ƕøĭĞÿʅ ƕøĭƱƥƨǅĭɋ ƕøĭƥøǝƦɯ ƕøĭƥǋǅɯ
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ĭøǅƚɏ ƘøѲĠɲ Ĭøɪƒɏ !øøĭƚɏ ɣƥƐƦǌ
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :…………..

Centre Universitaire

Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: - Filière Mathématiques
- Spécialité Mathématiques fondamentales et appliquées

Groupe n-abélien Généralisé

Préparé par :
Derbala Somia
Yacoub Fatiha

Soutenue devant le jury :
Président Kaeouach Ismail (M.A.A)
Examinateur Khalfaoui Mohamed (M.A.B)

Encadrer par :
Daoui Amina **(M.A.A)**

Année universitaire : 2014 / 2015

Table des matières

Introduction Générale

La théorie des groupes est un dommaine mathématique, c'est la partie de l'algébre générale qui étudie les groupes et les structure algébrique.

L'une des origines de l'idée de groupe est l'étude des équations algébriques par **"Joseph-Louis Lagrange"** (1771). La terminologie de « **groupe** » est mise en évidence pour la première fois par **Evariste Galois** (1830). L'idée de groupe tient aussi ses sources de l'étude de nouvelles géométries, **"Félix Klein"** (1872), et de la théorie des nombres :" **Leonhard Euler"**, **"Carl Friedrich Gauss"**.

Actuellement, la théorie des groupes est l'un des aspects les plus attrayants des mathématiques. Ses applications dans les divers domaines scientifiques (mathématiques, physique, chimie etc...) prouvent que cette théorie est un outil très puissant dans le développement de la science.

Ce mémoire est réparti trois chapitres. Dans le premier chapitre on a donne les notions des bases sur : Les groupes, Homomorphismes des groupes et les groupes abéliens ; Le deuxième chapitre est une étude générale d'élément de la théorie des groupes. On a donne la notion de suite de composition, les groupes : résolubles, nilpotents, libres et d'Engle.

En fin, dans le dernièr chapitre, On a exposé les groupes : n-abélien, n-abélien généralisé et aussi on a étudie les groupes 3-abélien généralisé.

Chapitre 1

Notions de base

Dans ce chapitre on vat étudier les notion suivante : le groupe (Simple, Quotient et abélien), le sous-groupe (normal, caractéristique) et les classes des groupes.

1.1 Groupes

1.1.1 Loi de composition interne

Définition 1.1.1
Soit E un ensemble non vide, On appelle ***loi de composition interne*** *tout application :*

$$\begin{array}{rcl} "\cdot" : E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array}$$

On peut utiliser d'autre notation $*$, $\perp$, $\circ$...
Le couple $(E, \cdot)$ est appelé un ***systéme algébrique.***

Exemple 1.1.2
1) *Les opération usuelles $+$, $\cdot$ sont des lois de composition interne sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.*
2) *La composition des applications $\circ$ est une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathcal{F}(E, E)$ des applications de E dans E.*
3) $\cap$, $\cup$ *(intersection, union) sont des lois de composition interne sur $\mathcal{P}(E)$.*

Définition 1.1.3
$"\cdot"$ *une loi de composition interne sur E, On dit que :*
1) *La loi $\cdot$ est* ***commutative*** *si et seulement si :*

$$\forall x, y \in E : x \cdot y = y \cdot x$$

2) *La loi $\cdot$ est* ***associative*** *si et seulement si :*

$$\forall x, y, z \in E : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

3) *$e \in E$ est dit* ***élément neutre*** *pour la loi $\cdot$ si et seulement si :*

$$\forall x \in E : x \cdot e = e \cdot x = x$$

4) *$x \in E$ posséd un* ***symétrique*** *$x^{'}$ si et seulement si :*

$$\forall x \in E / \exists x^{'} : x \cdot x^{'} = x^{'} \cdot x = e$$

Notation 1.1.4
1) *Lorsque la loi est notée additivement $+$, l'élément neutre est 0_E et le symétrique de x est noté $-x$.*
2) *Si la loi est notée multiplicativement $\cdot$, alors l'élément neutre est noté 1_E et le symétrique de x noté x^{-1}.*

1.1.2 Le groupe

Soit G un ensemble non vide.

Définition 1.1.5
Un groupe est le couple formé par l'ensemble G et la loi de composition interne $\cdot$ tel que :
1) *La loi $\cdot$ est associative.*
2) *La loi $\cdot$ admet un élément neutre.*
3) *Chaque élément de G admet un symetrique.*
remarquons que la loi $\cdot$ n'est pas forcément commutative, si la loi $\cdot$ est commutative on dit que le groupe G est ***commutatif*** *ou* ***abélien.***

Proposition 1.1.6
1) *Si la loi $\cdot$ admet un élément neutre, alors celui-ci est unique.*
2) *Si $x \in G$ est inversible alors x admet un unique inverse.*

Preuve.
1) Soit e un élément neutre de G.
Supposons qu'il existe $\grave{e} \in G$ tel que $\grave{e}$ un autre élément neutre de G
Comme $e \in G$, on a $e\grave{e} = e$ (1)
Mais, comme e est un élément neutre de G, on a $e\grave{e} = \grave{e}$ (2)
De (1) et (2) $e\grave{e} = e = \grave{e}$

Donc la loi $\cdot$ admet un élément neutre unique.
2) Soient e l'élément neutre de G et y est un inverse de x
Supposont qu'il existe z appertenant à G tel que :

$$xz = zx = e$$

On a

$$\begin{aligned} y &= ye \\ &= y(xz) \\ &= (yx)z \\ &= ez \\ &= z \end{aligned}$$

alors x admet un unique inverse. ∎

Définition 1.1.7
On dit que G est un groupe fini si l'ensemble G est fini, dans ce cas le cardinal de G est l'ordre de G et noté $|G|$.
Si G n'est pas fini alors G est d'ordre infini.

Exemple 1.1.8
1) $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+),(\mathbb{Q}/\{0\},\cdot),(\mathbb{R}/\{0\},\cdot)$ *sont des groupes abéliens infinis.*
2) $(\{-1,+1\},\cdot)$ *est un groupe abélien fini d'ordre* 2.
3) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ *, où $n \in \mathbb{N}^*$ est un groupe fini d'ordre n.*

Définition 1.1.9
(1) *Soit G un groupe, On appelle* **centre** *de G l'ensemble $Z(G)$ définit par :*

$$Z(G) = \{a \in G \mid \forall g \in G,\ ag = ga\}$$

(2) *Soit G un groupe, on appelle* **m-*centre*** *de G l'ensemble $Z(G,m)$ définit par :*

$$Z(G,m) = \{a \in G/(ax)^m = a^m x^m \text{ et } (xa)^m = x^m a^m, \forall x \in G\}$$

Définition 1.1.10 *Le centralisateur d'un élément a fixé de G est l'ensemble :*

$$Z_a = \{g \in G \mid a.g = g.a\}$$

Remarque 1.1.11
1) *L'ordre d'un groupe est son cardinal.*

2) *L'ordre d'un élément est l'ordre du sous groupe engendré par cet élément.*
3) *L'exposant d'un groupe est le $PPCM$ (Plus Petit Commun Multiple) des ordres (finis dans le cas des groupes infinis) de ses éléments.*

Définition 1.1.12 ***(Groupe de torsion)***
Un élément d'un groupe est dit élément de torsion s'il est d'ordre fini.

Proposition 1.1.13
Soit G un groupe abélien ; l'ensemble des éléments de torsion de G est un sous-groupe de G, noté T, et G/T est sans-torsion.

1.1.3 Sous-groupes

Définition 1.1.14
*On appelle **sous groupe** d'un groupe $(G, \cdot)$ tout partie non vide H de G qu'est elle même un groupe pour la loi restreinte à H.*

Proposition 1.1.15
*Soit H une partie d'un groupe G. Alors H est une **sous groupe** de G si et seulement si les conditions suivantes sont vérifies :*
a) $H \neq \emptyset$;
b) $\forall x \in H : x^{-1} \in H$;
c) $\forall x, y \in H : x \cdot y \in H$.
Les deux conditions b) et c) sont équivalentes à la condition b') suivante :
b') $\forall x, y \in H : x \cdot y^{-1} \in H$.

Remarque 1.1.16
- Si $H \subseteq G$ *est un sous groupe de* G, *on note :*

$$H \leq G$$

- Si $H \subset G$ *est un sous-groupe propre de* G, *on note :*

$$H < G$$

- Il est claire que G et $\{e\}$ sont des sous-groupes de G.

1.1.4 Sous-groupe normal

Théorème 1.1.17
H est un sous-groupe normal d'un groupe G si seulement s'il vérifie l'une des cinq condi-

tions suivantes :

1. $Hx = xH, \forall x \in G$.
2. $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$.
3. $x^{-1}Hx = H, \forall x \in G$.
4. $xhx^{-1} \in H, \forall h \in H, \forall x \in G$.
5. $x^{-1}hx \in H, \forall h \in H, \forall x \in G$.

