les conditions en t^* pour la solution $z(t, z_0)$ de (2.18), donc la fonction de tir définie par :

$$L : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$$

$$\beta \longmapsto L(\beta) = \begin{pmatrix} R_1(z_1(t^*, z_0)) \\ R_2(z_2(t^*, z_0)) \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

où $R_1(z_1(t^*, z_0)) \in \mathbb{R}^n$, $R_2(z_2(t^*, z_0)) \in \mathbb{R}^n$.

Trouver un zéro de la fonction de tir L est alors équivalent à la résolution de problème (2.19), et donne ainsi une solution de (2.16).i.e. il s'agit de déterminer un zéro de la fonction L . Ceci peut se résoudre par la méthode de Newton, comme suit :

L'idée de base est la suivante :

Si β_k est proche d'un zéro β de L , alors :

$$L(\beta) = L(\beta_k) + dL(\beta_k)(\beta - \beta_k) + O(\beta - \beta_k) = 0.$$

On est alors amené à considérer la suite définie par récurrence suivant :

$$\beta_{k+1} = \beta_k - (dL(\beta_k))^{-1}L(\beta_k).$$

Un point initial $\beta_0 \in \mathbb{R}^n$ étant choisi, et on espère que β_k converge vers le zéro β . Ceci suppose donc le calcul de l'inverse de la matrice jacobienne de L , ce qui doit

être évité numériquement. Il s'agit alors, à chaque étape, de résoudre l'équation :

$$L(\beta_k) + dL(\beta_k)d_k = 0,$$

où d_k est appelé direction de descente, et on pose $\beta_{k+1} = \beta_k d_k = 0$. Sous des hypothèses générales, l'algorithme de Newton converge, et la convergence est quadratique. Il existe de nombreuses variantes de la méthode Newton : méthode de descente, de quasi-Newton, de Newton quadratique, de Broyden, ect....

- Cette méthode permet, en général, une détermination très précise d'un zéro. Son inconvénient principal est la petitesse du domaine de convergence.

Exemple 2.2.

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \max Z(u) = \int_0^{t^*} dt, \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + u(t), \\ x_1(t) = 0, x_1(t^*) = 1, \\ x_2(t) = 0, x_2(t^*) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Soit le système contrôlé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + u(t). \end{cases} \quad (2.21)$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

le système (2.21) est contrôlable car, la matrice :

$$C = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est de rang 2.

La fonction Hamiltonienne de ce problème s'écrit :

$$H(x(t), u(t), \psi(t)) = 1 + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)(2x_2(t) + u(t)),$$

nous donnons :

$$u(t) = -\text{sign}(\psi_2(t)).$$

Nous avons le problème aux deux bouts suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + u(t), \\ \psi_1(t) = 0, \\ \psi_2(t) = -\psi_1(t) - 2\psi_2(t), \\ x_1(t) = 0, x_1(t^*) = 1, \\ x_2(t) = 0, x_2(t^*) = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

En posons : $z(t) = (x_1(t), x_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t)) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t))$.

Résoudre le problème (2.22) est alors équivalent à rechercher un zéro de l'équation $L(\beta) = 0$ où la fonction L est la fonction de tir associée à notre problème est définie par :

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ \beta &\longmapsto L(\beta) = z(t, 0, \beta) \end{aligned}$$

avec $z(t, 0, \beta)$ est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 2z_2(t) + u(t), \\ \dot{z}_3(t) = 0, \\ \dot{z}_4(t) = -z_3(t) - 2z_4(t), \\ z_1(0) = 0, z_2(0) = 0, \\ z_3(0) = \beta_1, z_4(0) = \beta_2, \end{cases}$$

où $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^2$.

Soit $z(t, 0, 0, \beta_1, \beta_2)$ une solution du système au temps t avec les conditions initiales $(0, 0, \beta_1, \beta_2)$.

Dans cet exemple on a le temps final (t^*) est libre, on doit avoir :

$$z(t_*, 0, 0, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} z_1(t^*, 0, 0, \beta_1, \beta_2) \\ z_2(t^*, 0, 0, \beta_1, \beta_2) \\ z_3(t^*, 0, 0, \beta_1, \beta_2) \\ z_4(t^*, 0, 0, \beta_1, \beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

On définit la fonction de tir suivante :

$$L(\beta) = \begin{pmatrix} z_1(t^*, 0, 0, \beta_1, \beta_2 - 1) \\ z_2(t^*, 0, 0, \beta_1, \beta_2 - 0) \\ z_3(t^*, 0, 0, \beta_1, \beta_2 - c_1) \\ z_4(t^*, 0, 0, \beta_1, \beta_2 - c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{2t^*}}{4} - \frac{ut^*}{2} - \frac{5}{4} \\ \frac{e^{2t^*}}{2} - \frac{u}{2} \\ \beta_1 \\ c_1 \\ (\beta_2 + \frac{\beta_1}{2})e^{-2t^*} - \frac{\beta_1}{2} - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{cases} \frac{e^{2t^*}}{4} - \frac{ut^*}{2} - \frac{5}{4} = 0, \\ \frac{e^{2t^*}}{2} - \frac{u}{2} = 0, \end{cases}$$

ceci implique que :

$$t^* = \frac{-5}{2u} + \frac{1}{2},$$

si : $u = -1$ alors, $t^* = 3$, on a :

$$\begin{cases} \beta_1 - c_1 = 0, \\ (\beta_2 + \frac{\beta_1}{2})e^{2t^*} - \frac{\beta_1}{2} - c_2 = 0, \end{cases}$$

ceci implique que :

$$\beta_1 = c_1, \text{ et } \beta_2 = -c_1 - c_2.$$

D'après le système :

$$\begin{cases} z_3(t) = a \\ z_4(t) = \frac{1}{2}e^{-2t+2b} - \frac{a}{2} \end{cases}$$

et comme $z_3(t^*) = c_1$, et $z_4(t^*) = c_2$, alors on a le résultat suivant :

$$c_1 = a, \quad c_2 = e^{2b-6} - \frac{a}{2}.$$

Finalement on obtient :

$$\beta_1 = a, \quad \beta_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}e^{2b-6}.$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudiés l'équation d'Euler-Lagrange, principe de Bellman et le principe de maximum de Pontryagin. La résolution du problème de contrôle optimal consiste à utiliser le principe du maximum de Pontryagin, qui est une condition nécessaire d'optimalité. La méthode de tir simple consiste à transformer le problème de contrôle optimal en un problème de la recherche du zéro de la fonction de tir associé, cette méthode permet de résoudre le problème de contrôle optimale d'une manière rapide.

Chapitre 3

Méthode adaptée pour la résolution d'un problème de Contrôle optimal

Introduction

Dans ce travail, on s'intéresse à la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec contraintes égalités et commande vectorielle. Cette méthode est développée par R. Gabasov et F. M. Kirillova au début des années 1980. Elle consiste, comme toute méthode numérique en optimisation, à faire le passage d'une solution réalisée à une autre tout en améliorant la qualité de la solution.

3.1 Position du problème

Le problème de contrôle optimal particulier étudié dans cet chapitre est le suivant :

Sur l'intervalle $T = [0, t^*]$, considérons le problème de maximisation de la fonctionnelle :

$$Z(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad (3.1)$$

avec c vecteur de coût, de dimension n ($c \in R^n$).

Le système de contrôle dynamique linéaire défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in T, \quad (3.2)$$

où : $x(t) \in R^n$ est un vecteur qui représente l'état du système à l'instant t ;
 $u(t) \in R^r$ est une commande constante par morceaux, est bornée $d^- \leq u(t) \leq d^+$,

$d^- = (d_1^-, d_2^-, \dots, d_r^-)$, $d^+ = (d_1^+, d_2^+, \dots, d_r^+)$; A est une $n \times n$ matrice qui caractérise le système; B est une matrice réelle $n \times r$ constante et x_0 la position initiale du système.

Associions à la trajectoire $x(t)$, solution du système, une contrainte (signal de sortie) à l'instant $t = t^*$:

$$Hx(t^*) = g, \quad (3.3)$$

où H est une $m \times n$ matrice de rang $m < n$; g est un m -vecteur. Considérons le problème de la commande optimal suivant :

$$Z(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad (3.4a)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t), x(0) = x_0, \quad (3.4b)$$

$$Hx(t^*) = g, \quad (3.4c)$$

$$d^- \leq u(t) \leq d^+, t \in T = [0, t^*], \quad (3.4d)$$

avec $A = A(K, K)$, $B = B(K, J)$, $H = H(I; K)$, $d^- = d^-(J)$, $d^+ = d^+(J)$, $K = \{1, \dots, n\}$, $J = \{1, \dots, r\}$.

La solution du système dynamique (3.2) est donnée par la formule de cauchy suivant :

$$x(t) = S(t) \left[x_0 + \int_0^t S^{-1}(\tau)(Bu(\tau) + r(\tau))d\tau \right], \quad t \in T, \quad (3.5)$$

où $S(t) = \exp(At)$, est une matrice carrée d'ordre n , solution du système homogène :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = AS(t), \\ S(0) = I_n, \end{cases} \quad (3.6)$$

I_n est une matrice identité d'ordre n .

En utilisant la solution (3.5) dans le problème (3.4), celui-ci devient un problème de la seule variable $u(t)$, $t \in T$ suivant :

$$\begin{cases} Z(u) = c'S(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c'_1(t)u(t)dt + \int_0^{t^*} c'_2(t)r(t)dt \rightarrow \max, \\ \int_0^{t^*} \varphi(t)u(t)dt = \bar{g}, \\ d^- \leq u(t) \leq d^+, t \in T = [0, t^*]. \end{cases} \quad (3.7)$$

avec $c'_1(t) = c'S(t^*)S^{-1}(t)B$, $c'_2(t) = c'S(t^*)S^{-1}(t)$, $\varphi(t) = HS(t^*)S^{-1}(t)B$, $\bar{g} = g - HS(t^*)x_0 - \int_0^{t^*} S(t^*)S^{-1}(t)r(t)dt$.

