الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N^0 Réf :……

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des Sciences et de la Technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de

Master

En-Filière: Mathématiques
-Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Etude d'une inclusion différentielle du premier ordre

Préparé par:

- **Merouane Samia**
- **Begbagui Farida**

Soutenue devant le jury:

Président: I. Kaouache……M.A.A

Examinateur: L. Benaouicha……..M.A.B

Encadreur: F.Slemnia…….M.A.A

Année universitaire: 2014/2015

Remerciements

Nous tenons à remercier en premier et avant tout, notre créateur**Allah**, qui nous aide à réaliser ce travail.

Nos sincères gratitudes et remerciements à notre encadreur M^eme F. Selamnia pour le grand soutien moral et leurs aides précieuses qui nous apportez durant tout ce travail.

Nous adressons, également, mes remerciements chaleureux aux membres de l'institut des sciences et de la technologie du centre universitaire de Mila et à tous ceux qui ont pris part de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Farida, Samia

Table des matières

Introduction Générale **2**

1 Notations et résultats préliminaires **4**

1.1 Notations générales 4

1.2 Rappels sur l'analyse fonctionnelle 5

1.2.1 Espace vectoriel 5

1.2.2 Espace topologique 6

1.2.3 Espace vectoriel normé 9

1.2.4 Ensembles convexes 10

1.2.5 Les fonctions convexes 11

1.2.6 Les fonctions semi-continues 12

1.2.7 Quelques notions de mesurabilité 13

1.3 Rappels sur la topologie faible et faible* 14

1.3.1 Topologie faible 14

1.3.2 Topologie faible* 15

1.4 Les espaces $L^p(1 \leq p \leq +\infty)$ 16

1.5 Théorème d'Ascoli-Arzolà 18

2 Les multi-applications **21**

2.1 Définitions et préliminaires 21

2.2 La continuité des multi-applications 23

2.2.1 Définitions 23

2.2.2 La semi-continuité des multi-applications 23

2.3 La mesurabilité des multi-applications 26

2.3.1 Application mesurable 26

2.3.2 Applications implicites mesurables 28

2.3.3 Multi-applications mesurables 29

3 L'existence de la solution d'une inclusion différentielle de premier ordre 35

3.1 Inclusion différentielle avec second membre une multi-application lipschitzienne 35

3.2 Inclusions différentielles avec un second membre semi-continue supérieure . 39

Conclusion Générale 44

Bibliographie 44

Introduction Générale

La modélisation mathématique a apporté d'importance contributions aux différentes sciences et disciplines. Grâce à elle, un problème en physique, économie ou même en sociologie ne peut s'échapper à la formulation mathématique via ce qu'on appelle équations différentielles, mais à travers l'évolution, cette équation ne suffit plus. Un aspect plus général est apparu, il s'agit d'inclusion différentielle, celles-ci permettant aujourd'hui de modéliser une plus large classe de phénomène de la vie réelle.

A vrais dire, la théorie des inclusions différentielles est relativement ancienne. Elle repose sur les travaux de pionniers comme G. Bouligand (1932), Paul Painlevé (1863-1933), H. Marchaud (1938), Mais cette théorie ne redevient à la mode qu'avec les travaux d'une école polonaise autour de T. Wazewski (1961) qui a montré comment poser un problème de contrôle optimal dans le cadre des inclusions différentielle. Depuis, le champ s'est considérablement élargi et les applications de cette théorie touchent de très nombreux domaines :

L'optimisation (travaux de F. Clarcke, J. P. Aubin,...).

Le contrôle optimale (H. Sussman, P. Varaiya, E. Sontag,...).

L'analyse numérique (F. Lempio,...).

La théorie des inclusions elle-même (J.P. Aubin, A. Cellina, H. Frankowska,...). Mais pourquoi en fait, arriver à des inclusions différentielles ?

Un petit exemple dans le domaine médical peut expliquer pourquoi. En effet, ces dernières années, les modèles mathématique ont été grandement utilisés dans les processus de la recherche épidémiologique y compris l'épidémie de VIH / SIDA. Dans la phase initiale des recherches, ils ont commencé par décrire des modèles en utilisant des équations différentielles ordinaires et là, les paramètres inconnus impliqués sont supposés constants dans le temps, or, d'un point de vue plus réaliste des épidémies, certains de ces paramètres ne sont pas constants et ils dépendent de plusieurs facteurs qui ne sont pas pris en compte en raison de nécessité d'équilibrer la modélisation et la traçabilité numérique, ou par

manque de connaissances, une autre approche alors est proposée, celle des inclusions différentielles où la seule hypothèse sur les paramètres incertains, est qu'ils appartiennent à un intervalle fini. plus précisément, on a abordé les problèmes d'incertitude dans les équations différentielles ordinaires en terme d'inclusions différentielles.

La théorie des inclusions différentielles a été largement étudiée, mais le développement des méthodes numériques pour obtenir sa solutions est encore dans une phase embryonnaire et constitue actuellement un domaine de recherche. Dans ce présent mémoire, on s'intéresse à l'étude d'un type d'inclusions différentielles du premier ordre. Notre travail est partagé en trois chapitres.

Dans le premier, on donne toutes les définitions et les notions de base ayant été utilisés tout au long de ce mémoire.

Le chapitre deux vise à comprendre le concept des multifonctions et leurs propriétés, la continuité et la mesurabilité.

Dans le chapitre trois contient des théorèmes et des résultats qui seront utilisés dans les chapitres, ces théorèmes sont des clés et des outils fondamentaux pour la preuve de nos théorèmes principaux. Il s'agit essentiellement des théorèmes sur l'existence de solutions mesurables pour les multi-applications, nous énonçons nos résultats principaux concernant l'étude de l'inclusion différentielle du premier ordre de la forme

$$\begin{cases} u'(t) \in F(t, u(t)), \quad p.p. \\ u(0) = a \end{cases}$$

où F est une multi-application vérifier dans le premier cas la condition de Lipschitz, et la semicontinuité supérieure dans le deuxième cas.

Chapitre 1

Notations et résultats préliminaires

Dans ce premier chapitre, on introduit tous les concepts, les notions et les définitions essentiels en analyse multivoque et fonctionnelle, et aussi tous les symboles et les notations qui apparaissent tout au long de ce travail. C'est pourquoi une bonne connaissance de ce chapitre est indispensable pour une bonne compréhension du mémoire. pour plus de connaissance voir [1], [2],[3].

1.1 Notations générales

Sauf indication contraire, nous utiliserons les notions suivantes tout au long de ce travail.

$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels $0, 1, 2, ...$
$\mathbb{N}^*$	l'ensemble des entiers naturels non nuls $1, 2, ...$
$\overline{1,k}$	ensemble des entiers naturels entre 1 et k.
$\overline{\mathbb{R}}$	$= [-\infty, \infty]$.
$\mathbb{R}_+$	$=]0, \infty[$.
$\overline{\mathbb{R}}_+$	$= [0, \infty]$.
E	un espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|$.
A^c	complémentaire de A.
$co\,(A)$	L'enveloppe convexe de A.
$\overline{co}\,(A)$	L'enveloppe convexe fermée de A.
ß(E)	Tribu Borélienne.
(E, Σ)	espace mesurable sur E.
(E, Σ, μ)	espace mesuré.
L^P	l'ensemble des fonctions $P^{\text{ème}}$ intégrable.

L^∞	l'ensemble des fonctions essentiellement bornées.
$\overline{B}_E$	la boule unité fermée de E.
E'	le dual topologique de E.
$\langle ., . \rangle$	produit de dualité entre E et E'.
$\sigma(E, E')$	la topologie faible sur E.
$\tau(E, E')$	la topologie de Mackey sur E'.
E_σ	l'espace E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$.
$\sigma(E', E)$	la topologie faible étoile sur E'.
E'_σ	l'espace E' muni de la topologie faible étoile $\sigma(E', E)$.
$x_n \to x$	la convergence forte de la suite $(x_n)_n$ vers x.
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite $(x_n)_n$ vers x.
$C_E[0, T]$	l'espace de Banach des applications continues $u : [0, T] \to E$ muni de la topologie de la norme *sup*, i.e. $\|u\|_{C_E} = \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|$
$\delta^*(., A)$	est la fonction d'appui de A définie sur E' par $\delta^*(x', A) = \sup_{a \in A} \langle x', a \rangle$

1.2 Rappels sur l'analyse fonctionnelle

1.2.1 Espace vectoriel

Définition 1.1 *Un espace vectoriel sur le corps* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) *est un ensemble* $E \neq \phi$ *dont les éléments sont appelés des vecteurs et dons lequel sont définies deux opérations* $(+)$ *et* $(\cdot)$ *satisfaisant aux propriétés algébriques usuelles suivantes :*
$\forall x, x', x'' \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

- $x + x' = x' + x$
- $x + (x' + x'') = (x + x') + x''$
- $1 \cdot x = x$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
- $\alpha \cdot (x + x') = \alpha \cdot x + \alpha \cdot x' = \alpha (x + x')$
- $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

Si E *est un espace vectoriel,* $A \subset E$, $B \subset E$, $x \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *les assertions suivantes seront utilisées :*

- $A + x = \{\alpha + x, \alpha \in A\}$
- $A - x = \{\alpha - x, \alpha \in A\}$
- $A + B = \{\alpha + b, \alpha \in A, b \in B\}$

- $\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot \alpha, \alpha \in A\}$

Un ensemble $F \subset E$ est appelé un sous-espace vectoriel de E si F lui même (muni des mêmes opérations) est un espace vectoriel.