Notation 1.1.18
On écrit $H \lhd G$ pour exprimer que H est un sous groupe normale de G.

1.1.5 Groupe simple

Définition 1.1.19 *Un groupe G est dit **simple** si $G \neq \{e\}$ et G n'a pas d'autre sous groupe normal que G et $\{e\}$.*

1.1.6 Groupe quotient

Définition 1.1.20 *Si $H \lhd G$, le groupe G/H est appelé **groupe quotient** de G par le sous-groupe normal H.*

Théorème 1.1.21
Si H est un sous-groupe normal d'un groupe G, alors l'ensemble quotient G/H peut être muni de la loi de composition quotient induit par celle de G, telle que $\overline{x}\overline{y} = \overline{xy}\ \forall \overline{x}, \overline{y}$ dans G/H ; relativement à cette loi G/H est un groupe.

Preuve.
Soient G un groupe, $H \lhd G$ et $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ dans G/H alors :

$$\begin{aligned} \overline{x} \cdot (\overline{y} \cdot \overline{z}) &= \overline{x} \cdot (\overline{y \cdot z}) \\ &= \overline{x \cdot (y \cdot z)} \\ &= \overline{(x \cdot y) \cdot z} \\ &= \overline{(x \cdot y)} \cdot \overline{z} \\ &= (\overline{x} \cdot \overline{y}) \cdot \overline{z} \end{aligned}$$

H est un l'élément neutre de G/H
$\overline{x} \cdot \overline{x^{-1}} = \overline{x \cdot x^{-1}} = \overline{e} = eH = H$
Donc G/H est un groupe. ■

Extension de groupe :

Définition 1.1.22 *une extension de groupe est une manière de décrire un groupe en termes de deux groupes.*
Autrement dit : G est une extension de Q par N si N est un sous-groupe normal de G et Q est le groupe quotient G/N.

1.2 Homomorphismes des groupes

1.2.1 Morphismes des groupes

Définition 1.2.1
*Soient $(G_1, *), (G_2, \circ)$ deux groupes et $f : (G_1, *) \longrightarrow (G_2, \circ)$ une application, on dit que f est **un morphisme (ie** homomorphisme) des groupes G_1 et G_2 si :*

$$\forall x, y \in G_1 : f(x * y) = f(x) \circ f(y)$$

L'ensemble des homomorphismes de G_1 dans G_2 est noté $\mathbf{Hom}(\mathbf{G_1}, \mathbf{G_2})$.

Exemple 1.2.2
L'application $f : (\mathbb{C}^*, .) \to (\mathbb{R}^*, .)$ telle que : $f(z) = |z|$ est un morphisme de groupe car :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^* : f(z_1.z_2) = |z_1.z_2| = |z_1| \, . \, |z_2| = f(z_1).f(z_2)$$

Proposition 1.2.3
Soit $f : G_1 \to G_2$ un homomorphisme de groupe alors :
1) $f(e_1) = e_2$
2) *Pour tout élément x de G_1, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$*
3) *Pour tout entier non nul, $f(x^n) = f(x)^n$ et $f(x^{-n}) = f(x)^{-n}$.*

Preuve.
1) *Pour tout $x \in G_1$: on a $f(x) = f(x \cdot e_1) = f(x)f(e_1)$*
or $f(x) \in G_2 \Rightarrow f(x) = f(x)e_2$
donc $f(x)f(e_1) = f(x)e_2$
D'ou : $f(e_1) = e_2$.
2) *Pour tout $x \in G_1 : f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e_1)$ alors $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.*
3) *Pour $n = 0, x^0 = e_1$ et $(f(x))^0 = e_2$ or $f(e_1) = e_2$*
Alors : $f(x^0) = (f(x))^0$.
Pour $n > 0, x^n = \underbrace{xx...x}_{n\ fois}$ d'ou $f(x^n) = \underbrace{f(x)f(x)...f(x)}_{n\ fois}$ donc : $f(x^n) = (f(x))^n$.

Pour $n < 0$ *on pose :*

$n = -n'$ *et* $n' > 0 : x^n = (x^{-1})^{n'} \Rightarrow f(x^n) = f(x^{-1})^{n'} = ((f(x))^{-1})^{n'} = (f(x))^{-n'}$

D'ou : $f(x^n) = f(x)^n$. ■

1.2.2 Noyau et image d'un morphisme de groupe

Définition 1.2.4

Soit $f : (G_1, *) \to (G_2, \circ)$ *un morphisme de groupe on appelle* ***noyau*** *de* f *et l'on note* $\ker(f)$ *l'ensemble* $f^{-1}(\{e_2\})$ *, ou* e_2 *désigne le neutre de* $(G_2, \circ)$ *.*

Ainsi $\ker(f) = \{g \in G_1, f(g) = e_2\} = f^{-1}(\{e_2\})$ *.*

Définition 1.2.5

Soit $f : (G_1, *) \to (G_2, \circ)$ *un morphisme de groupe on appelle* ***image*** *de* f *et on note* $\mathrm{Im}(f)$ *l'ensemble* $f(G_1)$ *.*

Ainsi $\mathrm{Im}(f) = f(G_1) = \{f(g), g \in G_1\}$ *.*

Proposition 1.2.6

L'image et le noyau d'un morphisme de groupe $f : (G_1, *) \to (G_2, \circ)$ *sont respectivement des sous-groupes de* $(G_2, \circ)$ *et* $(G_1, *)$ *.*

Preuve.

• $\ker(f) \neq \phi$ *car* $e_1 \in \ker(f)$ *.*

Soient x *et* y *dans* $\ker(f)$ *on a :*

$$\begin{aligned} f(x * y^{-1}) &= f(x) \circ f(y^{-1}) \\ &= f(x) \circ f(y)^{-1} \\ &= e_2 \circ e_2^{-1} \\ &= e_2 \end{aligned}$$

donc $x * y^{-1} \in \ker(f)$ *.*

Donc $\ker(f)$ *est un sous-groupe de* $(G_{1,}*)$

• *Comme* $e_2 = f(e_1) \in \mathrm{Im}(f)$ *, On a* $\mathrm{Im}(f) \neq \phi$ *.*

Soient y *et* y' *dans* $\mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists x$ *et* x' *dans* G_1 *tels que :* $\left\{\begin{array}{c} y = f(x) \\ \text{et} \\ y' = f(x') \end{array}\right.$.

On a donc :

$$\begin{aligned} y' \circ y^{-1} &= f(x') \circ f(x)^{-1} \\ &= f(x') \circ f(x^{-1}) \\ &= f(x' * x^{-1}) \in \mathrm{Im}(f) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-groupe de* $(G_{2,}\circ)$ *.* ■

Remarque 1.2.7
(1) $H_1 \leq G_1 \Rightarrow f(H_1) \leq G_2$.
(2) $H_2 \leq G_2 \Rightarrow f^{-1}(H_2) \leq G_1$.

Proposition 1.2.8
Soient $f : (G_{1,}*) \to (G_{2,}\circ)$ *un morphisme de groupes :*
(1) f *est injectif si et seulement si* $\ker(f) = \{e_1\}$ *. ou* e_1 *désigne le neutre de* $(G_1, *)$.
(2) f *est surjectif si et seulement si* $\operatorname{Im}(f) = G_2$.

Preuve.
(1) Supposons f injectif. Soit $x \in \ker(f)$.
Comme $f(e_1) = e_2$
On a : $f(x) = f(e_1)$ donc par injectivité de f , on a : $x = e_1$.
Ainsi $\ker(f) = \{e_1\}$.
Réciproquement supposons que $\ker(f) = \{e_1\}$ et soient x et y dans G_1 tels que : $f(x) = f(y)$
on a alors : $f(x * y^{-1}) = e_2$ et $x * y^{-1} \in \ker(f) = \{e_1\}$
d'ou $x * y^{-1} = e_1$
Puis $x = y$.
L'application f est par conséquent injective.
(2) La proposition est claire et valable pour toute application f de G_1 dans G_2 en particulier pour un morphisme. ■

Définition 1.2.9 ***(Endomorphisme)***
Soit G un groupe et f est un morphisme de G dans G, alors f est un endomorphisme du groupe G et on note $f \in \mathbf{End(G)}$.

1.2.3 Isomorphismes

Définition 1.2.10
Soient G_1 et G_2 deux groupes et f est un morphisme de groupes
Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme de G_1 dans G_2. Dans ce cas on dit que G_1 et G_2 sont isomorphes (on note $\mathbf{G_1} \simeq \mathbf{G_2}$ *).*

Exemple 1.2.11
L'application exponentielle :

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$x \mapsto e^x$$

est un isomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ vers le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$.

Proposition 1.2.12
Soient G_1 et G_2 deux groupes isomorphes. Alors G_1 est abélien si et seulement si G_2 est abélien.