Sur l'intervalle T choisissons un ensemble de moments isolés $T_a = \{t_k, k \in K_a\}$, $K_a = \{1, \dots, k_a\}$, $k_a \leq p$. A chaque moment $t_k \in T_a$ faisons correspondre un ensemble d'indices $J_k \subset J$, $\sum_{k \in K_a} |J_k| = p$.

Posons $J_a = \{J_k, k \in K_a\}$ et $Q_a = \{J_a, T_a\}$.

Construisons la matrice :

$$\varphi_a = \varphi(Q_a) = (\varphi_j(t_k), j \in J_k, k \in K_a), \quad (3.8)$$

où $\varphi_j(t)$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\varphi(t) = Hq(t)$, $t \in T$ et $q(t)$, $t \in T$, est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\dot{q} = Aq, \quad q(0) = B.$$

Définition 3.1.

Toute commande $u(t)$ vérifiant les contraintes (3.4c), (3.4d) est dite commande admissible du problème (3.4a).

Définition 3.2.

Une commande admissible $u^0 = u^0(t)$ est dite optimale si et seulement si

$$Z(u^0) = \max Z(u). \quad (3.9)$$

La trajectoire correspondante $x^0(t)$ est dite trajectoire optimale.

En outre, on appelle commande suboptimale (ou ε -optimale) toute commande admissible $u^\varepsilon = u^\varepsilon(\cdot) = (u^\varepsilon(t), t \in T)$ satisfaisant à l'inégalité :

$$Z(u^0) - Z(u^\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad (3.10)$$

où $\varepsilon \geq 0$ et u^0 est la commande optimale.

Définition 3.3.

L'ensemble $Q_a = \{J_a, T_a\}$ est appelé support du problème (3.4) si la matrice φ_a est inversible.

Définition 3.4.

Le couple $\{u, Q_a\}$ formé de la commande admissible u et du support Q_a est appelé commande de support.

Définition 3.5.

La commande de support $\{u, Q_a\}$ est dite non dégénérée si : pour toute moment t_k de T_a , l'une des deux conditions est vérifiée :

- dans le voisinage de t_k , la composante $u(t), t \in T$ est non critique :

$$d^- < u(t) < d^+, \quad t \in [t_k - \delta, t_k + \delta], \quad \delta > 0,$$
- t_k est un point de discontinuité de la fonction $u(t), t \in T$.

3.2 Formule de l'accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{u, Q_a\}$ une commande de support du problème (3.4). Considérons une autre commande admissible $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ et sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t), t \in T$.

L'accroissement de la fonctionnelle s'écrit alors :

$$\Delta Z(u) = Z(\bar{u}) - Z(u)$$

$$\begin{aligned} &= c' S(t^*) x_0 + \int_0^{t^*} (c'_1(t) \bar{u}(t) + c'_2(t) r(t)) dt - c' S(t^*) x_0 - \int_0^{t^*} (c'_1(t) u(t) + c'_2(t) r(t)) dt \\ &= \int_0^{t^*} c'_1(t) \bar{u}(t) dt + \int_0^{t^*} c'_2(t) r(t) dt - \int_0^{t^*} c'_1(t) u(t) dt - \int_0^{t^*} c'_2(t) r(t) dt \\ &= \int_0^{t^*} c'_1(t) \bar{u}(t) dt - \int_0^{t^*} c'_1(t) u(t) dt \\ &= \int_0^{t^*} c'_1(t) (\bar{u}(t) - u(t)) dt \\ &= \int_0^{t^*} c'_1(t) \Delta u(t) dt. \end{aligned}$$

Définissons le vecteur :

$$c_{1a} = (c_{1j}(t_k), j \in J_k, k \in K_a),$$

où $c_{1j}(t)$ est la j^{me} élément du vecteur :

$$c'_{1a}(t) = (c_{11}(t), \dots, c_{1r}(t)), \quad t \in T.$$

Construisons le vecteur des potentiels :

$$y' = c'_{1a}(t) \varphi_a^{-1}, \tag{3.11}$$

et la co-commande $E'(t) = (E_1(t), \dots, E_r(t)), t \in T$:

$$\begin{aligned}
E'(t) &= y'\varphi(t) - c'_1(t) \\
&= y'HS(t^*)S^{-1}(t)B - (c'S(t^*)S^{-1}(t)B) \\
&= (y'H - c')S(t^*)S^{-1}(t)B.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

En introduisant le système adjoint $\psi(t)$ définie comme suit :

$$\psi'(t) = -(H'y - c)'S(t^*)S^{-1}(t), \quad t \in T,$$

où $\psi(t)$ la solution du système conjugué :

$$\dot{\psi}(t) = -A'\psi, \quad \psi(t^*) = c - H'y, \tag{3.13}$$

alors, la co-commande peut s'écrire sous la forme :

$$E'(t) = -\psi'(t)B, \quad t \in T. \tag{3.14}$$

En vertu des définitions (3.11) et (3.12), l'accroissement de la fonctionnelle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta Z(u) &= Z(\bar{u}) - Z(u) \\
&= \int_0^{t^*} c'_1(t)(\bar{u}(t) - u(t))dt \\
&= \int_0^{t^*} [y'\varphi(t) - E'(t)]\Delta u(t)dt \\
&= y' \int_0^{t^*} \varphi(t)\Delta u(t)dt - \int_0^{t^*} E'(t)\Delta u(t)dt \\
&= - \int_0^{t^*} E'(t)\Delta u(t)dt.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Par conséquent, il est clair que le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle $\Delta Z(u)$ sous la contrainte :

$$d^- - u(t) \leq \Delta u(t) \leq d^+ - u(t), \quad t \in T, \tag{3.16}$$

est égal à :

$$\beta(u, Q_a) = \sum_{j=1}^r \left[\int_{T^+(j)} E_j(t)(u_j(t) - d_j^-)dt + \int_{T^-(j)} E_j(t)(u_j(t) - d_j^+)dt \right], \tag{3.17}$$

avec,

$$T^+(j) = \{t \in T, E_j(t) > 0\}, \quad T^-(j) = \{t \in T, E_j(t) < 0\}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Le nombre $\beta(u, Q_a)$ est appelé estimation de suboptimalité.

Ainsi, nous obtenons une majoration de l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\Delta Z(u) = Z(\bar{u}) - Z(u) \leq \beta(u, Q_a). \quad (3.18)$$

3.3 Critère d'optimalité

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.1.

Soit $\{u, Q_a\}$ une commande de support du problème (3.4). Les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_j(t) \geq 0, & \text{si } u_j(t) = d_j^-, \\ E_j(t) \leq 0, & \text{si } u_j(t) = d_j^+, \\ E_j(t) = 0, & \text{si } d_j^- \leq u_j(t) \leq d_j^+, \end{cases} \quad t \in T, \quad j \in J, \quad (3.19)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont aussi nécessaires pour l'optimalité de la commande de support $\{u, Q_a\}$.

Démonstration :

Condition suffisante :

Si les relations (3.19) sont vérifiées alors de (3.17), on a $\beta(u, Q_a) = 0$. Comme $Z(\bar{u}) - Z(u) \leq \beta(u, Q_a) = 0$ pour autre commande admissible $\bar{u}$. Par conséquent, la commande de support $\{u, Q_a\}$ est une solution optimale du problème (3.4).

Condition nécessaire :

Soit $\{u, Q_a\}$ une commande de support optimale non dégénérée pour laquelle les relations (3.19) ne sont pas vérifiées de support. Alors :

$$\exists t_0 \in T, \exists j_0 \in J : (E_{j_0}(t_0) > 0 \text{ et } u_{j_0}(t_0) > d_{j_0}^-) \text{ ou } (E_{j_0}(t) < 0 \text{ et } u_{j_0}(t) < d_{j_0}^+).$$

Toute d'abord, supposons qu'on a le cas $(E_{j_0}(t_0) > 0 \text{ et } u_{j_0}(t_0) > d_{j_0}^-)$ de la continuité de $E_j(t), t \in T$ et la commande $u(t), t \in T$ est constante par morceau alors $\exists \varepsilon$, tel que $E_{j_0}(t) > 0$ et $u_{j_0}(t) > d_{j_0}^-, t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$.

Soit pour la commande de support non dégénérée $\{u, Q_a\}$ les m_1 moments de support de commutation de la commande. Soit $J_a^c \subset J_a$ et $T_a^c \subset T_a$ les ensembles qui

représentent ces m_1 moments de commutation de la commande de support.

