



N° Réf :.....

**Centre Universitaire
Abd elhafid boussof Mila**

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de master

En: - Filière mathématiques

- spécialité mathématiques fondamentales et appliquées

Optimisation chaotique

Préparé par :

-Boutera Mansour Lamia

- Boutaghane Razika

Soutenue devant le jury

- Président : A. Daoui..... M.A.A

- Examineur : W. Laouira..... M.A.A

- Encadrer : R. Bouden..... M.A.A

Année universitaire :2014/2015



Remerciement

Avant tout, nous remercions Allah qui nous a donné la force et la puissance pour réaliser et achever ce travail dans des bonnes conditions.

Nous avons le plaisir d'exprimer notre profonde gratitude à notre encadreur Mr Bouden Rabeh. Maître assistant « A » à Centre Universitaire de Mila pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa patience et sa persévérance dans le suivi de ce travail.

Nous remercions vivement Madame Daoui Amina et Madame Laouira. Widad membre de jury pour l'honneur qu'ils nous ont accordées en acceptant de juger notre travail.

Enfin, nous remercions toutes personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire

Dédicaces

A ma fleur de mes espérances, la source de la tendresse à la plus personne, à ma mère, je te dis que tu resteras toujours la plus adorable dans ma vie.

A celui qui a sert que donner l'espoir et le courage nécessaire pendant mon long trajet d'étude, à mon père, je vous estime fort ainsi que je vous aime.

*A mes frères et ma sœur: **Hichem, Soheyb, Karima***

*A mon adorable petit frère **Saber***

*A mes amies que j'ai vécu avec elles des beaux moments au cours de mon cursus à l'université: **Amina, Ahlem, Meriem, Sabra, Oumaima, Hadjer, Zakia, Amira, Nour, Kanza, Amel et Afaf.***

*A mes amis plus chères : **Amine, Bilal, Radwan.***

A toute ma famille

LAMIA



A mon cher PAPA, qui ma toujours aidé et guidé vers le chemin de la réussite.

A ma très chère MAMAN, pour m'avoir toujours écoutée, pour son soutien moral et ces précieux conseils.

A mon cher mari KARIM qui ma encouragé, qui ma donné la force et la volonté de surmonter tous les obstacles et les difficultés.

A mes frères : yazid, mounir, saïde et newar , mes sœurs : djamila, leïla, fouzia et naima

A mes belle sœurs ibtissam et housna

A la famille de mon mari

A ma famille, à mes amis, je dédie ce mémoire

*Razika
Razika*

Table des matières

Introduction Générale	2
1 Notions général sur les systèmes dynamiques discret	4
1.1 Définitions	4
1.1.1 Système dynamique discret	4
1.1.2 L'espace des phases	5
1.1.3 Trajectoire	5
1.1.4 Singularités	5
1.1.5 Courbes invariantes	7
1.1.6 Nature des singularités	7
1.1.7 Ensemble stable et instable	7
1.1.8 Attracteur et bassin d'attraction	8
1.1.9 Les différents types d'attracteurs	8
1.2 Récurrences linéaires autonomes du deuxième ordre à variables réelles . . .	9
1.3 Récurrences non linéaires autonomes du second ordre à variables réelles . .	17
1.4 Bifurcations	19
1.5 Chaos	21
1.5.1 Définition du chaos	22
1.5.2 Caractérisation du chaos	22
1.5.3 Routes vers le chaos	26
2 La carte de Lozi	27
2.1 La carte de Hénon	27
2.2 La carte de Lozi	28
2.2.1 Les points fixes et leurs stabilités	28
2.2.2 Diagrammes de bifurcation	31
2.2.3 Exposants de Lyapunov	33
2.2.4 Attracteur de Lozi	34

3	Optimisation chaotique	36
3.1	Quelques méthodes d'optimisation chaotiques	36
3.1.1	L'algorithme COLM	37
3.1.2	L'algorithme ICOLM	38
3.2	Simulation	41
3.2.1	Quelques fonctions test	41
3.2.2	Résultats numériques	44
	Conclusion Générale	46
	Bibliographie	46

Introduction Générale

L'optimisation est une branche des mathématiques en tant que disciplines, cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à déterminer les solutions satisfaisant un objectif quantitatif tout en respectant d'éventuelles contraintes. L'optimisation mathématique consiste à chercher dans le domaine initial une solution qui minimise une fonction objectif tout en respectant des contraintes. On distingue classiquement deux types d'optimisation :

–**L'optimisation locale** : est la recherche d'une solution qui est meilleure localement (dans un voisinage de cette solution). Cette solution est appelée un optimum local.

–**L'optimisation globale** : est la recherche de la meilleure solution sur tout les domaines ; c'est-à-dire que dans tout les domaines il n'existe aucune solution qui lui soit meilleure tout en respectant les contraintes. Cette solution est appelée l'optimum global. Par définition, l'optimum global est aussi une solution locale. En revanche, il est bien plus épineux de trouver l'optimum global, car lorsque l'on pense avoir trouver cet optimum, sa démonstration se révèle bien souvent particulièrement ardue. L'intérêt de l'optimisation globale par rapport à l'optimisation locale est patent. Elle garantit en effet que personne ne peut avoir une solution meilleure que celle trouvée. Or, pour une entreprise, cette information a son importance, car la différence entre la solution globale et une solution locale est bien souvent significative. Il existe des méthodes numériques pour résoudre certains problèmes d'optimisation répondent à deux classements distincts : méthodes déterministes et stochastiques. Les méthodes déterministes requièrent des hypothèses restrictives sur la fonction à optimiser, telles que la continuité, la dérivabilité ou les conditions de Lipchitz. De plus, ces méthodes ne sont applicables que pour des problèmes de faible dimension. Pour les autres problèmes, seules les méthodes stochastiques peuvent être utilisées. Les méthodes stochastiques, contrairement aux méthodes déterministes, Les algorithmes stochastiques sont des techniques de simulation numériques, ces méthodes de recherche aléatoire permettent d'explorer des espaces de grandes dimensions, tout en évitant certains pièges, tels des puits de minima locaux en optimisation globale.

Les algorithmes que nous allons étudier font partie des méthodes stochastiques globales permettant de résoudre des problèmes généraux d'optimisation. Ces algorithmes s'ap-

pellent :

Algorithmes d'optimisations Chaotiques (COA).

Durant ces dernières décennies, la théorie des systèmes non linéaires a été appliquée à l'optimisation afin d'augmenter le degré de convergence. Notamment, après le travail de Caponetto et al. Un système chaotique se caractérise notamment par sa sensibilité aux conditions initiales, alors les systèmes chaotiques sont de bons candidats pour l'optimisation.

Ce mémoire est réparti sur l'introduction générale, trois chapitres et conclusion générale. Dans le premier chapitre on donne des notions préliminaires sur le système dynamique discret, la bifurcation, nous terminons par le chaos.

Le deuxième chapitre on étudie la carte de Lozi (les points d'équilibre, stabilité, la bifurcation, pour finir, on donne l'attracteur de Lozi et dimension).

Enfin, dans le troisième chapitre, nous présentons un algorithme d'optimisation chaotique efficace basé sur la carte de Lozi. Cet algorithme appelé COLM est consacré à la description de l'approche que nous avons développée. Elle sera désignée par ICOLM, cet algorithme permet de trouver avec certitude un proche voisinage de l'optimum global. En fin nous donnons des simulations numériques de quelques fonctions.

Chapitre 1

Notions général sur les systèmes dynamiques discret

Dans ce chapitre on a cinq sections, dans la première section on présente les définitions sur le système dynamique discret (espace de phase, singularité, trajectoire,...,etc), la deuxième et troisième section se consacre pour la récurrence linéaire et non linéaire autonomes du deuxième ordre à variables réelles, dans la quatrième section on présente la bifurcation et ces trois types (fold ou pli, flip ou doublement de période, Neimark-Sacker), dans la cinquième section on présente la définition du chaos et les caractérisation de chaos et enfin les différentes routes vers le chaos.

1.1 Définitions

1.1.1 Système dynamique discret

Un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, F) est complètement déterminé par l'application F de X dans X :

$$x_{n+1} = F(x_n, a) \quad a \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

Par récurrence on a :

$$x_n \equiv \underbrace{F \circ F \circ F \circ \dots \circ F}_{n \text{ fois}}(x_0), \text{ on a aussi } F^0 = Id, \forall n \in \mathbb{N}.$$

X est une variété topologique, l'application F est appelée récurrence, itération ou transformation ponctuelle.

1.1.2 L'espace des phases

L'espace des phases est une structure correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Ce peut être un espace vectoriel, une variété différentielle, un espace mesurable. . . .

Pour un système possédant n degrés de liberté, par exemple, l'espace des phases X du système possède n dimensions, de telle sorte que l'état complet $x(t) \in X$ du système à l'instant t est en général un vecteur à n composantes.

1.1.3 Trajectoire

On appelle trajectoire ou orbite d'un point x de l'espace des phases X , l'ensemble des points $\{f(t, x) \mid t \in T\}$. Si $T = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} la trajectoire correspond à un système dynamique dit discret.

1.1.4 Singularités

Soit F une transformation ponctuelle dans $X \subseteq \mathbb{R}^n$, définissant un système dynamique discret (X, N, F) . On distingue deux types de singularités de dimension zéro, sur l'espace des phases X .

Point fixe :

Un point fixe x^* est un point de l'espace des phases X vérifiant :

$$F(x^*) = x^*$$

Si de plus la matrice Jacobienne $DF(x)$ n'a pas de valeur propre dont le module soit égal à un, x est un point fixe **hyperbolique**. Si tous les modules des valeurs propres de $DF(x)$ sont égaux à un, x est point fixe **elliptique**.

Définition 1.1.1 *Le point x^* est dit stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$ alors $\|x(t) - x^*\| \leq \varepsilon \forall t \geq 0$ sinon le point d'équilibre est dit instable*

Proposition 1.1.2 *Soient I un intervalle et $F : I \rightarrow I$ une application de classe C^1 admettant un point fixe x^* . Si $|F'(x^*)| < 1$, alors x^* est attractif.*

Définition 1.1.3 (Stabilité asymptotique)

Le point d'équilibre $x^ = 0$ est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif ie $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x_0 \in B(x^*, \varepsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} x(t) = 0$*

Proposition 1.1.4 Soient I un intervalle et $F : I \rightarrow I$ une application de classe C^1 admettant un point fixe x^* . Si $|F'(x^*)| > 1$, alors x^* est répulsif.

Remarque 1.1.5 Si $|F'(x^*)| = 1$ on ne peut pas conclure la nature du point fixe. De plus, un point fixe ni attractif ni répulsif est dit neutre.

Cycle d'ordre k :

Un cycle d'ordre k (ou k -cycle) est un ensemble de k points (x_1^*, \dots, x_k^*) de l'espace des phases X , qui vérifie :

$$\begin{cases} x_i^* = F^k(x_i^*) & i = 1, \dots, k \\ x_i^* \neq F^l(x_i^*) & i = 1, \dots, k \text{ et } 1 \leq l < k \end{cases}$$

Chaque point x_i^* d'un cycle d'ordre k est un point fixe de F^k . Un cycle d'ordre $k = 1$ est évidemment un point fixe de F . Lorsque la dimension de l'espace des phases X est supérieure à 1, il existe des singularités de dimension 1, qui sont les courbes invariantes par la transformation F ou F^k . D'autres singularités plus générales qui sont les attracteurs réguliers et les attracteurs chaotiques, seront traitées par la suite.

Les deux théorèmes suivants donnent respectivement l'existence et l'unicité des points fixes.