On vérifie facilement que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$F \neq \phi \text{ et } \alpha F + \beta F \subset F, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Un espace vectoriel E est de dimension n ($\dim E = n$), si E admet une base $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ceci signifie facilement que pour tout $x \in E$, il existe $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ uniques tels que

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$$

Si $\dim E = n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, E est dit de dimension finie.

1.2.2 Espace topologique

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E et θ un sous-ensembles de $\mathcal{P}(E)$.

Définition 1.2 *On dit que θ est une topologie sur E si θ vérifie les propriétés suivantes :*

- *ϕ et E sont des éléments de θ.*
- *Toute intersection fini d'éléments de θ est un élément de θ. C'est à dire*

$$\forall o_1, o_2, ..., o_n \in \theta, \bigcap_{i=1}^{n} o_i \in \theta$$

- *Tout réunion (quelconque) d'éléments de θ est un élément de θ. C'est à dire*

$$\forall (o_i)_{i \in I} \in \theta, \bigcup_{i \in I} o_i \in \theta$$

Les éléments de θ sont appelés les ouverts de la topologie θ.

Définition 1.3 *On appelle espace topologique le couple (E, θ) constitué par un ensemble E et par une topologie θ sur cet ensemble.*

Exemple 1.4 *Soit E un ensemble quelconque.*

- *$\theta = \mathcal{P}(E)$ est une topologie sur E appelée topologie discrète.*
- *$\theta = \{\phi, E\}$ est une topologie sur E qu'on appelée topologie grossière.*
- *$E = (\mathbb{R}, \tau)$ l'ensemble des réunions des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.*

$(\mathbb{R}, \tau)$ est un espace topologique et τ est appelée la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.5 *Soit E un ensemble quelconque.*

- *Un sous-ensemble de E qui contient les éléments (ou les points) de E est appelé une Collection de E.*
- *On dit que E est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. C'est à dire, si on peut énumérer ses points en une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ce qui implique notamment que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$) c'est le cas de $\mathbb{N}$ lui-même ou de $\mathbb{N}^*$, de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$, ou encore des entiers pairs, ou de toute suite strictement croissante d'entiers.*

Définition 1.6 *Soient (E,θ) un espace topologique et A un sous-ensemble de E.*

- *Une partie V de E est appelée un voisinage de A si V contient une partie ouverte contenant A. C'est à dire,*

$$V \text{ voisinage de } A \iff \exists U \in \theta, A \subset U \subset V.$$

Si $A = \{x\} / x \in E$, on dit V un voisinage de x est on note $\nu(x)$ l'ensemble des voisinages de x. C'est à dire,

$$V \in \nu(x) \iff \exists u \in \theta, x \in U \subset V.$$

- *On dit que A est un ensemble ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun ses points.*
- *On dit que A est un ensemble fermé de E, si son complémentaire est un ouvert.*

Définition 1.7 *Soient (E,θ) un espace topologique, $A \subset E$ un sous-ensemble non vide.*

- *On dit qu'un point x de E est adhérent à A, si tout voisinage de x rencontre A. On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A et on a*

$$x \in \overline{A} \iff \forall V \in \nu(x), V \cap A \neq \phi.$$

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

- *Un point $x \in E$ est dit intérieur à A, si A est un voisinage de x. L'intérieur de A, on note A° est le plus grand ouvert inclue dans A.*
- *On appelle frontière de A, le sous-ensemble de E, noté $F_r(A)$ constitué des points adhérents à A à son complémentaire C_E^A. C'est à dire $F_r(A) = \overline{A} \cap \overline{C_E^A}$.*

Définition 1.8 *Soient A, B deux parties d'un espace topologique (E, θ).*

- *On dit que A est dense dans B, si tout point de B est adhérent à A.*

$$A \text{ est dense dans } B \iff B \subset \overline{A}.$$

- *On dit que A est partout dense dans E, si son adhérence coïncide avec E.*

$$A \text{ est partout dense dans } E \iff \overline{A} = E.$$

Définition 1.9 *Soit (E, θ) un espace topologique, on dit que E est séparé si $\forall x, y \in E, (x \neq y), \exists V_x, V_y$ voisinage de x et y respectivement tel que $V_x \cap V_y = \phi$.*

Définition 1.10 *On appelle espace de Hausdorff tout espace vectoriel topologique séparé.*

Définition 1.11 *On dit que E est séparable s'il admet un sous ensemble dénombrable partout dense. (Exemple $\mathbb{R}^n$) et il est dit parfaitement séparable s'il sa topologie admet une base dénombrable.*

Définition 1.12 *Soient X un ensemble quelconque et A une partie de X. Un recouvrement de A est une famille $(B_i)_{i\in I}$ des parties de X vérifiant $A \subset \underset{i\in I}{\cup} B_i$*

- *Si I est fini, on dit recouvrement fini.*
- *Si I est dénombrable, on dit recouvrement dénombrable.*
- *Si $A = E$ et comme $\underset{i\in I}{\cup} B_i \subset E$, on a l'égalité $E = \underset{i\in I}{\cup} B_i$.*

Définition 1.13 *Soient (E, θ) un espace topologique, $\{U_i\}_{i\in I}$, $\{V_j\}_{j\in J}$ deux recouvrements de E.*

- *On dit que $\{U_i\}_{i\in I}$ est une raffinement de $\{V_j\}_{j\in J}$, si $\forall i \in I, \exists j \in J$ tel que $U_i \subset V_j$.*
- *On dit que $\{U_i\}_{i\in I}$ est localement fini, si $\forall x \in E, \exists V \in \nu(x)$ tel que $U_i \cap V \neq \phi, \forall i \in I$ et I fini.*

Définition 1.14 *Un sous ensemble S de E est dit*

1) *Compact si de tout recouvrement ouvert de S on peut extraire un sous recouvrement finie.*

2) *Séquentielement compact si toute suite de point de S admet une sous suite qui converge vers un point de S.*

3) *Relativement compact si son adhérence est compact.*

4) Relativement séquentiellement compact si tout suite de S admet une sous suite qui converge vers un point de E.

Définition 1.15 *S séquentiellement fermé s'il contient toutes les limites de ses suites convergentes.*

Définition 1.16 *Un espace topologique compact est métrisable si et seulement s'il est parfaitement séparable.*

Définition 1.17 *Dans un espace métrique la compacité séquentielle est équivalente à la compacité .*

Définition 1.18 *Soit $(X,\theta),(Y,T)$ deux espace topologiques, une fonction $f : X \to Y$ est dite*

***1)** Continue au point $x_0 \Leftrightarrow \forall W \in v(f(x_0)), \exists V \in v(x_0)/f(U) \subset W$.*

***2)** Séquentiellement continue au point x_0 si et seulement si pour tout suite $(x_n)_n$ de points de X convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x_0)$.*

1.2.3 Espace vectoriel normé

Définition 1.19 *On appelle espace vectoriel normé le couple $(E,\|.\|)$ où E est un espace vectoriel et $\|.\|$ une norme sur E.*

Définition 1.20 *On appelle espace métrique (E,d), tout ensemble non vide muni d'une distance d.*

Définition 1.21 *Un espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$ est appelé espace de Banach s'il est complet pour la norme $\|.\|$.*

On note par E' l'ensemble des formes linéaires continues sur E. On munit E' de la norme duale :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in B_E} |< f, x >|,$$

avec cette norme E' est un espace de Banach.

Définition 1.22 *Soient E un espace de Banach, E' son dual topologique. On note par E'' le bidual de E, i.e. l'espace des fonctions linéaires continues définies sur E'.*

Définition 1.23 *Un espace de Banach E est dit réflexif lorsque l'injection canonique $J : E \to E''$ est surjective. Dans ce cas nous identifions E et E'' ($E \backsimeq E''$).*

Théorème 1.24 *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si $\overline{B_E}(0,1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie $\delta(E, E')$*

Définition 1.25 ***(Espace vectoriel topologique localement convexe)***

Un espace vectoriel topologique E est dit localement convexe si 0_E admet un système de voisinage convexes.