Preuve.
Soient G_1 un groupe abélien et G_2 un groupe, et soit f isomorphisme de G_1 dans G_2.
Soient x_2 ,y_2 appartenant à G_2.
f etant bijective donc il existe x_1 et y_1 dans G_1 tels que :

$$x_2 = f(x_1) \ et \ y_2 = f(y_1) \ .$$

f etant un homomorphisme donc on a

$$\begin{aligned} x_2y_2 &= f(x_1y_1) \\ &= f(y_1x_1) \\ &= f(y_1)f(x_1) \\ &= y_2x_2 \end{aligned}$$

Donc G_2 est abélien si G_1 est abélien.
Soient G_2 un groupe abélien et G_1 un groupe on a

$$\begin{aligned} f(x_1y_1) &= x_2y_2 \\ &= y_2x_2 \\ &= f(y_1)f(x_1) \\ &= f(y_1x_1) \end{aligned}$$

Et donc comme f est injective $x_1y_1 = y_1x_1$ et par conséquent G_1 est abélien. ■

1.2.4 Automorphismes

Définition 1.2.13
Un automorphisme d'un groupe G est un isomorphisme de G dans G, l'ensemble des automorphisme de G est noté **Aut(G)**

1.3 Les groupes abéliens

1.3.1 commutant et commutateur

Définition 1.3.1
(1) *On appelle* ***commutateur*** *de deux éléments $x, y \in G$, l'élément de G noté* $[x, y]$

définie par :
$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy \ .$$

(2) *Le* **m-*commutateur*** *de* x, y *est défini par :*
$$[x, y]_m = x^{-m}y^{-m}(xy)^m$$

Lemme 1.3.2
Deux éléments $x, y \in G$ *commutent si et seulement si leurs commutateur* $[x, y] = 1_G$.

Conséquence
G est abélien $\Leftrightarrow \forall x, y \in G : [x, y] = 1_G$.
Preuve. Soient $x, y \in G$
Comme G est abélien $\Leftrightarrow xy = yx$
$\Leftrightarrow y^{-1}xy = x$
$\Leftrightarrow x^{-1}y^{-1}xy = 1_G$
$\Leftrightarrow [x, y] = 1_G$ ■

Définition 1.3.3
Soit G un groupe, on appelle ***commutant*** *de G noté :* $[G, G]$ *le plus petit sous-groupe qui contient* $C = \{[x, y] \ / \ x, y \in G\}$.

Conséquence
Le commutant $[G, G]$ est le sous-groupe engendré par C alors :
$$[G, G] = \langle C \rangle = \langle \{[x, y] \ \forall \ x, y \in G\} \rangle \ .$$

Remarque 1.3.4
Le commutant $[G, G]$ *est également appelé la première dérivé du groupe G il est souvent noté* $G^{(1)}$ *ou* G'.

Théorème 1.3.5 *Soit G un groupe ; on a :*
$$G' \lhd G$$

Preuve.
Soient $[x, y] \in G'$ et $z \in G$ alors
$$z[x, y]z^{-1} = [x, y]^z = [x^z, y^z] \in G' \ ;$$

Donc : $G' \lhd G$ ■

Proposition 1.3.6
Si $N \lhd G$ *, alors* $\dfrac{G}{N}$ *est un groupe abélien si et seulement si* $G' \subseteq N$ *; en particulier* $\dfrac{G}{G'}$ *est abélien.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
\text{Soient } \bar{x}, \bar{y} \in \frac{G}{N} \text{ abélien } &\Leftrightarrow [\bar{x}, \bar{y}] = N \\
&\Leftrightarrow \bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1}\bar{x}\bar{y} = N \\
&\Leftrightarrow \overline{x^{-1}y^{-1}xy} = N \\
&\Leftrightarrow x^{-1}y^{-1}xyN = N \\
&\Leftrightarrow [x, y] \in N
\end{aligned}$$

D'ou $G' \subseteq N$. ■

1.3.2 Les dérivées d'ordres supérieurs

Soit G un groupe, on peut considères $G' \lhd G$ et on note $G^{(2)}$ le commutant de G' telle que :

$$G^{(2)} = [[G, G], [G, G]]$$

Définition 1.3.7
On appelle $\boldsymbol{n}^{\acute{e}me}$ ***dérivée*** *de* G *noté* $G^{(n)}$ *la dérivée de* $G^{(n-1)}$ *donc :*

$$G^{(n)} = (G^{(n-1)})'$$

Remarque 1.3.8
Si G *est un groupe on a : alors la suite des sous groupes suivant*

$$G^{(n)} \lhd G^{(n-1)} \lhd ... \lhd G^{(2)} \lhd G^{(1)} \lhd G$$

1.3.3 Sous-groupes caractéristiques

Définition 1.3.9
Soient G *un groupe et* H *un sous-groupe de* G *; on dit* H ***caractéristique*** *dans* G *si :*

$$\forall \alpha \in Aut(G),\ \alpha(H) = H$$

Notation :
On écrira $H \sqsubset G$ pour exprimer que H est caractéristique dans G.

Proposition 1.3.10

Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes de G on a :

1) $e \sqsubset G$ *et* $G \sqsubset G$.

2) $G^{(1)} = [G, G]$ *et* $Z(G)$ *sont caractéristiques dans* G.

3) $K \sqsubset H$ *et* $H \sqsubset G \Rightarrow K \sqsubset G$.

Preuve.

1) Pour tout $\alpha \in Aut(G)$ on a : $\begin{cases} \alpha(e) = e \\ \alpha(G) = G \end{cases}$

alors $e \sqsubset G$ et $G \sqsubset G$.

2) Soit $\alpha \in Aut(G)$

• Pour montrer que $G^{(1)} \sqsubset G$ il suffit de montrer que :

$\alpha([G, G]) \subseteq [G, G]$ et $[G, G] \subseteq \alpha([G, G])$.

Soit $[x, y] \in [G, G]$ on a $\begin{aligned}[t] \alpha([x, y]) &= \alpha(x^{-1}y^{-1}xy) \\ &= \alpha^{-1}(x)\alpha^{-1}(y)\alpha(x)\alpha(y) \\ &= [\alpha(x), \alpha(y)] \end{aligned}$

alors $\alpha([G, G]) \subseteq [G, G]$ ....(1)

de (1) on a $\alpha^{-1}(\alpha([G, G])) \supset \alpha^{-1}([G, G])$ $\begin{aligned}[t] &\Rightarrow \alpha^{-1}([G, G]) \subset [G, G] \\ &\Rightarrow \alpha(\alpha^{-1}([G, G])) \subset \alpha([G, G]) \\ &\Rightarrow [G, G] \subset \alpha([G, G])\text{............(2)} \end{aligned}$

de (1) et (2) $\alpha([G, G]) = [G, G]$, donc

$$G^{(1)} \sqsubset G$$

Montrons que $Z(G) \sqsubset G$

Soient $a \in Z(G)$ et $x \in G$, $\Rightarrow$ $xa = ax$ $\begin{aligned}[t] &\Rightarrow \alpha(xa) = \alpha(ax) \\ &\Rightarrow \alpha(x)\alpha(a) = \alpha(a)\alpha(x) \\ &\Rightarrow \alpha(a) \in Z(G) \\ &\Rightarrow \alpha(Z(G)) \subset Z(G)\text{.......... (1)} \end{aligned}$

De plus on a : de (1) $\alpha^{-1}(\alpha(Z(G))) \supset \alpha^{-1}(Z(G))$ $\begin{aligned}[t] &\Rightarrow \alpha^{-1}(Z(G)) \subset Z(G) \\ &\Rightarrow \alpha(\alpha^{-1}(Z(G))) \subset \alpha(Z(G)) \\ &\Rightarrow Z(G) \subset \alpha(Z(G))\text{.........(2)} \end{aligned}$

de (1) et (2) $\alpha(Z(G)) = Z(G)$, d'ou

$$Z(G) \sqsubset G$$

3) On a :

$$\begin{cases} K \sqsubset H \Rightarrow \forall \alpha \in Aut(H), \alpha(K) = K \\ \text{et} \\ H \sqsubset G \Rightarrow \forall \alpha \in Aut(G), \alpha(H) = H \end{cases}$$

La réstriction de α sur H est un $Aut(H)$, par suite $\alpha_{/H}(K) = K$ d'ou $K \sqsubset G$. ■

1.4 Classe de groupe

Définition 1.4.1
Une classe de groupe χ est une classe dont les objets sont des groupes vérifiant les conditions suivant :
a) χ contenant le groupe trivial.
b) Si G_1, G_2 sont deux groupes isomorphes i.e : $G_1 \simeq G_2$, alors $(G_1 \in \chi) \Rightarrow (G_2 \in \chi)$ et on dit que G_1 est un χ-groupe.