Construisons alors la nouvelle commande $\bar{u} = u(t) + \Delta u(t)$, tel que $\Delta u(t)$ est défini comme suit :

$$\Delta u_j(t) = \begin{cases} d_j^- - u_j(t), & j = j_0, t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[, \\ u_j(t_k - 0) - u_j(t_k + 0), & j \in J_k^c, t \in [t_k, t_k + \theta_{jk}[, k \in K_a^c, \quad si \quad \theta_{jk} > 0, \\ u_j(t_k + 0) - u_j(t_k - 0), & j \in J_k^c, t \in [t_k + \theta_{jk}, t_k[, k \in K_a^c, \quad si \quad \theta_{jk} < 0, \\ \gamma_{jk}, & j \in J_k \setminus J_k^c, t \in [t_k, t_k + \theta_{jk}[, k \in K_a \setminus K_a^c, \quad si \quad \theta_{jk} > 0, \\ -\gamma_{jk}, & j \in J_k \setminus J_k^c, t \in [t_k + \theta_{jk}, t_k[, k \in K_a \setminus K_a^c, \quad si \quad \theta_{jk} < 0, \\ 0, & ailleurs. \end{cases} \quad (3.20)$$

En vertu de la non dégénérescence de $\{u, Q_a\}$, pour des nombres suffisamment petits $\varepsilon \geq 0$, $\theta_{jk} \geq 0$, $\gamma_{jk} > 0$, nous aurons $d_j^- \leq \bar{u}_j \leq d_j^+$. Les nombres $\theta = (\theta_{jk}, j \in J_k, k \in K_a)$ et ε doivent être déterminés de telle sorte que $\bar{u}(t)$, $t \in T$, soit admissible, donc on doit avoir :

$$\int_0^{t^*} \varphi \Delta u(t) dt = 0. \quad (3.21)$$

Considérons alors la fonction :

$$F(\varepsilon, \theta) = \int_0^{t^*} \varphi \Delta u(t) dt. \quad (3.22)$$

$$= \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \varphi(t) (d_{j_0}^- - u_{j_0}(t)) dt + \sum_{j \in J_k, k \in K_a} a_{jk} \int_{t_k}^{t_k + \theta_{jk}} \varphi(t) dt, \quad (3.23)$$

où : $a_{jk} = u_j(t_k - 0) - u_j(t_k + 0) \neq 0$, pour $j \in J_k^c$ et $k \in K_a^c$;
 $a_{jk} = \gamma_{jk}$ pour $j \in J_k \setminus J_k^c$ et $k \in K_a \setminus K_a^c$.

La fonction $F(\varepsilon, \theta)$ est continûment différentielle au voisinage $\varepsilon = 0, \theta = 0$. Alors on détermine un voisinage V du point $\varepsilon = 0$ de telle manière qu'il existe une projection unique $\theta(\varepsilon)$ vérifiant :

$$F(\varepsilon, \theta(\varepsilon)) = 0. \quad (3.24)$$

Ainsi, pour $\theta = \theta(\varepsilon)$ la nouvelle commande $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ est admissible. L'accroissement de la fonctionnelle par rapport aux commandes $u(t)$ et $\bar{u}(t)$, $t \in T$ est donné alors par :

$$\Delta Z(u) = Z(\bar{u}) - Z(u)$$

$$= - \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} E_{j_0}(t)(d_{j_0}^- - u_{j_0}(t))dt - \sum_{j \in J_K, k \in K_a} a_{jk} \int_{t_k}^{t_k+\theta_{jk}(\varepsilon)} E_j(t)dt. \quad (3.25)$$

Comme $E_{j_0}(t_0) \neq 0$, $E_j(t_k) = 0$, $\forall j \in J_K$, $k \in K_a$, et $E(t)$ est continue, alors nous obtenons :

$$\Delta Z(u) = -\varepsilon E_{j_0}(t_0)(d_{j_0}^- - u_{j_0}(t_0)) + \frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} + \sum_{j \in J_K, k \in K_a} a_{jk} \frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (3.26)$$

De cette expression, résulte que $\Delta Z(u) > 0$ pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, ce qui contredit l'optimalité de la commande de support non dégénérée $\{u, Q_a\}$.

Pour le cas ($E_{j_0}(t_0) < 0$ et $u_{j_0}(t_0) < d_j^+$), la preuve est analogue au cas précédent. En effet, $\{u, Q_a\}$ une commande de support, alors les relations (3.19) sont vérifiées.

3.4 Principe du ε -maximum

Le critère d'optimalité décrit ci-dessus peut être écrit sous forme du principe du maximum. Pour cela, construisons la fonction Hamiltonien :

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \psi(t)'(Ax(t) + Bu(t) + r(t)), \quad (3.27)$$

où $\psi(t)$ est la solution du système conjugué (3.13).

Théorème 3.2 (Principe de maximum).

Pour que la commande de support non dégénérée $\{u, Q_a\}$ soit optimale, il est nécessaire et suffisant que le long de la commande $u(t)$, $t \in T$ et des trajectoire $x(t), \psi(t)$, $t \in T$, la condition suivante du maximum soit vérifiées :

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d^- \leq v \leq d^+} H(t, x(t), \psi(t), v), t \in T. \quad (3.28)$$

Théorème 3.3 (Principe de ε -maximum).

Soit $\varepsilon > 0$, pour l' ε -optimalité de la commande admissible $u(t)$, $t \in T$, il est nécessaire et suffisante de trouver un support Q_a de telle sorte que le long des trajectoires $x(t), \psi(t)$, $t \in T$, on ait la condition de ε -maximum :

$$H(t, x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d^- \leq v \leq d^+} H(t, x(t), \psi(t), v) - \varepsilon(t), t \in T, \quad (3.29)$$

avec $\int_0^{t^*} \varepsilon(t)dt \leq \varepsilon$.

Preuve

suffisante :

Soit $\{u, Q_a\}$ une commande de support vérifiant les relations (3.29). D'après la formule (3.17) et en vertu de (3.14) la valeur de suboptimalité sera donnée par :

$$\begin{aligned}
\beta(u, Q_a) &= \sum_{j=1}^r \left[\int_{T^+(j)} E_j(t)(u_j(t) - d_j^-)dt + \int_{T^-(j)} E_j(t)(u_j(t) - d_j^+)dt \right] \\
&= \sum_{j=1}^r \left[\int_{T^+(j)} -\psi'(t)B(K, j)(u_j(t) - d_j^-)dt \right] + \sum_{j=1}^r \left[\int_{T^-(j)} -\psi'(t)B(K, j)(u_j(t) - d_j^+)dt \right] \\
&= \sum_{j=1}^r \int_{T^+(j)} [-\psi'(t)B(K, j)(u_j(t) - d_j^-) + \psi'(t)[Ax(t) + r(t)] - \psi'(t)[Ax(t) + r(t)]]dt \\
&+ \sum_{j=1}^r \int_{T^-(j)} [-\psi'(t)B(K, j)(u_j(t) - d_j^+) + \psi'(t)[Ax(t) + r(t)] - \psi'(t)[Ax(t) + r(t)]]dt \\
&= \sum_{j=1}^r \int_{T^+(j)} [\psi'(t)[Ax(t) + B(K, j)d_j^- + r(t)]]dt + \sum_{j=1}^r \int_{T^-(j)} [\psi'(t)[Ax(t) + B(K, j)d_j^+ + r(t)]]dt \\
&- \sum_{j=1}^r \int_0^{t^*} \psi'(t)[Ax(t) + B(K, j)u_j(t) + r(t)]dt \\
&= \int_0^{t^*} [\max_{d^- \leq v \leq d^+} H(t, x(t), \psi(t), v) - H(t, x(t), \psi(t), u(t))]dt \\
&= \int_0^{t^*} \varepsilon(t)dt \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que la commande $u(t)$, $t \in T$ est ε -optimale.

Nécessaire :

Soit $u(t)$, $t \in T$ une commande ε -optimale. Décomposons la valeur de suboptimalité $\beta(u, Q_a)$ en introduisant le problème dual du problème (3.7) :

$$\begin{cases} L(\lambda) = c'F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c_2'(t)r(t) + v'\bar{g} - \int_0^{t^*} f^{-'}(t)d^- + \int_0^{t^*} f^{+'}(t)d^+ & \longrightarrow \min, \\ v'\varphi(t) - f^-(t) + f^+(t) = c_1(t), \\ v \geq 0, f^-(t)(J) \geq 0, f^+(t)(J) \geq 0, t \in T. \end{cases}$$

(3.30)

Soit $\lambda = (v, f^-(t), f^+(t))$ une solution réalisable du problème dual (3.30) construite comme suit :

$$\begin{cases} v = y; \\ f_j^-(t) = E_j(t), \quad f_j^+(t) = 0 \quad \text{si } E_j(t) \geq 0, \\ f_j^-(t) = 0, \quad f_j^+(t) = -E_j(t) \quad \text{si } E_j(t) < 0, \quad j \in J. \end{cases} \quad (3.31)$$

Notons $\lambda^0 = (v, f^{-0}(t), f^{+0}(t))$ la solution optimale du problème dual.

De la formule de suboptimalité et des relations (3.31) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \beta(u, Q_a) &= \int_0^{t^*} E(t)u(t)dt - \sum_{j=1}^r \left[\int_{T^+(j)} E_j(t)d_j^- dt + \int_{T^-(j)} E_j(t)d_j^+ dt \right] \\ &= \int_0^{t^*} E(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} f^-(t)d^{-'}dt + \int_0^{t^*} f^+(t)d^{+'}dt. \end{aligned}$$

Notons u^0 la solution optimale du primal. De (3.12) et de la relation $(u^0) = L(\lambda^0)$, la valeur de suboptimalité peut être décomposée comme suit :

$$\begin{aligned} \beta(u, Q_a) &= \int_0^{t^*} y'\varphi(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} c'_1(t)u(t)dt \\ &\quad - \int_0^{t^*} f^{-'}(t)d^- dt + \int_0^{t^*} f^{+'}(t)d^+ dt + Z(u^0) - L(\lambda^0) \\ &= \int_0^{t^*} y'\varphi(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} c'_1(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} f^{-'}(t)d^- dt \\ &\quad + \int_0^{t^*} f^{+'}(t)d^+ dt + c'S(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c'_2(t)r(t)dt + \int_0^{t^*} c'_1(t)u^0(t)dt - c'S(t^*)x_0 \\ &\quad - \int_0^{t^*} c'_2(t)r(t)dt + \int_0^{t^*} f^{-0'}(t)d^- dt - \int_0^{t^*} f^{+0'}(t)d^+ dt - v'\bar{g} \\ &= - \int_0^{t^*} c'_1(t)u(t)dt + \int_0^{t^*} c'_1(t)u^0(t)dt - \int_0^{t^*} f^{-'}(t)d^- dt \\ &\quad + \int_0^{t^*} f^{+'}(t)d^+ dt + \int_0^{t^*} f^{-0'}(t)d^- dt - \int_0^{t^*} f^{+0'}(t)d^+ dt \\ &= [Z(u^0) - Z(u)][L(\lambda) - L(\lambda^0)]. \end{aligned}$$

En effet, on peut écrire :

$$\beta(u, Q_a) = \beta(u) + \beta(Q_a),$$

où : $\beta(u) = Z(u^0) - Z(u)$ est la mesure de non optimalité de la commande $u(t)$, $t \in T$; $\beta(Q_a) = L(\lambda) - L(\lambda^0)$ mesure la non optimalité du support.

