



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid boussof Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master

**Filière mathématiques
Spécialité mathématiques fondamentales et appliquées**

Stabilité globale de certaines équations aux différences non linéaires

Préparé par : *Ben hammada Meriem*
Benyahia Selwa

Soutenue devant le jury

Président *Ch. Arroud*
Examineur *M. Khalfaoui*
Promoteur *Y. Halim*

MAA C. U. de Mila
MAB C. U. de Mila
MAA C. U. de Mila

Année universitaire : 2014/2015

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, nous commençons par remercier DIEU pour nous avoir donné la volonté et le courage pour terminer ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et notre sincère remerciement à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

*Nous remercions très chaleureux sont adressé à Monsieur **Yacine Halim** notre encadreur.*

*Nous adressons également nos vifs remerciements à Monsieur **Arroud Chems Eddine** et Monsieur **Khalfaoui Mohamed** les membres de jury qui ont bien voulu et accepter d'examiner ce modeste travail.*

Nous adressons également mes remerciements chaleureux aux membres de l'institut des sciences et de la technologie.

Nous remercions également adressés à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Meriem et Selwa

DIDICACE

*En guise de remerciement et en termes de gratitude, je dédie ce modeste travail,
Aux personnages les plus chers du monde et les plus chers à mon cœur, qui ont
été si généreux, si patients, si noble avec moi pendant mes années d'étude.*

*A mon père **Saleh** source de force et de courage, qui n'a jamais cesse de donner
de sa sympathie et son éducation.*

*A l'exemple de ma vie ma mère **Ziloukha** qui toujours présent à mes coté, avec
sa tendresse et son amour.*

*A mes frères : **Fares et Mouad**.*

*A mes sœurs : **Bahdja et Maria**.*

A mon grand-père et ma grand-mère.

*A toutes mes tantes et tous mes oncles, a mes cousines et mes cousins et mes
amies.*

*A mon binôme **Selwa** qui je la souhaite une vie plaine de joie et de prospérité.*

*A tous qui occupe une place dans ma vie, dans mon cœur et sur tout aux
étudiants de master deux mathématiques appliqués et fondamentales.*

Meriem

DIDICACE

*En guise de remerciement et en termes de gratitude, je dédie ce modeste travail,
Aux personnages les plus chers du monde et les plus chers à mon cœur, qui ont
été si généreux, si patients, si noble avec moi pendant mes années d'étude.*

*A mon père **Youcef** source de force et de courage, qui n'a jamais cesse de donner
de sa sympathie et son éducation.*

*A l'exemple de ma vie ma mère **Naima** qui toujours présent à mes côté, avec sa
tendresse et son amour.*

*A mon fiançaille et sa famille **Houssam**.*

*A mes frères : **Mohammed, Charef elddine**.*

*A mes soeurs : **Manel et son fils Siraj elddine, Fella et son fils Adam, et a
ma petite soeur Marwa**.*

*A toutes mes tantes et tous mes oncles, a mes cousines et mes cousins et mes
amies.*

*A mon binôme **Meriem** qui je la souhaite une vie plaine de joie et de prospérité.*

*A tous qui occupe une place dans ma vie, dans mon cœur et sur tout aux
étudiants de master deux mathématiques appliqués et fondamentales.*

Selwa

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Equations aux différences	3
1.1 Équations aux différences linéaires	3
1.1.1 Résolution de l'équation homogène	5
1.1.2 Analyse de la stabilité des solutions	9
1.2 Équations aux différences non linéaires	10
1.2.1 Linéarisation des équations aux différences non linéaires	12
1.2.2 Théorèmes de convergences	13
2 Stabilité globale d'une équation aux différences d'ordre deux	21
2.1 Périodicité des Solutions	21
2.2 La stabilité locale des points d'équilibres	26
2.3 La stabilité globale des points d'équilibres	27
2.4 Exemples numériques	30
2.5 Cas particulier	31
3 Étude du comportement des solutions d'une équation aux différences	34
3.1 Périodicité des solutions	35
3.2 La stabilité locale des points d'équilibres	40

Table des matières

3.3 La stabilité globale des points d'équilibres	41
Conclusion	45

INTRODUCTION

L'objectif de cette mémoire est d'étudier le comportement de solutions de certaines équations aux différences non linéaires d'ordre deux.

La théorie des équations aux différences est intéressante en soi et il est facile de voir qu'elle va jouer un plus grand rôle dans un avenir proche. De plus, il y a une forte augmentation des applications de la théorie des équations aux différences à divers domaines tels que l'analyse numérique, la théorie du contrôle, les mathématiques et l'informatique finie. Ainsi, toutes les raisons d'étudier la théorie des équations aux différences comme une discipline à part entière sont réunies.

Les équations aux différences se manifestent comme des modèles mathématiques décrivant des situations de vie réelle, que ce soit dans la théorie des probabilités, les problèmes de files d'attente, les problèmes statistiques, les séries temporelles stochastiques, l'analyse combinatoire, la théorie des nombres, la géométrie, les réseaux électriques, les quanta de rayonnement, la génétique en biologie, l'économie, la psychologie, la sociologie, etc.

Ce mémoire est réparti sur l'introduction générale et trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous avons donné des définitions sur les équations aux différences linéaires et non linéaires.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié la périodicité des solutions, la stabilité locale et globale des points d'équilibre de l'équation aux différences non linéaire suivante

$$x_{n+1} = ax_n - \frac{bx_n}{cx_n - dx_{n-1}},$$

à la fin on donne les solutions du cas particulier suivant

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{x_n - x_{n-1}}.$$

Dans le dernier chapitre, on étudie le comportement des solutions d'équation aux différences non linéaire d'ordre deux suivant

$$x_{n+1} = \gamma x_{n-1} + \frac{ax_n + bx_{n-1}}{cx_n - dx_{n-1}}.$$

CHAPITRE 1

EQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux équations aux différences non linéaires. Dans la première partie on présente l'essentiel des définitions et résultats connus utiles pour la suite de notre travail. Dans la dernière partie, on donne quelques théorèmes de convergence pour les équations aux différences non linéaires d'ordre deux.

1.1 Équations aux différences linéaires

Définition 1.1.1 *Une équation de la forme*

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)y_n = g_n \quad (1.1)$$

avec, $p_0(n) = 1, p_1(n), \dots, g_n$, sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}_{n_0}^+$, s'appelle équation aux différences linéaire d'ordre k , dès que $p_k(n) \neq 0$. Avec les conditions initiales

$$y_{n_0} = c_1, y_{n_0+1} = c_2, \dots, y_{n_0+k-1} = c_k \quad (1.2)$$

où les $c_i, i = 1, \dots, k$ sont des constantes réelles ou complexes.

Théorème 1.1.1 *L'équation (1.1) avec les conditions initiales (1.2) admet une et une seule solution.*

Dans la suite on note par $y(n, n_0, c)$ la solution de l'équation (1.1) tel que $y(n_0 + j, n_0, c) = c_{j+1}, j = 0, 1, \dots, k - 1$

avec

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_K) \in \mathbb{R}^K.$$

Définition 1.1.2 *L'équation (1.1) est dite homogène si $g_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}^+$.*

Alors

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \dots + p_k(n)y_n = 0. \quad (1.3)$$

Soit l'opérateur L définie par

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y_n &\mapsto Ly_n = \sum_{i=0}^k p_i(n)y_{n+k-i}. \end{aligned}$$

L'équation (1.1) prend la forme

$$Ly_n = g_n \quad (1.4)$$

et l'équation homogène sera

$$Ly_n = 0. \quad (1.5)$$

Il est clair que L est linéaire sur $\mathbb{R}$.