Définition 1.26 *Un sous-ensemble S d'un espace vectoriel E est dit équilibré si pour tout scalaire α vérifiant $|\alpha| \leq 1$*

$$\alpha S \subset S$$

avec

$$\alpha S := \{\alpha x / x \in S\}$$

Proposition 1.27 *Soit E un espace de Banach muni de sa topologie faible $\sigma(E, E')$, alors E est un espace vectoriel topologique localement convexe et séparé.*

1.2.4 Ensembles convexes

Définition 1.28 *Soit E un espace vectoriel, $a, b \in E$.*

- *On appelle segment fermé ou simplement segment d'extrémités a, b qu'on note $[a, b]$, l'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda) b,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$.*
- *Le segment ouvert est l'ensemble $\{\lambda a + (1-\lambda) b,\ 0 < \lambda < 1\}$, noté $]a, b[$.*

Définition 1.29 *Une partie A d'un espace vectoriel E est dite convexe, si toutes les fois que deux points a, b appartienne à A, le segment $[a, b]$ est contenu dans A. C'est à dire,*

$$\forall a, b \in A, \forall \lambda \in [0,1], \lambda a + (1-\lambda) b \in A.$$

On pose

$$T_n = \left\{ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1 \right\} \ (n \in \mathbb{N}).$$

et

$$T_n^{'} = \left\{ (\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\} \ (n \in \mathbb{N}).$$

et remarquons $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in T_n$ si $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in T_n^{'}$ et que

$$\left(\lambda_1, ..., \lambda_n, 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \in T_n^{'} \text{ si } (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in T_n$$

On dit que A est convexes si et seulement si

$$\forall (a_1, a_2, ...a_n) \in A,\ \forall (\lambda_1, \lambda_2..., \lambda_n) \in T_n \text{ on a } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in A.$$

Définition 1.30 *Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel E.*

- *On appelle enveloppe convexe de A, que l'on note $co(A)$, l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de E contenant A.*
- *$co(A)$ est le plus petit convexe de E qui continent A.*
- *On appelle enveloppe fermé de A, que l'on note $\overline{co}(A)$, l'intersection de tous les sous-ensembles convexes fermés de E contenant A.*
- *$\overline{co}(A)$ est le plus petit convexe fermé de E qui continent A.*

Théorème 1.31 *Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$. Alors*

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i / k \in \{0, 1, ...\}, (\lambda_1, ..., \lambda_{k+1}) \in T'_k, x_1, ...x_{k+1} \in A \right\}.$$

Théorème 1.32 *Soient E un espace vectoriel, A et B deux sous-ensembles de E. Alors,*

1) $co(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot co(A)$, $co(A + B) = co(A) + co(B)$,

Si E est un espace vectoriel topologique, alors

2) *si A est un sous-ensemble convexe de E, $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ le sont aussi,*

3) $\overline{co}A = \overline{coA}$,

4) $\overline{co}(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \overline{co}A$,

5) *Si $\overline{co}A$ est compact, $\overline{co}(A + B) = \overline{co}A + \overline{co}B$.*

1.2.5 Les fonctions convexes

Définition 1.33 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

- *On dit que f est convexe si et seulement si*

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], \ f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

- *On dit que f est concave si $(-f)$ est convexe.*

Définition 1.34 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

- *On appelle graphe de f qu'on note par $gph(f)$ l'ensemble défini par*

$$gph(f) = \{(x, r) \in I \times \mathbb{R} / f(x) = r\}.$$

- *On appelle épigraphe de f qu'on note par $epi(f)$ l'ensemble défini par*

$$Epi(f) = \{(x, r) \in E \times \mathbb{R} / f(x) \leq r\}.$$

Définition 1.35 *Soient E un espace topologique, $f : E \to [-\infty, +\infty]$.*

- *On appelle domaine effectif de f qu'on note par $D(f)$ l'ensemble défini par*

$$D(f) = \{x \in E / f(x) < +\infty\}.$$

- *On dit que f est propre si $f : E \to]-\infty, +\infty] \wedge f \not\equiv +\infty$.*

Définition 1.36 *Soient E un espace topologique, $f : E \to [-\infty, +\infty]$*

- *On dit que f est convexe si et seulement si $\forall x, x' \in E, \forall \lambda \in [0,1], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que*

$$f(x) < \alpha \wedge f(x') < \beta : f(\lambda x + (1-\lambda) x') < \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta.$$

- *On peut aussi dit que f est convexe si et seulement si*

$$\forall x, x' \in E, \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda) x') \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x').$$

à condition que le second membre soit bien définie ($\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$ est bien définie).

1.2.6 Les fonctions semi-continues

Soient E un espace topologique et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.37 *Soient (E, θ) un espace topologique $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et soit $a \in E$. Alors*

$$\begin{aligned} \limsup_{x \to a} f(x) &= \inf_{W \in \upsilon(a)} \{\sup_{x \in W} f(x)\} \\ \liminf_{x \to a} f(x) &= \sup_{W \in \upsilon(a)} \{\inf_{x \in W} f(x)\} \end{aligned}$$

Définition 1.38 *Soient (E, θ) un espace topologique et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors*

- *f est semi continue supérieurement au point a si*

$$f(a) \geq \limsup_{x \to a} f(x)$$

- *f est semi continue inférieurement au point a si*

$$f(a) \leq \liminf_{x \to a} f(x)$$

Remarque 1.39 *Si f est à valeurs réelles alors,*

- *f est semi continue inférieure au point a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V_a \in \upsilon(a), \forall x \in V_a \Rightarrow f(x) - f(a) > -\varepsilon.$$

• *f est semi continue supérieure au point a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V_a \in \upsilon(a), \forall x \in V_a \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon.$$

• *f est continue au point a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V_a \in \upsilon(a), \forall x \in V_a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Proposition 1.40 *Soient (E, θ) un espace topologique et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors,*

f est semi continue inférieure si et seulement si epi(f) est fermé.

1.2.7 Quelques notions de mesurabilité

Définition 1.41 ***(Tribut)*** *Soit E un ensemble quelconque. Une tribut (ou $\sigma-$algèbre) sur E est une famille Σ de parties de E telle que*

1) *$E \in \Sigma$;*

2) *$A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$;*

3) *$A_n \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n \in \Sigma$.*

Le couple (E, Σ) est appelé espace mesurable et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.

Définition 1.42 *Soit (E, Σ) un espace mesurable, alors la fonction $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur E si*

1) *$\mu(\phi) = 0$;*

2) *$\mu(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n) = \sum\limits_n \mu(A_n)$ pour toute famille dénombrable d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

• *Le triplet (E, Σ, μ) est appelé espace mesuré.*

• *Si $\mu(A) \geq 0$ pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure positive ou que l'espace (E, Σ, μ) est positif.*

• *Si $\mu(A) < +\infty$ pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure finie ou que l'espace (E, Σ, μ) est fini.*

• *Si E est un espace topologique, la mesure $\mu : ß(E) \to \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.*

Définition 1.43 *Soit (E, Σ, μ) un espace mesuré positif et soit Z un sous ensemble de E, on dit que Z est μ-négligeable s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\mu(A) = 0$.*

On dit qu'une propriété sur E est vraie μ-presque partout(μ.p.p), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.

Définition 1.44 *Soient E un espace topologique séparé et μ une mesure Borélienne, alors μ est dit régulière si pour tout $A \in ß(E)$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert C et un fermé G de E tels que $G \subset A \subset C$ et $\mu(C/G) \leq \varepsilon$.*

Une mesure Borélienne finie et régulière est appelés mesure de Radon.

Définition 1.45 *La tribu μ-complétée de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ-négligeables, i.e.*

$$\Sigma_\mu = \{A \cup Z / A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \mu\text{-négligeable}\}.$$

La tribu Σ est dit complète si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c'est-à-dire, si tout les ensemble μ-négligeable appartient à Σ.

1.3 Rappels sur la topologie faible et faible*

1.3.1 Topologie faible

Définition 1.46 ***(Topologie faible)***

soit E un espace de Banach, E' son dual topologique, i.e. $E' = \{f : E \to \mathbb{R} \text{ linéaire continue}\}$

$$\begin{array}{rcccl} f & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & f(x) = \langle f, x\rangle \end{array}$$

soit $f \in E'$,

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_f & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle \end{array}$$

lorsque f décrit E' on obtient une famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ définies de E dans $\mathbb{R}$ tel que $\|f\|_{E'} = \sup_{x\in\overline{B}_E(0,1)} \|f(x)\|$

On appelle topologie faible sur E et on la note $\delta(E, E')$, la topologie la moins fine sur E rendant continue tout les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ cette topologie est séparé.

Proposition 1.47 ***1)*** *Soit (x_n) une suite d'éléments de E, on dit que (x_n) converge faiblement vers x ou (x_n) converge $\delta(E, E')$ vers x et on note $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, pour tout $f \in E'$.*

2) *$x_n \to x$ fortement $\Rightarrow x_n \rightharpoonup x$ faiblement.*

3) *$x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\delta(E, E')$ alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.*

4) *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\delta(E, E')$ et si $f_n \to f$ fortement dans E'(c'est-à-dire $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$) alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

5) *$|\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq \|f\| \, \|x_n - x\|$.*

Proposition 1.48 *Si $B \subset E$ convexe, alors B est faiblement fermé pour $\delta(E, E')$ si et seulement si il est fortement fermé.*

Proposition 1.49 *Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\delta(E, E')$ et la topologie forte coinsident.*

Théorème 1.50 ***(Théorème de Mazur)***

Soit E un espace de Banach et A un sous ensemble de E compact par rapport à la topologie forte alors, $\overline{co}A$ est compact par rapport à la topologie forte.

Théorème 1.51 (Théorème de Banach-Mazur)

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers x, alors il existe une suite $(z_n)/z_n$ une combinaison convexe des éléments x_n, x_n convergeant fortement vers x.

Théorème 1.52 (Théorème de Krein-Smŭlian).