Ainsi, si on trouve un support Q_a^0 associé à la commande $u(t)$ tel que le vecteur $\lambda = (v, f^-(t), f^+(t))$ défini par les relations (3.31) sera optimale pour le problème (3.30), on aura $\beta(Q_a) = 0$. En effet, on peut écrire :

$$\beta(u, Q_a) = \beta(u) = Z(u^0) - Z(u) \leq \varepsilon, \quad (3.32)$$

à cause de l'optimalité de u .

Définissons la fonction $\varepsilon(t) > 0$ tel que :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^r E_j(t)(u_j(t) - d_j^-)dt, & \text{si } t \in T^-(j), \\ \sum_{j=1}^r E_j(t)(u_j(t) - d_j^+)dt, & \text{si } t \in T^+(j), \\ 0, & \text{si } E(t) = 0, t \in T. \end{cases} \quad (3.33)$$

Comme $E'(t) = -\psi'(t)B$, $t \in T$, alors, $\varepsilon(t)$ peut et réécrit comme suit :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^r -\psi'(t)B(K, j)(u_j(t) - d_j^-), & \text{si } t \in T^-(j), \\ \sum_{j=1}^r -\psi'(t)B(K, j)(u_j(t) - d_j^+), & \text{si } t \in T^+(j), \\ 0, & \text{si } E(t) = 0, t \in T. \end{cases} \quad (3.34)$$

En ajoutant les quantités $(\psi'(t)[Ax(t) + r(t)] - \psi(t)[Ax(t) + r(t)])$ à chaque relation on aura :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^r (\psi'(t)[Ax(t) + B(K, j)d_j^- + r(t)] \\ -[\psi'(t)[Ax(t) + B(K, j)u_j(t) + r(t)]), & t \in T^-(j), \\ \sum_{j=1}^r (\psi'(t)[Ax(t) + B(K, j)d_j^+ + r(t)] \\ -[\psi'(t)[Ax(t) + B(K, j)u_j(t) + r(t)]), & t \in T^+(j), \\ 0, -\psi'B(t) = 0, & t \in T. \end{cases} \quad (3.35)$$

En explicitant la fonction Hamiltonien définie par la relation (3.27) nous obtenons :

$$\varepsilon(t) = \max_{d^- \leq v \leq d^+} (H(t, x(t), \psi(t), v) - H(t, x(t), \psi(t), u(t)). \quad (3.36)$$

Ainsi, d'après les relation (3.32) et (3.17), nous obtenons :

$$\beta(u, Q_a) = \int_0^{t^*} \varepsilon(t) dt \leq \varepsilon. \quad (3.37)$$

Cette dernière inégalité implique que les conditions (3.30) de ε -maximum sont vérifiées.

3.5 Algorithme de la méthode

Soient $\varepsilon > 0$ et $\{u, Q_a\}$ une commande de support initiale. Le but de l'algorithme est de construire une commande u^ε ε -optimale ou carrément optimale u^0 , en faisant des itérations qui consiste à faire le passage de $\{u, Q_a\}$ à $\{\bar{u}, \bar{Q}_a\}$ tel que $Z(\bar{u}) \geq Z(u)$.

Pour cela, l'algorithme se décompose en deux procédures :

- changement de commande $u \longrightarrow \bar{u}$;
- procédure finale.

3.5.1 Changement de commande

Soit $\varepsilon \geq 0$ donné et une commande de support $\{u, Q_a\}$ vérifiant $\beta(u, Q_a) > \varepsilon$. Construisons une autre commande admissible $\bar{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t)$, $t \in T$, de telle façon à avoir $Z(\bar{u}) \geq Z(u)$, où $\Delta u(t)$ est la direction du changement de la commande, et $\theta \geq 0$ est le pas maximal admissible le long de cette direction. Pour cela, choisissons les nombres $\alpha > 0, h > 0$ (paramètres de l'algorithme) et construisons les ensembles :

$$T_\alpha = \{t \in T : \eta(t) \leq \alpha\}, \quad T_* = T \setminus T_\alpha, \quad \text{avec } \eta(t) = \min_{j \in J} |E_j(t)|, \quad t \in T.$$

Subdivisons l'ensemble T_α en intervalles $[\tau_k, \tau^k[$, $k = \overline{1, N}$, $\tau_k < \tau^k \leq \tau_{k+1}$, $T_\alpha = \cup_{k=1}^N [\tau_k, \tau^k[$, de telle façon que nous ayons $\tau^k - \tau_k \leq h$; $T_a \subset \{\tau_k, k = \overline{1, N}\}$; $u_j(t) = u_{jk} = \text{const}$, $t \in [\tau_k, \tau^k[$, $k = \overline{1, N}$, $j \in J$.

Calculons les quantités suivantes :

$$\beta_{jk} = - \int_{\tau_k}^{\tau^k} E_j(t) dt, \quad q_{jk} = \int_{\tau_k}^{\tau^k} \varphi_j(t) dt, \quad k = \overline{1, N}, \quad j \in J; \quad (3.38)$$

$$\beta_{N+1} = - \sum_{j=1}^r \int_{T_*} E_j(t) \Delta u_j(t) dt; \quad (3.39)$$

$$q_{N+1} = \sum_{j=1}^r \int_{T_*} \varphi_j(t) \Delta u_j(t) dt; \quad (3.40)$$

avec,

$$\Delta u_j(t) = \begin{cases} d_j^+ - u_j(t), & \text{si } E_j(t) < -\alpha, \\ d_j^- - u_j(t), & \text{si } E_j(t) > \alpha, \end{cases} \quad j = \overline{1, r}, t \in T_*. \quad (3.41)$$

Posons :

$$l = (l_{11}, \dots, l_{1N}, \dots, l_{r1}, \dots, l_{rN}, l_{N+1})'; \quad (3.42)$$

$$\beta = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1N}, \dots, \beta_{r1}, \dots, \beta_{rN}, \beta_{N+1})'. \quad (3.43)$$

Les vecteurs l, β , et q_{jk} ont pour dimensions respectives $(Nr + 1)$, $(Nr + 1)$ et m . En utilisant ces quantités, le problème (3.15)-(3.16) sera équivalent au problème de support suivant :

$$\begin{aligned} \beta' l &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^N q_{jk} l_{jk} + q_{N+1} l_{N+1} &= 0, \\ d_j^- - u_{jk} &\leq l_{jk} \leq d_j^+ - u_{jk}, \quad j = \overline{1, r}, \quad k = \overline{1, N}, \quad 0 \leq l_{N+1} \leq 1. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Réolvons le problème (3.44) par la méthode adaptée, présentée en Annexe, de la manière suivante :

introduisons $S_B \subset S = \{1, \dots, N + 1\}$, $|S_B| \leq p$, et à chaque indice $k \in S_B$ faisons correspondre un ensemble $J_k \subset J = \{1, \dots, r\}$, $\sum_{k \in S_B} |J_k| = p$.

Posons $J_B = \{J_k, k \in S_B\}$, $T_B = \{k, k \in S_B\}$ et $Q_B = \{J_B, T_B\}$ et introduisons la matrice $P_B = P(Q_B) = (q_{jk}, j \in J_k, k \in S_B)$, où q_{jk} est un m -vecteur et $\det(P_B) \neq 0$.

On prend comme plan initial $l_{jk}^0 = 0$, à qui nous associons le support (Q_B) . Après certain nombre d'itérations, on obtient la solution ε -optimale $\{l^\varepsilon, \tilde{Q}_B\}$.

Si l'indice supplémentaire $(N + 1) \in \tilde{T}_B$, alors par la méthode duale, on l'exclut du support et on construit un nouveau support $\tilde{Q}_B$.

Si l'indice $(N + 1)$ n'est pas dans $\tilde{T}_B$, alors on pose $\tilde{Q}_B = \tilde{Q}_B$.