Définition 1.4.2
χ_1 et χ_2 deux classes de groupe, le produit $\chi_1\chi_2$ est la classe de tous les groupes G admettant un sous groupe normal N de G tel que $N \in \chi_1$ et $G/N \in \chi_2$, on dit aussi que $\chi_1\chi_2$ est la classe de χ_1 par χ_2.

Proposition 1.4.3
a) Le produit de classe de groupe n'est ni commutatif ni associatif.
b) $\chi_1 (\chi_2\chi_3) \leq (\chi_1\chi_2) \chi_3, \forall \chi_1, \chi_2, \chi_3$.

Chapitre 2

Élément de la théorie de groupe

Ce chapitre est consacré sur les notion suivante :
La suite de composition et la structure des groupes : résolubles, nilpotents, libres et Engel.

2.1 Suite de composition

Définition 2.1.1 *Soit G un groupe.*
a) Une ***suite de composition*** *de G est une suite finie de sous-groupe G_i de G, $0 \leq i \leq n$ du type $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \cdots \geq G_i \geq G_{i+1} \geq \cdots \geq G_n = \{e\}$, telle que*

$$\{e\} = G_n \lhd G_{n-1} \lhd \cdots \lhd G_{i+1} \lhd G_i \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0 = G$$

b) Les groupes quotients G_i/G_{i+1} sont appelés les ***quotients*** *de la suite de composition et n est sa* ***longueur*** *(n est le nombre des quotients).*
c) Si pour tout i $(0 \leq i \leq n-1)$ on a : $G_i \neq G_{i+1}$, on dit que la suite de composition est ***strictement décroissante****.*

Définition 2.1.2
Soient Σ et Σ' deux suites de composition d'un groupe G :
$\Sigma : G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = \{e\}$.
$\Sigma' : K = K_0 \geq K_1 \geq \cdots \geq K_p = \{e\}$ ..
On dit que Σ' est un ***raffinement*** *de Σ, si $p \geq n$ et pour tout i, $0 \leq i \leq n$, il existe j_i, $0 \leq j_i \leq p$ tel que $G_i = K_{j_i}$ (autrement dit, la suite Σ est extraite de Σ'). On écrit alors $\Sigma \subseteq \Sigma'$. Si de plus, il existe j, $0 \leq j \leq p$, tel que pour tout i, $0 \leq i \leq n$, $K_j = G_i$, on dit que Σ' est un* ***raffinement propre*** *de Σ. On écrit alors $\Sigma \subset \Sigma'$.*

2.2 Groupes résolubles

Définition 2.2.1
Un groupe G est dit ***résoluble*** *s'il posséde une suite de composition dont les quotients sont abéliens.*

Exemple 2.2.2
Tout groupe abélien est résoluble. En effet, si G est abélien avec d'élément neutre e, la suite $\{e\} \leq G$ a comme unique quotient, le groupe $G/\{e\} = G$ qui est abélien alors G est résoluble.

Proposition 2.2.3
Le groupe G est ***résoluble*** *si et seulement s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $G^{(n)} = \{e\}$.*

Démonstration.
Si le groupe G est résoluble, il admet une suite de composition (que l'on peut supposer strictement décroissante)

$$\{e\} = G_n \lhd G_{n-1} \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0 = G$$

telle que G_i/G_{i+1} , $0 \leq i \leq n-1$, soient des groupes abéliens. Or, le groupe G_i/G_{i+1} est abélien si et seulement si $G^{(i+1)} \subset G_1^{(i)}$. D'où, par récurrence,

$$G^{(i+1)} \subset G_1^{(i)} \subset \cdots \subset G_i' \subset G_{i+1}$$

et en particulier, $\{e\} \subset G^{(n)} \subset G_n = \{e\}$.
Réciproquement, s'il existe $n \geq 0$ tel que $G^{(n)} = \{e\}$, on a une suite de composition

$$\{e\} = G^{(n)} \lhd G^{(n-1)} \lhd \cdots \lhd G^{(1)} \lhd G$$

Par construction, chaque quotient $G^{(i)}/G^{(i-1)}$ est abélien ; le groupe G est donc résoluble.

Définition 2.2.4
Le plus petit entier $n \geq 0$ vérifiant $G^{(n)} = \{e\}$ est appelé la ***classe de résolubilité*** *de G. On dit aussi que G est résoluble de classe n.*

Remarque 2.2.5
1) *Un groupe est résoluble de classe* 0 *si et seulement s'il est réduit à l'élément neutre.*
2) *Un groupe est résoluble de classe* 1 *si et seulement s'il est commutatif et non réduit à l'élément neutre.*

Théorème 2.2.6
Soient H un sous groupe de G alors on a :

$$x \in G^{(i)}.H \Longleftrightarrow \bar{x} \in (G/H)^{(i)}$$

Théorème 2.2.7
Soient G un groupe et H un sous groupe normale de G, alors on a :

$$G \text{ est résoluble} \Leftrightarrow H \text{ et } G/H \text{ sont résolubles}$$

Preuve.
($\Rightarrow$) Soit G un groupe résoluble
- On a : $H \leq G \quad \begin{array}{l} \Rightarrow e \in H^{(i)} \subset G^{(i)} = \{e\} \\ \Rightarrow H^{(i)} = \{e\} \end{array}$.

D'où : H est résoluble.
- Soit $\overline{x} \in \left(\frac{G}{H}\right)^{(i)}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad x \in G^{(i)}.H \\ &\Rightarrow \quad x \in H \\ &\Rightarrow \quad \exists \alpha \in H : x = \alpha \\ &\Rightarrow \quad \overline{x} = \bar{\alpha} = \alpha.H \\ &\Rightarrow \quad \overline{x} = H \\ &\Rightarrow \quad H \subseteq \left(\frac{G}{H}\right)^{(i)} \subseteq H \\ &\Rightarrow \quad \left(\frac{G}{H}\right)^{(i)} = H \end{aligned}$$

d'ou $\frac{G}{H}$ est résoluble.
($\Leftarrow$) Soient H et G/H sont résolubles

$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}^* : H^{(i)} = \{e\}$ et $\exists j \in \mathbb{N}^* : \left(\frac{G}{H}\right)^{(j)} = \{H\}$

Soit $x \in G^{(j)}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x \in G^{(j)}.H \\ &\Rightarrow \overline{x} \in \left(\frac{G}{H}\right)^{(j)} \\ &\Rightarrow \overline{x} = H \\ &\Rightarrow x \in H \\ &\Rightarrow G^{(j)} \subset H \\ &\Rightarrow \left(G^{(j)}\right)^{(i)} \subset H^{(i)} = \{e\} \\ &\Rightarrow \{e\} \subset (G)^{((j+i)} \subset \{e\} \\ &\Rightarrow \exists k = i + j \text{ tel que } G^{(k)} = \{e\}\,. \end{aligned}$$

D'ou G est résoluble. ■

Définition 2.2.8
Soit la suite $\Sigma : G_0 = G \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n$ *on dit que* Σ *est une suite abélien si tout les quotients* G_i/G_{i+1} *sont abélien,pour* $i = 1, ..., n$ *.*

Proposition 2.2.9 *Soit* G *un groupe,* G *est résoluble si l'admet une suite abélien.*

2.2.1 Groupe métabélien

Définition 2.2.10 *Un groupe résoluble de longueur* 2 *est dit groupe* ***métabélien.***

Proposition 2.2.11

$$(G \text{ est métabélien} \Leftrightarrow G' \text{est abélien})$$

Remarque 2.2.12
Un groupe G *est métabélien si l'admet un sous groupe propre non trivial* H *abélien et le quotient* G/H *abélien.*

2.2.2 Groupe polycyclique

Définition 2.2.13
Un groupe est dit ***polycyclique*** *s'il admet une suite de sous–groupes dont les quotients sont cycliques.*
Il est clair que :
-Tout groupe trivial est un groupe polycyclique.
-Tout groupe cyclique est un groupe polycyclique.
-Tout groupe polycyclique est un groupe résoluble de type fini.

2.3 Groupes nilpotents

2.3.1 Suites centrales

Définition 2.3.1
Soit G *un groupe, une suite de composition* $\Sigma : G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = \{e\}$ *est dit* ***centrale*** *si* Σ *est normale c'est-à-dire :* $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ *est normal*
et $\dfrac{G_i}{G_{i+1}} \leq Z\left(\dfrac{G}{G_{i+1}}\right)$ *, pour* $i = 0, ..., n-1$ *.*

Proposition 2.3.2 *la suite* Σ *est centrale si et seulement si* $[G_i, G] \leq G_{i+1}$ *.*

Preuve.

On a la suite Σ est centrale $\Leftrightarrow \dfrac{G_i}{G_{i+1}} \leq Z\left(\dfrac{G}{G_{i+1}}\right)$

• Soient $\overline{x} \in \dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ et $\overline{y} \in \dfrac{G}{G_{i+1}}$ tel que $x \in G_i$ et $y \in G$

On a : $\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x} \quad \Leftrightarrow \overline{xy} = \overline{yx}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow xyG_{i+1} = yxG_{i+1} \\ &\Leftrightarrow x^{-1}y^{-1}xyG_{i+1} = G_{i+1} \\ &\Leftrightarrow x^{-1}y^{-1}xy \in G_{i+1} \\ &\Leftrightarrow [x, y] \in G_{i+1} \end{aligned}$$

Donc $[G_i, G] \leq G_{i+1}$.