Théorème 1.1.6 (Théorème de Brouwer)

Toute application continue $f : \overline{B^n} \rightarrow \overline{B^n}$ avec $\overline{B^n} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\}$, admet un point fixe c'est-à-dire l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans $\overline{B^n}$.

Théorème 1.1.7 (Théorème de contraction de Banach)

Soit $f : \overline{B^2} \rightarrow \overline{B^2}$ application continue, où $\overline{B^2}$ est le disque unitaire fermé ;

$$\overline{B^2} = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| \leq 1\}$$

Supposons que :

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \lambda |x_1 - x_2|$$

pour tout vecteur $x_{i,j} \in \overline{B^2}$ et un certain $0 < \lambda < 1$. Alors il existe un point fixe unique $\bar{x} \in \overline{B^2}$. De plus on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = \bar{x} \text{ pour tout } x \in \overline{B^2}$$

1.1.5 Courbes invariantes

Pour des transformations ponctuelles de type (1.1), nous présentons dans cette section d'autres singularités que les points fixes ou les cycles d'ordre k , les courbes invariantes.

Définition 1.1.8 Une courbe $Q(x) = C$, C étant une constante réelle, est invariante par la transformation F définie par (1.1), si Q satisfait l'équation fonctionnelle :

$$Q [G(x)] = Q(x)$$

Dans le cas d'un point fixe (ou d'un cycle d'ordre k) de type col, on note W_s les branches de la courbe invariante associées au multiplicateur de module inférieur à 1 et W_u les branches associées au multiplicateur de module supérieur à 1.

Plus généralement, un ensemble A de \mathbb{R}^p est invariant par F ssi $F(A) = A$.

1.1.6 Nature des singularités

Pour caractériser la nature de ces singularités (point fixe et cycles) on introduit la notion de multiplicateur :

a) lorsque $\dim X = 1$ le multiplicateur d'un point fixe x^* est $\lambda = F'(x^*)$ où $F' = \frac{dF}{dx}$ et le multiplicateur d'un cycle d'ordre k est $\lambda = \prod_{i=1}^k (F^k)'(x_i^*)$.

·Si $|\lambda| < 1$ Un point fixe ou un cycle est dit attractif.

·Si $|\lambda| > 1$ Un point fixe ou un cycle est dit répulsif.

b) lorsque $\dim X = 2$ on classe les points fixes et les cycles, selon les valeurs de leurs multiplicateurs λ_1 et λ_2 .

1.1.7 Ensemble stable et instable

Considérons une transformation ponctuelle F dans \mathbb{R}^p définissant un système dynamique discret $(\mathbb{R}^p, \mathbb{N}, F)$, soit x^* un point fixe répulsif et U un voisinage de x^* .

Définition 1.1.9 On appelle $W_{loc}^u(x^*)$ ensemble instable local ou variété instable locale (c'est-à-dire dans U) de x^* est l'ensemble des points de U qui converge vers x^* . On appelle $W^i(x^*)$ ensemble instable global de x^* est l'ensemble des points de \mathbb{R}^p qui converge vers x^* . Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^i(x^*) = \{x \in U, d(\phi_t(x), \gamma) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow -\infty, \phi_t(x) \in U \text{ et } t \leq 0\}$$

$$W^i(x^*) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^i(x^*))$$

1.1.8 Attracteur et bassin d'attraction

Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble d'états) vers lesquels évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.

Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :

- Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $X(x_0, t) \leq \phi(t, x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$.
- $\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A$.
- Il existe une orbite dense dans A . [7]

Lorsque A est un attracteur, l'ensemble

$$B(A) = \{x \in X : w(x) \subset A\}$$

est appelé le bassin d'attraction de A , C'est l'ensemble de tous les points qui tend vers l'attracteur.

L'attracteur peuvent être classées dans trois catégories :

- Un attracteur de point est un point unique.
- Un attracteur cycle est un ensemble fini des points .
- Un attracteur chaotique est tout autre type d'attracteur.

1.1.9 Les différents types d'attracteurs

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs chaotiques.

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

Le point fixe : est l'attracteur le plus simple, dans le cas discret on dit que $a \in E$ est un point fixe de l'application $f : \Omega \rightarrow \Omega$ si $f(a) = a$.

Un cycle limite : On appelle cycle limite sur un plan ou une variété bidimensionnelle, toute trajectoire fermée T dans l'espace des phases tel que : si $a \notin T$, alors T est un ensemble α -limite de a , ou un ensemble w -limite de a .

Un tore : Il est caractérisé par un régime quasi-périodique ayant n fréquences de base indépendantes.

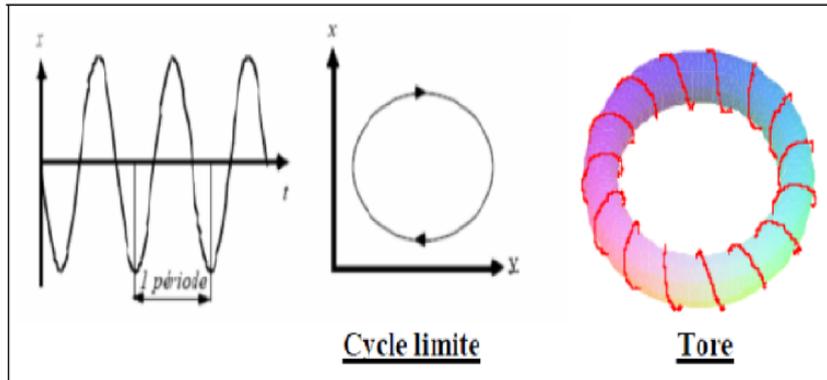


FIG. 1-1 – Attracteurs réguliers

Attracteurs chaotiques

Il existe des systèmes dynamiques déterministes très simples, pour lesquels deux trajectoires issues de point de départ dont la différence est trop petite pour être observable, se séparent après un certain temps. Leur distance croît de façon exponentielle, jusqu'à ce que toute mémoire sur le point de départ soit perdue. On appelle ce phénomène sensibilité aux conditions initiales.

L'attracteur étrange se caractérise par :

1. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).
2. La dimension d de l'attracteur est fractale avec $2 < d < n$.
3. L'attracteur est de volume nulle dans l'espace des phases.

1.2 Récurrences linéaires autonomes du deuxième ordre à variables réelles

Après un changement d'origine, ces récurrences peuvent toujours être mises sous la forme :

$$\begin{cases} X_{n+1} = aX_n + bY_n \\ Y_{n+1} = cX_n + dY_n \end{cases}, (X, Y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.2)$$

Où a, b, c et d sont des constantes réelles. L'origine O du plan de phase (X_n, Y_n) est un point fixe de transformation ponctuelle F décrit par (1.2).

Le changement de variable

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \alpha X + \beta Y \\ Y = P_1 \alpha X + P_2 \beta Y \\ P_1 = \frac{(\lambda_1 - a)}{b} = \frac{c}{(\lambda_1 - d)} \\ P_2 = \frac{(\lambda_2 - a)}{b} = c(\lambda_2 - d) \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Où λ_1, λ_2 sont des valeurs propres de la matrice des coefficients a, b, c et d , soit l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \quad (1.4)$$

Lorsque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, de ramener (1.2) sous la forme de deux récurrences du premier ordre à variable réelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = \lambda_1 X_n \\ Y_{n+1} = \lambda_2 Y_n \end{array} \right. , \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (1.5)$$

Lorsque λ_1, λ_2 sont réelles, les nouveaux axes OX, OY on peut pente P_1 et P_2 (vecteurs propres de la matrice des coefficients). Ces axes sont appelés axes principaux du point fixe O par rapport à ces axes (1.5) a pour solution

$$\left\{ \begin{array}{l} X_n = \lambda_1^n X_0 \\ Y_n = \lambda_2^n Y_0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

X_0, Y_0 étant la condition initiale de (1.5). Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, en éliminant n entre les deux relations (1.6) on obtient l'équation d'une famille de courbe :

$$Y = CX^{\frac{\ln \lambda_2}{\ln \lambda_1}}, C \text{ constante fixée par } X_0, Y_0 \quad (1.7)$$

a) Si $|\lambda_2| < |\lambda_1| < 1$

Les courbes invariantes par application de F , ont donc l'allure de les figures. A partir d'un point initiale $M_0(X_0, Y_0)$, la suite des points engendrée par (1.2) , c'est-à-dire la trajectoire discrét issue de M_0 située sur la courbe invariante passant par M_0 , si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, et sur deux courbes invariantes, celle qui passe par M_0 et celle qui passe par $M_1(X_1, Y_1)$, si l'un des multiplicateurs est négatif, ou si les deux multiplicateurs sont négatifs. Cette suite est telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 0$$

Le point O est un point fixe attractif, ou asymptotiquement stable, qui par analogie avec le point correspondant de la théorie des équations différentielle est appelé un **noeud stable**.

- Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ alors le point fixe O est appelé **noeud** de type 1.[2]

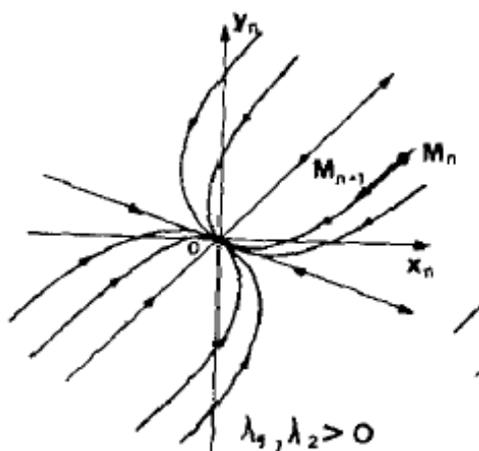


FIG. 1-2 – Noeud de type 1

- Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, ou $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ alors le point fixe O est appelé **noeud** de type 2.

- Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ alors le point fixe O est appelé **noeud** de type 3.

b) Si $|\lambda_2| > |\lambda_1| > 1$

Les trajectoires discrètes sont encore situées sur les mêmes courbes à allure parabolique, mais la suite des points obtenue à partir d'un point initial $M_0(X_0, Y_0)$ s'éloigne de 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \pm\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = \pm\infty$$

Donc le point fixe O est appelé un **noeud instable** qui selon les signes de λ_1 et λ_2 peut être trois type :

- Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ alors le point fixe O est appelé **noeud** de type 1.

- Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, ou $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ alors le point fixe O est appelé **noeud** de type 2.

- Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ alors le point fixe O est appelé **noeud** de type 3.

c) Si $|\lambda_2| > 1, |\lambda_1| < 1$, les trajectoires discrètes sont situées sur les courbes invariantes à allure hyperbolique, et l'origine O de plan de phase (X_n, Y_n) est un point fixe instable qui sera appelé un **col**.

Le signe de λ_1, λ_2 permet de distinguer les cols de type 1, 2 ou 3.

- Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ alors le point fixe O est appelé **Col** de type 1.