Ainsi, construisons la nouvelle commande de support $\{\bar{u}, \tilde{Q}_a\}$, avec :

$$\bar{u}_j(t) = \begin{cases} u_j(t) + l_{jk}^\varepsilon, & t \in [\tau_k, \tau^k], \quad k = \overline{1, N}, \\ u_j(t) + l_{N+1}^\varepsilon \Delta u_j(t), & j = \overline{1, r}, \quad t \in T_*, \end{cases} \quad (3.45)$$

et le support $\tilde{Q}_a = \{\tilde{J}_a, \tilde{T}_a\}$ du problème (3.4) est construit de la manière suivante :

$$\tilde{J}_a = \{\bar{J}_k, k \in \bar{S}_B\}, \quad \tilde{T}_a = \{\tau_k, k \in \bar{S}_B\}. \quad (3.46)$$

En utilisant ces ensembles, on construit la matrice :

$$\tilde{\varphi}_a = \{\varphi_j(t_k), j \in \tilde{J}_k, k \in \tilde{K}_a\}.$$

La nouvelle commande ainsi construite vérifie l'inégalité $Z(\bar{u}) \geq Z(u)$. Calculons alors la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_a)$. A partir de cette valeur on distingue trois cas :

- Si $\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_a) = 0$, alors $\bar{u}$ est une commande optimale pour le problème (3.4) ;
- si $\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_a) \leq \varepsilon$, alors $\bar{u}$ est une commande ε -optimale ;
- sinon, calculons par les formules (3.11)-(3.12) la co-commande $\tilde{E}'(t) = -\tilde{\psi}'(t)B$, $t \in T$, correspondant à $\{\bar{u}, \tilde{Q}_a\}$. Par la suite, construisons la quasi-commande $w = w(.) = (w(t), t \in T)$:

$$w_j(t) = \begin{cases} d_j^-, & \text{si } \tilde{E}_j(t) > 0, \\ d_j^+, & \text{si } \tilde{E}_j(t) < 0, \\ \in [d_j^-, d_j^+] & \text{si } \tilde{E}_j(t) = 0, j = \overline{1, r}, t \in T, \end{cases} \quad (3.47)$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi = (.) = (\chi(t), t \in T)$ vérifiant l'équation :

$$\dot{\chi} = A\chi + Bw + r(t), \chi(0) = x_0. \quad (3.48)$$

Construisons le vecteur :

$$\gamma(\tilde{J}_a, \tilde{T}_a) = \tilde{\varphi}_a^{-1}(g - H\chi(t^*)), \quad (3.49)$$

En introduisant un paramètre μ suffisamment petit deux cas peuvent se présenter :

1. Si la relation suivante :

$$\|\gamma(\tilde{J}_a, \tilde{T}_a)\| \leq \mu, \quad (3.50)$$

est vérifié, alors on passe à la procédure finale avec le support $\bar{Q}_a = \tilde{Q}_a$.

2. Sinon on va répéter la procédure du changement de commande avec des paramètres α et h plus petits jusqu'à ce que la relation (3.50) est vérifiée.

3.5.2 Procédure finale

Admettons, que la relation (3.50) est vérifiées pour la quasi-commande $w = w(.) = (w(t), t \in T)$ et la quasi-trajectoire $\chi = \chi(.) = (\chi(t), t \in T)$ construite par le support $\bar{Q}_a$.

La procédure finale consiste à déterminer le support optimal $Q_a^* = \{J_a^*, T_a^*\}$ de telle manière à avoir : $H\chi(t^*) = g$.

Ainsi, le support Q_a^* est déterminé en résolvant le système d'équations suivant :

$$\sum_{j \in \bar{J}_k} \sum_{k \in \bar{K}_a} (d_j^+ - d_j^-) \text{sign} \dot{E}_j(t_k) \int_{t_k}^{V_k(T_a^*)} \varphi_j(t) dt - g + H\chi(t^*) = 0, \quad (3.51)$$

avec $V_k(T_a^*)$, $k \in K_a^*$ est déterminé par les relations :

$$E_j(V_k(T_a^*), T_a^*) = 0, V_k(\bar{T}_a) = t_k, j \in \bar{J}_k, k \in \bar{K}_a;$$

$$E(t, T_a^*) = c_{1a}' \varphi_a^{*-1} \varphi(t) - c_1(t).$$

Supposons Q_a^l la l^{eme} approximation, Q_a^0 l'approximation initiale, avec $J_a^0 = \bar{J}_a$, $T_a^0 = \bar{T}_a$. Supposons que la l^{eme} approximation est connue, alors la $(l+1)^{eme}$ approximation sera construite de la manière suivante :

$$T_a^{l+1} = T_a^l + \left\{ \frac{1}{d_j^+ - d_j^-} \text{sign} \dot{E}_j(t_k) \gamma(j, t_k^l), j \in J_k^l, k \in K_a^l \right\}. \quad (3.52)$$

En outre, la $(l+1)^{eme}$ approximation sera construite d'une manière à satisfaire la relation (3.50).

Faisons une nouvelle itération jusqu'à ce que les approximations successives ne se différent pas.

Soit $Q_a^* = \{J_a^*, T_a^*\}$ la solution du système (3.20), alors la quasi-commande $w^*(t)$, $t \in T$ calculée par (3.47) et le support Q_a^* est une commande optimale pour le problème (3.4), et Q_a^* est le support optimal.

3.6 Schéma de l'algorithme

La méthode est résumée dans l'algorithme suivant :

Début

- (1) Teste de commandabilité du système :

Si $\text{rang}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n$, Alors le système est commandable, aller en (2).

Sinon, le problème n'admet pas de solution.

- (2) Soit $\{u, Q_a\}$ une commande de support de départ admissible du problème (3.4).

* Déterminer la trajectoire admissible $x(t), t \in T$.

* Calculer $\varphi(t) = HS(t^*)S^{-1}(t)B$.

* Calculer $c'_1(t) = c'(t)S(t^*)S^{-1}(t)B$.

* Calculer $y' = c'_{1a}\varphi_a^{-1}$.

* Déterminer la co-commande $E(t) = y'\varphi(t) - c'_1(t)$.

* Calculer la valeur de la fonctionnelle $Z(u) = c'x(t^*)$.

- (3) Test d'optimalité de la commande de support de départ

* Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(u, Q_a)$ donnée par la formule (3.17).

SI $\beta(u, Q_a) = 0$, alors la commande de support $\{u, Q_a\}$ est optimale ;

SI $\beta(u, Q_a) \leq \varepsilon$, alors la commande de support $\{u, Q_a\}$ est ε -optimale ;

SINON, aller en (4).

- (4) Changement de la commande u en $\bar{u}$

* Construire les ensembles :

$$T_\alpha = \{t \in T : \eta(t) \leq \alpha\}, \quad T_* = T \setminus T_\alpha, \quad \text{avec, } \eta(t) = \min_{j \in J} |E_j(t)|, t \in T.$$

* Subdiviser l'ensemble T_α en intervalles $[\tau_k, \tau^k[$.

* Calculer les quantités suivantes : $\beta_{jk}, q_{jk}, \beta_{N+1}, q_{N+1}$, avec les relations (3.38), (3.39), (3.40).

* Résoudre le problème suivant par la méthode adaptée :

$$\begin{cases} \beta'l \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^N q_{jk}l_{jk} + q_{N+1}l_{N+1} = 0, \\ d_j^- - u_{jk} \leq l_{jk} \leq d_j^+ - u_{jk}, j = \overline{1, r}, k = \overline{1, N}, 0 \leq l_{N+1} \leq 1. \end{cases} \quad (3.53)$$

où l et β sont données par les relations (3.42), (3.43).

* Construire la nouvelle commande de support $\{\bar{u}, \bar{Q}_a\}$, avec :

$$\bar{u}_j(t) = \begin{cases} u_j(t) + l_{jk}^\varepsilon, & t \in [\tau_k, \tau^k], k \in \overline{1, N}, \\ u_j(t) + l_{N+1}^\varepsilon \Delta u_j(t), j = \overline{1, r}, t \in T_*, \end{cases} \quad (3.54)$$

et le support $\bar{Q}_a$ est construit par les relations (3.46).

- (5) Test d'optimalité de la nouvelle commande de support $\{\bar{u}, \bar{Q}_a\}$,

* Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_a)$

SI $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_a) = 0$, alors $\bar{u}$ est une commande optimale ;

SI $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_a) \leq \varepsilon$, alors $\bar{u}$ est une commande ε -optimale ;
SINON.

* Construire la quasi-commande $w = w(.) = (w(t), t \in T)$ telle que

$$w_j(t) = \begin{cases} d_j^-, & \text{si } \tilde{E}_j(t) > 0, \\ d_j^+, & \text{si } \tilde{E}_j(t) < 0, \\ \in [d_j^-, d_j^+], & \text{si } \tilde{E}_j(t) = 0, \end{cases} \quad j = \overline{1, r}, \quad t \in T,$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi = (\chi(t), t \in T)$ vérifiant :

$$\dot{\chi} = A\chi + Bw + r(t), \quad \chi(0) = x_0.$$

Construire les vecteurs :

$$\gamma(\tilde{J}_a, \tilde{T}_a) = \tilde{\varphi}_a^{-1}(g - H\chi(t^*)).$$

SI

$$\|\gamma(\tilde{J}_a, \tilde{T}_a)\| \leq \mu,$$

alors on pose $\bar{Q}_a = \tilde{Q}_a$ et aller en (6).

SINON, répéter l'itération de changement de commande avec des paramètres plus petits α et h jusqu'à ce que la relation (3.50) est réalisé.

(6) Procédure finale

* Résoudre le système suivant par la méthode de Newton :

$$\sum_{j \in J_k} \sum_{k \in \bar{K}_a} (d_j^+ - d_j^-) \text{sign} \dot{E}_j(t_k) \int_{t_k}^{V_k(T_a^*)} \varphi_j(t) dt - gH\chi(t^*) = 0,$$

on prend comme approximation initiale Q_a^0 , avec $J_a^0 = \bar{J}_a, T_a^0 = \bar{T}_a$,

(a) Calculer la $(l+1)^{\text{ème}}$ approximation, construite comme suit :

$$T_a^{l+1} = T_a^l + \left\{ \frac{1}{d_j^+ - d_j^-} \text{sign} \dot{E}_j(t_k) \gamma(j, t_k^l), \quad j \in J_k^l, \quad k \in K_a^l \right\}.$$

(b) **SI** $Q_a^{l+1} = Q_a^l$, alors $Q_a^{l+1} = Q_a^*$ est optimal, et la quasi-commande $w^*(t)$, $t \in T$ calculée par (3.47) et le support Q_a^* est une commande optimale.

SINON, aller en (a).