• Soient $x \in G_{i+1}$ et $g \in G$

On a : $x \in G_{i+1} \leq G_i \Rightarrow x \in G_i$

Mais $[G_i, G] \leq G_{i+1} \quad \Rightarrow [x, g] \in G_{i+1}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x^{-1}g^{-1}xg \in G_{i+1} \\ &\Rightarrow g^{-1}xg \in G_{i+1} \end{aligned}$$

D'ou $G_{i+1} \lhd G$. ■

Définition 2.3.3

Un groupe G est dit ***nilpotent*** *s'il possède une suite centrale.*

Suite centrale descendante

Définition 2.3.4

Soit G un groupe. On appelle ***suite centrale descendante*** *de G la suite $(\zeta_n(G))_{n\geq 1}$ de sous groupes de G définie par récurrence par :*

$\zeta_1(G) = G$.

$\zeta_{n+1}(G) = [G, \zeta_n(G)]$ *, pour tout* $n \geq 1$.

Définition 2.3.5

Un groupe G est dit ***nilpotent*** *s'il existe un nombre naturel $n \geq 0$ tel que $\zeta_{n+1}(G) = \{e\}$. Dans ce cas, le plus petit nombre naturel n vérifiant $\zeta_{n+1}(G) = \{e\}$ est appelé la* ***classe de nilpotence*** *de G. On dit aussi que G est nilpotent de classe n.*

Suite centrale ascendante

Étant donné un groupe G, on note :
$\gamma_0(G) = \{e\}$
$\gamma_1(G) = Z(G)$
$\gamma_2(G)$ est tel que $\quad Z\left(\dfrac{G}{\gamma(G)}\right) = \dfrac{\gamma_2(G)}{\gamma_1(G)}$
$\gamma_m(G)$ est tel que $\quad Z\left(\dfrac{G}{\gamma_{m-1}(G)}\right) = \dfrac{\gamma_m(G)}{\gamma_{m-1}(G)}$
On définit la chaine croissante des sous-groupes

$$\{e\} = \gamma_0(G) \leq \gamma_1(G) \leq \cdots \leq \gamma_{m-1}(G) \leq \gamma_m(G) \leq \cdots$$

avec : $\dfrac{\gamma_m(G)}{\gamma_{m-1}(G)} = Z\left(\dfrac{G}{\gamma_{m-1}(G)}\right)$, pour tout $\ m \in \mathbb{N}$.

Définition 2.3.6
Soit le groupe G a une suite centrale ascendante de longueur m, si la chaine $\{e\} = \gamma_0(G) \leq \gamma_1(G) \leq \cdots \leq \gamma_{m-1}(G) \leq \gamma_m(G) \leq \cdots$ *, c'écrit :*

$$\{e\} = \gamma_0(G) \leq \gamma_1(G) \leq \cdots \leq \gamma_{m-1}(G) \leq \gamma_m(G) = G$$

Proposition 2.3.7 *Un groupe G est nilpotent s'il possède une suite centrale ascendante de longueur m.*

2.3.2 Groupes nilpotents finis

Définition 2.3.8 *Soit p un nombre premier, on appelle **p-groupe fini** un groupe fini dont l'ordre est une puissance de p.*

Proposition 2.3.9 *Le centre d'un p-groupe fini $\ G \neq \{e\}\ $ n'est pas réduit a $\{e\}$.*

Corollaire 2.3.10 *Tout p-groupe fini est nilpotent.*

Proposition 2.3.11 ***(Théorème de Schmidt)***
Soit G un groupe fini dont tous les sous-groupes propres sont nilpotents. Alors, G est résoluble.

Propriété
1) Si G est un groupe nilpotent, alors tous les sous groupes de G sont nilpotents ainsi tous les quotients de G sont nilpotents.
2) Le produit cartisiante de deux groupes nilpotents est nilpotent.

Définition 2.3.12
*Soit un entier $m \geq 1$; la suite m-**centrale ascendante** $Z_i(G,m)$ est définie par :*

$Z_0(G,m) = 1$, $Z_1(G,m) = Z(G,m)$ *et* $Z_{i+1}(G,m)/Z_i(G,m) = Z(G/Z_i(G,m),m)$, $\quad (i \geq 1)$

Nous avons la suite :

$$1 = Z_0(G,m) \leq Z_1(G,m) \leq \cdots \leq Z_i(G,m) \leq Z_{i+1}(G,m) \leq \cdots$$

Un groupe G est dit **m-*nilpotent*** *de classe au plus K si $Z_k(G,m) = G$*

Proposition 2.3.13
Un sous-groupe d'un groupe n-nilpotent est n-nilpotent.

2.4 Groupes libres

Construction d'un groupe libre

Soit X un ensemble non vide ; I étant un ensemble de même cardinal que X, posons $X = \{x_i\}_{i \in I}$.

Considérons un ensemble disjoint de X et équipotent à X que nous noterons X^{-1}et dont nous écrirons les éléments sous la forme x_i^{-1}, pour $i \in I$ ($\ll x_i^{-1} \gg$ est ici, seulement, une notation, qui sera commode par la suite).

2.4.1 Notion du mot

Définition 2.4.1
On appelle mot sur $X \cup X^{-1}$ tout suite finie (ou ensemble fini ordonné) de n éléments de $X \cup X^{-1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Plusieurs éléments de cet ensemble pouvant être égaux ; n s'appelle la longueur du mot.
Par convention, il n'existe qu'un seul mot de longueur 0, que l'on notera 1 ; on l'appelle le mot vide, car il correspond à la partie vide de $X \cup X^{-1}$. Un mot de longueur $n > 0$ s'écrira sous la forme

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}, \text{ où } \varepsilon_j = \pm 1, \text{ pour tout } j \ (1 \leq j \leq n);$$

c'est-à-dire : $\begin{cases} \varepsilon_j = 1, & si\ x_{i_j}^{\varepsilon_j} \in x \\ \varepsilon_j = -1, & si\ x_{i_j}^{\varepsilon_j} \in x^{-1} \end{cases}$
On désignera par $(X \cup X^{-1})$ l'ensemble des mots sur $X \cup X^{-1}$.

Exemple 2.4.2 *Si* $X = \{x, y\}, x, yy^{-1}$, $x^{-1}yyxy, x^{-1}xx^{-1}$, 1 *sont des mots sur* $X \cup X^{-1}$.

2.4.2 Egalité de deux mots

D'une façon générale, dans $(X \cup X^{-1})$, on a :

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} = x_{j_1}^{\delta_1} x_{j_2}^{\delta_2} \cdots x_{j_p}^{\delta_p} \Leftrightarrow \begin{cases} n = p \\ x_{i_k}^{\varepsilon_k} = x_{j_k}^{\delta_k}, \forall k \ (1 \leq k \leq n) . \end{cases}$$

Dans le dernier exemple, tout les mots considérés sont distincts.

2.4.3 Notion de produit de mots

1. Quel que soit $w \in (X \cup X^{-1})$, on pose :

$$1w = w1 = w$$

2. Étant donné deux mots de longueurs non nulles dans $(X \cup X^{-1})$:

$$\begin{cases} u = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} \\ v = x_{j_1}^{\delta_1} x_{j_2}^{\delta_2} \cdots x_{j_p}^{\delta_p} \end{cases}$$

Par définition, le produit uv est le mot :

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_p}^{\delta_p}$$

donc

$$long(uv) = long(u) + long(v)$$

Remarque 2.4.3
Un mot de longueur 1 *est un élément de* $X \cup X^{-1}$ *; tout mot de longueur* $n > 0$ *est donc produit de mots de longueur* 1*.*

Définition 2.4.4
Dans $(X \cup X^{-1})$ *, deux mots* u *et* v *seront dits adjacents s'il existe deux mots* t_1 *et* t_2 *dans* $(X \cup X^{-1})$ *et un élément* $a \in X \cup X^{-1}$ *tels que :*

$$\begin{cases} u = t_1 t_2 \\ \quad et \\ v = t_1 a a^{-1} t_2 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} u = t_1 a a^{-1} t_2 \\ \quad et \\ v = t_1 t_2 \end{cases}$$

avec la convention : $(a^{-1})^{-1} = a$ *, quelque soit* $a \in X \cup X^{-1}$ *.*
On écrira $u \ A \ v$ *pour exprimer que* u *est adjacent à* v*.*

Exemple 2.4.5 *Si* $X = \{x, y\}$ *, alors*

$$x^{-1}xyy^{-1}Ayy^{-1} \ (on\ prend\ t_1 = 1,\ t_2 = yy^{-1}\ et\ a = x^{-1}).$$

De même,

$$x^{-1}xyy^{-1}Ax^{-1}x \ (on\ prend\ t_1 = x^{-1}x,\ t_2 = 1\ et\ a = y).$$

et

$$x^{-1}xx^{-1}Ax^{-1} \ (on\ prend\ t_1 = 1,\ t_2 = x^{-1}\ et\ a = x^{-1}).$$

2.4.4 Groupes libres

Définition 2.4.6
On dira qu' un groupe est libre sur un ensemble X*, s'il est engendré par* X *et isomorphe au groupe* $[X \cup X^{-1}]$ *défini ci-dessus.*
En particulier, tout groupe réduit à un seul élément est libre sur l'ensemble vide.