Notons l'espace des solutions de l'équation (1.5) par S . En vertu de la linéarité de L on a le résultat suivant :

Lemme 1.1.1 *Toute combinaison linéaire des éléments de S reste dans S ,*

i.e., Si $y_1(n), \dots, y_k(n)$ sont des solutions de l'équation homogène (1.5), alors

$$\begin{aligned} y(n) &= a_1 y_1(n) + \dots + a_k y_k(n) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i y_i(n), a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

reste aussi une solution de l'équation (1.5).

Preuve. Soient $y_1(n), \dots, y_k(n)$ des solutions de l'équation (1.5), alors

$$Ly_1 = 0, Ly_2 = 0, \dots, Ly_k = 0$$

et comme L est un opérateur linéaire alors

$$\begin{aligned} L(a_1 y_1 + \dots + a_k y_k) &= a_1 Ly_1 + \dots + a_k Ly_k \\ &= 0, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y(n) &= a_1 y_1 + \dots + a_k y_k \\ &= \sum_{i=1}^k a_i y_i, a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est une solution de l'équation (1.5). Donc, toute combinaison linéaire des éléments de S reste dans S . ■

1.1.1 Résolution de l'équation homogène

Dans toute la suite, on s'intéresse aux équation aux différences à coefficients constants homogènes, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^k p_i y_{n+k-i} = 0, \quad p_0 = 1. \quad (1.6)$$

Les p_i sont des constantes réels ou complexes.

Théorème 1.1.2 *L'équation (1.6) a des solution de la forme*

$$y_n = \lambda^n$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et vérifie

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^k p_i \lambda^{k-i} = 0. \quad (1.7)$$

Preuve. En remplaçant par $y_n = \lambda^n$ dans l'équation (1.6), on trouve

$$\lambda^n \sum_{i=0}^k p_i \lambda^{k-i} = 0,$$

ce qui donne

$$\sum_{i=0}^k p_i \lambda^{k-i} = 0.$$

Alors λ^n est une solution de l'équation (1.6). ■

Remarque 1.1.3 *Le polynôme*

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^k p_i \lambda^{k-i}.$$

s'appelle polynôme caractéristique associé à l'équation (1.6).

Théorème 1.1.4 Si les racines $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, de $p(\lambda)$ sont distinctes, alors les solution de (1.6) sont linéairement indépendantes.

Preuve. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des racines distinctes du $p(\lambda)$ alors $\{\lambda_1^n, \dots, \lambda_k^n\}$ sont k solutions de l'équation (1.6). Montrons qu'ils sont linéairement indépendantes.

Considérons la matrice de Casorati

$$k(n) = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_k^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \dots & \lambda_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \dots & \lambda_k^{n+k-1} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\det k(n) = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k)^n \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_k^n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k)^n \prod_{\substack{i>j \\ i,j=1,\dots,k}} (\lambda_i - \lambda_j)$$

où $\begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_k^n \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq k \\ i,j=1,\dots,k}} (\lambda_j - \lambda_i)$ est appelé le déterminant de Vandermonde généralisé.

Ainsi

$$\det k(n) \neq 0$$

alors les solutions $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n$ sont linéairement indépendantes. ■

Corollaire 1.1.1 Du théorème précédent, il résulte que toute solution de l'équation (1.6) s'écrit

comme combinaison linéaire de $\lambda_i^n, i = 1, \dots, k, i.e.,$

$$y_n = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^n, c_i \in \mathbb{R}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont des racines distinctes du polynôme caractéristique $p(\lambda)$.

Théorème 1.1.5 Si $\lambda_i, i = 1, \dots, s$ est une racine du polynôme $p(\lambda)$ de degré de multiplicité m_i . Alors les fonctions

$$y_{i,j}(n) = n^j \lambda_i^n, 0 \leq j \leq m_i - 1, i = 1, \dots, s, m_1 + \dots + m_s = k$$

sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.6) et donc forment une base.

Corollaire 1.1.2 La solution générale de l'équation (1.3) s'écrit :

$$y_n = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n, c_{i,j} \in \mathbb{R}$$

où

- Le paramètre $s \leq k$ désigne le nombre de racine distinctes de l'équation caractéristique (1.3).
- Le paramètre λ_i désigne une racine de l'équation caractéristique de (1.3).
- Le paramètre m_i désigne la multiplicité de la racine λ_i .
- Les coefficients $c_{i,j}$ sont des constantes qui sont déterminées à des conditions initiales.

1.1.2 Analyse de la stabilité des solutions

Définition 1.1.3 On dit qu'une solution $\bar{y}_n$ de l'équation (1.3) est stable, si pour toute autre solution y_n de la même équation

$$e_n = y_n - \bar{y}_n, n \in \mathbb{N}_{n_0}^+$$

est borné.

Définition 1.1.4 On dit qu'une solution $\bar{y}_n$ de l'équation (1.3) est asymptotiquement stable, si pour toute autre solution y_n de la même équation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - \bar{y}_n = 0.$$

Définition 1.1.5 Une solution $\bar{y}_n$ de l'équation (1.3) est dite instable si elle est non stable.

Théorème 1.1.6 Une solution $\bar{y}_n$ de l'équation (1.3) est asymptotiquement stable si et seulement si les racines de $p(\lambda)$ sont à l'intérieur du cercle unité.

(i.e., $\bar{y}_n$ est asymptotiquement stable $\iff |\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, s$).

Preuve. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les racines de $p(\lambda)$ avec les multiplicités respectives $m_1, \dots, m_s$, tel que $m_1 + \dots + m_s = k$. On a

$$y_n = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n,$$

et

$$\bar{y}_n = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{m_i-1} \bar{c}_{i,j} n^j \lambda_i^n,$$

ainsi

$$(y_n - \bar{y}_n) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{m_i-1} (c_{i,j} - \bar{c}_{i,j}) n^j \lambda_i^n \quad (1.8)$$

1. Si $|\lambda_i| < 1$, le membre de droite dans (1.8) tend vers zéro quand $n \rightarrow \infty$, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - \bar{y}_n| = 0.$$

2. Inversement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - \bar{y}_n| = 0$$

en supposant qu'il existe une racine λ_* de module ≥ 1 , le(s) terme(s) $n^j \lambda_*^n$ ne tend(s) pas vers zéro. Contradiction. ■

1.2 Équations aux différences non linéaires

Définition 1.2.1 Une équation aux différences non linéaire d'ordre $(k + 1)$ est une équation de la forme

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \quad (1.9)$$

avec $f : I^{k+1} \rightarrow I$ est une fonction continue, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$(x_0, x_{-1}, \dots, x_{-k}) \in I^{k+1}$$

sont les conditions initiales.

Remarque 1.2.1 Toute solution $\{x_n\}_{n=k}^{+\infty}$ de l'équation (1.9) est uniquement déterminée par les conditions initiales.

Définition 1.2.2 Un point $\bar{x} \in I$ est dit point d'équilibre pour l'équation (1.9) si

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}).$$

Autrement dit

$$x_n = \bar{x}, \forall n \geq -k.$$

Définition 1.2.3 Une solution $\{x_n\}_{n=k}^{+\infty}$ de l'équation (1.9) est dite périodique de période p si

$$x_{n+p} = x_n, \forall n \geq -k.$$

Définition 1.2.4 Un intervalle $J \subseteq I$ est dit intervalle invariant pour l'équation (1.9) si

$$x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in J \Rightarrow x_n \in J, n > 0.$$

Définition 1.2.5

1. $\bar{x}$ est dit localement stable si

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon, \forall n \geq -k.$$

alors

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon, \forall n \geq -k.$$

2. $\bar{x}$ est dit localement asymptotiquement stable si

- $\bar{x}$ est localement stable,
- $\exists \gamma > 0, \forall x_{-k}, \dots, x_0 \in I : |x_{-k} - \bar{x}| + \dots + |x_0 - \bar{x}| < \gamma$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}.$$

3. $\bar{x}$ est dit globalement attractif si

$$\forall x_{-k}, \dots, x_0 \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}.$$

4. $\bar{x}$ est dit globalement asymptotiquement stable si

- $\bar{x}$ est localement stable,
- $\bar{x}$ est globalement attractif.