FIN

3.7 Etude d'un exemple

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Z(u) = x_1(t^*) - x_2(t^*) + x_3(t^*), \\ \dot{x}_1 = x_2(t), \\ \dot{x}_2 = x_3(t) + 2u(t), \\ \dot{x}_3 = u(t), \\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1, \\ x_1(t^*) + 3x_2(t^*) + 2x_3(t^*) = 0.16, \\ x_1(t^*) + x_2(t^*) + x_3(t^*) = 0.1, \\ |u(t)| \leq 1.2; \quad t \in [0, 3]. \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b' = (0; 2; 1), \quad g' = (0.16; 0.1),$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c' = (1; -1; 1), \quad x' = (x_1, x_2, x_3).$$

$$K = \{1, 2, 3\}, \quad J = \{1\}.$$

Soient $\varepsilon = 0.01$, $\mu = 0.03$.

Le système est contôlable car la matrice (b, Ab, A^2b) est de rang 3.

Il en résulte que :

$$S(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0.5t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0.5t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons la commande admissible initiale comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} -0.1815, & 0 \leq t \leq 0.05051, \\ 0.6321, & 0.05051 \leq t \leq 0.5252, \\ -1.2, & 0.5252 \leq t \leq 2, \\ -0.0888, & 2 \leq t \leq 2.25, \\ 1.2, & 2.25 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= S(t^*)S^{-1}(t)b \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4.5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t & 0.5t^2 \\ 1 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27.5 - 8t + 0.5t^2 \\ 16.5 - 6t + 0.5t^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
\bar{g} &= g - HS(t^*)x_0, \\
&= \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4.5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -16.34 \\ -9.4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
c'_1(t) &= c'S(t^*)S^{-1}(t^*)b, \\
&= (1; -1; 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4.5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t & 0.5t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (6.5 - 4t + 0.5t^2).
\end{aligned}$$

En utilisant cette solution, le problème (3.55) devient :

$$\begin{cases} \max Z(u) = \int_0^3 (6.5 - 4t + 0.5t^2)u(t)dt \\ \int_0^3 \begin{pmatrix} 27.5 - 8t + 0.5t^2 \\ 16.5 - 6t + 0.5t^2 \end{pmatrix} u(t) = \begin{pmatrix} -16.34 \\ -9.4 \end{pmatrix}; \quad |u(t)| \leq 1.2; \quad t \in [0, 3]. \end{cases}$$

Pour cette commande on a $Z(u) = -3.0590$.

Posons le support suivant :

$Q_a = \{J_a, T_a\}$, avec $J_a = \{1\}$, $T_a = \{0.05051, 2\}$.

D'où on aura :

$$\begin{aligned}
y' &= c'_{1a}\varphi_a^{-1}, \\
&= (6.2992; 0.5) \begin{pmatrix} -0.1528 & 0.3173 \\ 0.3807 & -0.6369 \end{pmatrix}, \\
&= (-0.7720; 1.6804).
\end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
E' &= y'\varphi(t) - c'_1(t), \\
&= (-0.7720; 1.6804) \begin{pmatrix} 27.5 - 8t + 0.5t^2 \\ 16.5 - 6t + 0.5t^2 \end{pmatrix} - (6.5 - 4t + 0.5t^2) \\
&= (-0.0034 + 0.0936t - 0.0458t^2),
\end{aligned}$$

par conséquent la commande de support ne vérifié pas le critère d'optimalité(3.19). La valeur de suboptimalité $\beta(u, Q_a) = 0.02015 > \varepsilon$, alors on passe au changement de commande.

Changement de commande :

Soit $\bar{u} = u(t) + \theta \Delta u(t)$

avec les paramètres de la méthode suivants :

$\alpha = 0.093$ et $h \leq 0.36$.

On a : $T_\alpha = \{t \in T, \min | E_j(t) \leq \alpha\} \Rightarrow T_\alpha = [0, 2.75[= [0; 0.36[\cup [0.36; 0.72[\cup [0.72; 1.08[\cup [1.08; 1.44[\cup [1.44; 1.8[\cup [1.8; 2.1[\cup [2.1; 2.46[\cup [2.46; 2.75[$,
et $T_* = T \setminus T_\alpha = [2.75; 3]$.

Calculons les quantités suivantes :

$$\beta_k = - \int_{\tau_k}^{\tau_k} E_k(t) dt = - \int_{\tau_k}^{\tau_k} (-0.0034 + 0.0936t - 0.0458t^2) dt, \quad \forall k = \overline{1, 8},$$

$$q_k = \int_{\tau_k}^{\tau_k} \varphi_k(t) dt = \int_{\tau_k}^{\tau_k} \begin{pmatrix} 27.5 - 8t + 0.5t^2 \\ 16.5 - 6t + 0.5t^2 \end{pmatrix}, \quad \forall k = \overline{1, 8}.$$

Cela permet d'aboutir au problème de programmation linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -0.0041l_1 - 0.011986l_2 - 0.015569l_3 - 0.014879l_4 - 0.0099143l_5 - 0.0013866l_6 + \\ 0.010286l_7 + 0.020501l_8 \rightarrow \max \\ 9.3894l_1 + 8.3992l_2 + 7.4557l_3 + 6.5589l_4 + 5.7087l_5 + 4.1415l_6 + 4.2713l_7 + 2.9164l_8 = 0, \\ 5.5590l_1 + 4.828l_2 + 4.1437l_3 + 3.5061l_4 + 2.9151l_5 + 2.0115l_6 + 1.9529l_7 + 1.2373l_8 = 0, \\ -1.8321 \leq l_1 \leq 0.5679 \\ -1.8321 \leq l_2 \leq 0.5679 \\ 0 \leq l_3 \leq 2.4 \\ 0 \leq l_4 \leq 2.4 \\ 0 \leq l_5 \leq 2.4 \\ 0 \leq l_6 \leq 2.4 \\ -1.1112 \leq l_7 \leq 1.2888 \\ -2.4 \leq l_8 \leq 0 \end{array} \right.$$

La solution optimale est :

$$l' = (0.5679; -0.7279; 0; 0; 0; 0; 0.1829; 0),$$

avec $\bar{J} = \{1\}$; $\bar{T}_B = \{2, 7\}$, donc la nouvelle commande $\bar{u}$ est :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1.2, & 0 \leq t \leq 0.36 \\ -0.0958, & 0.36 \leq t \leq 0.72 \\ -1.2, & 0.72 \leq t \leq 2.1 \\ 0.0941, & 2.1 \leq t \leq 2.46 \\ 1.2, & 2.46 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

la nouvelle commande de support est $\{\bar{u}, \tilde{Q}_a\}$ avec :

$$\tilde{Q}_a = \{\tilde{J}_a, \tilde{T}_a\}, \quad \tilde{J}_a = \{1\}, \quad \tilde{T}_a = \{0.36, 2.1\}$$

En effet :

$$\begin{aligned}\tilde{y}' &= \tilde{c}'_{1a} \tilde{\varphi}_a^{-1}, \\ &= (5.1248; 0.305) \begin{pmatrix} -0.1734708 & 0.3666897 \\ 0.4093059 & -0.7014074 \end{pmatrix}, \\ &= (-0.7641678; 1.665287),\end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned}\tilde{E}' &= \tilde{y}' \tilde{\varphi}(t) - c'_1(t), \\ &= (-0.7641678; 1.665287) \begin{pmatrix} 27.5 - 8t + 0.5t^2 \\ 16.5 - 6t + 0.5t^2 \end{pmatrix} - (6.5 - 4t + 0.5t^2) \\ &= (-0.03738 + 0.12163t - 0.049441t^2).\end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned}\beta(\bar{u}, \tilde{Q}_a) &= \sum_{j=1}^r \left[\int_{T^+(j)} (u_j(t) - d_j^-) dt + \int_{T^-(j)} (u_j(t) - d_j^+) dt \right], \\ &= 0.01231.\end{aligned}$$

Soit la quasi-commande :

$$w(t) = \begin{cases} 1.2, & 0 \leq t \leq 0.36, \\ -1.2, & 0.36 \leq t \leq 2.1, \\ 1.2, & 2.1 \leq t \leq 3, \end{cases}$$

avec sa trajectoire correspondante $\chi(t)$ à l'instant t^*

$$\chi(t^*) = \begin{pmatrix} -0.1513376 \\ -0.14352 \\ 0.424 \end{pmatrix}.$$

Calculons $\gamma(\tilde{J}_a, \tilde{T}_a) = \begin{pmatrix} 0.0077 \\ -0.0230 \end{pmatrix}$, alors on aura $\|\gamma\| = 0.0242 \leq 0.03$.

Pour cela, passons à la procédure finale.

Procédure finale

Posons $T_a^0 = \{0.36; 2.1\}$, grâce à la $l^{\text{ème}}$ approximations on calcule $l^{\text{ème}} + 1$ approximation comme suit :

$$T_a^{l+1} = T_a^l + \left\{ \frac{1}{d_j^+ - d_j^-} \text{sign} \dot{E}_j(t_k) \gamma(j, t_k^l), j \in J_k^l, k \in K_a^l \right\}.$$

D'où on aura :

$$T_a^1 = \{0.3632; 2.1095\}, \chi(t^*) = \begin{pmatrix} -0.1343 \\ -0.1743 \\ 0.4087 \end{pmatrix} \text{ et } \gamma(\tilde{J}_a, \tilde{T}_a) = \begin{pmatrix} -0.1593 \times 10^{-4} \\ 0.3711 \end{pmatrix},$$

on a $\|\gamma\| = 4.0387 \times 10^{-5}$, d'où on aura :

$T_a^2 = \{0.3632; 2.1095\}$, en effet $T_a^1 = T_a^2$. Donc le support Q_a^* avec $T_a^* = T_a^2$ est le support optimal, et la quasi commande :

$$w(t) = \begin{cases} 1.2 & , 0 \leq t \leq 0.3632, \\ -1.2 & , 0.3632 \leq t \leq 2.1095, \\ 1.2 & , 2.1095 \leq t \leq 3, \end{cases}$$

est admissible, donc elle est optimale.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode adaptée pour la résolution d'un problème de contrôle optimal avec commande vectorielle et des contraintes égalités. Cette méthode se base sur deux procédures essentielles : i) changer la commande u par $\bar{u}$ d'une manière à diminuer la mesure de non optimalité de la commande ; ii) procédure finale, qui consiste à rendre la quasi-commande w à la fois réalisable et optimale.