Définition 2.4.7 *On dira qu'un groupe est libre s'il possède une famille génératrice libre, si cette famille génératrice libre est finie, le groupe sera dite libre de type fini.*

Remarque 2.4.8
a) Tout groupe isomorphe à un groupe libre est libre.
b) Un groupe libre sur un ensemble X *est non abélien, si* $card(X) > 1$ *.*
c) Tout sous-groupe d'un groupe libre est un groupe libre.

2.5 Groupes d'Engel

2.5.1 Éléments n-Engel

Soit G un groupe.

Définition 2.5.1 *Un élément* g *de* G *est un élément* ***d'Engel*** *à droite de* G*, si* $\forall x \in G;\ \exists\ n$ *un entier positif* $n = n(g, x)$ *tel que* $[g, nx] = 1$ *où* $[g, nx] = \left[g, \underbrace{x, ..., x}_{n\ fois} \right]$.
Si l'entier n *peut être choisi indépendamment de* x *alors* g *et dit élément* ***n-Engel*** *à droite ou élément d'Engel borné à droite.*
L'ensemble des éléments d'Engel à droite (n-Engel) sera noté : $R(G)$ *,* $\left(\overline{R}(G)\right)$ *respectivement.*
La même définition pour les éléments d'Engel à gauche et n-Engel à gauche sauf $[x, ng] = 1$ *et la notation :* $L(G)$*,* $\left(\overline{L}(G)\right)$ *respectivement.*

Définition 2.5.2 *Un groupe G est dit n-Engel si* $\forall x, y \in G : [x, ny] = 1$
ie : si $G = R(G) = L(G)$ *, un groupe est d'Engel s'il est un groupe n-Engel pour un certain n.*

Lemme 2.5.3 *Soit G un groupe,* $x, y, z, x_1, \ldots, x_2, y_1, \ldots, y_n \in G$ *. Alors on a :*
1) $[x, y]^{-1} = [y, x]$
2) $[x^{-1}, y] = \left([x, y]^{x^{-1}}\right)^{-1}$ *et* $[x, y^{-1}] = \left([x, y]^{y^{-1}}\right)^{-1}$
3) $[x, y]^z = [x^z, y^z]$
4) $[x, y, z] = [x, z]^y [y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$
5) $[x, y, z^x] . [z, x, y^z] . [y, z, x^y] = 1$
6) $[x_1, \ ..., x_n, y] = [x_1, y]^{x_2, \ ..., x_n} . [x_2, y]^{x_3, \ ..., x_n} ... [x_{n-1}, y]^{x_n} . [x_n, y]$
7) $[x, y_1, ..., y_n] = [x, y_n] . [x, y_{n-1}]^{y_n} . [x, y_{n-2}]^{y_{n-1}, ..., y_n} ... [x, y_2]^{y_3, \ ..., y_n} [x, y_1]^{y_2, \ ..., y_n}$.

Théorème 2.5.4 ***(Heineken)***
Dans tout groupe G, l'inverse d'un élément d'Engel à droite est un élément d'Engel à gauche et l'inverse d'un élément n-Engel à droite est un élément $(n+1)$ *-Engel à gauche.* $R(G^{-1}) \subseteq L(G)$ *et* $\overline{R}(G)^{-1} \subseteq \overline{L}(G)$.

Preuve. Soit $x, g \in G$ on a :

$$\begin{aligned} [x, (n+1)g] &= [[x, g], ng] \\ &= \left[[g^{-1}, x]^g, ng\right] \\ &= [[g^{-1}, x], ng]^g \\ &= [gg^{-x}, ng]^g \\ &= [g^{-x}, ng]^g \end{aligned}$$

d'ou $[x, (n+1)g] = 1$. ■

Définition 2.5.5
Soit G un groupe 4-Engel de classe de nilpotente 5 satisfaisant l'identité $[x, y^3, y] = 1$ *alors* $[x, y, y]^3 = 1$.

2.5.2 Éléments 2-Engel

Évidement un groupe 0-Engel est un groupe trivial. les groupes 1-Engel sont les groupes abéliens.

Définition 2.5.6 *Un groupe 2-Engel est un groupe dont la quelle on a :* $[x, 2y] = 1, \forall x, y \in G$.

Notation 2.5.7
1. *On note par $R_2(G)$ les groupes 2-Engel à droite.*
2. *On note par $L_2(G)$ les groupes 2-Engel à gauche.*

Chapitre 3

Groupe n-abélien généralisé

Nous allons examiner dans ce chapitre les groupes n-abéliens généralisés ; Dans le premier partie on vat présente les groupes n-abéliens, La deuxièm partie on vat étudier les groupes n-abéliens généralisés, et dans la dernière partie on vat étudier le groupe 3-abélien généralisé.

3.1 Groupe n-abélien

Définition 3.1.1 *On dit que G est un groupe n-abélien si :*

$$(xy)^n = x^n y^n \text{ pour tous } x, y \in G$$

ou de façon équivalent l'application $\phi : x \mapsto x^n$ *est un endomorphisme de G.*

Remarque 3.1.2
1) *Tout groupe est* 0*-abélien et* 1*-abélien.*
2) *G est un groupe* 2*-abélien si, et seulement si, G est abélien.*
3) *Un sous-groupe d'un groupe n-abélien est n-abélien.*

Proposition 3.1.3
1) *Si G un groupe n-abélien et m-abélien, alors G est* (mn)*-abélien.*
2) *Un groupe n-abélien qui n'admet aucun élément non trivial d'ordre divisant* $n(n-1)$ *est n-abélien.*
3) *Tout groupe d'exposant fini divisant n est n-abélien.*

Remarque 3.1.4 *Soient* $x, y, x_1, ..., x_n \in G$ *, on a*
(1) $x^y = y^{-1}xy$ *et* $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$.
(2) *Pour* $n \geq 2$ *:* $[x_1, x_2, ..., x_{n+1}] = [[x_1, x_2, ..., x_n], x_{n+1}]$ *et* $[x_n, y] = [[x_{n-1}, y], y]$.

Définition 3.1.5 *(n-Levi)*
*Un groupe G est dit n-**Levi si** :* $[x, y^n] = [x, y]^n$ *pour tout* $x, y \in G$.

Définition 3.1.6 *(n-Bell)*
*Soit G un groupe est dit n-**Bell si*** $[x, y^n] = [y^n, x]$ *pour tout* $x, y \in G$.

Définition 3.1.7 *(n-Central)*
*Un groupe G est dit n-**Central si** :* $n \geq 1$ *et* $[x, y^n] = 1$ *pour tout* $x, y \in G$.

3.2 Groupe n-abélien généralisé

Définition 3.2.1 *Soient un entier* $n \geq 2$ *et φ un endomorphisme d'un groupe G.*
1) *On dit que φ est un **endomorphisme polynomial**, s'il existe n éléments* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *de G et n entiers* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *tels que :*

$$\varphi(x) = \left(x^{k_1}\right)^{a_1} \left(x^{k_2}\right)^{a_2} \cdots \left(x^{k_n}\right)^{a_n}, \forall x \in G$$

2) *On dit que φ est un **endomorphisme polynomial positif de degré** m si tous les entiers* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *sont strictement positifs, avec* $m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$.

Définition 3.2.2
Soit un entier $n \geq 2$ *, un groupe G est dit* **n-*abélien généralisé*** *s'il admet un endomorphisme polynomial positif de degré n, c'est-à -dire s'il existe n élément* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *de G tels que l'application* $\varphi : x \mapsto x^{a_1} x^{a_2} \cdots x^{a_n}$ *soit un endomorphisme de G.*

Remarque 3.2.3
1) *Si G est un groupe n-abélien (ie :* $(xy)^n = x^n y^n \forall x, y \in G$ *) alors G est un groupe n-abélien généralisé.*
2) *Un groupe 2-abélien généralisé est abélien.*

Lemme 3.2.4 *Soit G un groupe n-abélien généralisé admettant un endomorphisme de la forme* $\varphi : x \mapsto x^{a_1} x^{a_2} \cdots x^{a_n}$ *où* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ *; Alors :*
G est n-abélien tels que $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \zeta_2(G)$.