5. Le point $\bar{x}$ est dit instable s'il est non localement stable.

1.2.1 Linéarisation des équations aux différences non linéaires

Supposons en plus que f est une fonction différentiable au voisinage du point d'équilibre $\bar{x}$.

Définition 1.2.6 On appelle équation aux différences linéaire associée à l'équation (1.9) l'équation

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k} \quad (1.10)$$

avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}), i = 0, \dots, k.$$

Pour laquelle on associe le polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \cdots - p_k.$$

Remarque 1.2.2 La stabilité de l'équation (1.9) est caractérisé par la stabilité de l'équation aux différence linéaire associé (1.10).

Le théorème suivant du Clark, donne une condition suffisante de la stabilité locale asymptotique de l'équation (1.9).

Théorème 1.2.3 Une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique de l'équation (1.9) est

$$|p_0| + |p_1| + \cdots + |p_k| < 1.$$

Pour montrer cette théorème, on utilisant le théorème de Rouché.

Théorème 1.2.4 (Théorème de Rouché) [9] Supposons que :

1. Les fonctions $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont analytiques à l'intérieur est sur une simple contour fermé γ dans le domaine complexe.
2. $|f(\lambda)| > |g(\lambda)|$ pour tout les points sur γ .

Alors $f(\lambda)$ et $f(\lambda) + g(\lambda)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur du disque unité.

Preuve. (Théorème (1.23))

Soit

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0\lambda^k - \cdots - p_k$$

le polynôme caractéristique associé à l'équation (1.9). Soit f et g deux fonctions complexes définies par

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1}, g(\lambda) = p_0\lambda^k + \cdots + p_k.$$

On a pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$

$$\begin{aligned} |g(\lambda)| &= |p_0\lambda^k + \cdots + p_k| \\ &\leq |p_0| + |p_1| + \cdots + |p_k| \\ &< 1 \end{aligned}$$

i.e.,

$$|g(\lambda)| < |f(\lambda)|.$$

Alors par le Théorème de Rouché $f(\lambda)$ et $f(\lambda) - g(\lambda)$ ont le même nombre de zéros $(k+1)$ à l'intérieur du disque unité. Ainsi les racines du polynôme $p(\lambda)$ sont de modules inférieures à 1, et le résultat découle du théorème (1.14). ■

1.2.2 Théorèmes de convergences

Maintenant on donne quelques théorèmes de convergence pour les équations aux différences non linéaires d'ordre 2.

Théorème 1.2.5 *Considérons l'équation aux différences définie par*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), n = 0, 1, \dots, \quad (1.11)$$

avec

$$f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [a, b], a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que f est une fonction continue telle que

- a)** *$f(x, y)$ est décroissante par rapport à x et croissante par rapport à y .*
- b)** *Si $(m, M) \in [a, b] \times [a, b]$ est une solution de*

$$\begin{cases} m = f(M, m) \\ M = f(m, M) \end{cases}$$

Alors l'équation (1.11) a un seul point d'équilibre $\bar{x}$ et toute solution de l'équation (1.11) converge vers $\bar{x}$.

Preuve. Posons

$$m_0 = a, M_0 = b$$

et pour $i = 1, 2, \dots,$

$$\begin{cases} m_i = f(M_{i-1}, m_{i-1}) \\ M_i = f(m_{i-1}, M_{i-1}) \end{cases}$$

observons (par (a)) que pour tout $i \geq 0$

$$m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_i \leq \dots \leq M_i \leq \dots \leq M_1 \leq M_0$$

et

$$m_i \leq x_k \leq M_i, \text{ pour } k \geq 2i + 1.$$

En effet,

- pour $i = 0$,

$$a = m_0 \leq x_k \leq M_0 = b, \text{ pour } k \geq 1.$$

- Pour $i = 1$, on obtient

$$\begin{cases} m_1 = f(M_0, m_0) \\ M_1 = f(m_0, M_0) \end{cases}.$$

On a

$$x_{k-1} \leq M_0 \text{ et } x_{k-2} \geq m_0, \text{ pour } k \geq 3$$

et par (a), on obtient

$$m_1 = f(M_0, m_0) \leq f(x_{k-1}, m_0) \leq f(x_{k-1}, x_{k-2}) = x_k.$$

D'autre part, on a

$$x_{k-1} \geq m_0 \text{ et } x_{k-2} \leq M_0, \text{ pour } k \geq 3$$

et par (a), on a

$$M_1 = f(m_0, M_0) \geq f(x_{k-1}, M_0) \geq f(x_{k-1}, x_{k-2}) = x_k.$$

D'où

$$m_1 \leq x_k \leq M_1, \text{ pour } k \geq 3.$$

- Supposons que

$$m_i \leq x_k \leq M_i, \text{ pour } k \geq 2i + 1$$

et montrons que

$$m_{i+1} \leq x_k \leq M_{i+1}, \text{ pour } k \geq 2i + 3.$$

On a

$$x_{k-1} \leq M_i \text{ et } x_{k-1} \geq m_i$$

alors

$$m_{i+1} = f(M_i, m_i) \leq f(x_{k-1}, m_i) \leq f(x_{k-1}, x_{k-2}) = x_k$$

d'autre part, on a

$$m_i \leq x_{k-1} \text{ et } M_i \geq x_{k-2}$$

alors

$$M_{i+1} = f(m_i, M_i) \geq f(x_{k-1}, M_i) \geq f(x_{k-1}, x_{k-2}) = x_k$$

d'où

$$m_{i+1} \leq x_k \leq M_{i+1}, \text{ pour } k \geq 2i + 3.$$

Maintenant, posons

$$m = \lim_{i \rightarrow +\infty} m_i, M = \lim_{i \rightarrow +\infty} M_i$$

et donc

$$m \leq \liminf_{i \rightarrow +\infty} x_i \leq \limsup_{i \rightarrow +\infty} x_i \leq M.$$

Par continuité de f

$$\begin{cases} m = f(M, m) \\ M = f(m, M) \end{cases}$$

mais

$$m, M \in [a, b]$$

ainsi (par (b))

$$m = M.$$

Il résulte que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_n = m = M.$$

Mais m est solution (unique) de

$$m = f(m, m)$$

i.e., point d'équilibre donc

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}.$$

■

Théorème 1.2.6 *Considérons l'équation aux différences définie par*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), n = 0, 1, \dots \quad (1.12)$$

avec

$$f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [a, b], a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que f est continue telle que

- a) $f(x, y)$ est croissante par rapport à x et décroissante par rapport à y .
- b) Si $(m, M) \in [a, b] \times [a, b]$ est une solution de

$$\begin{cases} m = f(m, M) \\ M = f(M, m) \end{cases}$$

alors

$$m = M.$$

Alors l'équation (1.12) a un seul point d'équilibre $\bar{x}$ et tout solution de l'équation (1.12) converge vers $\bar{x}$.

Preuve. Posons

$$m_0 = a, M_0 = b$$

et pour $i = 1, 2, \dots$,

$$\begin{cases} m_i = f(m_{i-1}, M_{i-1}) \\ M_i = f(M_{i-1}, m_{i-1}) \end{cases}$$

observons (par(a)) que tout $i \geq 0$

$$m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_i \leq \dots \leq M_i \leq \dots \leq M_1 \leq M_0$$

et

$$m_i \leq x_k \leq M_i, \text{ pour } k \geq 2i + 1.$$

Posons

$$m = \lim_{i \rightarrow +\infty} m_i, M = \lim_{i \rightarrow +\infty} M_i$$

et donc

$$m \leq \liminf_{i \rightarrow +\infty} x_i \leq \limsup_{i \rightarrow +\infty} x_i \leq M.$$

Par continuité de f

$$\begin{cases} m = f(m, M) \\ M = f(M, m) \end{cases}$$

mais

$$m, M \in [a, b]$$

ainsi

$$m = M.$$

Il résulte que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_n = m = M.$$

Mais m est solution (unique) de

$$m = f(m, m)$$

i.e., point d'équilibre donc

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}.$$

■ Similairement, on peut démontrer les théorèmes suivants.