Soit A un sous ensemble de E faiblement compact $\delta(E, E')$, alors $\overline{co}A$ est faiblement compact.

1.3.2 Topologie faible*

Définition 1.53 ***(Topologie faible* $\delta(E', E)$)***

Soit E un espace de Banach, E' son dual (muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} |\langle f, x\rangle|$), et soit E'' la bidual de E (c'est à dire le dual de E') muni de la norme $\|\xi\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle \xi, f\rangle|$. On a une injection canonique $J : E \to E''$ définie comme suite

Soit $x \in E$ fixé l'application $J : f \to \langle f, x\rangle$ de E' dans $\mathbb{R}$ est une forme linéaire continue sur E' c'est à dire un élément de E'' noté J_x donc

$$\langle J_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \forall x \in E \text{ et } f \in E'$$

il est claire que J est linéaire et que est une isométrie i.e,

$$\|J_x\|_{E''} = \sup_{f \in E'} |\langle J_x, f\rangle| = \sup_{f \in E'} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_E$$

donc on peut toujours identifier E à une sous ensemble de E'. Sur l'espace E' sont définies déjà deux topologies, la topologie forte induite par la norme de E' ($\|f\| = \sup_{x \in \overline{B}_{E'}(0,1)} |\langle f, x\rangle|$) et la topologie faible $\delta(E', E'')$. On définie une troisième topologie sur E' comme suit : pour chaque $x \in E$, on considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi_x & : & E' & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & \varphi_x(f) = \langle x, f\rangle_{E'',E'}. \end{array}$$

lorsque x parcourt E on obtient une famille de l'application $(\varphi_x)_{x\in E}$ de E'dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.54 *Soit $(f_n)_n$ une suite de E'. Nous avons*

1) *$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, pour tout $x \in E$.*

2) *$f_n \to f \Rightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.*

3) *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ alors$(\|f_n\|)$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.*

4) *$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ et $x_n \to x$ fortement, alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 1.55 ***1)*** *La topologie $\delta(E', E)$ est séparé.*

2) *Lorsque E est de dimension finie les trois topologies (forte, faible $\delta(E', E'')$ et faible*$\delta(E', E)$) coincident sur E'.*

Théorème 1.56 ***(Banach–Aloaglu-Bourbaki)***

Soit E un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de E' l'ensemble est compact par la topologie faible$\delta(E', E)$.*

Théorème 1.57 ***(Aloaglu)***

Soit E un espace de Banach, $B \subset E'$, si B est borné pour la norme de E'et fermé pour la topologie faible$\delta(E', E)$ alors B est compact pour la topologie*$\delta(E', E)$*

1.4 Les espaces L^p(1≤ $p \leq +\infty$)

Soient $E = \overline{\mathbb{R}}$ et μ la mesure de Lebesgue sur E. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{L}^1(E, \mu)$ des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ définies μ-presque partout et μ-intégrables (f mesurable et $\int_T |f|\, d\mu < \infty$).

Si $f \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$, nous poserons, $\|f\|_1 = \int_T |\alpha f|\, d\mu$, nous avons

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$,$\|\alpha f\|_1 = \int_T |\alpha f|\, d\mu = |\alpha| \|f\|_1$.
- $\forall f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$,

$$\begin{aligned}\|f + g\|_1 &= \int_T |f + g|\, d\mu \\ &\leq \int_T |f|\, d\mu + \int_T |g|\, d\mu \\ &= \|f\|_1 + \|g\|_1 , \forall f, g \in \mathcal{L}^1(E, \mu) .\end{aligned}$$

mais $\|\cdot\|_1$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^1(E, \mu)$ car l'égalité

$$\|f\|_1 = 0 \iff f(x) = 0,\ \mu.p.p$$

Par contre, si on considère sur $\mathcal{L}^1(E, \mu)$, la relation d'équivalence $\Re$ définie par

$$f \Re g \iff f = g\ \mu.p.p \text{ sur } E.$$

Soit $\hat{f}$ la classe d'équivalence de f. Considérons alors

$$L^1(E,\mu)=\left\{\hat{f}/f\in\mathcal{L}^1(E,\mu)\right\},$$

et définissons sur cet espace l'application $\hat{f}\mapsto\left\|\hat{f}\right\|_1=\|f\|_1$, alors cette application est une norme sur $L^1(E,\mu)$. En effet,

$$\begin{aligned}\left\|\hat{f}\right\|_1=0 &\iff \|f\|_1=0\\ &\iff f=0,\ \mu.p.p\\ &\iff \hat{f}=\hat{0}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $(L^1(E,\mu),\|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel normé. On pose alors

$$L^1(E,\mu)=\left\{f:E\to\mathbb{R}/f\text{ mesurable et }\|f\|_1=\int_T|f|\,d\mu<\infty\ \mu.p.p\right\}.$$

Définition 1.58 *Si $1\leq p<\infty$, on définit*

$$L^1(E)=\left\{f:E\to\mathbb{R}/f\ \textit{mesurable et}\ \|f\|_1=\int_T|f(x)|^p\,d\mu(x)<\infty\ \mu.p.p\right\}.$$

On munit cet espace de la norme $\|f\|_p=\left(\int_T|f(x)|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

Si $p=\infty$, on définit

$$L^\infty(E)=\{f:E\to\mathbb{R}/f\ \textit{mesurable et, }\exists c>0\ \textit{telque}\ |f(x)|\leq c\ \mu.p.p\ \textit{sur}\ E\}.$$

On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_\infty=\inf\{c>0,|f(x)|\leq c,\ p.p\ \textit{sur}\ E\}.$$

Théorème 1.59 *Si E est de mesure finie ($\mu(E)<\infty$), alors $L^\infty\subset\ldots\subset L^1$ c'est à dire, $L^p\subset L^q$, $\forall p>q$.*

Théorème 1.60 *$(L^p(\Omega),\|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach pour $1\leq p<\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 1.61 *$L^p(\Omega)$ est un espace séparable pour $1\leq p<\infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 1.62 *$L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Définition 1.63 *On dit que $p,q\in[1,+\infty]$ sont des exposants conjugues si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (avec la convention $\frac{1}{+\infty}=0$).*

Proposition 1.64 ***(Inégalité de Hölder)***

Soient p, q des exposants conjugues et $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ sont des fonctions mesurables alors, $fg \in L^1(\Omega)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

- *Si $p, q = 2$ alors l'inégalité précédent s'écrit $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.*

est aussi appelée inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 1.65 ***(Inégalité de Hölder généralisée)*** *Soient $p, q, r \in [0, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ et $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ sont des fonctions mesurables alors, $fg \in L^r(\Omega)$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Proposition 1.66 ***(Inégalité de Minkowski)***

Soient $p \in [1, +\infty]$ et $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions mesurables. Si f et g sont toutes deux à valeurs dans $[0, +\infty]$ $\mu-$presque partout, alors $f + g \in L^p(\Omega)$ et $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Théorème 1.67 ***(Inégalité de Jensen)***

Soit μ une mesure probabilité. Si ϕ est une fonction sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors pour toute fonction f intégrable telle que $f(x) \in I$ on a $\int f(x)d\mu \in I$ et $\phi(\int f(x)d\mu) \leq \int \phi(f)d\mu$.

1.5 Théorème d'Ascoli-Arzolà

Définition 1.68 ***(Ensembles équicontinus d'applications)***

E étant un espace topologique, F un espace semi-métrique de $(\delta_j)_{j \in J}$ (E et F sont semi-distences nécessairement séparé), H un ensemble d'applications de E dans F. On dit que H est équicontinu au point a ou que $f \in H$ sont également continues au point a de E, si, quels que soient $j \in J$ et $\varepsilon > 0$, il existe un même voisinage U de a dans E, tel que l'on ait $\delta_j(f(x), f(a)) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in U$ et tout $f \in H$. On dit que H est équicontinu sur E ou simplement équicontinu, ou que les $f \in H$ sont également continues, si H est équicontinu en tout point de E.