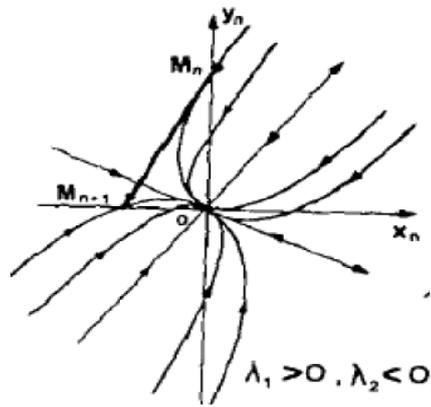


FIG. 1-3 – Noeud de type 2

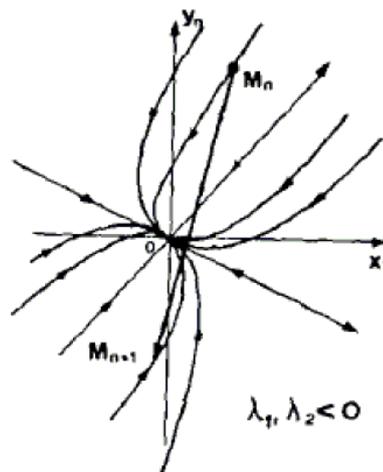


FIG. 1-4 – Noeud de type 3

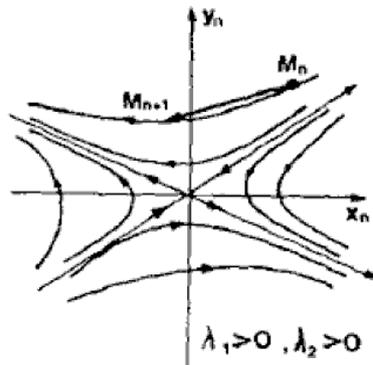


FIG. 1-5 – Col de type 1

- Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, ou $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ alors le point fixe O est appelé **Col** de type 2.

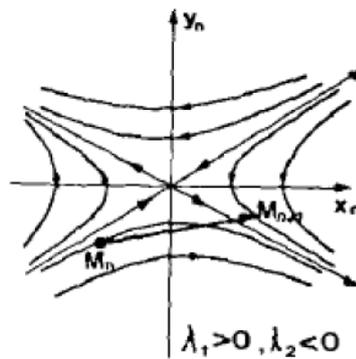


FIG. 1-6 – Col de type 2

- Si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ alors le point fixe O est appelé **Col** de type 3.

d) La forme (1.2) peut se réduire à (1.5) cependant l'augmentation de l'ordre d'une unité crée une situation nouvelle avec la possibilité, pour l'équation caractéristique d'avoir deux racines complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \rho \exp \pm j\varphi$. Le changement de variable (1.3) transformé la récurrence à variable réelles (1.2) en une récurrence à variable complexe.

Un nouveau changement de variable $u = X+Y, v = -j(X-Y)$ permet alors de transformé

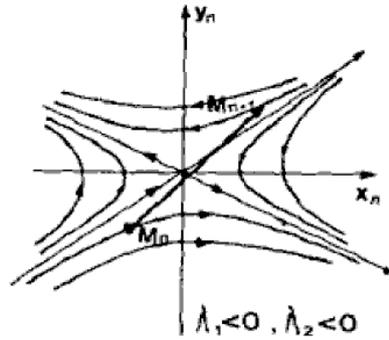


FIG. 1-7 – Col de type 3

la récurrence à variable complexe en une récurrence à variable réelles u, v :

$$u_{n+1} = \rho(u_n \cos \varphi - v_n \sin \varphi)$$

$$v_{n+1} = \rho(u_n \sin \varphi + v_n \cos \varphi)$$

· Si $\rho = 1$, le cercle centré en O sont des courbes invariantes puisque $u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 = u_n^2 + v_n^2$.
Si φ n'est pas commensurable avec 2π , une trajectoire discrète issue d'un point $M_0(u_0, v_0)$ est formée d'une suite des points dense sur le cercle de rayon $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$.

· Si $\varphi = \frac{2k\pi}{q}$ (k et q entier sans diviseur commun), une trajectoire issue d'un point $M_0(u_0, v_0)$ est formée par les q points d'un cycle d'ordre q situés sur le cercle de rayon $\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$.

Donc le point fixe O est appelé un **centre**.

Pour $\rho \neq 1$, les spirales logarithmiques

$$u^2 + v^2 = (u_0^2 + v_0^2)\rho^2 \exp(-\arctan \frac{u}{v})$$

· Si $\rho < 1$ une trajectoire discrète issue de $M_0(u_0, v_0)$ tend asymptotiquement vers O , le point correspondants restant sur une courbe.[2]

- Si $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$ alors Le point fixe O appelé **foyer stable** de type 1.

– Si $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$ alors Le point fixe O appelé **foyer stable** de type 2.

· Si $\rho > 1$ les trajectoires discrètes s'éloignent de 0 et O est un **foyer instable** de type 1 ou 2.

· Lorsque λ_1, λ_2 sont réels et $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ de plus les deux coefficients b, c de la matrice

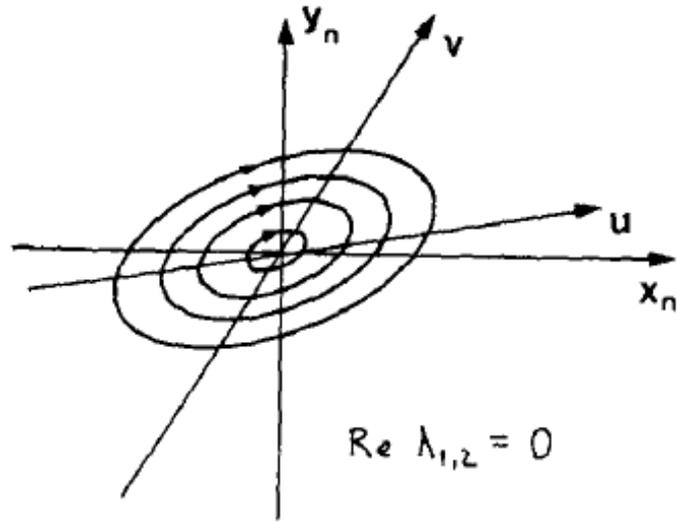


FIG. 1-8 – Centre

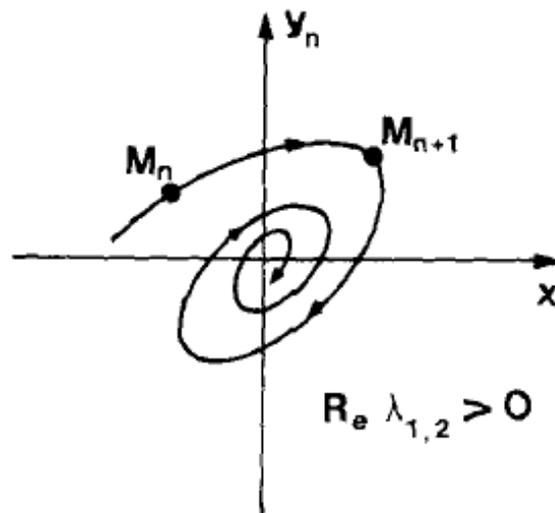


FIG. 1-9 – Foyer de type 1

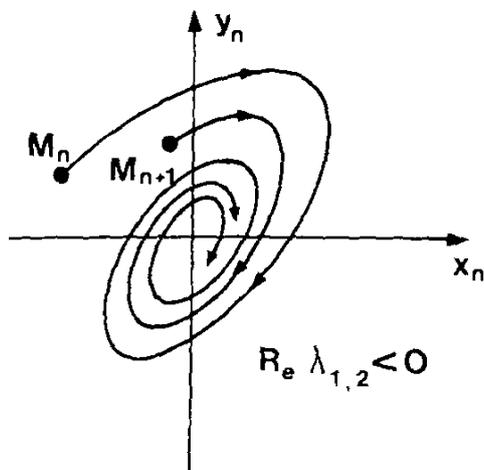
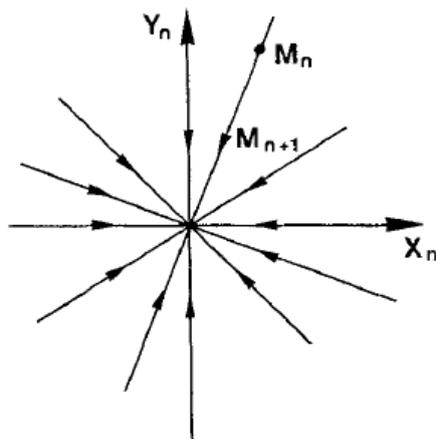


FIG. 1-10 – Foyer de type 2

(1.2) sont nuls. Les courbes invariantes de la transformation F pour $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ issue de différent points $M_0(X_0, Y_0)$ sont des droites passant par O .

· Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ alors le point fixe O est appelé un **noeud étoile** attractif de type 1.[2]



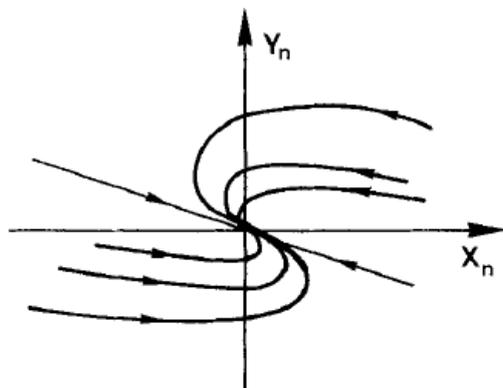
Noeud etoile de type 1

· Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ alors le point fixe est **Noeud étoile** répulsif de type 2.

-un seul des mineurs b ou c de la matrice des coefficients de (1.2) étant nul, il est impossible d'amener (1.2) à la forme (1.5) à l'aide d'un changement de variable.

· Si $\lambda_1 = -\lambda_2$ les courbes invariantes ont une allure parabolique ce point à deux directions

principales confondues est un **Noeud** de type 1, 2 ou 3 attractif ou répulsif.



Noeud

1.3 Récurrences non linéaires autonomes du second ordre à variables réelles

Ces ensembles invariants appartiennent à la classe des singularités de dimension 0. Un point fixe $M^*(\alpha, \beta)$ est un point dont les coordonnées α, β sont solution du système d'équation :

$$\begin{aligned}\alpha - f(\alpha, \beta) &= 0 \\ \beta - g(\alpha, \beta) &= 0\end{aligned}$$

Le cas non linéaire conduit donc à la possibilité d'existence de plusieurs points fixes. Si $f(x, y), g(x, y)$ sont au moins une fois différentiables au point $M^*(\alpha, \beta)$, un changement de variable $x = \alpha + X, y = \beta + Y$, permet d'amener l'origine en ce point fixe, et de séparer dans la nouvelle récurrence les termes linéaires des autres termes .[2]

$$\begin{aligned}X_{n+1} &= aX_n + bY_n + \bar{X}(X_n, Y_n) \\ Y_{n+1} &= cX_n + dY_n + \bar{Y}(X_n, Y_n)\end{aligned}$$

Ou $\bar{X}(0,0) = \bar{Y}(0,0) = 0$, $\lim_{X,Y \rightarrow 0} \frac{\bar{X}}{(|X|+|Y|)} = \lim_{X,Y \rightarrow 0} \frac{\bar{Y}}{(|X|+|Y|)} = 0$.

L'écriture des premier termes du développement en série de Taylor de $f(\alpha + X, \beta + Y)$, $g(\alpha + X, \beta + Y)$ permet d'écrire : $a = (\frac{\partial f}{\partial x})_{M^*}$, $b = (\frac{\partial f}{\partial y})_{M^*}$, $c = (\frac{\partial g}{\partial x})_{M^*}$, $d = (\frac{\partial g}{\partial y})_{M^*}$, les dérivées partielles étant évaluées en $M^*(x = \alpha, y = \beta)$

Comme dans le cas linéaire, en général, les multiplicateurs λ_1, λ_2 solutions de l'équation caractéristique (1.4) fixent le comportement des trajectoires discrètes engendrées par

$$X_{n+1} = f(x_n, y_n), Y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

Les courbes invariantes passant par un point fixe subissent en outre une "distorsion", en particulier pour les cols et les noeuds, les axes principaux du cas linéaire deviennent maintenant des courbes invariantes et non des droites.

Ces courbes invariantes sont tangentes aux vecteur propre de la matrice des coefficients a, b, c et d au point fixe M^* .