Théorème 1.2.7 *Considérons l'équation aux différence définie par*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), n = 0, 1, \dots \quad (1.13)$$

avec

$$f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [a, b], a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que f est une fonction continue telle que

- a) *$f(x, y)$ est une fonction décroissante par rapport à x et y .*
- b) *Si $(m, M) \in [a, b] \times [a, b]$ est une solution de*

$$\begin{cases} m = f(M, M) \\ M = f(m, m) \end{cases}$$

alors

$$m = M.$$

Alors l'équation (1.13) a un seul point d'équilibre $\bar{x}$ et tout solution de l'équation (1.13) converge vers $\bar{x}$.

Théorème 1.2.8 *Considérons l'équation aux différence définie par*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), n = 0, 1, \dots \quad (1.14)$$

avec

$$f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow [a, b], a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que f est une fonction continue tels que

- a)** *$f(x, y)$ est une fonction croissante par rapport à x et y .*
- b)** *l'équation $f(x, x)$ admet une solution unique positive.*

Alors l'équation (1.14) a un seul point d'équilibre $\bar{x}$ et tout solution de (1.14) converge vers $\bar{x}$.

CHAPITRE 2

STABILITÉ GLOBALE D'UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES D'ORDRE DEUX

Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier la stabilité globale et la périodicité des solutions de l'équation aux différences suivante

$$x_{n+1} = ax_n - \frac{bx_n}{cx_n - dx_{n-1}} \quad (2.1)$$

où les paramètres $a, b, c, d > 0$ et les conditions initiales x_{-1}, x_0 sont arbitraires.

2.1 Périodicité des Solutions

Dans cette section on étudie l'existence des solutions périodique d'équation (2.1).

Théorème 2.1.1 *L'équation (2.1) admet une solution périodique de période deux si et seulement si*

$$(c - d)(a - 1) \leq 0, (c + d)(a - 1) \geq 0 \text{ et } a \geq 1. \quad (2.2)$$

Preuve. Supposons d'abord qu'elle existe une solution périodiques de période 2

$$\dots, p, q, p, q, \dots$$

Montrons que les conditions (2.2) est vérifiées.

De (2.1) on a

$$p = aq - \frac{bq}{cq - dp}$$

$$q = ap - \frac{bp}{cp - dq}$$

$$qp = aq^2 - \frac{bq^2}{cq - dp}$$

$$qp = ap^2 - \frac{bp^2}{cp - dq}$$

$$(qp - aq^2)(cq - dp) = -bq^2$$

$$cq^2p - dqp^2 - acq^3 + adq^2p = -bq^2$$

$$cqp - dp^2 - acq^2 + adqp = -bq \quad (2.3)$$

$$(pq - ap^2)(cp - dq) = -bp^2$$

$$cp^2q - dpq^2 - cap^3 + adp^2q = -bp^2$$

$$cpq - dq^2 - cap^2 + adpq = -bp.. \quad (2.4)$$

Par la soustraction de (2.3) à partir de (2.4) on obtient

$$-dp^2 + dq^2 - acq^2 + cap^2 = -bq + bp.$$

Alors

$$q + p = \frac{b}{ac - d}. \quad (2.5)$$

Par l'addition de (2.3) et (2.4) on obtient

$$\begin{aligned} 2cpq - d(p^2 + q^2) - ac(p^2 + q^2) + 2adpq &= -b(q + p) \\ qp(2c + 2ad) - (d + ac)(p^2 + q^2) &= -b(p + q) \\ qp(2c + 2ad) - (d + ac)((p + q)^2 - 2pq) &= -b(p + q) \\ qp(2c + 2ad) - (d + ac)(p + q)^2 + 2(d + ac)pq &= -b(p + q). \end{aligned}$$

Alors

$$pq = \frac{db^2}{(c + d)(a + 1)(ac - d)^2}. \quad (2.6)$$

De (2.5) et (2.6) p et q sont les solutions de l'équation suivante

$$t^2 - (q + p)t + pq = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta &= (q + p)^2 - 4pq \\ &= \left(\frac{b}{ac - d}\right)^2 - 4\left(\frac{db^2}{(c + d)(a + 1)(ac - d)^2}\right), \end{aligned}$$

et comme $p \neq q$ on déduit que $\Delta > 0$. Donc on a

$$\left(\frac{b}{ac - d}\right)^2 > \frac{4db^2}{(c + d)(a + 1)(ac - d)^2}.$$

Alors est (2.2) est vérifiées.

D'autre part supposons que (2.2) est vrais. Suppose que

$$p = \frac{b + \alpha}{2(ac - d)}$$

$$q = \frac{b - \alpha}{2(ac - d)}$$

où

$$\alpha = \sqrt{b^2 - \frac{4b^2d}{(c + d)(a + 1)}}.$$

Soit $x_{-1} = p$ et $x_0 = q$ et montrons que $x_1 = x_{-1} = p$ et $x_0 = x_2 = q$.

$$x_1 = aq - \frac{bq}{cq - dp} = \frac{acq^2 - adpq - bq}{cq - dp}$$

$$= \frac{ac \left(\frac{b - \alpha}{2(ac - d)} \right)^2 - ad \left(\frac{b^2d}{(ac - d)^2 (c + d)(a + 1)} \right) - b \frac{(b - \alpha)}{2(ac - d)}}{c \left(\frac{b - \alpha}{2(ac - d)} \right) - d \left(\frac{b + \alpha}{2(ac - d)} \right)},$$

on multiplier le numérateur et le dénominateur par $4(ac - d)^2$ on obtient

$$x_1 = \frac{2b^2d - \left(\frac{4acb^2d + 4ab^2d^2}{(c + d)(a + 1)} \right) - 2bd\alpha}{2(ac - d)(cb - bd - (c + d)\alpha)},$$

on multiplier le numérateur et le dénominateur par $(c + d)(a + 1)$ on obtient

$$x_1 = \frac{-2acb^2d - 2ab^2d^2 + 2cb^2d + 2b^2d^2 - 2abcd\alpha - 2bcd\alpha - 2abd^2\alpha - 2bd^2\alpha}{2(ac - d)(c + d)(a + 1)(cb - bd - (c + d)\alpha)},$$

on multiplier le numérateur et le dénominateur par $(cb - bd + (c + d)\alpha)$ on obtient

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{b(4b^2cd^2 + 4b^2d^3 - 4ab^2c^2d - 4ab^2cd^2) + \alpha(4b^2cd^2 + 4b^2d^3 - 4ab^2c^2d^2 - 4ab^2cd^2)}{2(ac-d)(4b^2cd^2 + 4b^2d^3 - 4ab^2c^2d - 4ab^2cd^2)} \\
 &= \frac{b + \alpha}{2(ac-d)} = p.
 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 x_2 &= ap - \frac{bp}{cp-dq} = \frac{ap(cp-dq) - bp}{cp-dq} \\
 &= \frac{acp - adpq - bp}{cp-dq} \\
 &= \frac{ac(\frac{b+\alpha}{2(ac-d)}) - ad(\frac{b^2d}{(ac-d)^2(c+d)(a+1)}) - b(\frac{b+\alpha}{2(ac-d)})}{c(\frac{b+\alpha}{2(ac-d)}) - d(\frac{b-\alpha}{2(ac-d)})},
 \end{aligned}$$

on multiplier le numérateur et le dénominateur par $4(ac-d)^2$ on obtient

$$x_2 = \frac{2b^2d - \left(\frac{4acb^2d + 4ab^2d^2}{(c+d)(a+1)} \right) + 2bd\alpha}{2(ac-d)(cb-bd-(c+d)\alpha)}$$

on multiplier le numérateur et le dénominateur par $(c+d)(a+1)$ on obtient

$$x_2 = \frac{-2acb^2d - 2ab^2d^2 + 2cb^2d + 2b^2d^2 - 2abcd\alpha - 2bcd\alpha - 2abd^2\alpha - 2bd^2\alpha}{2(ac-d)(c+d)(a+1)(cb-bd-(c+d)\alpha)}$$

on multiplier le numérateur et le dénominateur par $(cb-bd+(c+d)\alpha)$ on obtient