Théorème 1.69 ***(Théorème d'Ascoli-Arzolà)***

Soient E un espace métrique compact, F un espace métrique complet, et H un sous ensemble de $C(E, F)$ l'espace des applications continues définies sur E à valeurs dans F muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact si et

seulement si H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact avec

$$H(x) = \{f(x)/f \in H\}$$

Théorème 1.70 ***(Théorème d'Ascoli-Arzola généralisé)***

Soient E un espace topologique, F un espace semi-métrique, H un ensemble d'applications continues de E dans F. Pour que H soit relativement compact dans $C(E,F)$ (muni de la topologie de la convergence compacte), il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1) *H est équicontinue ;*

2) *Pour tout $x \in E$, l'ensemble $H(x) = \{f(x)/f \in H\}$ est relativement compact dans F. Si E est localement compact, ces conditions sont aussi nécessaires.*

Théorème 1.71 ***(Conséquence du théorème d'Ascoli-Arzolà)***

Soit I un compact de $\mathbb{R}$, $(E, \|.\|)$ un espace de dimension finie $(E = \mathbb{R}^n)$ et soit $(f_n)_n$ une suite d'applications absolument continues définies sur I à valeurs dans E satisfaisant les conditions suivantes :

1) *$\forall t \in I, \{f_n(t)\}_n$ est un sous ensemble relativement compact dans E ;*

2) *Il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in L^1_E(I)$ telle que*

$$\|f_n(t)\| \leq h(t), \text{ p.p sur } J.$$

Alors il existe une sous suite de $(f_n)_n$(qu'on note aussi $(f_n)_n$) qui converge vers une application absolument continue $f : J \to E$ au sens suivent

a) *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f ;*

b) *$(f_n)_n$ converge faiblement vers f dans $L^1_E(I)$, c'est à dire, $(\dot{f}_n)_n$ converge vers $\dot{f}$ par $\sigma\left(L^1_E(I), L^\infty_E(I)\right)$.*

Théorème 1.72 ***(Beppalevi)***

Soit (f_n) une suite croissante (resp décroissante) de fonction de $L^1(E)$ tel que

$$\sup_n \int f_n < \infty \quad (resp \quad \inf_n \int f_n > -\infty)$$

alors $(f_n(x))$ converge p.p vers une limite finie $f(x)$; de plus $f \in L^1$ et on a

$$\|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Théorème 1.73 ***(convergence dominée)***

Soient E un espace de Banach séparable et (X_n) une suite de fonctions fortement mesurables, $X_n : (E, \Sigma, \mu) \to (F, \mathcal{F})$ vérifiant

a) $X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X \quad \mu - p.p.$

b) *Il existe une fonction $g : E \to \mathbb{R}^+$, $\mu-$intégrable telle que $\|X_n\| \leq g \quad \mu$-p.p. Alors les X_n et X sont $\mu-$Bochner intégrables et*

$$\lim \int_\Omega X_n d\mu = \int_\Omega X d\mu$$

Noter que dans cet énoncé, on ne suppose pas que les X_n sont des fonctions simples.

Chapitre 2

Les multi-applications

Dans ce chapitre, nous décrivons certains concepts de base et les résultats pour les multi-applications et leurs propriétés (la continuité et la mesurabilité). Pour plus de connaissance sur les multi-applications voir [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10].

2.1 Définitions et préliminaires

Définition 2.1 *Soient E, T deux ensembles non vides.*

• *On appelle multi-application F définie sur E à valeur dans T une application qui à chaque élément $x \in E$ associe un sous ensemble $F(x)$ de T et on note $F : E \rightrightarrows T$.*

• *On appelle domaine de la multi-application F qu'on note $Dom(F)$, l'ensemble défini par*

$$Dom(F) = \{x \in E / F(x) \neq \emptyset\}.$$

• *On appelle image de F qu'on note $\mathrm{Im}(F)$, l'ensemble défini par*

$$\mathrm{Im}(F) = \{t \in T / \exists x \in E : t \in F(x).$$

Si $A \subset E$, on appelle image de A par F et on note $F(A)$ le sous ensemble

$$F(A) = \underset{y \in A}{\cup} F(y).$$

ce qui revient à écrire

$$F(A) = \{t \in T, \exists x \in A : t \in F(x)\}.$$

Ainsi

$$\mathrm{Im}(F) = F(E).$$

- *On considérer la multi-application inverse* $F^{-1} : T \rightrightarrows E$ *définie par*

$$x \in F^{-1}(t) \Longleftrightarrow t \in F(x).$$

Nous avons alors $(F^{-1})^{-1} = F$ *et*

$$dom(F^{-1}) = \mathrm{Im}(F) \text{ et } \mathrm{Im}(F^{-1}) = dom(F).$$

- *On appelle graphe de* F *qu'on note* $gph(F)$*, le sous ensemble de* $E \times T$ *définie par*

$$gph(F) = \{(x,t) \in E \times T / x \in dom(F); t \in F(x)\}.$$

Exemple 2.2

$$\begin{array}{rcccl} F & : & [0,1] & \rightrightarrows & [0,1] \\ & & x & \mapsto & F(x) = \begin{cases} [0,1], & si\ x \neq \frac{1}{2}, \\ [0,1/2], & si\ x = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} gph(F) & = & \{(x,y) \in [0,1]^2 : y \in F(x)\} \\ & = & \{(([0,\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1[) \times [0,1]) \cup (\{\frac{1}{2}\} \times [0,\frac{1}{2}])\}. \end{array}$$

Corollaire 2.3 *Soit* $F : E \rightrightarrows T$*, pour tout* $V \subset T$*,*

a) *On définit l'image réciproque large de* V *par la multi-application* F *par*

$$F^{-1}(V) = \{x \in E : F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

b) *On définit l'image réciproque étroite de* V *par la multi-application* F *par*

$$F_+^{-1}(V) = \{x \in E : F(x) \subseteq V\}.$$

Et on a,

1) $T \backslash F_+^{-1}(V) = F^{-1}(T \backslash V)$

2) $T \backslash F^{-1}(V) = F_+^{-1}(T \backslash V)$

Définition 2.4 *Soit* $F : E \rightrightarrows T$ *une multi-application. On appelle sélection de* F *toute application* $\gamma : E \to T$ *vérifiant* $\gamma(x) \in F(x)\ \forall x \in E$.

2.2 La continuité des multi-applications

2.2.1 Définitions

Définition 2.5 ***(Distance de Hausdorff)***

Soit (E, d) un espace métrique, A, B deux sous ensembles de E. On appelle l'écart de A par rapport à B l'ensemble

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} \{d(x, B)\} = \sup_{x \in A} \left\{ \inf_{y \in B} d(x, y) \right\}.$$

La distance de Hausdorff entre A et B est notée $h(A, B)$ définie par

$$h(A, B) = \max(e(A, B), e(B, A)).$$

Axiom 2.6 *Soient A, B et C des sous-ensembles de E alors,*

1) $e(A, \emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$

2) $e(\emptyset, B) = 0$

3) $e(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A \subset \overline{B}$

4) $h(A, B) = 0 \Longleftrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

5) $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$

6) $h(A, C) \leq h(A, B) + h(B, C)$

Corollaire 2.7 *Soit (E, d) un espace métrique. Alors, $\mathcal{P}_d(E)$(l'ensemble des parties de tous les fermés de E) muni de la distance de Hausdorff est un espace métrique.*

2.2.2 La semi-continuité des multi-applications

Définition 2.8 ***La semi-continuité supérieure (s.c.s)***

Soient E et T deux espaces topologiques et $F : E \rightrightarrows T$ une multi-application, alors F est dite semi continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in E$, si pour tout ouvert V de F tel que $F(x_0) \subset V$ il existe un voisinage U de x_0 tel que

$$F(x) \subset V, \forall x \in U.$$

On dit que F est semicontinue supérieurement sur E si elle est semicontinue supérieurement en tout point $x \in E$.

Définition 2.9 ***La semi-continuité inférieure (s.c.i)***

On dit que F semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in E$, si pour tout ouvert V de F tel que $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, il existe un voisinage U de x_0 tel que

$$F(x) \cap U \neq \emptyset, \forall x \in U.$$

On dit que F est semi continue inférieurement sur E si elle est semi-continue inférieurement en tout point $x \in E$.

Définition 2.10 *On dit que F est continue au point $x_0 \in E$ si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i. au point x_0, et F continue si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i.*

Théorème 2.11 *Soit $F : E \rightrightarrows T$ une multi-application à valeurs non vides avec T un espace compact. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.*

Corollaire 2.12 *Soit $F : E \rightrightarrows T$, la semi-continuité supérieure de F est équivalente à chacune des conditions suivantes :*

a) *$F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de E pour tout ouvert V de T.*

b) *$F^{-1}(U)$ est un fermé de E pour tout fermé U de T.*

c) *$\overline{F^{-1}(M)} \subseteq F^{-1}(\overline{M})$ pour tout ensemble M de T.*

Corollaire 2.13 *La semi-continuité inférieure de F est équivalente à chacune des conditions suivantes :*

a) *$F^{-1}(V)$ est un ouvert de E pour tout ouvert V de T.*

b) *$F_+^{-1}(U)$ est un fermé de E pour tout fermé U de T.*

c) *$\overline{F_+^{-1}(M)} \subseteq F_+^{-1}(\overline{M})$ pour tout ensemble M de T.*

Théorème 2.14 *Soient X, Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. F est semi-continue inférieure au point x_0 si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de X, telle que $x_n \to x_0$ et pour tout $y_0 \in F(x_0)$, il existe une suite (y_n) telle que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \to y_0$.*

Théorème 2.15 *Soit $F : E \rightrightarrows T$ une multi-application semi continue supérieure à valeurs fermées. Alors le graphe de F est fermé.*

Théorème 2.16 *Soient X, Y deux espaces topologiques, le graphe d'une multi-application à valeurs fermés de X dans Y est fermé dans $X \times Y$.*

Théorème 2.17 *Soient $F : E \rightrightarrows T$, $G : X \rightrightarrows Y$ deux milti-applications telles que, $\forall x \in X, F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$.*

On suppose que

i) *F est s.c.s. au point $x_0 \in X$;*

ii) *$F(x_0)$ est compact ;*

iii) *Le graphe de G est fermé.*

Alors, la multi-application $F \cap G$ est semicontinue supérieure au point x_0.