-Si $|\lambda_1| = 1$, ou $|\lambda_2| = 1$, ou $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, cette caractéristique de "frontière", entre deux comportements qualitatifs différents, entraîne que les trajectoires de l'approximation linéaire ne sont pas en général conservées, aussi petit que soit le voisinage D de M^* .

Ce sont les non linéarités \bar{X}, \bar{Y} , qui fixent l'allure de ces trajectoires à l'intérieur de D d'une façon semblable à ce qui a lieu dans les équations différentielles. On dit alors qu'il y a cas critique au sens de Lyapunov.

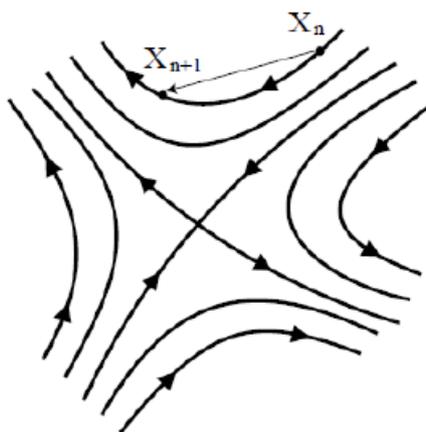


FIG. 1-11 – Col non linéaire

Explicitement, il y a ainsi cas critique pour :

- a) $\lambda_1 = 1$ et $|\lambda_2| \neq 1$; b) $\lambda_1 = -1$ et $|\lambda_2| \neq 1$; c) $\lambda_{1,2} = \exp \pm j\phi$.
- d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ($\phi = 0$ du cas (c)); e) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ($\phi = \pi$ du cas (c)).

f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ non issu de cas $\phi = 0$ (un seul des mineur b, c , de la matrice de coefficients de (1.2) est nul).

1.4 Bifurcations

Lorsque le système dynamique dépend continûment d'un ou de plusieurs paramètres, la variation de ces paramètres peut entraîner des changements qualitatifs dans l'espace des phases, tels que l'apparition ou la disparition de singularités, le changement de stabilité d'une singularité, le changement de type de singularités, ... etc. Ces changements qualitatifs s'appellent bifurcations.[8]

Bifurcation fold ou pli

Elle correspond à l'apparition de deux cycles d'ordre k , de stabilités différentes a la bifurcation, les deux cycles sont confondus et avec un multiplicateur λ égal à 1. Cette bifurcation s'écrira :

- Pour $\dim X = 1$

$$\emptyset \xrightarrow[\lambda=1]{} Cy_s^k + Cy_i^k$$

où X désigne l'espace des phases, Cy_s^k un cycle d'ordre k stable et Cy_i^k un cycle d'ordre k instable.

- Pour $\dim X = 2$

$$\emptyset \xrightarrow[\lambda=1]{} N_s^k + C^k$$

Où N_s^k désigne un cycle noeud d'ordre k stable et C^k un cycle col d'ordre k .

Bifurcation flip ou doublement de période

Cette bifurcation a lieu lorsqu'une des deux valeurs propres est égales à -1 . Un cycle d'ordre k qui subie cette bifurcation va changer de nature et crée un cycle d'ordre $2k$ de la même nature. C'est-à-dire, un point fixe stable d'ordre 1, par exemple, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable. On écrira :

- Pour $\dim X = 1$

$$Cy_s^k \xrightarrow[\lambda=-1]{} Cy_s^{2k} + Cy_i^k$$

- Pour $\dim X = 2$

$$N_s^k \xrightarrow[\lambda=-1]{} N_s^{2k} + N_i^k$$

Bifurcation de Neimark-Sacker Cette bifurcation est définie pour $\dim X \geq 2$ et a lieu lorsqu'un cycle d'ordre k stable a deux multiplicateurs complexes $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \rho \exp i\theta$, dont le module ρ passe par la valeur 1. Pour $\dim X = 2$ on a :

$$F_s^k \xrightarrow{\lambda=1} F_i^k + CFI_s^k$$

où F_s^k et F_i^k désignent deux cycles foyers d'ordre k , le premier stable et le second instable. CFI_s^k désigne un cycle de k courbes fermées invariantes stables, chacune d'elles entourant un foyer du cycle F_i^k . La bifurcation peut être super-critique ou sous-critique.

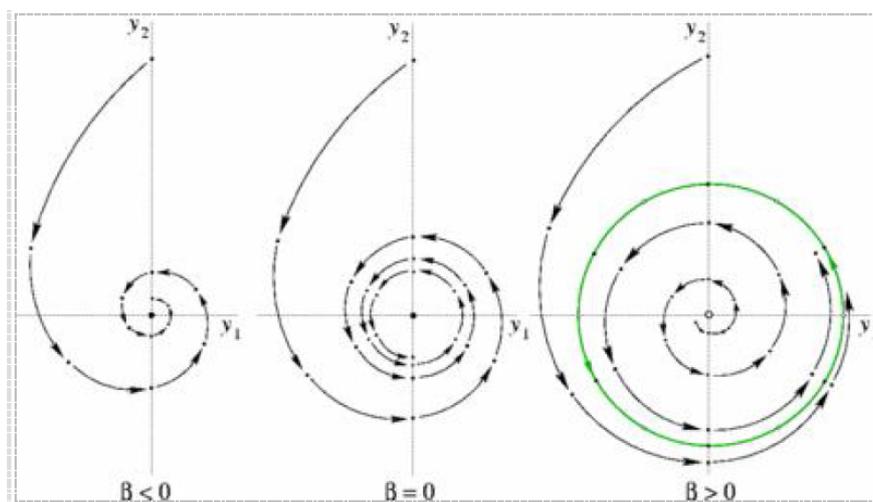


FIG. 1-12 – Diagramme de bifurcation super-critique de Neimark-Sacker

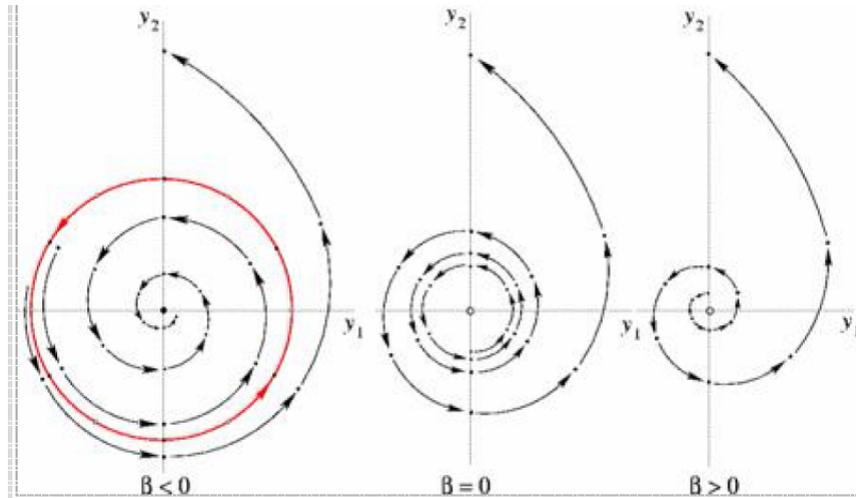


Diagramme de bifurcation sous-critique de Neimark-Sacker

1.5 Chaos

Des systèmes dynamiques non linéaires, ou simplement linéaires par morceau, peuvent faire preuve de comportements complètement imprévisibles, qui peuvent même sembler aléatoires (alors qu'il s'agit de systèmes parfaitement déterministes). Cette imprédictibilité est appelée chaos. La branche des systèmes dynamiques qui s'attache à définir clairement et à étudier le chaos s'appelle la théorie du chaos.

La théorie du chaos traite des systèmes dynamiques déterministes qui présentent un phénomène fondamental d'instabilité appelé "sensibilité aux conditions initiales", ce qui les rend non prédictibles en pratique sur le "long" terme.

On appelle chaotiques des phénomènes complexes, dépendant de plusieurs paramètres et caractérisés par une extrême sensibilité aux conditions initiales : par exemple, les volutes décrites par la fumée d'une cigarette, ou la trajectoire d'un ballon qui se dégonfle.

Un système dynamique est dit chaotique s'il présente simultanément les caractéristiques suivantes :

- Le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.
- Le phénomène est décrit par des équations différentielles.
- Le système est attiré vers un attracteur étrange, ayant dans beaucoup des cas, une dimension fractale.

1.5.1 Définition du chaos

Il n'ya aucune définition standard du chaos néanmoins, les dispositifs du chaos incluent :

-La non-linéarité : Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.

-La déterminisme : Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plûtôt que probabilistes).

-La sensibilité aux conditions initiales : Cette propriété a été observée pour la première fois par **E. Lorenz** sur son modèle météorologique. Elle est connue sous le nom populaire "d'effet de papillon". La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique, puisque La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales ; pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement ; les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables.[7]

-L'imprévisible : En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

1.5.2 Caractérisation du chaos

Ce chapitre offre des outils mathématiques permettant de caractériser les systèmes dynamiques chaotiques. Ceux-ci étant définis par un attracteur étrange. Plusieurs propriétés permettent cette caractérisation.

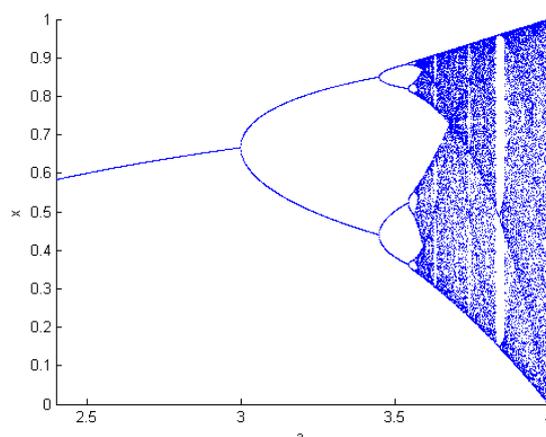


FIG. 1-13 – Diagramme de bifurcation de fonction logistique

Le diagramme de bifurcations

Une évolution d'un point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus de comportement appelés bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. Le diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation. Le diagramme de bifurcation permet de mieux visualiser l'évolution d'un système vers le chaos en fonction ses paramètres.

Le diagramme de bifurcation (1-13) rend compte du comportement de l'application logistique en fonction du paramètre a .

Les exposants de Lyapunov

Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité est appelée " exposant de Lyapunov " qui est souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non.

Cas d'une application unidimensionnelle

Soit une application discrète f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique x_t sur x_{t+1} . Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_0 + \varepsilon$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra alors trouver un réel λ tel que après t itérations :

$$\left| f^t(x_0 + \varepsilon) - f^t(x_0) \right| \cong \varepsilon \exp t\lambda$$

En passant au logarithme, on trouve :

$$\ln \left| \frac{f^t(x_0 + \varepsilon) - f^t(x_0)}{\varepsilon} \right| \cong t\lambda$$

Si l'on fait tendre ε vers 0, il vient :

$$\lambda \cong \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df^t(x_0)}{dx_0} \right|$$

Finalement, en faisant tendre t vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln \left| f'(x_i) \right|$$

moyennant la notation :

$$f'(x_i) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}$$

λ est appelé **exposant de Lyapunov**. Il indique le taux moyen de divergence par itération. Si ce nombre est positif, il y a élongation et sensibilité aux conditions initiales. Si par contre, il est négatif, on perd de l'information sur les conditions initiales : les trajectoires se rapprochent.