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{b(4b^2cd^2 + 4b^2d^3 - 4ab^2c^2d - 4ab^2cd^2) - \alpha(4b^2cd^2 + 4b^2d^3 - 4ab^2c^2d^2 - 4ab^2cd^2)}{2(ac-d)(4b^2cd^2 + 4b^2d^3 - 4ab^2c^2d - 4ab^2cd^2)} \\
 &= \frac{b - \alpha}{2(ac-d)} = q.
 \end{aligned}$$

■

2.2 La stabilité locale des points d'équilibres

Dans cette partie, nous étudions la stabilité locale des solutions de l'équation (2.1).

Soit $f : (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)$ une fonction définie par

$$f(x, y) = ax - \frac{bx}{cx - dy}. \quad (2.7)$$

Corollaire 2.2.1 *Supposons que $(c - d)(a - 1) > 0$. Alors l'équation (2.1) admet un seul point d'équilibre dans $(0, +\infty)$ qui est*

$$\bar{x} = \frac{b}{(c - d)(a - 1)}.$$

Preuve. Supposons que $(c - d)(a - 1) > 0$. Il est clair que l'équation

$$\bar{x} = a\bar{x} - \frac{b\bar{x}}{c\bar{x} - d\bar{x}}, \quad (2.8)$$

admet une seule solution dans $(0, +\infty)$ qui est

$$\bar{x} = \frac{b}{(c - d)(a - 1)}.$$

■

La stabilité locale du point d'équilibre positive $\bar{x} = \frac{b}{(c-d)(a-1)}$ de Eq (2.1) est décrite dans le théorème suivant

Théorème 2.2.1 *Supposons que $(c - d)(a - 1) > 0$ et $a < 1$. Donc le point d'équilibre $\bar{x} = \frac{b}{(c-d)(a-1)}$, de Eq(2.1) est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. L'équation linéaire associée à (2.1) est donnée par :

$$y_{n+1} = p_0 y_n - p_1 y_{n-1}, n = 0, 1, \dots, \quad (2.9)$$

où

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{x}) = a + \frac{d(a-1)}{(c-d)},$$

$$p_1 = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{x}) = -\frac{d(a-1)}{(c-d)}.$$

Supposons que $a < 1$. Donc

$$(c+d)(a-1) < 0$$

alors

$$\begin{aligned} a(c-d) + 2d(a-1) &< (c-d) \\ a(c-d) + d(a-1) + d(a-1) &< (c-d) \\ \frac{a(c-d) + d(a-1) + d(a-1)}{(c-d)} &< 1 \\ a + \frac{d(a-1)}{(c-d)} + \frac{d(a-1)}{(c-d)} &< 1 \\ \left| a + \frac{d(a-1)}{(c-d)} \right| + \left| -\frac{d(a-1)}{(c-d)} \right| &< 1. \end{aligned}$$

D'où

$$|p_0| + |p_1| < 1.$$

D'après le Théorème de Clark $\bar{x}$ est localement asymptotiquement stable. ■

2.3 La stabilité globale des points d'équilibres

Dans cette partie, nous étudions la stabilité asymptotiquement globale de l'équation (2.1).

Lemme 2.3.1 *Supposons que $(c-d)(a-1) > 0$. Donc l'équation (2.7) est croissante par rapport à x et décroissante par rapport à y .*

Preuve. Le résultat découle de deux formules

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{x}) &= a + \frac{d(a-1)}{(c-d)}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{x}) &= -\frac{d(a-1)}{(c-d)}.\end{aligned}$$

■

Théorème 2.3.1 *Supposons que les conditions suivant*

$$(c-d)(a-1) > 0, (c+d)(a-1) < 0 \text{ et } a < 1,$$

sont vérifiées. Alors le point d'équilibre positive $\bar{x}$ de l'équation (2.1) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution positive de Eq (2.1) avec $x_{-1}, x_0 \in (0, +\infty)$. D'après le théorème (2.2.1), il s'agit de prouver que $\bar{x}$ est globalement attractif, c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

Soit $f : (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)$ une fonction définie par :

$$f(x, y) = ax - \frac{bx}{cx - dy}.$$

Donc

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}).$$

D'après le lemme (2.3.1) f est croissante par rapport à x et décroissante par rapport à y . Supposons que (m, M) est une solution du système

$$\begin{cases} m = f(m, M) \\ M = f(M, m) \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} m = am - \frac{bm}{cm - dM} \\ M = aM - \frac{bM}{cM - dm} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} Mm = M \left(am - \frac{bm}{cm - dM} \right) \\ mM = m \left(aM - \frac{bM}{cM - dm} \right) \end{cases}$$

Par soustraction, on a

$$M \left(am - \frac{bm}{cm - dM} \right) - m \left(aM - \frac{bM}{cM - dm} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} -\frac{bm}{cm - dM} + \frac{bM}{cM - dm} &= 0 \\ \frac{(cm - dM)(bmM) - (cM - dm)(bMm)}{(cM - dm)(cm - dM)} &= 0 \end{aligned}$$

mais

$$(cM - dm)(cm - dM) \neq 0,$$

alors

$$(cm - dM)(bmM) = (cM - dm)(bMm)$$

ainsi

$$m = M.$$

Alors par le théorème (1.20)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

■

2.4 Exemples numériques

Pour confirmer les résultats de cette étude, nous considérons des exemples numériques qui représentent différents types de solutions à l'équation (2.1) .

Exemple 2.4.1 Si on prend , $a = 0.89, b = 6, c = 2, d = 7$ on obtient l'équation

$$x_{n+1} = 0.89x_n - \frac{6x_n}{2x_n - 7x_{n-1}} \quad (2.10)$$

Soit $x_{-1} = 0.8$ et $x_0 = 0.6$ on obtient $\bar{x} = 10.9$. Toutes les conditions du Théorème (2.3.1) sont satisfaits et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$. (voir graph (2.1))

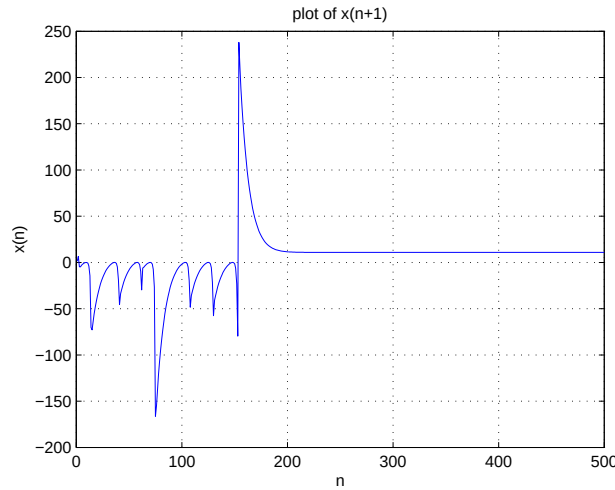


FIGURE 2.1 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (2.10) avec les valeurs initiales de l'exemple (2.4.1) .