Conclusion Générale

Cette étude a été consacrée essentiellement à la résolution d'un problème de contrôle optimal. Notre but était de rechercher une commande optimale qui pouvait nous ramener de l'état initial x_0 vers l'état final. Pour cela, on a utilisé la méthode adaptée. Cette méthode est constituée de deux procédures : changement de commande, et procédure finale.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressées à la théorie de contrôle optimal où nous avons présenté certains éléments de base de cette théorie, en portant un intérêt particulier à la contrôlabilité et la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires.

Ensuite, nous avons consacré une partie pour la présentation de l'équation d'Euler-Lagrange, principe d'optimalité de Bellman, principe de maximum de Pontryaguine, et à l'étude théorique de la méthode de tir, plus précisément du tir simple, en contrôle optimal.

Et enfin nous avons exposé la méthode adaptée pour la résolution d'un problème de contrôle optimal avec commande vectoriel et contrainte d'égalité, l'algorithme de résolution se base sur deux procédures essentielles : changement de commande qui consiste à diminuer la non optimalité de la commande en trouvant une autre commande admissible ; procédure finale qui cherche un support qui rend la quasi-commande réalisable et optimale.

Annexe A

Méthode adaptée pour la résolution d'un programme linéaire

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode adaptée développée par R. Gabasov et F. M. Kirillova pour un problème de programmation linéaire à variables bornées. Cette méthode est une généralisation de la méthode du simplexe. Elle utilise une métrique différente de celle du simplexe, dite adaptée, qui consiste à considérer tous les indices non optimaux en fonction desquels on construit une direction d'amélioration de la fonction objectif, et le pas le long de cette direction.

A.1 Position du problème

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(x) = c'x \longrightarrow \max, \\ Ax = b, \\ d^- \leq x \leq d^+. \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

où c, x, d^-, d^+ sont des vecteurs de dimension n ;

b est un vecteur de dimension m ;

A est une matrice d'ordre $(m \times n)$, avec $\text{rang } A = m < n$.

Définissons les ensembles d'indices suivants :

$I = \{1, 2, \dots, m\}, J = \{1, 2, \dots, n\}$;

$J = J_B \cup J_N, J_B \cap J_N = \emptyset, I = I_B \cup I_N, I_B \cap I_N = \emptyset, |I_B| = |J_B| \leq m$.

Nous pouvons alors écrire et fractionner les vecteurs de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
d^- &= d^-(J) = (d_j^-, j \in J), \quad d^+ = d^+(J) = (d_j^+, j \in J); \\
b^- &= b^-(J) = (b_j^-, j \in J), \quad b^+ = b^+(J) = (b_j^+, j \in J); \\
x &= x(J) = (x_j, j \in J), \quad x = \left(\frac{x_B}{x_N}\right), \quad x_B = x(J_B) = (x_j, j \in J_B), \\
x_N &= x(J_N) = (x_j, j \in J_N); \\
c &= c(J) = (c_j, j \in J), \quad c = \left(\frac{c_B}{c_N}\right), \quad c_B = c(J_B) = (c_j, j \in J_B), \\
c_N &= c(J_N) = (c_j, j \in J_N);
\end{aligned}$$

Soit l'ensemble des solutions réalisables (ensemble des contraintes) :

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, \quad d^- \leq x \leq d^+\right\}.$$

Un vecteur x vérifiant les contraintes générales $Ax = b$ et les contraintes simples $d^- \leq x \leq d^+$ est appelé plan ou solution réalisable du problème (A.1).

Le problème (A.1) consiste à trouver un plan optimal $x^0 \in X$, tel que :

$$Z(x^0) \geq Z(x), \forall x \in X, \quad Z(x^0) = \max_{x \in X} Z(x).$$

D'autre part, un plan x^ε est appelé ε -optimal ou suboptimal si :

$$Z(x^0) - Z(x^\varepsilon) = c'x^0 - c'x^\varepsilon \leq \varepsilon,$$

où x^0 est une solution optimale et ε un nombre positif ou nul choisi à l'avance.

Choisissons dans l'ensemble J le sous-ensemble J_{sup} est appelé support du problème (A.1) si la sous-matrice $A_{sup} = A(I, J_{sup})$ est inversible.

Le support J_{sup} est le sous-ensemble des indices de J , telle que quelle que soit le choix des composantes de $x_N = (x_j, j \in J_N)$, $J_N = J \setminus J_{sup}$, les contraintes générales reste satisfaite pour les composantes du $x_{sup} = (x_j, j \in J_{sup})$. Réellement, les contraintes générales $Ax = b$ peut être écrit comme suit :

$$A_{sup}x_{sup} + A(I, J_N)x_N = b,$$

alors cette égalité reste vérifiée pour :

$$x_{sup} = A_{sup}^{-1}(b - A_N x_N), \text{ avec } A_N = A(I, J_N). \quad (\text{A.2})$$

La paire $\{x, J_{sup}\}$ formé du plan x et du support J_{sup} est appelée plan de support ou bien solution réalisable de support.

Le plan de support $\{x, J_{sup}\}$ est dit non dégénéré si :

$$d_j^- < x_j < d_j^+, \quad \forall j \in J_{sup}.$$

A.2 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{x, Q_{sup}\}$ un plan de support et considérons un autre plan quelconque $\bar{x} = x + \Delta x$.

L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = c'\bar{x} - c'x = c'\Delta x. \quad (\text{A.3})$$

Définissons le vecteur des potentiels u donné par :

$$u' = c'_{sup} A_{sup}^{-1}, \quad (\text{A.4})$$

ainsi que le vecteur des estimations E donné par :

$$E' = E'(J) = u'A - c', \quad (\text{A.5})$$

où

$$E' = (E'_B, E'_N), \text{ avec } E'_B = u'A_B - c'_B = 0.$$

Les composantes non-support de E' sont définie comme suit :

$$E_j = u'a_j - c_j, \quad j \in J_N, \quad (\text{A.6})$$

où a_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

En vertu des définitions (A.4) et (A.5), la formule d'accroissement (A.3) prend la forme suivante :

$$\Delta Z = -E'_N \Delta x_N = - \sum_{j \in J_N} E_j \Delta x_j. \quad (\text{A.7})$$

A.3 Le critère d'optimalité :

Théorème A.1.

Soit $\{x, J_{sup}\}$ une solution réalisable de support du problème (A.1), E_N est le vecteur des estimation non-support. Alors les relations

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{si } x_j = d_j^-, \\ E_j \leq 0, & \text{si } x_j = d_j^+, \quad j \in J_N, \\ E_j = 0, & \text{si } d_j^- \leq x_j \leq d_j^+. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

sont suffisantes pour l'optimalité du plan x , et ces mêmes relations sont aussi nécessaires dans le cas où le plan de support $\{x, J_{sup}\}$ est non dégénéré.

A.4 Critère de suboptimalité

Estimation de suboptimalité

Soit $\{x, J_{sup}\}$ un plan de support et choisissons un autre plan $\bar{x} = x + \Delta x$, tel que les composantes non-support de $\bar{x}$ vérifient les contraintes simples :

$$d_j^- \leq \bar{x}_j = x_j + \Delta x_j \leq d_j^+, \quad j \in J_N.$$

d'où :

$$d_j^- - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N.$$

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(x)$ d'un plan de support quelconque, remplaçons dans la formule d'accroissement (A.3) le vecteur $\bar{x}$ par x^0 , et majorons la valeur de l'expression (3.7) :

$$\begin{aligned} \max \Delta Z(x) &= \max_{d_j^- - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N} \left(- \sum_{j \in J_N} E_j \Delta x_j \right) \\ &= \sum_{j \in J_N} \left(\max_{d_j^- - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^+ - x_j} (-E_j \Delta x_j) \right) \\ &= \sum_{E_j > 0, \quad j \in J_N} E_j (x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, \quad j \in J_N} E_j (x_j - d_j^+). \end{aligned}$$

Posons :

$$\beta(x, J_{sup}) = \sum_{E_j > 0, \quad j \in J_N} E_j (x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, \quad j \in J_N} E_j (x_j - d_j^+). \quad (\text{A.9})$$

Par conséquent, on obtient une majoration de l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(x)$, qui est donnée par :

$$Z(x^0) - Z(x) \leq \beta(x, J_{sup}). \quad (\text{A.10})$$

Le nombre réelle $\beta(x, J_{sup})$ défini par

$$\begin{cases} d_{j_0}^- - x_{j_0} < 0, & \text{si } E_{j_0} > 0, \\ d_{j_0}^+ - x_{j_0} > 0, & \text{si } E_{j_0} < 0, \end{cases}$$

est appelé estimation de suboptimalité du plan de support $\beta(x, J_{sup})$.

Théorème A.2 (Condition suffisante de suboptimalité).

Soit $\{x, J_{sup}\}$ un plan de support du problème (A.1), et $\varepsilon \geq 0$ un nombre arbitraire.

Si $\beta(x, J_{sup}) \leq \varepsilon$, alors le plan x est suboptimal (ε -optimal).

A.5 Algorithme de la méthode

Étant donnée un nombre réel positif ou nul quelconque ε et un plan de support initial $\{x, J_{sup}\}$, le but de l'algorithme est de construire un plan optimal x^0 ou carrément un plan ε -optimal x^ε . Une itération de la méthode adaptée consiste à passer d'un plan (solution réalisable) x à un autre $\bar{x}$ telle que : $Z(\bar{x}) \geq Z(x)$. Pour le faire on construit le nouveau plan $\bar{x} = x + \theta l$, $\theta \geq 0$, où l est la direction d'amélioration ($l \in \mathbb{R}^n$) avec $Al = 0$, et θ le pas le long de cette direction.