Généralisation aux applications multidimensionnelles

Comment généraliser les concepts du paragraphe précédent à des trajectoires multidimensionnelles de type :

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

Commençons par préciser qu'un système m -dimensionnel possédera m exposants de Lyapunov. Chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume initial V_0 évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 \exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)t$$

Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un des λ_i soit positif, pour avoir étirement selon au moins un axe. Mais il faut également que la somme des λ_i soit négative. En effet, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé. On n'aurait alors plus un attracteur de faible dimension, et donc plus affaire à du chaos déterministe.

Mais avant de nous pencher sur ce genre de considérations, nous devons pouvoir définir et calculer les λ_i . Dans ce but, fixons-nous donc une hypersphère dans notre espace m -dimensionnel de rayon ε (petit) de conditions initiales et examinons son évolution. Comme précédemment, nous intéressons à :

$$f^t(x_0 + \varepsilon) - f^t(x_0)$$

Posons $x' = x_0 + \varepsilon$ et opérons un développement en série limité d'ordre 1 de $f^t(x_0)$ au voisinage de x'_0 :

$$x_t - x'_t = \frac{df^t(x_0)}{dx}(x_0 - x'_0) = J^t(x_0)(x_0 - x'_0)$$

où $J^t(x_0)$ dénote la matrice Jacobienne de $f^t(\cdot)$ au point x_0 . Il s'agit d'une matrice carrée

$m \times m$. Si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P_t telle que :

$$D_m^t = P_t^{-1} J^t P_t$$

où D_m^t est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de J^t . Dénotons celles-ci par Λ_i^t , $i = 1, \dots, m$. On définit alors les m exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln [\Lambda_i^t], i = 1, \dots, m$$

Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

1. Si tous les exposants de Lyapunov sont négatifs alors il y a une solution périodique attractive.
2. Si au moins un des exposants de Lyapunov est nulle alors il y a une point de bifurcation.
3. Un exposant de Lyapunov positif indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Il s'agit donc bien là d'une caractérisation du chaos.

Lien avec la notion de dimension

Nous savons que si tous les exposants de Lyapunov sont positifs, on n'a pas affaire à un attracteur chaotique, puisque l'on va peu à peu remplir tout \mathbb{R}^m . D'autre part, si ils sont tous négatifs, la sphère de conditions initiales va se contracter jusqu'à dégénérer en un point. Nous sentons donc bien qu'il doit exister un lien entre les exposants de Lyapunov et la dimension de l'attracteur. Nous présentons ici succinctement deux conjectures de relations à partir du spectre ordonné des exposants de Lyapunov.

Conjecture de Kaplan et Yorke

Soit j_0 un entier positif tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{j_0+1} \lambda_i < 0 \end{array} \right.$$

On définit alors la dimension de Kaplan et Yorke par la relation :

$$D_{KY} = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}$$

Conjecture de Mori

Soient m_0 le nombre d'exposants de Lyapunov nuls, m_+ le nombre d'exposants positifs, $\overline{\lambda}_+$ la moyenne des exposants positifs et $\overline{\lambda}_-$ celle des exposants négatifs.

La dimension de Mori est donnée par la relation :

$$D_{m_0} = m_0 + m_+ \left(1 + \frac{\overline{\lambda}_+}{|\overline{\lambda}_-|} \right)$$

1.5.3 Routes vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit "de contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle conduit dans bien des cas à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système.

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On peut citer trois scénarios de transition vers le chaos :

1- L'intermittence vers le chaos : un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.

2- Le doublement de période : Le doublement de période qui est caractérisé par une succession de bifurcations fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, ..., etc ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaître suivant ce scénario.

3- La quasi-périodicité : qui intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi-périodique. Ce scénario un peu compliqué est relié à la théorie des nombres, notamment aux travaux de Jean Christophe Yoccoz, lauréat de la Médaille Fields en 1994, pour ses travaux sur les systèmes dynamiques.

Chapitre 2

La carte de Lozi

Un système chaotique est un système dynamique déterministe non linéaire qui se distingue par son imprévisibilité due à son extrême sensibilité aux conditions initiales. Dans ce travail, on présente la carte de Lozi et on détermine les points fixes et stabilisations, en suite on explique la bifurcation et l'attracteur de Lozi.

2.1 La carte de Hénon

En 1976, L'astronome Michel Hénon a obtenu ses équations en cherchant une version simplifiée du système dynamique de Lorenz à temps continu introduit en 1963, La carte de Hénon consiste en une itération à deux dimensions qui peut prendre différentes formes. On utilisera la forme suivante à partir d'un point de coordonnées x_n et y_n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

L'attracteur de Hénon est un système dynamique à temps discret. C'est l'un des systèmes dynamiques ayant un comportement chaotique les plus étudiés, il dépend de deux paramètres, a et b , qui ont pour valeurs canoniques : $a = 1.4$ et $b = 0.3$. Pour ces valeurs, l'attracteur de Hénon est chaotique. Pour d'autres valeurs de a et b , il peut être chaotique, intermittent ou converger vers une orbite périodique.

La forme ne se construit pas de manière continue, toutes les valeurs qui converge vers cette structure le font d'une manière différente. L'attracteur de Hénon montre aussi une infinité de fines structures, a mesure que on effectue des grossissements successifs.

Si on programme ces formules avec Matlab on aura la figure suivante représenté l'attracteur de Hénon pour $a = 1,4$; $b = 0,3$:

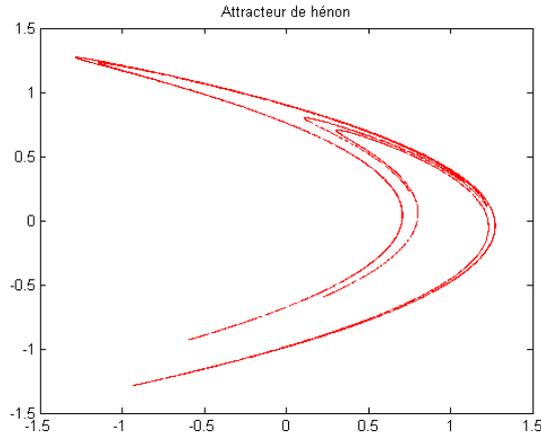


FIG. 2-1 – Attracteurs de Hénon

2.2 La carte de Lozi

En 1978, Lozi a proposé une carte plus simple qui ressemblent de la célèbre Hénon. Simplement, la seule différence entre la carte de Hénon et la carte de Lozi est que le terme non linéaire x^2 de la carte de Hénon est remplacé par $|x|$ dans la carte de Lozi. Cette modification de la carte de Hénon est linéaire pour $x > 0$, $x < 0$.

Lozi propose la carte suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a|x_n| + y_n \equiv f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = bx_n \equiv g(x_n, y_n) \end{cases}$$

Où a et b sont les paramètres réels non nulles.

2.2.1 Les points fixes et leurs stabilités

On cherche les points d'équilibre $(x; y)$ vérifiant $f(x, y) = g(x, y) = 0$.

Pour $x > 0$, il y a un seul point d'équilibre $P_1(x, y) = (\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b})$ si $b < 1 + a$.

Pour $x < 0$, il y a un autre point d'équilibre $P_2(x, y) = (\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b})$ si $b > 1 - a$.

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice Jacobienne :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -a \operatorname{sign}(x) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

et $(\det(J - \lambda I))$ est donnée par :

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -a \operatorname{sign}(x) - \lambda & 1 \\ b & -\lambda \end{vmatrix}$$

Donc le polynôme caractéristique est donné par :

$$p(\lambda) = (-\lambda)(-a \operatorname{sign}(x) - \lambda) - b$$

La stabilité au point $P_1(x, y) = (\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b})$

La matrice jacobienne au point P_1 est :

$$J_+(x, y) = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Son polynôme caractéristique est le suivant :

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + a\lambda - b \\ \Delta & = a^2 + 4b \end{aligned}$$

Si $b > \frac{-a^2}{4}$ alors $\Delta > 0$, donc la matrice (2.1) a deux valeurs propres réelles :

$$\begin{aligned} \lambda_1 & = \frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \\ \lambda_2 & = \frac{-a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2} \end{aligned}$$

Si $b < \frac{-a^2}{4}$ alors $\Delta < 0$, donc la matrice (2.1) a deux valeurs propres complexes :

$$\begin{aligned} \lambda_1 & = \frac{-a}{2} + i \frac{\sqrt{-a^2 - 4b}}{2} \\ \lambda_2 & = \frac{-a}{2} - i \frac{\sqrt{-a^2 - 4b}}{2} \end{aligned}$$

La stabilité du point fixe P_1 est résumée dans la proposition suivante :

Proposition 2.2.1

1/ **cas** $a > 0$ et $b + \frac{a^2}{2} - 1 > 0$.

- Si $b > 1 - a$ et $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$, alors le point fixe P_1 est un **point selle** ou **col**.

- Si $b < 1 - a$ et $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$, alors le point fixe P_1 est un **noeud instable**.

Pour $b + \frac{a^2}{2} - 1 < 0$

- Si $b < 1 - a$ et $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$, alors le point fixe P_1 est un **noeud stable**.

- Si $b > 1 - a$ et $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, alors le point fixe P_1 est un **Col**.

2/ **Cas** $a < 0$

- Si $b + \frac{a^2}{2} - 1 > 0$ et $b < 1 - a$, $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$, alors le point fixe P_1 est un **noeud instable**.

- Si $b + \frac{a^2}{2} - 1 < 0$ et $b < 1 - a$, $b < 1 + a$ les valeurs propres $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1$, alors le point fixe P_1 est un **noeud stable**.

• Les valeurs propres complexe sont de module inférieur à 1 si $b > -1$, alors le point fixe P_1 est un **foyer stable**.

• Les valeurs propres complexe sont de module supérieur à 1 si $b < -1$, alors le point fixe P_1 est un **foyer instable**.

La figure suivante illustre la stabilisation de point P_1

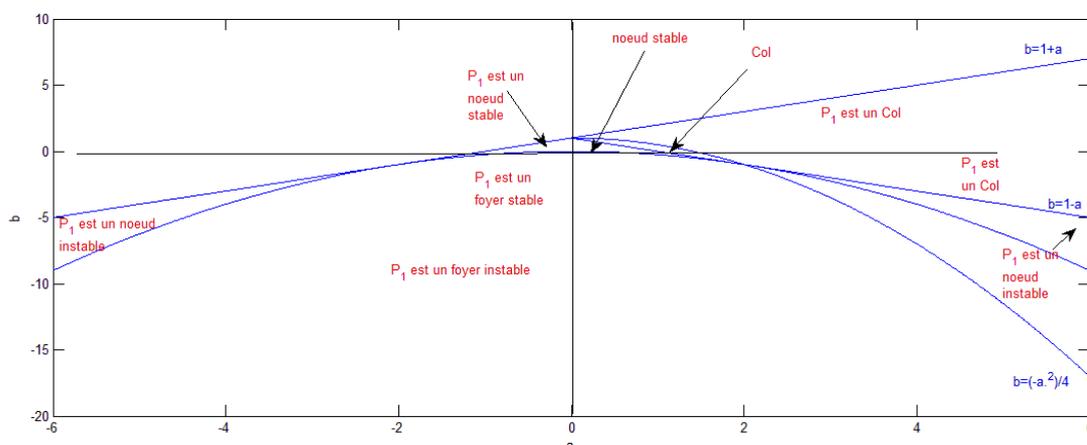


FIG. 2-2 – Stabilisation de point P_1

La stabilité au point $P_2(x, y) = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b}\right)$

La matrice Jacobienne au point P_2 est :

$$J_-(x, y) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Donc le polynôme caractéristique est donné par :

$$\lambda^2 - a\lambda - b$$

$$\Delta = a^2 + 4b$$

Dans la région où P_2 existe on $b > \frac{-a^2}{4}$ donc $\Delta > 0$ alors la matrice (2.2) a deux valeurs propres réelles :

$$\lambda_1 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

Proposition 2.2.2 *1^{ère} Cas* : $a > 0$ et $b > 1 - a$ on a :

- Si $b < 1 + a$ alors $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$. Le point fixe P_2 est un **noeud instable**.
- Si $b > 1 + a$ alors $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1$. Le point fixe P_2 est un **point selle ou col**.