Exemple 2.4.2 Si on prend , $a = 0.5, b = 7, c = 3, d = 9$ on obtient l'équation

$$x_{n+1} = 0.5x_n - \frac{7x_n}{3x_n - 9x_{n-1}} \quad (2.11)$$

Soit $x_{-1} = 2$ et $x_0 = -2$ on obtient $\bar{x} = 2.33$. Toutes les conditions du Théorème (2.3.1) sont satisfaits et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$. (voir graph (2.2))

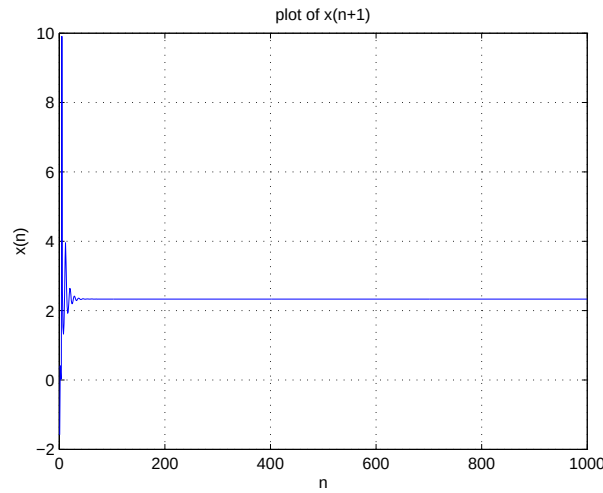


FIGURE 2.2 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (2.11) avec les valeurs initiales de l'exemple (2.4.2) .

2.5 Cas particulier

Dans cette section on étudie le cas particulier d'équation (2.1)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{x_n - x_{n-1}} \quad (2.12)$$

où les valeurs initiales x_{-1}, x_0 sont des nombres réels non nulle avec $x_0 \neq x_{-1}$.

Théorème 2.5.1 Soit $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ une solution de l'équation (2.12). Alors pour $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= x_{-1} + n \left(x_0 - x_{-1} - (n-1) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right), \\ x_{2n} &= x_0 + n \left(x_0 - x_{-1} - n - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right). \end{aligned}$$

Preuve. Pour $n = 0$ le résultat est vérifié. Supposons que $n > 0$ et que notre proposition est vraie pour $n - 1$. C'est à dire

$$x_{2n-3} = x_{-1} + (n-1) \left(x_0 - x_{-1} - (n-2) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right)$$

$$x_{2n-2} = x_0 + (n-1) \left(x_0 - x_{-1} - (n-1) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right)$$

Maintenant, il découle de Eq. (2.12) que

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= x_{(2n-2)+1} = x_{2n-2} - \frac{x_{2n-2}}{x_{2n-2} - x_{2n-3}} \\ &= x_0 + (n-1) \left(x_0 - x_{-1} - (n-1) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right) - \frac{x_0 + (n-1) \left(x_0 - x_{-1} - (n-1) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right)}{x_0 - x_{-1} - (n-1)} \end{aligned}$$

on multiplier le numérateur et le dénominateur de $\left(\frac{x_0 + (n-1) \left(x_0 - x_{-1} - (n-1) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right)}{x_0 - x_{-1} - (n-1)} \right)$ par $(x_0 - x_{-1})$ on obtient

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= x_0 + (n-1) \left(x_0 - x_{-1} - (n-1) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right) \\ &\quad - \frac{x_0(x_0 - x_{-1} - (n-1)) + (x_0 - x_{-1})(n-1)(x_0 - x_{-1} - (n-1))}{x_0 - x_{-1} - (n-1)(x_0 - x_{-1})} \\ &= x_0 + (n-1) \left(x_0 - x_{-1} - (n-1) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right) - (n-1) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$x_{2n-1} = x_{-1} + n \left(x_0 - x_{-1} - (n-1) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right).$$

De même, il découle de Eq. (2.12) que

$$\begin{aligned} x_{2n} &= x_{(2n-1)+1} = x_{2n-1} - \frac{x_{2n-1}}{x_{2n-1} - x_{2n-2}} \\ &= x_{-1} + n \left(x_0 - x_{-1} - (n-1) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right) - \frac{x_{-1} + nx_0 - nx_{-1} - n(n-1) + \frac{nx_0}{x_0 - x_{-1}}}{-n(n-1) - \frac{nx_0}{x_0 - x_{-1}}} \\ &= x_{-1} + n \left(x_0 - x_{-1} - (n-1) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right) - \frac{x_{-1} + nx_0 - nx_{-1}}{-n(n-1) - \frac{nx_0}{x_0 - x_{-1}}} + n, \end{aligned}$$

on multiplier le numérateur et le dénominateur de $\left(\frac{x_{-1} + nx_0 - nx_{-1}}{-n(n-1) - \frac{nx_0}{x_0 - x_{-1}}} \right)$ par $(x_0 - x_{-1})$ on obtient

$$= x_{-1} + n \left(x_0 - x_{-1} - (n-1) - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right) + x_0 - x_{-1} - n.$$

Donc

$$x_{2n} = x_0 + n \left(x_0 - x_{-1} - n - \frac{x_0}{x_0 - x_{-1}} \right).$$

■

Exemple 2.5.1 Si on prend , $a = 1, b = 1, c = 1, d = 1$ on obtient l'équation

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{x_n - x_{n-1}} \quad (2.13)$$

Soit $x_{-1} = 2$ et $x_0 = -1$ on obtient $\bar{x} = 0$. (voir graph (2.3))

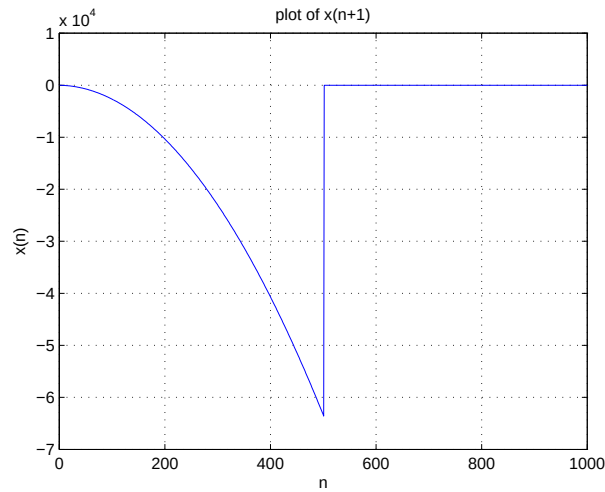


FIGURE 2.3 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (2.13) avec les valeurs initiales de l'exemple (2.5.1) .

CHAPITRE 3

ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES

Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier la stabilité globale et la périodicité des solutions de l'équation aux différences suivante

$$x_{n+1} = \gamma x_{n-1} + \frac{ax_n + bx_{n-1}}{cx_n - dx_{n-1}} \quad (3.1)$$

où les paramètres $\gamma, a, b, c, d > 0$ et les conditions initiales x_0, x_{-1} , sont arbitraires.