Preuve.
Soit $x \in G$; comme $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \zeta_2(G)$
Nous avons que : $x, [x, a_1], \ldots, [x, a_n]$ commute aussi.

On a :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x^{a_1}\cdots x^{a_n}\\ &= a_1^{-1}xa_1a_2^{-1}xa_2\cdots a_n^{-1}xa_n\\ &= xx^{-1}a_1^{-1}xa_1xx^{-1}a_2^{-1}xa_2\cdots xx^{-1}a_n^{-1}xa_2\\ &= x[x,a_1]\,x[x,a_2]\cdots x[x,a_n]\\ &= x^n[x,a_1][x,a_2]\cdots[x,a_n]\\ &= x^n\prod_{1\leq i\leq n}[x,a_i]\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y) &\Rightarrow (xy)^n\prod_{1\leq i\leq n}[xy,a_i]=(x^n)\prod_{1\leq i\leq n}[x,a_i]\,(y^n)\prod_{1\leq i\leq n}[y,a_i]\\ &\Rightarrow (xy)^n\prod_{1\leq i\leq n}[x,a_i][y,a_i]=x^ny^n\prod_{1\leq i\leq n}[x,a_i][y,a_i]\\ &\Rightarrow (xy)^n=x^ny^n\end{aligned}$$

D'où : G est n-abélien. ■

Définition 3.2.5 *Soit π est un ensemble des nombres premiers, on dit qu'un groupe est π-**libre** s'il n'admet aucun π-élément non trivial.*

Notation :

Pour chaque entier $n \geq 2$, on note π_n l'ensemble inferieurs ou égaux à n.

Remarque 3.2.6

Un groupe π_n-libre n'admet aucun élément non trivial d'ordre divisant $n(n-1)$.

Proposition 3.2.7 *Soient G un groupe nilpotent n-abélien généralisé et π l'ensemble des nombres premiers p divisant $n(n-1)/2$. Si ce groupe G est π-libre, alors il est abélien.*

Preuve. Si c désigne la classe de nilpotence de G, supposons d'abord $c = 2$.
Le groupe G étant n-abélien généralisé, il existe n éléments $a_1, a_2, ..., a_n$ de G tels que l'application $\varphi : x \mapsto x^{a_1}x^{a_2}\cdots x^{a_n}$ soit un endomorphisme de G.
Soient $x, y \in G$. On peut écrire $\varphi(x) = x[x, a_1]x[x, a_2]\cdots x[x, a_n]$ d'où

$$\varphi(x) = x^n[x, a_1][x, a_2][x, a_n] = x^n[x, a_1a_2\cdots a_n]$$

puisque les commutateurs $[x, a_i]$ sont dans le centre de G.
On a ainsi

$$\varphi(xy) = (xy)^n[xy, a_1a_2\cdots a_n]$$

$$\varphi(x)\varphi(y) = x^n[x, a_1a_2\cdots a_n]y^n[y, a_1a_2\cdots a_n] = x^ny^n[xy, a_1a_2\cdots a_n]$$

ce qui entraîne que $(xy)^n = x^n y^n$. Mais dans un groupe nilpotent de classe inférieure ou égale à 2, on a la relation $(xy)^n = x^n y^n [y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}}$
Puisque G est π-libre, il en raésulte que $G^{'}$ est trivial, ce qui est contradictoire.
Supposons maintenant $c \geq 3$. Le groupe quotient $\bar{G} = G/\zeta_{c-2}(G)$ est nilpotent de classe 2 et n-abélien généralisé.
De plus, G étant π-libre, il est bien connu qu'il en est de même pour $\bar{G}$. Alors, d'aprés le premier cas, $\bar{G}$ est abélien ce qui est contradictoire.
Notons que pour tout ensemble de nombres premiers, un groupe nilpotent est π-libre si et seulement si son centre l'est. ■

Corollaire 3.2.8
Si G est un groupe nilpotent de type fini, les conditions suivantes sont équivalentes :
1) *G est n-abélien généralisé (pour un entier* $n \geq 2$ *).*
2) *G est une extension finie de son centre.*
3) *G est m-abélien (pour un entier* $m \geq 2$ *).*

3.3 Groupe 3-abélien généralisé

Définition 3.3.1
Un groupe G *est appelé* 3-***abélien généralisé*** *s'il existe les éléments* $c_1, c_2, c_3 \in G$ *tel que l'application* $\varphi : x \longmapsto x^{c_1} x^{c_2} x^{c_3}$ *est un endomorphisme de* G.

Lemme 3.3.2 *Soient G un groupe métabélien et* $x, y \in G$ *et* $u, v \in [G, G]$ *,alors*
(1) $[uv, x] = [u, x]\,[v, x]$.
(2) $[x, y^n] = \prod_{1 \leq i \leq n} [x, iy]^{\binom{n}{i}}$.
(3) $(xy^{-1})^n = x^n \prod_{1 \leq i+j \leq n} [x, iy]^{\binom{n}{i+j+1}} y^{-n}$.

Théorème 3.3.3 *Soit* G *un groupe* 3*-abélien généralisé alors*
(i) *G est nilpotent de classe* $c \leq 3$.
(ii) *Exposent* $[G, G]$ *divises* 9 *et exposent* $\gamma_3(G)$ *divises* 3.

Proposition 3.3.4 *Soit* G *un groupe* 3*-abélien généralisé admettant un endomorphisme de la forme* $\phi : x \longmapsto x^a x x^b$ *pour tout* $a, b \in G$ *alors :*
1) *G est* 3*-Levi.*
2) *G est* 9*-Central.*
3) *G est* 9*-abélien.*
4) *Le sous groupe* $\mathrm{Im}\,\phi$ *est abélien. En particulier ; si* ϕ *est injectif ou surjectif, G est abélien.*

Preuve. Soient $x, y \in G$

1) $[x, y^3] = \prod_{1\leq i\leq 3} [x, iy]^{\binom{3}{i}} = [x, y]^3 [x, y, y]^3 [x, y, y, y] = [x, y]^3$.

2) $[x, y^9] = \prod_{1\leq i\leq 9} [x, iy]^{\binom{9}{i}} = [x, y]^9 [x, y, y]^{36} \prod_{1\leq i\leq 9} [x, iy]^{\binom{9}{i}} = 1$.

3) $$\begin{aligned}(xy^{-1})^9 &= x^9 \prod_{1\leq i+j\leq n} [x, iy]^{\binom{9}{i+j+1}} y^{-9} \\ &= x^9 [x, y]^{36} [x, y, x]^{84} [x, y, y]^{84} \prod_{3\leq i+j\leq 8} [x, iy]^{\binom{9}{i+j+1}} y^{-9} \\ &= x^9 y^{-9}.\end{aligned}$$

4) D'aprés Théorème précèdent partie (i) on a G est nilpotent de classe ≤ 3 et $\gamma_3(G)^3 = \{1\}$ tels que :

$$\phi(x) = x [x, a] x^2 [x, b] = x^3 [x, a] [x, b] [x, a, x]^2$$

En utilisant en outre les faits de les parties (1,2,3) et leThéorème (**3.3.3)** que $[G, G]^9 = \{1\}$ et que G est 3-Levi nous obtenons :

$$[\phi(x), \phi(y)] = [x^3[x, a][x, b], y^3[y, a][y, b]] = [x^3, y^3] = [x^3, y]^3 = [x, y]^9 = 1.$$

■

Lemme 3.3.5

Soit G un groupe, alors :

$$Z'(G, 3) = \{a \in R_2(G)/a^3 \in \zeta(G)\} \quad et \quad Z'(G, 3) \leq \zeta_3(G) \ .$$

Lemme 3.3.6

Soit G un groupe alors :

$$Z_i'(G, 3) \leq \zeta_{3i}(G), \ \ Pour\ tout\ i \ .$$

Preuve. par récurrence on a :

Pour $i = 1$: on a $Z(G, 3) \leq \zeta_3(G)$ (D'aprés le lemme précèdent)

Supposons que la relation est vrai pour i et montrons pour $(i + 1)$

On trouve $Z_{i+1}(G, 3)/Z(G, 3) = Z(G/Z_i(G, 3), 3)$

Soit $a \in Z_{i+1}(G, 3) \Rightarrow [a, x]_3 \equiv 1 \bmod Z_i(G, 3), \forall x \in G$

par l'hypothèse on a : $[a, x]_3 \equiv 1 \bmod \zeta_{3i}(G), \forall x \in G$

alors : $a\zeta_{3i}(G) \in Z(G/\zeta_{3i}(G), 3)$

D'apres lemme précédent on a : $Z(G/\zeta_{3i}(G), 3) \leq \zeta_3(G/\zeta_{3i}(G))$

La dernière groupe est égale à $\zeta_{3+3i}(G)/\zeta_{3i}(G)$, alors $a\zeta_{3i}(G) \in \zeta_{3(i+1)}(G)/\zeta_{3i}(G)$.