2^{ème} Cas : $a < 0$ et $b > 1 - a$ on a :

- Si $b > 1 + a$ alors $|\lambda_2| > 1, |\lambda_1| < 1$. Le point fixe P_2 est un **point selle**.

La figure suivante illustre la stabilisation de point P_2

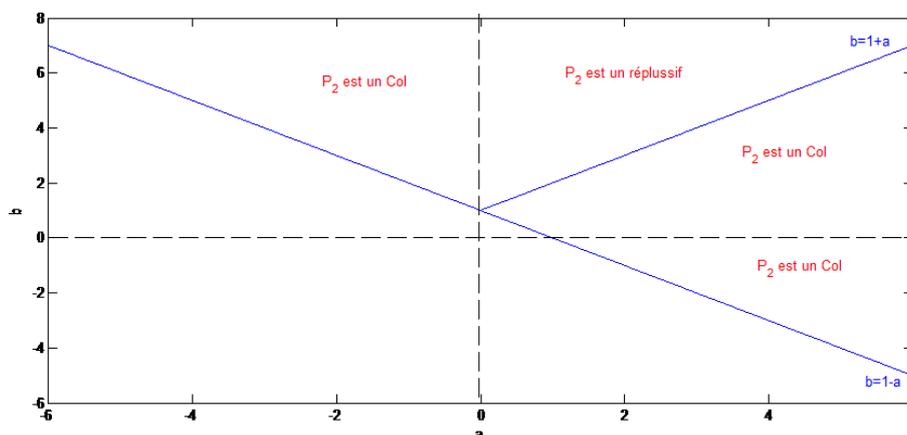


FIG. 2-3 – Stabilisation de P_2

2.2.2 Diagrammes de bifurcation

Dans cette section, on va étudié numériquement les différents types de bifurcations exits dans le dynamique du système de Lozi. Nous rappelons d'abord que les exposants de

Lyapunov d'une orbite périodique attractive sont négatifs. Ainsi qu'un point périodique ne peut bifurquer si au moins un de ses exposants de Lyapunov est zéro. Enfin, si au moins l'un des exposants de Lyapunov est positif, le comportement de la carte devient chaotique.

Pour $b = 0.1$ et $0.8 < a < 1.8$ nous pouvons voir différentes bifurcations comme le montre la figure (2-4). Si $0.8 < a < 0.9$ La carte de Lozi converge vers un point fixe. La première bifurcation se produit au point $a = 0.9$ du point fixe vers un cycle stable de période 2 et le long de l'intervalle $0.9 < a < 1.1$, elle converge vers un cycle stable de période 2. La deuxième bifurcation se produit au point $a = 1.1$ d'un un cycle stable de période 4 vers le chaos et le long de l'intervalle $1.1 < a < 1.8$ la carte est chaotique.

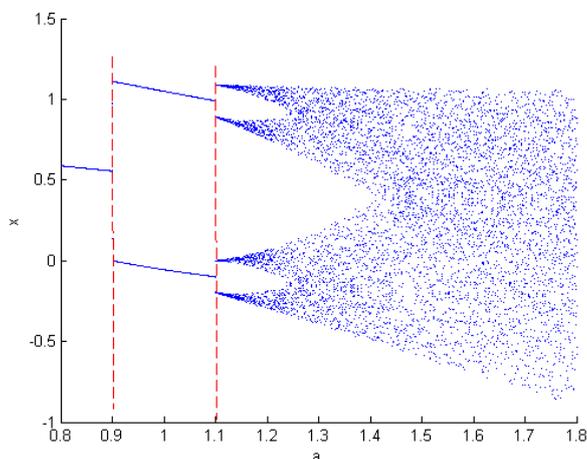


FIG. 2-4 – Diagramme de bifurcation de la carte de Lozi pour $b=0.1$

La construction de la deuxième diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre b de $-0,8$ à 0.8 avec un pas de $0,2$, a est égale à 1.5 . Le diagramme obtenu est représenté par la figure (2-5).

Ce diagramme est de type de bifurcation de point fixe au cycle, l'attracteur de Lozi contient deux points fixes, la partie stable se situe dans l'intervalle $[-0,8; -0,5]$ qui converge vers 2 cycle stable commence à $b = -0,5$. Une autre caractéristique de la figure (2-5) est dans l'intervalle $-0.5 < b < 0.5$; les trajectoires sautent entre les bandes chaotiques d'une manière cyclique. Pour $b = -0.4$, la carte de Lozi est chaotique.

Finalement, le saut cyclique entre les bandes chaotiques du diagramme prend place avec des périodes 2 et 4 à gauche et droite respectivement.

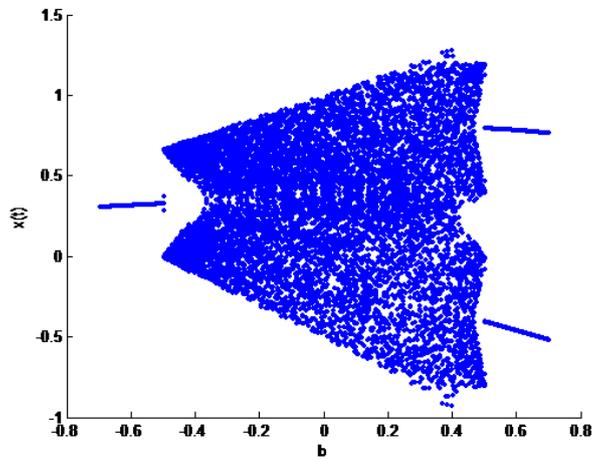


FIG. 2-5 – Diagramme de bifurcation de la carte de Lozi pour $a=1.5$

2.2.3 Exposants de Lyapunov

Pour $a = 1,7$ et $b = 0,5$, la carte de Lozi a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0,4573$ et $\lambda_2 = -1,1075$.

Les deux figures représente la variation des exposants de Lyapunov pour la carte de Lozi. La figure (2-6) présente des exposant de Lyapunov d'un orbite periodique attractif est négatif.

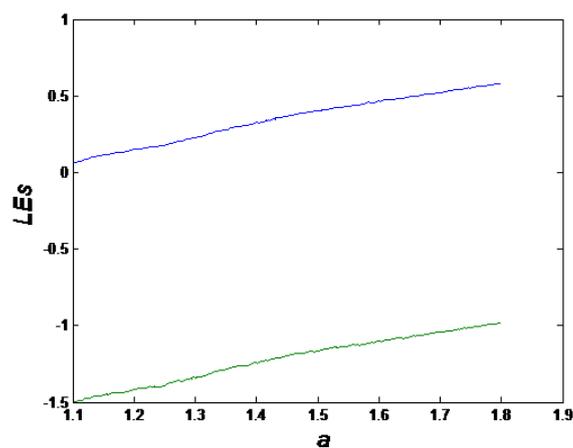


FIG. 2-6 – Diagramme des exposants de Lyapunov pour $b=0.5$

La figure (2-7) présente un point periodique bifurque si son exposant de Lyapunov est

zéro.

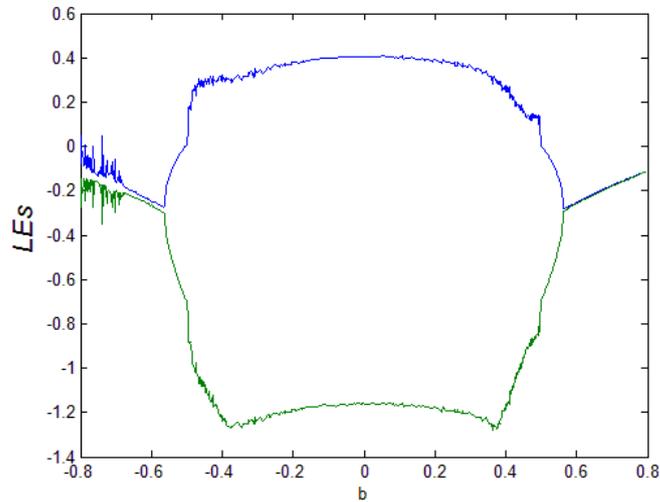


FIG. 2-7 – Diagramme des exposants de Lyapunov pour $a=1.5$

2.2.4 Attracteur de Lozi

Pour déterminer la structure de l'attracteur de Lozi, on peut faire un agrandissement d'un région de l'attracteur et on observe que la structure se répète.

Pour les paramètres $a = 1,7$ et $b = 0,5$ la suite de points itérés par la carte de Lozi converge vers un attracteur étrange représenté par la figure suivante : la partie supérieure est pour $a = 1,55$ et montre un attracteur la structure en zigzag dans l'espace des phases à la suite de la destruction de l'attracteur régulier. Dans la partie inférieure, avec $a = 1,7$ l'attracteur étrange est apparente. Cette structure en forme de V.

Dimension de l'attracteur de Lozi

On a pour $a = 1.7$, $b = 0.5$ la carte de Lozi a deux exposants de Lyapunov $\lambda_1 = 0,4573$ et $\lambda_2 = -1,1075$; alors la dimension de Lyapunov est :

$$\begin{aligned} D_L &= 1 + \frac{0,4573}{|-1,1075|} \\ &= 1,4129 \end{aligned}$$

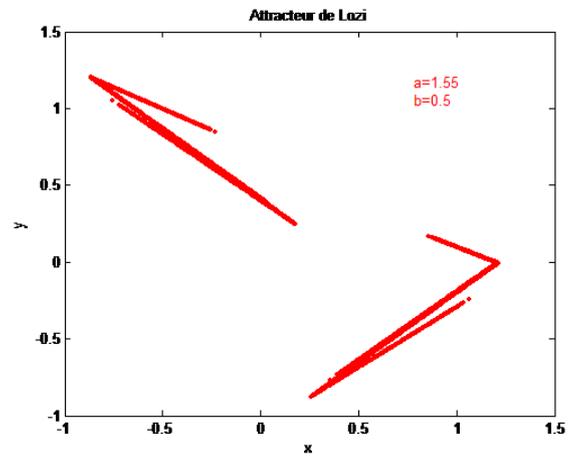


FIG. 2-8 – Attracteur de Lozi

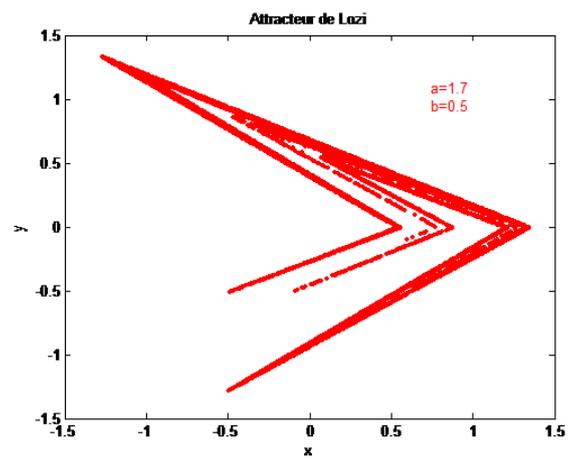


FIG. 2-9 – Attracteur de Lozi pour $a=1.7$ et $b=0.5$

Chapitre 3

Optimisation chaotique

L'optimisation est l'une des branches les plus importantes des mathématiques appliquées modernes, et de nombreuses recherches, à la fois pratiques et théoriques, lui sont consacrées. Dans lequel on définit une fonction cout, que l'on cherche à minimiser par rapport à ses paramètres. Par exemple, dans le célèbre problème du voyageur de commerce. La théorie du chaos a été utilisé dans le développement de nouvelles techniques de mondial optimisation, et en particulier, dans la spécification d'algorithmes d'optimisation du chaos, certains nouveaux algorithmes de recherche appelés algorithmes d'optimisation chaotiques (COA) s'échappent à des minima locaux à cause de la régularité des mouvements chaotiques.