3.1 Périodicité des solutions

Théorème 3.1.1 *L'équation (3.1) n'admet pas une solution périodique de période 2 si*

$$\gamma > 1 \text{ et } b > a.$$

Preuve. On suppose qu'il existe une solution périodique de période 2

$$\dots, P, Q, P, Q, \dots$$

de l'équation (3.1). Alors on a

$$P = \gamma P + \frac{aQ + bP}{cQ - dP},$$

et

$$P = \gamma Q + \frac{aP + bQ}{cP - dQ}.$$

Donc

$$cPQ - dP^2 = \gamma cPQ - \gamma dP^2 + aQ + bP, \quad (3.2)$$

$$cPQ - dQ^2 = \gamma cPQ - \gamma dQ^2 + aP + bQ. \quad (3.3)$$

Par la soustraction on trouve

$$P + Q = \frac{b - a}{d(\gamma - 1)},$$

et par l'addition on trouve

$$PQ = -\frac{a(b - a)}{d(c + d)(\gamma - 1)^2}$$

Quand $\gamma > 1$ et $b > a$, PQ est négative. Mais P et Q sont positives donc contradiction. ■

Théorème 3.1.2 *L'équation (3.1) admet une solution périodique de période 2 si et seulement si*

$$(c + d)(a - b) > 4ad. \quad (3.4)$$

Preuve. On suppose qu'il existe une solution périodique de période 2

$$\dots, P, Q, P, Q, \dots$$

de l'équation (3.1)

Alors on a :

$$P = \gamma P + \frac{aQ + bP}{cQ - dP}$$

et

$$P = \gamma Q + \frac{aP + bQ}{cP - dQ}$$

on obtien

$$\begin{aligned} cPQ - dP^2 &= \gamma cPQ - \gamma dP^2 + aQ + bP, \\ cPQ - dQ^2 &= \gamma cPQ - \gamma dQ^2 + aP + bQ. \end{aligned}$$

par la soustraction on trouve

$$P + Q = \frac{b - a}{d(\gamma - 1)}$$

et par l'addition

$$PQ = \frac{a(b - a)}{d(c + d)(\gamma - 1)^2}$$

où $a > 0$ et $b < \gamma < 1$. Supposons que P et Q sont deux positifs racines réelles distinctes de l'équation quadratique,

$$t^2 - (P + Q)t + PQ = 0$$

Alors,

$$\begin{aligned}\Delta &= (P + Q)^2 - 4PQ \\ &= \left(\frac{a-b}{d(1-\gamma)} \right)^2 - \frac{4a(a-b)}{d(c+d)(1+\gamma)^2} \\ &= \frac{(a-b)^2(c+d) - 4ad(a-b)}{d^2(1-\gamma)^2(c+d)}\end{aligned}$$

$$P = \frac{\frac{a-b}{d(1-\gamma)} + \frac{1}{d(1-\gamma)} \sqrt{(a-b)^2 - \frac{4ad(a-b)}{(c+d)}}}{2}$$

on pose

$$\beta = \sqrt{(a-b)^2 - \frac{4ad(a-b)}{(c+d)}}$$

donc

$$P = \frac{(a-b) + \beta}{2d(1-\gamma)}$$

et

$$\begin{aligned}Q &= \frac{\frac{a-b}{d(1-\gamma)} - \frac{1}{d(1-\gamma)} \sqrt{(a-b)^2 - \frac{4ad(a-b)}{(c+d)}}}{2} \\ &= \frac{(a-b) - \beta}{2d(1-\gamma)}.\end{aligned}$$

on pose $x_{-1} = P$, $x_0 = Q$ et montrons que $x_1 = x_{-1} = P$, $x_2 = x_0 = Q$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \gamma x_{-1} + \frac{ax_0 + bx_{-1}}{cx_0 - dx_{-1}} = \gamma P + \frac{aQ + bP}{cQ - dP}, \\
 x_1 - P &= \gamma P - P + \frac{aQ + bP}{cQ - dP}, \\
 &= \frac{aQ + bP}{cQ - dP} - (1 - \gamma)P, \\
 &= \frac{aQ + bP - c(1 - \gamma)PQ + d(1 - \gamma)P^2}{cQ - dP}, \\
 &= \frac{a \left[\frac{(a - b) + \beta}{2d(1 - \gamma)} \right] + b \left[\frac{(a - b) - \beta}{2d(1 - \gamma)} \right] - c(1 - \gamma) \left[\frac{a(b - a)}{d(c + d)(\gamma - 1)^2} \right] + d(1 - \gamma) \left[\frac{(a - b) + \beta}{2d(1 - \gamma)} \right]^2}{c \left[\frac{(a - b) - \beta}{2d(1 - \gamma)} \right] - d \left[\frac{(a - b) + \beta}{2d(1 - \gamma)} \right]},
 \end{aligned}$$

on multiplier le numérateur et le dénominateur par $4d^2(1 - \gamma)^2$ on obtien

$$\begin{aligned}
 x_1 - P &= \frac{2a[(a - b) - \beta] + 2b[(a - b) + \beta] - 4c \left[\frac{a(a - b)}{(c + d)} \right]}{2(c[(a - b) - \beta] - d[(a - b) + \beta])} + \frac{[(a - b) + \beta]^2}{2(c[(a - b) - \beta] - d[(a - b) + \beta])} \\
 &= \frac{2(a^2 - b^2) - 2(a - b)\beta - 4c \left[\frac{a(a - b)}{(c + d)} \right] + (a - b)^2 + 2(a - b)\beta + \beta^2}{2(c[(a - b) - \beta] - d[(a - b) + \beta])} \\
 &= \frac{2(a^2 - b^2) - 4c \left[\frac{a(a - b)}{(c + d)} \right] + (a - b)^2 + (a - b)^2 - 4ad \left[\frac{a(a - b)}{(c + d)} \right]}{2(c[(a - b) - \beta] - d[(a - b) + \beta])} \\
 &= \frac{4a^2 - 4ab - 4a^2 + 4ab}{2(c[(a - b) - \beta] - d[(a - b) + \beta])} = 0
 \end{aligned}$$

d'où

$$x_1 = P.$$

De la même manière on montre que $x_2 = Q$.

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \gamma x_0 + \frac{ax_{-1} + bx_0}{cx_{-1} - dx_0} = \gamma Q + \frac{aP + bQ}{cP - dQ} = Q, \\
 x_2 - Q &= \gamma Q - Q + \frac{aP + bQ}{cP - dQ}, \\
 &= \frac{aP + bQ}{cP - dQ} - (1 - \gamma)Q, \\
 &= \frac{aP + bQ - c(1 - \gamma)PQ + d(1 - \gamma)Q^2}{cP - dQ}, \\
 &= \frac{a \left[\frac{(a-b)-\beta}{2d(1-\gamma)} \right] + b \left[\frac{(a-b)+\beta}{2d(1-\gamma)} \right] - c(1-\gamma) \left[\frac{a(b-a)}{d(c+d)(\gamma-1)^2} \right] + d(1-\gamma) \left[\frac{(a-b)-\beta}{2d(1-\gamma)} \right]^2}{c \left[\frac{(a-b)+\beta}{2d(1-\gamma)} \right] - d \left[\frac{(a-b)-\beta}{2d(1-\gamma)} \right]}
 \end{aligned}$$

on multiplier le numérateur et le dénominateur par $4d^2(1-\gamma)^2$ on obtien

$$\begin{aligned}
 x_2 - Q &= \frac{2a[(a-b)+\beta] + 2b[(a-b)-\beta] - 4c \left[\frac{a(a-b)}{(c+d)} \right]}{2(c[(a-b)-\beta] - d[(a-b)+\beta])} + \frac{[(a-b)-\beta]^2}{2(c[(a-b)-\beta] - d[(a-b)+\beta])}, \\
 &= \frac{2(a^2 - b^2) + 2(a-b)\beta - 4c \left[\frac{a(a-b)}{(c+d)} \right] + (a-b)^2 - 2(a-b)\beta + \beta^2}{2(c[(a-b)-\beta] - d[(a-b)+\beta])}, \\
 &= \frac{2(a^2 - b^2) - 4c \left[\frac{a(a-b)}{(c+d)} \right] + (a-b)^2 + (a-b)^2 - 4ad \left[\frac{a(a-b)}{(c+d)} \right]}{2(c[(a-b)-\beta] - d[(a-b)+\beta])}, \\
 &= \frac{2(a^2 - b^2) - \frac{4a(a-b)(c+d)}{(c+d)} + 2(a-b)^2}{2(c[(a-b)-\beta] - d[(a-b)+\beta])}, \\
 &= \frac{4a^2 - 2b^2 - 4a^2 + 4ab + 2b^2 - 4ab}{2(c[(a-b)-\beta] - d[(a-b)+\beta])} = 0.
 \end{aligned}$$