Théorème 2.18 *Soient E un espace topologique, T un espace de Hausdorff localement convexe et soit $F : E \rightrightarrows T$ une multi-application à valeurs non vides. Si $F(t_0)$ est convexe et faiblement compact, alors F est faiblement semi-continue supérieure au point t_0 si et seulement si les fonctions scalaires $\delta^*\left(x', F(.)\right)$ sont semi-continue supérieure au point t_0.*

Théorème 2.19 *$F : E \rightrightarrows T$ une multi-application s.c.s à valeurs compactes alors*

$$\limsup_{x' \to x} F(x') = F(x).$$

Corollaire 2.20 *Soient E, T, Y trois espace topologiques et $F : E \rightrightarrows T, G : T \rightrightarrows Y$ deux multi-applications.*

1) *Si F et G sont s.c.s alors $G \circ F$ est s.c.s.*

2) *Si F, G sont s.c.i alors, $G \circ F$ est s.c.i.*

Proposition 2.21 *Soient E, T deux espaces topologiques et $F_1, F_2 : E \rightrightarrows T$ deux multi-applications. Alors,*

a) *Si F_1 et F_2 sont s.c.i au point $x_0 \in E$, alors, $x \mapsto F_1(x) \cup F_2(x)$ est s.c.i au point x_0.(Ce résultat n'a pas lieu pour l'intersection)*

b) *Si F_1 et F_2 sont s.c.s au point $x_0 \in E$, alors, $x \mapsto F_1(x) \cup F_2(x)$ est s.c.s au point x_0.*

c) *Supposons que T est métrisable. Si F_1, F_2 sont a valeurs fermées et s.c.s au point x_0, alors $x \mapsto F_1(x) \cap F_2(x)$ est s.c.s au point x_0.*

Définition 2.22 *Soient $(E, d), (T, d')$ deux espaces métriques et $F : E \rightrightarrows T$ une multi-application.*

- *On dit que F est H-s.c.s au point $x_0 \in E$ si et seulement si,*

$$\forall \xi > 0, \exists \delta > 0 / F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \xi) = \{t \in T : d(t, F(x_0)) \leq \xi\}.$$

• *On dit que F est H-s.c.s sur E si et seulement si elle est H-s.c.s en tout point de E.*

Définition 2.23 *Soient $(E,d),(T,d')$ deux espaces métriques et $F : E \rightrightarrows P(T)$ une multi-application.*

• *On dit que F est H-s.c.i au point $x_0 \in E$ si et seulement si,*

$$\forall \xi > 0, \exists \delta > 0 / F(x_0) \subset [V(F(t),\xi)]^{\circ}, \forall t \in B(x_0,\delta).$$

• *On dit que F est H-s.c.i sur E si et seulement si elle est H-s.c.i en tout point de E.*

2.3 La mesurabilité des multi-applications

2.3.1 Application mesurable

Définition 2.24 *Soit (E,Σ) un espace mesurable et soient X un espace métrique,$B(X)$ la tribu Borélienne sur X et $f : E \to X$.*

• *On dit que f est $(\Sigma, B(X))$-mesurable si et seulement si $\forall A \in B(X)$, $f^{-1}(A) \in \Sigma$.*

• *On dit que f est Σ-étagée (resp dénombrablement Σ-étagée) si f est Σ-mesurable et $f(E)$ est fini (resp $f(E)$ est dénombrable).*

Ceci revient à dire qu'il existe une Σ-partition finie (resp dénombrable) $(E_J)_{J\in j}$ de E, telle que f soit constante sur chaque E_J,

$$f = \sum_{j\in J} a_j \chi_{E_J}, \text{ avec } E_j = \{x \in E \ / \ f(x) = a_j\}.$$

• *On dit que f est Bochner Σ-mesurable si f est Σ-mesurable et $f(E)$ est un sous ensemble séparable de X.*

Remarque 2.25 *Si X est un espace métrique séparable, alors f est Bochner Σ-mesurable $\Leftrightarrow$ f est Σ-mesurable.*

Corollaire 2.26 *Les caractérisations suivantes sont équivalentes*

a) *f est Bochner Σ-mesurable ;*

b) *Il existe une suite d'applications $(f_n)_n$ Σ-étagée convergeant simplement sur x vers f , (i.e. $\forall x \in E$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$) ;*

c) *Il existe une suite d'applications $(f_n)_n$ dénombrablement Σ-étagée convergeant uniformément vers f (i.e. $\limsup_{n\to\infty_{x\in E}} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$).*

Corollaire 2.27 *Soit $f : E \to X$ et soit $(f_n)_n$ une suite d'applications Σ-mesurables définies sur E à valeurs dans X telle que pour chaque $x \in E$, $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ alors f est Σ-mesurable.*

Théorème 2.28 *Soit (E, Σ) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique séparable et $f : E \to X$.*

Pour chaque $x \in X$, considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} g_x & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & d(x, f(x)) \end{array}$$

Alors,

f est Σ-mesurable $\Longleftrightarrow$ g_x est Σ-mesurable pour chaque $x \in X$.

Définition 2.29 *Soit (E, Σ, μ) un espace mesuré positif. On considère la tribu μ-complétée de Σ*

$$\Sigma_\mu = [\Sigma \cup \aleph] = \{A \cup N / \ A \in \Sigma \text{ et } N \in \aleph\} \text{ avec } \aleph = \{N \in E / \ \exists B \in \Sigma \text{ et } \mu(B) = 0\}$$

$\aleph$ est l'ensemble des parties μ-négligeables de E. On dit que $f : E \to X$ est Bochner Σ_μ-mesurable si f est Σ_μ-mesurable et il existe $N \in \aleph$ tel que $f(E \setminus N)$ est séparable.

Définition 2.30 *Soit (E, Σ) un espace mesuré et T un espace de Banach, Si $F : (E, \Sigma) \to (T, ß(T))$ est mesurable, on dit qu'elle est fortement mesurable.*

Définition 2.31 *Une multi-application $F : E \rightrightarrows T$ est dite intégrablement bornée ou scalairement intégrable si F est mesurable et la fonction $t \mapsto |F(t)|$ appartient à $L^1_{\mathbb{R}}(E)$.*

Théorème 2.32 *Soit (E, Σ) un espace mesurable, T un espace Sous-linier et $f : E \to T$ une fonction. Considérons les propriétés suivantes :*

1) *$grh\ (f) \in \widetilde{\Sigma} \oplus ß(T)$.*

2) *f est $\left(\widetilde{\Sigma}, ß(T)\right)$mesurable.*

3) *f et la limite d'une suite de fonctions $\widetilde{\Sigma}$-mesurables prenant un nombre fini de valeurs.*

4) *(Considérée seulement si E est un espace topologique de Hausdorff et μ est une mesure de Radon sur E) f est Lusin μ-mesurable.*

Alors (1) $\Rightarrow$(2), (2) $\Rightarrow$ (3), (1) $\Rightarrow$ (4) et (2) $\Rightarrow$ (1).

Théorème 2.33 ***(Théorème de Lusin)***

Soit E un espace métrique compact et (E, Σ, μ) un espace mesuré de Radon avec $\mu \geq 0$. Alors, pour toute fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}$ μ-mesurable et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $E_\varepsilon \subset E$ tel que $\mu(E \backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$ et $\varphi_{\backslash E_\varepsilon}$ est continue (i.e., la restriction de φ à E_ε est continue).

Lemme 2.34 *Soit E un espace métrique compact, (E, Σ, μ) un espace mesuré positif de Radon. Soit Z un espace métrique séparable et $h : E \times Z \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable par rapport à x et lipschitzienne par rapport à z, i.e,*

$$\exists \alpha > 0, \ \ |h(x, z) - h(x, z')| \leq \alpha d_z(z, z'), \ \forall z, \ z' \in Z.$$

Alors, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un compact $E_\varepsilon \subset E$ tel que $\mu(E \backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de h à $E_\varepsilon \times Z$ est continue.

Corollaire 2.35 ***(Théorème de Scarza Dragoni pour les fonctions)***

Soit E un espace compact, (E, Σ, μ) un espace mesuré de Radon avec $\mu \geq 0$. Soit X un espace métrique séparable complet et soit $h : E \times X \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe compact $E_\varepsilon \subset E$ tel que $\mu(E \backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de h à $E_\varepsilon \times X$ est continue.

2.3.2 Applications implicites mesurables

Proposition 2.36 *Soient (E, Σ, μ) un espace mesuré avec Σ une tribu μ-complète. Soient X, Y deux espaces métriques complets séparables, $F : E \rightrightarrows Y$ et $G : E \rightrightarrows X$ deux multi-applications Σ-mesurables à valeurs fermées et soit $f : E \times X \to Y$ une application Carathéodory.*

Définition 2.37 *Supposons que pour tout $x \in dom(F) \cap dom(G)$, nous avons*

$$G(x) \cap (f(x, \cdot))^{-1}(F(x)) \neq \emptyset.$$

Alors, il existe une application $u : dom(F) \cap dom(G) \to X$ telle que

$$u(x) \in G(x) \ \text{ et } f(x, u(x)) \in F(x), \ \forall x \in dom(F) \cap dom(G).$$

Dans la suite, nous allons introduire le concept de la borne supérieure (inférieure) essentielle d'une famille de multi-applications. Commençons par le cas des fonctions univoques.