Pour que l'accroissement $\Delta Z = - \sum_{j \in J_N} E_j(\bar{x}_j - x_j) = -\theta \sum_{j \in J_N} E_j l_j$ soit maximale, il faut choisir θ aussi grand que possible et choisir j_1 tel que :

$$|E_{j_1}| = \max_{j \in J_{NN}} |E_j|,$$

avec J_{NN} représente le sous ensemble de J_N des indices non optimaux (ne vérifient pas le critère d'optimalité), alors j_1 sera indice de support.

Construction d'une direction d'amélioration adaptée

Considérons la métrique suivante pour les composantes non supports de la direction admissible l :

$$d_j^- - x_j \leq l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N. \quad (\text{A.11})$$

Cette métrique dépend du plan courant x , et de ce fait, elle est dite **adaptée**. Les composantes (3.11) se calculent en rendant maximal l'accroissement de la fonction objectif dans l'espace des variables non supports.

Ainsi, en tenant compte de la métrique (3.11), l'accroissement de la fonction objectif atteint son maximum pour les valeurs des composantes non supports suivantes :

$$l_j = \begin{cases} d_j^- - x_j & \text{si } E_j > 0, \\ d_j^+ - x_j & \text{si } E_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j = 0. \end{cases} \quad j \in J_N, \quad (\text{A.12})$$

On a aussi :

$$Al = A_{sup}l_{sup} + A_N l_N = 0 \Rightarrow A_{sup}l_{sup} = -A_N l_N.$$

Alors on aura :

$$l_{sup} = -A_{sup}^{-1} A_N l_N. \quad (\text{A.13})$$

Calcul du pas maximale θ^0

Construisons un nouveau plan $\bar{x}$ sous la forme :

$$\bar{x} = x + \theta^0 l,$$

où l est la direction d'amélioration définie par (3.12),(3.13) et le nombre θ^0 est le pas le long de cette direction ; ce dernier se calcule de façon à ce que les contraintes générales et simples soient satisfaites. Pour les contraintes simples on doit avoir :

$$d_j^- - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{sup}, \quad (\text{A.14})$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N. \quad (\text{A.15})$$

De (3.12) et (3.15) nous déduisons que :

$$\theta^0 \leq 1. \quad (\text{A.16})$$

En outre, pour satisfaire les contraintes (3.14) . On doit choisir θ^0 tel que :

$$\theta^0 \leq \theta_{j0}, \quad \theta_{j0} = \min_{j \in J_{sup}} \theta_j, \quad (\text{A.17})$$

où :

$$\theta_j = \begin{cases} (d_j^+ - x_j)/l_j & \text{si } l_j > 0, \\ (d_j^- - x_j)/l_j & \text{si } l_j < 0, \\ \infty & \text{si } l_j = 0. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

De (3.16),(3.17) la valeur de θ^0 choisie comme suit :

$$\theta^0 = \min \{ \theta_{j0}, 1 \}. \quad (\text{A.19})$$

Ce choix va nous assurer que lors du déplacement le long de la direction l , les contraintes (3.14) (3.15) ne seront pas violées, c'est-à-dire il va nous garantir l'admissibilité du nouveau plan $\bar{x}$. Dans ce cas l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur de $Z(\bar{x})$ sera majoré comme suit :

$$Z(x^0) - Z(\bar{x}) = c'x^0 - c'\bar{x} = c'x^0 - c'x - \theta^0 c'l \leq \beta(x, J_{sup}) - \theta^0 c'l. \quad (\text{A.20})$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \beta(x, J_{sup}) - \theta^0 c'l &= \beta(x, J_{sup}) - \theta^0 (u' A_{sup} - E')l \\ &= \beta(x, J_{sup}) + \theta^0 (E'l - u' A_{sup}l) \end{aligned}$$

$$= \beta(x, J_{sup}) - \theta^0 \beta(x, J_{sup}) = (1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}).$$

Finalement, nous aurons :

$$Z(x^0) - Z(\bar{x}) \leq (1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}). \quad (\text{A.21})$$

De là, trois cas peuvent se présenter :

1. $\theta^0 = 1$ le plan $\bar{x} = x + l$ vérifie le critère d'optimalité, il est donc optimal et le processus de résolution est terminé.
2. $(1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}) \leq \varepsilon$: le plan $\bar{x}$ est donc ε -optimal et le processus de résolution peut être arrêté.
3. $(1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}) > \varepsilon$: poser $\bar{J}_{sup} = (J_{sup} \setminus j_0) \cup j_1$, $J_N = (J_N \setminus j_1) \cup j_0$ et passer à l'itération suivante avec $\bar{x} = x$, $\bar{J}_{sup} = J_{sup}$.

Conclusion

La méthode que nous avons présentée a la particularité de tenir compte des spécificités des problèmes tels qu'ils sont formulés lors de leur modélisation première.

Outre la méthode du simplexe, la méthode adaptée possède une autre métrique pour le choix de la direction d'amélioration, elle à aussi un critère d'arrêt, si une certaine précision obtenue est satisfaisante : en effet, le calcul d'un nombre appelé estimation de suboptimalité permet d'estimer l'écart entre la valeur de la fonction objectif à une itération donnée et sa valeur optimale ; si cet écart est inférieur à ε (ε est un nombre positif ou nul donné à l'avance), on dit que la solution réalisable obtenue est ε -optimale ou suboptimale.

En pratique, on peut alors arrêter le processus de résolution dès que la précision obtenue sera suffisante, cela évitera de faire encore de nombreuses itérations pour obtenir qu'une amélioration négligeable de la fonction objectif.

Bibliographie

- [1] M. Azi, Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire et application en économie financière, Mémoire de magister, Université A. Mira de Béjaia, 2010.
- [2] Ch. Bennani, Stabilisation et estimation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires et applications, Mémoire de magister, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2011.
- [3] M. O. Bibi, Support Method for Solving a Linear-Quadratic Problem with Polyhedral Constraints on Control. Optimization, 1996, 37 :139 - 149.
- [4] B. Bonnard, M. Chyba, The role of singular trajectories in control theory, Math. Monograph, Springer-Verlag, 2003.
- [5] S. Boukouira, I. Metaai, Optimisation D'un Système Dynamique, Mémoire de mastre, Centre universitaire de Mila, 2013.
- [6] N. Dehbi, Contrôle optimal : optimisation d'une production céréalière. General Mathematics. Université d'Orléans ; Université de Tizi-Ouzou (Algérie), 2012.
- [7] Lawrence C. Evans, An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory Version 0.2, Department of Mathematics University of California, Berkeley.
- [8] R. Gabasov, N. M. Dmitruk, and F. M. Kirillova, Optimization of the Multidimensional Control Systems with Parallelepiped Constraints¹, Belarussian State University, Minsk, Belarus Institute of Mathematics, Belarus Received September 20, 2000.
- [9] R. Gabasov, F.M.Kirillova and N.V.Balashevich, Open-Loop And Closed-Loop Optimisation Of Linear Control Systems, Asian Journal of Control, Vol. 2, No. 3, pp. 155-168, September 2000.
- [10] C. Lobry, T. Sari, Introduction à la théorie du contrôle, INRIA Sophia Antipolis, Laboratoire de Mathématiques, 2004.
- [11] K. Louadj, Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal, Mémoire de Doctorat, TIZI OUZOU, 2012.
- [12] D. Ouidja, Principe du maximum et méthode de Tir, Mémoire de Magister, TIZI-OUZOU, 2011.

- [13] N. SOUILAH, A. SEDDIKI, Méthode adaptée pour la résolution d'un programme linéaire, Mémoire de master, Centre universitaire de Mila, 2013.
- [14] L. Pontryagin, V. Boltyanski, R. Gamkrelidze, E. Michtchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, L. W. Neustadt, New York, 1962.
- [15] E. Trelat, Contrôle optimal : théorie et application, Vuibert, collection Mathématique concrètes, Paris, 2005.

Table des figures

1.1	Bouclage	16
-----	--------------------	----

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les problèmes de contrôle optimale, et de résoudre ensuite certains de ces problèmes en appliquant une méthode de contrôle, dite adaptée. Nous avons abordés, au premier lieu, la théorie de contrôle optimal, et certains éléments de base de cette théorie.

Au second lieu, nous avons étudié les conditions d'optimalité, qui se base sur le Principe du Maximum de Pontriaguine, et la méthode de tir, qui est une méthode numérique pour résoudre un problème de contrôle optimal.

Finalement, nous avons étudié la méthode adaptée pour la résolution d'un problème de contrôle optimal avec des contraintes égalités et commande vectoriel. Sa particularité réside dans le fait qu'elle évite toute transformation préliminaire du problème, et elle possède un critère de suboptimalité qui permet d'arrêter l'algorithme avec une précision désirée.

Mots clés : Contrôle optimal, contrôlabilité, Principe du Maximum de Pontryagin, Méthode adaptée, commande de support.

Abstract

The objective of this paper is to study the problems of optimal control, and also to solve some of these problems by applying a control method, called adaptive method. At first, we study the theory of optimal control, and some elements of this theories. Secondly, we studied the optimality conditions, which it based on the Maximum Principle of Pontryagin after that, we present the shooting method, which is a numerical method for solving optimal control problem.

Finally, we study the adaptive method for solving a problem of optimal control, with equality constraints. The particularity of this method is the fact that it avoids the preliminary transformation of the problem, and he has a suboptimal criterion which stops the algorithm with the desired accuracy.

Keywords : Optimal control, controllability, the Pontryagin Maximum Principle, Adaptive method, support.