Dans ce chapitre, nous présentons un algorithme d'optimisation chaotique efficace basé sur le modèle de Lozi. Cet algorithme appelé COLM , utilise une approche en deux phases, de manière à explorer l'espace de recherche d'une façon chaotique et consacrer à la description de l'approche que nous avons développée. Elle sera designée par ICOLM. Elle utilise le principe de l'approche étudiée dans la partie première avec une amélioration en optimisant localement la recherche globale.

3.1 Quelques méthodes d'optimisation chaotiques

La méthode de la recherche chaotique est une méthode très simple, non affectée par la dimension du problème d'optimisation. Cette méthode est basée sur l'exploration de l'espace de recherche X d'une manière chaotique afin de trouver un point qui minimise la fonction objective f .

Beaucoup de problèmes d'optimisation sans contrainte avec des variables continues peuvent

être formulés comme des problèmes d'optimisation de la manière suivante :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{tel que} \\ X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\ x_i \in [L_i, U_i], \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

f est appelée fonction objectif, X représente le vecteur des variables d'optimisation. Dans ce travail on va générer des suites des points on utiliser la carte de Lozi avec les paramètres $a = 1.7$, $b = 0.5$:

$$\begin{cases} y_1(k) = 1 - a |y_1(k-1)| + by(k-1) \\ y(k) = y_1(k-1) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où k est le nombre d'itération. en suite les valeurs $y(k)$ sont normalisées dans l'intervale $[0, 1]$ avec une transformation qui donner par :

$$z(k) = \frac{y(k) - \alpha}{\beta - \alpha} \quad (3.2)$$

Où $\alpha = \min_k(y(k))$ et $\beta = \max_k(y(k))$.

On va donner deux méthodes la première donner par **Leandro [3]** et la deuxième méthode est sel de **HAMAIZIA. T, LOZI. R, HAMRI. N [7]** qu'est une amélioration de la première :

3.1.1 L'algorithme COLM

l'algorithme COA est définie comme :

Entrées :

M_g :le nombre maximal d'itérations de la recherche globale chaotiques.

M_l :le nombre maximum d'itérations de la recherche locale chaotiques.

$M_l + M_g$: le critère d'arrêt de la méthode d'optimisation chaotique.

λ : le pas de la recherche locale chaotique.

Sorties :

\bar{X} : la meilleure solution d'exécution en cours de recherche chaotique.

\bar{f} : la meilleure fonction objectif.

Algorithme 1 : COLM

– **Etape 1** : Initialisation des nombres M_g ; M_l de recherche chaotique et initialisation des variables et les conditions initiales. On pose $k = 1$; $y(0)$; $y_1(0)$; $a = 1,7$ et $b = 0,5$ de la carte de Lozi. On pose $\bar{f} = +\infty$.

– **Etape 2 : Algorithme de recherche chaotique globale :**

```

while  $k \leq M_g$  do
     $x_i(k) = L_i + Z_i(k)(U_i - L_i)$  ,  $i = 1, \dots, n$ 
    if  $f(X(k)) < \bar{f}$  then
         $\bar{X} = X(k)$  ;  $\bar{f} = f(x(k))$ 
    end if
     $k = k + 1$ 
end while

```

-**Etape 3 : Algorithme de recherche chaotique local :**

```

while  $k \leq (M_g + M_l)$  do
    if  $r \leq 0,5$  then
         $x_i(k) = \bar{x}_i + \lambda z_i(k) \cdot |(U_i - L_i)|$ 
    else
         $x_i(k) = \bar{x}_i - \lambda z_i(k) \cdot |(U_i - L_i)|$ 
    end if
    if  $f(X(k)) < \bar{f}$  then
         $\bar{X} = X(k)$  ;  $\bar{f} = f(x(k))$ 
    end if
     $k = k + 1$ 
end while

```

La première étape de cet algorithme est utilisée pour obtenir un bon optimum pour l'étape de raffinement où la recherche chaotique locale. z est toujours le modèle chaotique et est un paramètre scalaire lié au rayon de la recherche autour de x .

Les optima locaux sont mis à jour chaque fois qu'un point est trouvé de mieux telle que la procédure se poursuit pour la recherche au voisinage du nouveau point optimal.

3.1.2 L'algorithme ICOLM

Nous proposons une nouvelle stratégie d'optimisation chaotique qui est une amélioration de la méthode COLM qui repose sur une recherche globale suivie d'une recherche locale et peut donner des résultats insatisfaisants. Nous avons fait une modification dans la phase globale de la recherche. En a fait quelques étapes de recherches locales chaotiques autour de chaque point obtenu par la série chaotique, c'est-à-dire en optimisant localement pendant quelques itérations le résultat global. Cette nouvelle recherche est appelée ICOLM. Donc ICOLM a améliorée la méthode COLM par une recherche globale localement moyennée.

Heuristique : La stratégie globale localement moyennée du ICOLM conduit à des meilleurs résultats que la méthode COLM comme montre la Fig (3 – 1). Dans cette figure,

on affiche trois résultats de la recherche globale $x_1; x_2; x_3$ tel que :

$$f(x_2) < f(x_3) < f(x_1) \quad (3.3)$$

La recherche locale qui suit la recherche globale commence à partir du meilleur résultat global x_2 (3.3) et donne x'_2 . Par contre, la recherche "locale-globale" autour $x_1; x_2; x_3$ conduit à $x'_1; x'_2; x'_3$ qui vérifient :

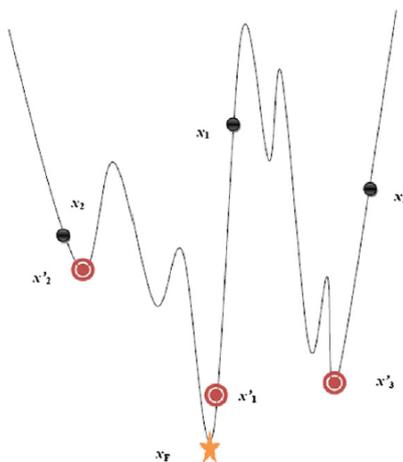


FIG. 3-1 – Heuristique de la stratégie globale localement moyenne

$$f(x'_2) < f(x'_3) < f(x'_1) \quad (3.4)$$

La recherche locale suivant la recherche "locale-globale" commence à partir du meilleur résultat x'_1 (3.3) et conduit à \bar{x} qui vérifient :

$$f(\bar{x}) < f(x'_1) \quad (3.5)$$

Dans cet algorithme, nous supposons que les composantes de z sont restreintes à l'intervalle $[0; 1]$.

la procédure de la nouvelle recherche chaotique basée sur un modèle 2 – D peut être illustrée comme suit :

Entrées :

M_g : le nombre maximal d'itérations de la recherche globale chaotiques

M_l : le nombre maximum d'itérations de la recherche locale chaotiques.

Mgl_1 : le nombre maximal d'itérations de la 1^{er} recherche globale-locale.

Mgl_2 : le nombre maximal d'itérations de la 2^{ème} recherche globale-locale.

$Mt = Mg \times (Mgl_1 + Mgl_2) + Ml$: le critère d'arrêt de la méthode d'optimisation chaotique.

λ : le pas dans la recherche locale chaotique.

λgl_1 : le pas dans la première recherche globale-locale .

λgl_2 : le pas dans la deuxième recherche globale-locale.

Sorties :

\bar{X} : la meilleure solution d'exécution en cours de recherche chaotiques

\bar{f} : la meilleure fonction objectif.

Algorithme : ICOLM

Etape 1 : Initialisation des nombres Mg ; Mgl_1 ; Mgl_2 ; Ml de recherche chaotique et initialisation des paramètre λgl_1 ; λgl_2 ; k et les conditions initiales. On pose $k = 1$; $y(0)$; $y_1(0)$; $a = 1,7$ et $b = 0,5$ de la carte de Lozi. On pose $\bar{f} = +\infty$.

– **Etape 2 : Algorithme de recherche chaotique globale :**

while $k \leq M_g$ **do**

$x_i(k) = L_i + Z_i(k)(U_i - L_i)$, $i = 1, \dots, n$

if $f(X(k)) < \bar{f}$ **then**

$\bar{X} = X(k)$; $\bar{f} = f(x(k))$

end if

–**Etape 2-1 : sous algorithme de première recherche chaotique global-local :**

while $j \leq M_{gl_1}$ **do**

for $i = 0$ to n **do**

if $r \leq 0,5$ **then**

$x_i(j) = \bar{x}_i + \lambda_{gl1} z_i(j) \cdot |(U_i - L_i)|$

else

$x_i(j) = \bar{x}_i - \lambda_{gl1} z_i(j) \cdot |(U_i - L_i)|$

end if

end for

if $f(X(j)) < \bar{f}$ **then**

$\bar{X} = X(j)$; $\bar{f} = f(x(j))$

end if

$j = j + 1$

end while

– **Etape 2-2 : sous algorithme de deuxième recherche chaotique global-local :**

While $s \leq M_{gl2}$ **do**

for $i = 1$ to n **do**

if $r \leq 0,5$ **then**

$x_i(s) = \bar{x}_i + \lambda_{gl2} z_i(s) \cdot |(U_i - L_i)|$

```

else
     $x_i(s) = \bar{x}_i - \lambda_{gl2} z_i(s) \cdot |(U_i - L_i)|$ 
end if
end for
if  $f(X(s)) < \bar{f}$  then
     $\bar{X} = X(s)$ ;  $\bar{f} = f(x(s))$ 
end if
     $s = s + 1$ 
end while

     $k = k + 1$ 
end while
– Etape 3 : algorithme de recherche local :
while  $k \leq Mg \times (Mgl_1 + Mgl_2) + Ml$  do

    for  $i = 1$  to  $n$  do
        if  $r \leq 0,5$  then
             $x_i(s) = \bar{x}_i + \lambda z_i(k) \cdot |(U_i - L_i)|$ 
        else
             $x_i(s) = \bar{x}_i - \lambda z_i(k) \cdot |(U_i - L_i)|$ 
        end if
    end for
    if  $f(X(k)) < \bar{f}$  then
         $\bar{X} = X(k)$ ;  $\bar{f} = f(x(k))$ 
    end if
         $k = k + 1$ 
end while

```

3.2 Simulation

Dans cette section on va donner quelques fonctions tests qui sont utilisés pour examiner l'efficacité de cette nouvelle méthode.

3.2.1 Quelques fonctions test

En premier lieu, on s'intéresse à minimiser une fonction de Camel :

$$f_1(x, y) = 100\sqrt{|y - 0.01x^2|} + 0.01|x + 10|$$

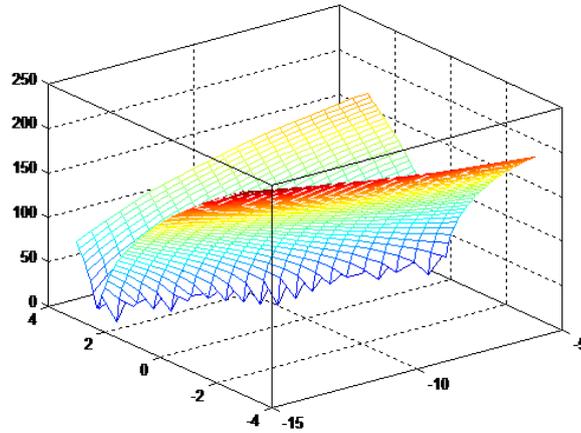


FIG. 3-2 – Graphe de fonction de Camel sur domaine de recherche

- Le domaine de recherche : $-15 \leq x \leq -5$, $-3 \leq y \leq 3$.
- nombre de minimum local : plusieurs minimum local.
- un seul minimum global : $f_1(-10, 0) = 0$.