Donc $a \in \zeta_{3(i+1)}(G)$. ■

Théorème 3.3.7
Soit G *un groupe* 3*-abélien généralisé* (*ie : admet un endomorphisme de la forme* $\phi :\mapsto x^a x x^b$) *,*
alors
i) *Si* $a, b \in \zeta_2(G)$, G *est* 3*-abélien*
ii) G *est nilpotent de classe* $c \leq 7$.

Preuve.
i) Soient $x, y \in G$ on a :
$\phi\,(x)\,\phi\,(y) = x^3y^3[x, ab][y, ab] = x^3y^3\,[xy, ab]$ et $\phi(xy) = (xy)^3\,[xy, ab]$
d'où : $x^3y^3 = (xy)^3$.
Donc G est 3-abélien.
ii) Pour chaque $x \in G$ on a : $\phi(x^{b^{-1}}x^{a^{-1}}) = \phi(x^{b^{-1}})\phi(x^{a^{-1}})$ qui implique
$(x^{b^{-1}}x^{a^{-1}})^a(x^{b^{-1}}x^{a^{-1}})(x^{b^{-1}}x^{a^{-1}})^b = (x^{b^{-1}})^a(x^{b^{-1}})(x^{b^{-1}})^b(x^{a^{-1}})^a(x^{a^{-1}})(x^{a^{-1}})^b$
$(x^{b^{-1}})^a x(x^{b^{-1}}x^{a^{-1}})x(x^{a^{-1}})^b = (x^{b^{-1}})^a(x^{b^{-1}})xx(x^{a^{-1}})(x^{a^{-1}})^b$
$xx^{b^{-1}}x^{a^{-1}}x = x^{b^{-1}}x^2x^{a^{-1}}$ (**1**)
En substituant a à x dans (**1**), on obtient
$$\begin{aligned} aa^{b^{-1}}a^{a^{-1}}a = a^{b^{-1}}a^2a^{a^{-1}} \quad &\Rightarrow aa^{b^{-1}}aaa^{-1}a = a^{b^{-1}}a^2aaa^{-1} \\ &\Rightarrow aa^{b^{-1}}a^2 = a^{b^{-1}}a^2a \\ &\Rightarrow aa^{b^{-1}}a^2 = a^{b^{-1}}aa^2 \\ &\Rightarrow aa^{b^{-1}} = a^{b^{-1}}a \\ &\Rightarrow aa^{b^{-1}}a^b = a^{b^{-1}}aa^b \\ &\Rightarrow a = a^{b^{-1}}aa^b \\ &\Rightarrow a^ba = a^ba^{b^{-1}}aa^b \\ &\Rightarrow a^ba = aa^b \end{aligned}$$
Il en résulte que le commutateur $c = [a, b]$ commute avec a.
Maintenant à partire de la relation $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$
on obtient que $\phi(x) = x^axx^b = x^bxx^a$, puis c également commute avec b.
Maintenant il est facile de voir que la relation :

$$\phi(cya^{-1}) = \phi(c)\phi(ya^{-1}), \forall y \in G \;\Rightarrow\; y^2 = y^{c^2}y^c, \forall y \in G \qquad (2)$$

En remplaçant y par y^{-1} dans (**2**), on obtient :

$$y^{c^2}y^c = y^cy^{c^2}$$

Il en résulte que $[c, y, y] = 1, \forall y \in G$.
D'où $c \in R_2(G)$.

Nous avons

$$\begin{cases} \phi(a) = a^3\,[a,b] \quad \text{et} \quad \phi(b) = b^3\,[b,a] \\ \text{et} \\ \phi(ab) = (ab)^3 \end{cases}$$

De la relation :

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

on en déduit que :

$$(ab)^3 = a^3b^3$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} (ba)(ba) = a^2b^2 \Rightarrow \quad 1 &= a^{-1}b^{-1}a^2b^2a^{-1}b^{-1} \\ &= a^{-1}(a^b)^2(a^{-1})^{b^{-1}} \\ &= [a,b]^3 \end{aligned}$$

Parceque $[a,b]$ commutes avec a et b
D'apres le lemme(**3.3.5**), nous avons $[a,b] \in Z_3(G,3)$
De la relation $\phi\,(a^{-1}y) = \phi\,(a^{-1})\,\phi\,(y)$ et on a $c = [a,b] \equiv 1 \bmod Z_3\,(G)$
alors

$$y^2 \equiv y^{a^2}y^a \bmod Z\,(G,3)$$

En remplaçant y par y^{-1}, on obtient

$$y^a y^{a^2} \equiv y^{a^2}y^a \bmod Z\,(G,3)$$

qui implique $yy^a \equiv y^a y \bmod Z\,(G,3)$
d'où

$$[a,y,y] \equiv 1 \bmod Z\,(G,3)\,, \forall y \in G$$

Donc

$$aZ\,(G,3) \in R_2(G/Z\,(G,3))$$

De la relation $\phi\,(ay) = \phi\,(a)\,\phi\,(y)$ et les congruences $[a,b] \equiv 1$ et $yy^a \equiv y^a y \bmod Z\,(G,3)$
nous obtenons

$$ya^3 \equiv a^3y \bmod Z\,(G,3)\,,\ \forall y \in G$$

d'où

$$a^3Z\,(G,3) \in \zeta(G/Z_3\,(G))$$

Nous en déduisons que

$$aZ\,(G,3) \in Z(G/Z\,(G,3)\,,3)$$

Mais $Z(G/Z(G,3),3) = Z_2(G,3)/Z(G,3)$, il se ensuit que $a \in Z_2(G,3)$.
Donc $b \in Z_2(G,3)$.
Utilisation lemme (**3.3.2),** a et $b \in \zeta_6(G)$
Aussi ϕ indiut sur le groupe quotient $G/\zeta_4(G)$ l'endomorphisme $\bar{y} \to \bar{y}^{\bar{a}}\bar{y}\bar{y}^{\bar{b}}$ alors :

$$a\zeta_4(G) \text{ et } b\zeta_4(G) \in \zeta_6(G)/\zeta_4(G)$$

qui est égal au deuxiéme centre de $G/\zeta_4(G)$
D'apres $i)$ $G/\zeta_4(G)$ est 3-abélien et $G/\zeta_4(G)$ est nilpotent de classe au plus 3; Alors G est nilpotent de classe au plus 7. ■

Conclusion Générale

Dans ce travail nous avons étudie quelques propriétés des groupes n-abélien généralisé. Les recherches actuelles sont très riche de la théorie des groupes n-abélien généralisé et nous allons pour suivre nos étude dans ce domaine.

Bibliographie

[1] A.Abddollahi, Daoud.A.B and Endimioni.G, Groupe n-abélien généralisés. Bull. Bclg. Math. Soc-13,(2006)

[2] Bounabi Daoud, Meriem Hamitouche and KHalissa Merikhi, On the nilpotency class of a Generalized 3-abelien groupe, 2011.

[3] J.Calais,Elément de la théorie des groupes, puf, Paris 1984.

[4] Daniel Guin et Thomas Hausberger, Algébre **I**, parc d'activités de cours taboeuf, BP 112.91944 les ulis cedex, France.

[5] Françoies Geandier, Algébre,Université Henri poincaré nancy **I**.

[6] Ibrahim Assen et Pierre Yves Leduc, Cours d'algébre, Canada2009.

[7] Gerard Endimioni, Une introduction aux groupes nilpotent-France,1997.

[8] K. W. Gruenberg, Two theorems on Engel groups, Proc. Cambridge Philos. Soc. 49(1953), 377 - 380.

[9] D.J.S. Robinson, A course in the theory of groups, Springer-Verlag, Berlin, (1996)

Résumé

Dans ce travail, on étudié les groupes n-abélien généralisé ; le premier chapitre est consacré à certaines notions de bases des groupes (groupes, sous-groupes, endomorphismes de groupes).

Le deuxième chapitre est une étude général sur des éléments de la théorie des groupes (groupes résolubles, groupes nilpotents).

Dans le troisième chapitre, on a basé sur les groupes n-abélien et les groupes n-abélien généralisé, et on a étudie les groupe 3-abélien généralisé

Abstract

In this work, we talked about generalised n-abelian groups; the first chapter is a study of certain notion of groups (groups, sub-groups, endomorphisms of groups).

The second one is based on soluble groups and nilpotent groups.

In the third chapter, we stadied generalised n-abelian groups and generalised 3-abelian groups.

ملخـص

في هذا العمل درسنا الزمر ن- تبديليه المعممة ; يخصص الفصل الأول لبعض المفاهيم الأساسية لزمر (زمر, زمر جزئية و تشاكل داتي لزمر)

الفصل الثاني هو دراسة عامة لعناصر الزمر(زمر قابلة للحل، زمر متلاشية)

و الفصل الثالث يقوم على الزمر ن-التبديليه و الزمر ن- تبديليه المعممة و دراسة الزمر 3- تبديليه المعممة.