Proposition 2.38 *Soient (E,Σ,μ) un espace mesuré positif avec μ une mesure σ-finie. Soit $(F_j)_{j\in J}$ une famille quelconque de fonctions Σ-mesurable définies sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors, il existe une fonction Σ-mesurable $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que*

i) *Pour chaque $j \in J$, $f_j \leq f$ μ-p.p ;*

ii) *Pour toute autre fonction $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ vérifiant (i), on a $f \leq g$ μ-p.p.*

De plus, la fonction f est unique à μ-équivalence, et il existe un ensemble dénombrable $J_0 \subset J$ tel que

$$f(x) = \sup_{j\in J_0} f_j(x) \ \ \mu\text{-p.p.}$$

La fonction f est appelée la borne supérieure essentielle de la famille $(f_j)_{j\in J}$. On note

$$f(x) = \left(ess\ \sup_{j\in J} f_j\right)(x).$$

Nous avons le même résultat pour la borne inférieure essentielle.

Lorsque l'ensemble J n'est pas dénombrable, la fonction $x \longmapsto \sup_{j\in J} f_j(x)$ n'est pas nécessairement Σ-mesurable, et même si elle est Σ-mesurable elle peut être différente de la fonction ess $\sup_{j\in J} f_j$.

Exemple 2.39 *Soit $T = [0,1]$ muni de la tribu et la mesure de Lebesgue, et sooit $J = [0,1]$. Considérons pour chaque $j \in J$ la fonction*

$$\begin{array}{rcccl} f_j & : & T & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & f_j(t) = \chi_j(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \ si\ t = j \\ 0 \ sinon. \end{array} \right. \end{array}$$

Alors, pour $j \in J$, nous avons $f_j = 0$ p.p et donc ess $\sup_{j\in J} f_j = 0$, alors que $\sup_{j\in J} f_j(t) = 1$.

Théorème 2.40 ***(Théorème de Duguindji)***

Soit E un espace métrique de Banach, A un sous ensemble fermé de E et $f : A \to Y$ (Y un espace vectoriel localement convexe une application continue) alors, il existe une application continue $\widetilde{f} : E \to Y$ qui prolonge f c'est-à-dire $f(x) = \widetilde{f}(x)$ $\forall x \in A$ de plus $\widetilde{f}(x) \subset co(f(A))$.

2.3.3 Multi-applications mesurables

Définition 2.41 *Soient (E,Σ) un espace mesurable, T un espace métrique et $F : E \rightrightarrows T$ une multi-application. On dit que F est $(\Sigma, \beta(T))$-mesurable, ou tout simplement Σ-mesurable, si pour tout ouvert V de T on a*

$$F^{-1}(V) = \{x \in E / F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Exemple 2.42 ***1)*** *Toute multi-application constante est Σ-mesurable.*

2) *Toute multi-application constante est Σ-étagée (resp dénombrablement Σ-étagée) est Σ-mesurable.*

3) *Si A est un sous ensemble non vide d'un espace de Banach séparable et si $f : E \to T$ est une application Σ-mesurable, alors la multi-application*

$$\begin{array}{rccl} F & : & E & \rightrightarrows & T \\ & & x & \longmapsto & F(x) = f(x) + A \end{array}$$

est Σ-mesurable.

4) *Si A est un sous ensemble non vide d'un espace de Banach séparable T et si $\alpha : E \to \mathbb{R}$ est une fonction Σ-mesurable alors la multi-application*

$$\begin{array}{rccl} F & : & E & \rightrightarrows & T \\ & & x & \longmapsto & F(x) = \alpha(x) + A \end{array}$$

est Σ-mesurable.

5) *Si $F : E \rightrightarrows T$ est Σ-mesurable, alors la multi-application*

$$\begin{array}{rccl} G & : & E & \rightrightarrows & T \\ & & x & \longmapsto & G \quad \left(E = \overline{F(x)}\right) \end{array}$$

est Σ-mesurable.

Proposition 2.43 (Bornes supérieure et inférieure de Valadier pour les multi-applications)

Soit (E, Σ, μ) un espace mesuré avec Σ une tribu μ-complète et μ une mesure σ-finie et soit T un espace métrique séparable. Soit $(F_j)_{j \in J}$ une famille de multi-applications mesurables à valeurs fermées définies sur E à valeurs dans T. Alors, il existe une multi-application $F : E \rightrightarrows T$ Σ-mesurable à valeurs fermées telle que

i) *Pour chaque $j \in J$, $F_j(x) \subset F(x)$ μ-p.p ;*

ii) *Pour toute multi-application $G : E \rightrightarrows T$ Σ-mesurable à valeurs fermées vérifiant la condition* ***(i),*** *on a $F(x) \subset G(x)$ μ-p.p.*

De plus, il existe un ensemble dénombrable $J_0 \subset j$ tel que

$$F(x) = \overline{\bigcup_{j \in J_0} F_j(x)} \ \mu\text{-p.p.}$$

Corollaire 2.44 *Soient (E,Σ,μ) un espace mesuré avec Σ une tribu μ-complète et μ une mesure σ-finie et soit T un espace métrique séparable.*

Alors, pour toute multi-application $F : E \rightrightarrows T$ Σ-mesurable à valeurs fermées, il existe une μ-p.p plus grande multi-application $F_0 : E \rightrightarrows T$ Σ-mesurable à valeurs fermées et à images contenues μ-p.p dans celles de F au sens suivant

1) *$F_0(x) \subset F(x)$ μ-p.p sur E ;*

2) *pour toute autre multi-application $\widetilde{F} : E \rightrightarrows T$ Σ-mesurable à valeurs fermées vérifiant $\widetilde{F}(x) \subset F(x)$ μ-p.p sur E, nous avons $\widetilde{F}(x) \subset F_0(x)$ μ-p.p sur E .*

En particulier pour toute sélection Σ-mesurable f de F nous avons, $f(x) \in F_0(x)$ μ-p.p sur E .

Théorème 2.45 Théorème de Scorza Dragoni (Version multivoque)

Soit E un espace métrique compact, (E,Σ,μ) un espace mesuré de Radon tel que $\mu \geq 0$, T un espace métrique séparable complet et Y un espace métrique compact. Soit $F : E \times T \rightrightarrows Y$ une multi-application de Carathéodory à valeurs fermées non vides, i.e.,

i) *Pour chaque $x \in E$, $gph(F(x,\cdot))$ est fermé dans $T \times Y$ $(F(x,\cdot))$ est semi continue supérieure ;*

ii) *Pour chaque $t \in T$, $F(\cdot,t)$ est mesurable (admet une sélection mesurable).*

Alors, il existe une multi-application $F_0 : E \times T \rightrightarrows Y$ telle que

1) *$gph(F_0) \in \Sigma \otimes ß(T) \otimes ß(Y)$.*

2) *Il existe une ensemble μ-négligeable N indépendant de (x,t) vérifiant $F_0(x,t) \neq \emptyset$ et $F_0(x,t) \subset F(x,t)$, $\forall x \in E \backslash N$ et $\forall t \in T$.*

3) *Pour toutes applications mesurables $u : E \to Y$ vérifiait $v(x) \in F(x,u(x))$ μ-p.p., nous avons $v(x) \in F_0(x,u(x))$ μ-p.p.*

4) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $E_\varepsilon \subset E$ tel que $\mu(E \backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$ et tel que le graphe de la restriction de F_0 à $E_\varepsilon \times T$ soit fermé (i.e., $F_{0 \diagdown E_\varepsilon \times T}$ est semi continue supérieure).*

Théorème 2.46 (Version multivoque du théorème de Dugundji)

Soient E et T deux espaces de Banach. $K \subset E$, $D \subset X$ fermés, soit $F : K \times D \rightrightarrows T$ une multi-application à valeurs convexes faiblement compactes telle que

$$F(x,t) \subset C(x)(1+\|t\|)\overline{B}_t \text{ pour tout } (x,t) \in K \times D \text{ où } C : K \times K \to \mathbb{R}_+ \text{ fixée.}$$

Alors, il existe une multi-application $\widetilde{F} : E \times D \rightrightarrows T$ semi continue supérieure à valeurs convexes faiblement compactes prolongeant F et telle que $\widetilde{F}(x,t) \subset coC(1+\|t\|)\overline{B}_t$ si C est un constant et $\widetilde{F}(x,t) \subset coF(k \times D)$.

Définition 2.47 ***Multi-applications à graphes mesurables.***

Soient (E,Σ) un espace mesurable, Y et Z deux espaces métriques. Soit $f : E\times Y \to Z$. On dit que f est une application de carathéodory si

$$\begin{array}{rccl} f_y & : & E & \to & Z \\ & & x & \longmapsto & f_y(x) = f(x,y) \end{array}$$

est Σ-mesurable pour chaque $y \in Y$ fixé et

$$\begin{array}{rccl} f_x & : & Y & \to & Z \\ & & y & \longmapsto & f_x(y) = f(x,y) \end{array}$$

est continue sur Y pour chaque $x \in E$ fixé.