D'où

$$x_2 = Q.$$

■

3.2 La stabilité locale des points d'équilibres

Dans cette partie nous étudions la stabilité locale des solutions de l'équation (3.1).
soit

$$f : (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)$$

une fonction définie par

$$f(x, y) = \gamma y - \frac{ax + by}{cx - dy}. \quad (3.5)$$

Corollaire 3.2.1 *Supposons que $(c - d)(1 - \gamma) > 0$. Alors l'équation (3.1) admet un seul point d'équilibre dans $(0, \infty)$ qui est*

$$\bar{x} = \frac{a + b}{(c - d)(1 - \gamma)}.$$

Preuve. Supposons que $(c - d)(1 - \gamma) > 0$, il est clair que l'équation

$$\bar{x} = \gamma \bar{x} - \frac{a\bar{x} + b\bar{x}}{c\bar{x} - d\bar{x}} \quad (3.6)$$

admet une seule solution dans $(0, \infty)$ qui est

$$\bar{x} = \frac{a + b}{(c - d)(1 - \gamma)}$$

■ La stabilité locale du point d'équilibre positive

$$\bar{x} = \frac{a + b}{(c - d)(1 - \gamma)}$$

de l'équation (3.1) est décrite dans le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Supposons que $(c - d)(1 - \gamma) > 0$ et $\gamma > 1$ donc le point d'équilibre*

$$\bar{x} = \frac{a + b}{(c - d)(1 - \gamma)}$$

de l'équation (3.1) est localement asymptotiquement stable.

Preuve. L'équation linéaire associée à (3.1) est donnée par

$$y_{n+1} = p_0 y_n - p_1 y_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{x}) = -\frac{(ad + cb)(1 - \gamma)}{(a + b)(c - d)}, \\ p_1 &= \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{x}) = \gamma + \frac{(ad + cb)(1 - \gamma)}{(a + b)(c - d)}. \end{aligned}$$

Supposons que $\gamma > 1$ donc

$$(1 - \gamma)(d(3a + b) + c(b - a)) < 0$$

alors

$$\begin{aligned} (ad + cb)(1 - \gamma) + \gamma(a + b)(c - d) + (ad + cb)(1 - \gamma) &< (a + b)(c - d) \\ \frac{(ad + cb)(1 - \gamma) + \gamma(a + b)(c - d) + (ad + cb)(1 - \gamma)}{(a + b)(c - d)} &< 1 \\ \frac{(ad + cb)(1 - \gamma)}{(a + b)(c - d)} + \gamma + \frac{(ad + cb)(1 - \gamma)}{(a + b)(c - d)} &< 1 \\ \left| -\frac{(ad + cb)(1 - \gamma)}{(a + b)(c - d)} \right| + \left| \gamma + \frac{(ad + cb)(1 - \gamma)}{(a + b)(c - d)} \right| &< 1. \end{aligned}$$

D'où $|p_0| + |p_1| < 1$.

D'après le théorème du Clark $\bar{x}$ est localement asymptotiquement stable. ■

3.3 La stabilité globale des points d'équilibres

Lemme 3.3.1 *l'équation (3.5) est décroissante par rapport à x et croissante par rapport à y .*

Preuve. Le résultat découle de deux formules

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{(ad + cb)(1 - \gamma)}{(a + b)(c - d)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \gamma + \frac{(ad + cb)(1 - \gamma)}{(a + b)(c - d)}\end{aligned}$$

■

Théorème 3.3.1 *Supposons que les conditions suivantes*

$$\begin{aligned}(c - d)(1 - \gamma) &> 0, \\ (1 - \gamma)(d(3a + b) + c(b - a)) &< 0,\end{aligned}$$

et

$$\gamma > 1$$

sont vérifiées. Alors le point d'équilibre positive $\bar{x}$ de l'équation (3.1) est globalement asymptotiquement stable.

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (3.1), avec $x_0, x_{-1} \in (0, +\infty)$ d'après le théorème (1,23), il suffit de prouver que $\bar{x}$ est globalement attractif, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}.$$

Soit

$$f : (0, +\infty)^2 \rightarrow (0, +\infty)$$

une fonction définie par :

$$f(x, y) = \gamma y - \frac{ax + by}{cx - dy}$$

donc

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$$

d'après (1,25) f est décroissante par rapport à x et croissante par rapport à y .

supposons que (m, M) est une solution du système

$$\begin{cases} m = f(M, m) \\ M = f(m, M) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} m = \gamma m + \frac{aM + bm}{cM - dm} \\ M = \gamma M + \frac{am + bM}{cm - dM} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} mM = M \left(\gamma m + \frac{aM + bm}{cM - dm} \right) \\ Mm = m \left(\gamma M + \frac{am + bM}{cm - dM} \right) \end{cases}$$

Par soustraction, on a :

$$\begin{aligned} M \left(\gamma m + \frac{aM + bm}{cM - dm} \right) - m \left(\gamma M + \frac{am + bM}{cm - dM} \right) &= 0, \\ \frac{aM + bm}{cM - dm} - \frac{am + bM}{cm - dM} &= 0, \\ \frac{(aM + bm)(cm - dM) - (am + bM)(cM - dm)}{(cM - dm)(cm - dM)} &= 0. \end{aligned}$$

Mais

$$(cM - dm)(cm - dM) \neq 0$$

alors

$$(aM + bm)(cm - dM) = (am + bM)(cM - dm)$$

ainsi

$$m = M,$$

■

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons étudié la stabilité globale et la périodicité de deux équations aux différences non linéaire d'ordre deux, nous avons trouvés les conditions nécessaires et suffisante de stabilité asymptotique globale et de la périodicité de ces équations.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. W. Clark, *A delayed-recruitment model of population dynamics with an application to baleen whale populations*, Journal of mathematical biology 3, (1976), 381-391.
- [2] S. Elaydi, *An introduction to difference equation*, Departement of mathematics, Trinity University San Antonio, Texas 78212 USA, 2005.
- [3] S. Elaydi, J. Cushing, R. Lasser, V. Papageorgiou, A. Ruffing, W. Van Assche, *Difference equation, special functions and orthogonal polynomials*, World scientific publishing, 2007.
- [4] E. A. Grove, G. Ladas, *Periodicities in nonlinear difference equations*, Chapman & Hall/CRC, 2005.
- [5] V. L. Kocic, G. Ladas, *Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications*, Kluwer academic publishers, 1993.
- [6] M. R. C Kulenovic, G. Ladas, *Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjectures*, Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [7] P. Tanvel, *Analyse complexe pour la licence 3*, Dunod, Paris 2006.
- [8] N. Touafek, Y. Halim, *Global attractivity of a rational difference equation*, Mathematical Sciences Letters 2, No.3, (2013), 161-165.

- [9] E. M. E. Zayed, M. A. El-moneam, *On the rational recursive sequence*, Bulletin of Iranian Mathematical Society Vol, 36 No.1 (2010), 103-115.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude de comportement asymptotique, la stabilité globale et locale, et la périodicité de certaines équations aux différences non linéaires d'ordres deux.

Mot clés : *Equation aux différences, stabilité globale, solutions périodiques.*

Abstract

The present work is devoted to the asymptotic behavior study, global and local stability, and periodic of certain nonlinear second-order differences equations.

Keywords : *difference equation, global stability, periodic solution.*

ملخص

نقوم في هذا العمل بدراسة السلوك التقاربي، الاستقرار العام و المحلي، و الحلول الدورية لمعادلات فروق غير خطية من الدرجة الثانية.

الكلمات الأساسية: معادلة الفروق، الاستقرار العام، حلول دورية.