La deuxième fonction f_2 est la fonction de Schaffer :

$$f_2(x, y) = 0.5 + \frac{\sin^2(x^2 - y^2) - 0.5}{(1 + 0.001(x^2 + y^2))^2}$$

- domaine de recherche : $-4 \leq x_i \leq 4$, $i=1,2$.
- nombre de minimum local : plusieurs minimum local.
- un seule minimum global : $f_2(0, 0) = 0$.

On s'intéresse à minimiser la fonction de Rastrigin tridimensionnelle. Nous avons formulé le problème de minimisation comme ci-dessous :

$$f_3(x, y) = \sum_{i=1}^3 (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)) + 10$$

- domaine de recherche : $-4 \leq x_i \leq 4$; $i = 1, 2, 3$.
- nombre de minimum local : plusieurs minimum local.
- un seule minimum global : $f_3(0, 0, 0) = 0$.

Dans ce test, la minimisation de la fonction test de Griewank en $n = 5$ dimensions :

$$f_4(x, y) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^5 x_i^2 - \prod_{i=1}^5 \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$$

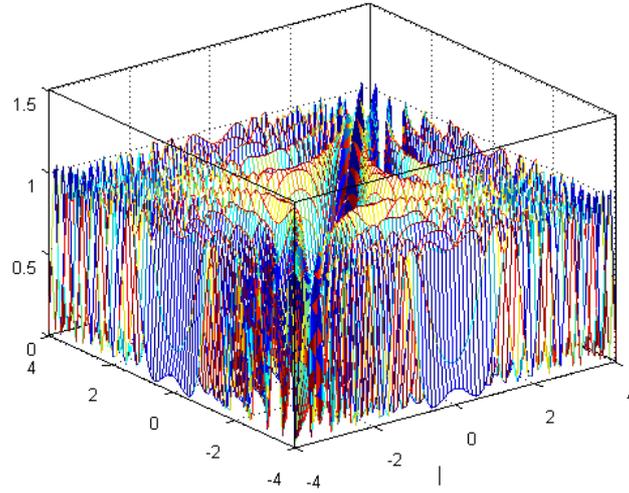


FIG. 3-3 – Graphe de fonction de Schaffer sur domaine de recherche

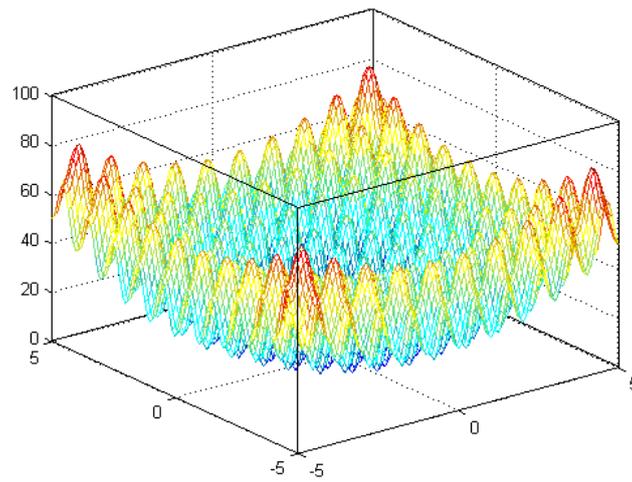


FIG. 3-4 – Graphe de fonction de Rastrigin

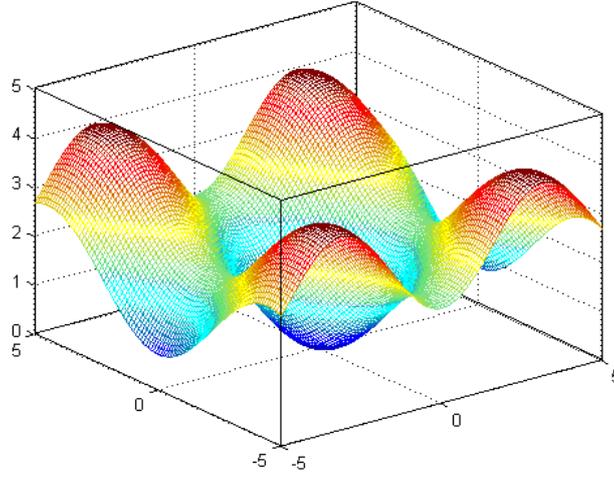


FIG. 3-5 – Graphe de fonction de Griewank

- domaine de recherche : $-5 \leq x_i \leq 5; i = 1, 2, \dots, 5$.
- nombre de minimum local : quelque minimum local.
- un minimum global : $f_4(0, 0, 0, 0, 0) = 0$.

3.2.2 Résultats numériques

Dans cette sous section on va appliquer la méthode ICOLM pour trouver les minimums des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 donner dans la sous section précédente. Et on va utiliser des paramètres comme du tableaux(3.6) :

Table1 :

C_i	λ	λ_{gl1}	λ_{gl2}	M_g	M_l	M_{gl1}	M_{gl2}
C_1	0.001	0.01	0.04	200	100	5	5
C_2	0.01	0.01	0.04	10	50	2	2

(3.6)

Table2 :

A chaque étude, 48 cas ont été faites et exécutés indépendamment pour méthode *ICOLM* impliquant 48 essais de différentes conditions initiales $y_1(0), y(0)$.

Les fonctions	C_i	Minimum théorique	Minimum numérique	les points optimaux (x^*, y^*)
f_1	C_1	0	0.0159	$(-8.67; 0.75)$
f_1	C_2	0	0.0695	$(-9.22; 0.85)$
f_2	C_1	0	9.77×10^{-15}	$(-0.17; -0.25)$
f_2	C_2	0	1.08×10^{-12}	$(0.95; -0.22)$
f_3	C_1	0	0.99	$(0; 0; 0)$
f_3	C_2	0	0.0047	$(0; 0; 0)$
f_4	C_1	0	2.7×10^{-8}	$(-0.17; 0; -0.24; 0.06; 0.02)$
f_4	C_2	0	1.95×10^{-5}	$(0; 0; 0; 0; 0)$

Conclusion Générale

Optimisation par chaos est une vaste domaine qui fait intervenir plusieurs types de compétences, comme nous venons de le présenter, une des applications des dynamiques chaotiques. Ce type de dynamique possède par nature deux aspects essentiels :

- l'évolution dans le temps est très sensible aux conditions initiales et pseudo-aléatoires.
- Mais ces dynamiques possèdent aussi un déterminisme local (loi d'évolution dynamique, équation différentielle d'évolution dans le temps) qui permet une reproduction, du même pseudo-aléatoire.

Dans ce mémoire, on consiste dans un premier temps à comprendre certaines des propriétés complexes de la dynamique chaotique. Cette compréhension a été accompagnée par une illustration concrète de toutes les notions précédentes par la carte de la célèbre Lozi qui nous on servi dans le deuxième chapitre . Dans la dernière chapitre est de présenter une tentative d'amélioration d'une nouvelle technique d'optimisation basée sur le chaos COA, en particulier un algorithme appelé COLM par L.S.Coelho.

Cet algorithme repose sur (la méthode à deux phases) une recherche globale suivie par une recherche locale. Dans cette méthode, on distingue la phase globale de la phase locale. Pendant la première, on évalue la fonction en plusieurs points chaotiques, alors que dans la seconde, on manipule chacun de ces points de manière locale, comme par exemple en recherchant un minimum local autour d'eux.

La bonne connaissance de la dynamique de nos modèles et la méthode COLM nous a permis de développer une technique d'optimisation chaotique. Dans cette approche nous avons amélioré cet algorithme en optimisant localement pendant quelques itérations le résultat global. Cette recherche globale localement moyennée est appelée ICOLM.

Bibliographie

- [1] **B. Li, W.S. Jiang**, Chaos Optimization method and its application, Journal of Control Theory and Application 14 (4), 613-615, (1997).
- [2] **I. Gumovski, C. Mira**, Recurrences and Discrete Dynamical Systems. Springer-Verlag (1980).
- [3] **L.S. Coelho**. "Tuning of PID controller for an automatic regulator voltage system using chaotic optimization approach", Chaos, Solitons and Fractals, 39, 1504-1514, (2009).
- [4] **M. Hénon** , A two dimensional mapping with a strange attractor. Commun Math Phys. 50 (1), 69-77 (1976).
- [5] **R. Lozi**, Un Attracteur étrange du type Attracteur de Hénon. Journal de Physique. 39, (C5), 9-10 (1978).
- [6] **T. Hamaizia, R. Lozi**, Improving Chaotic Optimization algorithm using a new global locally averaged strategy, in : Proceedings ENPACS, (2011).
- [7] **T. Hamaizia, R. Lozi**, Fast Chaotic Optimization algorithm based on locally averaged strategy and multifold chaotic attractor, Applied Mathematics and Computation 219 , 188-196, (2012).
- [8] **V. Botella-Soler, J.M. Castelo, J.A. Oteo, J. Ros**, Bifurcations in the Lozi map. J. Phys. A : Math. Theor. 44 305101.

Résumé

Dans ce mémoire, on a présenté un algorithme d'optimisation chaotique inspiré par méthode COLM, algorithme d'optimisation chaotique basée sur nouvelle 2-D attracteur chaotique. L'étude présentée nous permet de conclure que la méthode proposée est rapide et donne de bon optimum parce que on utilise simple et divers mécanisme pour coordonner les méthode cherchées basée sur théorie chaotique et nous raffiné la solution finale en utilisation la deuxième méthode du recherche local.

La profonde recherche est nécessaire pour gagner plus de confiance et une meilleure compréhension de la méthode proposée.

L'algorithme proposée doit être évaluée pour un grand nombre de tests pour les fonctions dans des dimensions plus élevées.

Les mots clés: Optimisation, Chaos, Algorithme.

Abstract

In this memory, we have presented a chaotic optimization algorithm inspired by COLM methods, chaos optimization algorithms based on new 2-D discrete chaotic attractor. The presented study allows us to conclude that the proposed method is fast and converges to a good optimum. Because we used a sampling mechanism to coordinate the research methods based on chaos theory, and we refined the final solution using a second method of local search.

Further research is needed to gain more confidence and better understanding of the proposed methodology. The proposed algorithm has to be evaluated for a large number of test functions in higher dimension .

Key words: Optimization, chaos, Algorithm.

المخلص

في هذه المذكرة ، قدمنا تحسين خوارزمية من الفوضى مستوحاة من طريقة ك و ل م ، تحسين خوارزمية الفوضى تعتمد على أساس البعد الثاني للجذاب الفوضوي . الدراسة التي قدمت تسمح لنا باستنتاج أن الطريقة المقترحة سريعة وتعطي أحسن قيمة مثلى ، لأننا استخدمنا آلية بسيطة لتنسيق مختلف طرق البحث القائمة على نظرية الفوضى ، ونعيد عملية البحث عن الحل النهائي باستخدام الطريقة الثانية من البحث المحلي.

الكلمات المفتاحية: تحسين، الفوضى، الخوارزمية.