- *On dit aussi que f est séparément mesurable séparément continue.*

Définition 2.48 *Soient (E,Σ) un espace mesurable, Y espace métrique séparable et Z un espace métrique. Soit $f : E \times Y \to Z$ une application de Carathéodory, alors f est $(\Sigma \otimes ß(Y), ß(Z))$-mesurable.*

Proposition 2.49 *Soit T un espace métrique séparable, $F : E \rightrightarrows T$ une multi-application à valeurs fermées. Alors, si F est Σ-mesurable le graphe de F appartient à $\Sigma\otimes ß(T)$*

$$gph(F) = \{(x,t) \in E \times T / t \in F(x)\}.$$

Théorème 2.50 ***(Projection d'ensembles mesurables)***

Soient (E,Σ,μ) un espace mesuré, T un espace métrique. Alors, pour tout $G \in \Sigma\otimes ß(T)$ nous avons $proj_E(G) \in \Sigma_\mu$.

Σ_μ est la tribu complétée de Σ par rapport à la mesure μ.

Théorème 2.51 *Soient (E,Σ,μ) un espace mesuré avec μ σ-finie. On suppose que la tribu Σ est μ-complète. Soit $F : E \rightrightarrows T$ une multi-application à valeurs fermées. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *F est Σ-mesurable.*

ii) *$gph(F) \in \Sigma\otimes ß(T)$.*

iii) *$F^{-1}(B) \in \Sigma$, pour tout borélien B de T.*

iv) *$F^{-1}(C) \in \Sigma$, pour tout borélien C de T.*

Remarque 2.52 *Quand Σ est μ-complète, l'implication **ii)** $\Longrightarrow$ **i)** est vraie même si F n'est pas à valeurs fermées.*

Proposition 2.53 *Soient $(F_j)_{j\in J}$ une famille dénombrable de multi-applications définies sur E à valeurs dans T et soit F, $G : E \rightrightarrows T$ deux multi-applications telles que*

$$F(x) = \underset{j\in J}{\cap} F_j(x), \; G(x) = \underset{j\in J}{\cup} F_j(x).$$

Alors,

1) *Si les multi-applications F_j sont de graphes mesurables, F, et G sont aussi de graphes mesurables.*

2) *Si Σ est complète et si les F_j sont Σ-mesurables à valeurs fermées alors F est Σ-mesurable.*

Définition 2.54 *Soit $F : E \rightrightarrows T$ une multi-application, on appelle sélection de F toute application*

$$f : dom(F) \to T \text{ tel que } f(x) \in F(x) \text{ pour tout } x \in dom(F).$$

Définition 2.55 (Existence de sélection)

Soit T un espace métrique complet séparable $F : E \rightrightarrows T$ multi-application à valeurs fermées non vides dans T et μ-mesurable. Alors F admet au moins une sélection μ-mesurable.

Théorème 2.56 *Soit (E, Σ) un espace mesurable, T un espace de Hausdorff localement convexe, H un sous-ensemble convexe Sous-linien de T et $F : E \rightrightarrows T$ une multi-application à valeurs non vides, convexes, fermées, faiblement localement compactes de T qui ne contiennent aucune ligne.*

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\forall x' \in F'$, $\delta^*\left(x', F(.)\right)$ *est* $\widetilde{\Sigma}$*-mesurable ;*

b) *F admet une suite de sélections $(\sigma_n)_n$, $\widetilde{\Sigma}$-mesurables telle que*

$$\forall x \in E \; , \; F(x) = \overline{\{\sigma(x), n \in \mathbb{N}\}};$$

c) $gph\ (F) \in \widetilde{\Sigma} \oplus ß(T)$.

Proposition 2.57 *Soient T un espace Souslinien localement convexe, (E,Σ) un espace mesuré, et soient $F : E \rightrightarrows T$ une multi-application à valeurs convexes, fermées et faiblement localement compactes, $\psi : E \rightrightarrows T$ une multi-application à valeurs convexes et fermées.*

Si l'on a :

$$\forall x^{'} \in F^{'}, \delta^{*}\left(x^{'}, \psi\left(x\right)\right) \leq \delta^{*}\left(x^{'},\ F\left(x\right)\right) \mu - p.p.$$

alors

$$\psi\left(x\right) \subset F\left(x\right) \mu - p.p.$$

Chapitre 3

L'existence de la solution d'une inclusion différentielle de premier ordre

Dans ce chapitre, on présente quelques applications de méthodes topologiques permettant d'obtenir l'existence de solutions d'inclusions différentielles ordinaires. Deux types de fonctions multivoques sont distingués et un principe générale d'existence de solutions est établi pour chacun d'eux.

Des résultats sont obtenus pour des systèmes des inclusions différentielles de premier ordre et pour des inclusions différentielles dans un espace de Banach.

3.1 Inclusion différentielle avec second membre une multi-application lipschitzienne

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude des inclusions différentielles du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} u^{'}(t) \in F(t, u(t)) \\ u(0) = a \end{cases}$$

On donne notre premier résultat quand la multi-application vérifier la condition de Lipschitz.

Théorème 3.1 *Soit E un espace de Banach séparable et $F : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs fermées non vides. Soit H une primitive d'une application $h : [0,T] \to E$ Lebesgue-intégrable sur I et soient $x_0 \in E$, $0 < \delta < b$ et $\eta \in L^1_{\mathbb{R}^+}([0,T])$, telle que :*

H_1) $\|H(0) - x_0\| \leq \delta < b$

H_2) $d(h(t), F(t, H(T))) \leq \eta(t)$

Soit

$$\chi = \{(t,x) \in [0,T] \times E, \ / \|x - H(t)\| \leq b\}.$$

supposons de plus

1) *$F(.,x)$ est Lebesgue-mesurable*

2) $H(F(t,x_1), F(t,x_2)) \leq k(t)\|x_1 - x_2\|, \forall (t,x_1), (t,x_2) \in [0,T] \times E$ *avec* $k \in L^1_{\mathbb{R}^+}([0,T])$.

Sous ces conditions l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} u'(t) \in F(t, u(t)), p.p \text{ sur } [0,T] \\ u(0) = a \end{cases}$$

admet au moins une solution sur l'intervalle

$$I = \{t \in [0,T] : \phi(t) \leq b\}$$

avec

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \delta \exp[m(t)] + \gamma \int_0^t \eta(s) \exp[m(t) - m(s)]\, ds \\ m(t) &= \int_0^t \gamma k(s)\, ds \text{ avec } \gamma > 1 \text{ .....et } \gamma = 1 \text{ si } \dim E < \infty \end{aligned}$$

de plus u vérifie

$$\|u(t) - H(t)\| \leq \phi(t) \text{ et } \|\dot{u}(t) - h(t)\| \leq \gamma(k(t)\phi(t) + \eta(t))$$

Preuve. *Observons que I contient 0 et d'intérieur non vide. En effet,*

$$\phi(0) = \delta \exp[m(0)] = \delta < b \Rightarrow \phi(0) \leq b \Rightarrow 0 \in I \Rightarrow I = \phi^{-1}([0,b])$$

I) *Posons*

$$v_0(t) = h(t) \text{ et } u_0(t) = H(0) + \int_0^t v_0(s)\, ds = H(0) + \int_0^t h(s)\, ds \text{ i.e, } v_0(t) = h(t), \ u_0(t) = H(t)$$

On sait que $t \longmapsto F(t,x)$ *est mesurable et par suite il existe une application* $v_1 : I \longrightarrow E$ *mesurable telle que*

$$v_1(t) \in F(t, u_0(t)) \text{ et } \|v_1(t) - v_0(t)\| \leq \gamma d(h(t), F(t, H(t))) \leq \gamma\eta(t)$$

Comme $\eta \in L^1_{\mathbb{R}^+}([0,1]), v_0$ *Lebesgue-intégrable et donc* v_1 *est Lebesgue-intégrable*

Posons

$$u_1(t) = a + \int_0^t v_1(s)\, ds$$

Alors

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - H(t)\| &\leq \delta + \gamma \int_0^t \eta(s)\, ds \\ \|v_1(t) - h(t)\| &\leq \gamma\eta(t) \end{aligned}$$

II) *On va définir par récurrence une suite* (v_n, u_n) *telle que*

a) $v_0(t) = h(t), u_0(t) = H(t)$

b) $v_{n+1}(t) \in F(t, u_n(t))$ *et* v_{n+1} *Lebesgue-intégrable* $n \geq 0$

c) $u_{n+1}(t) = a + \int_0^t v_{n+1}(s)\, ds, n \geq 0$

d) $\|v_{n+1}(t) - v_n(t)\| \leq \gamma k(t) \left[\delta \frac{(m(t))^{n-1}}{(n-1)!} + \gamma \int_0^t \frac{(m(t) - m(s))^{n-1}}{(n-1)!} \eta(s)\, ds\right], n \geq 1$

e) $\|v_{n+1}(t) - v_n(t)\| \leq \gamma d(v_n(t), F(t, u_n(t))), n \geq 0$ *ce n'est pas a prouvé*

f) $\|u_{n+1}(t) - u_n(t)\| \leq \delta \frac{(m(t))^n}{n!} + \gamma \int_0^t \frac{(m(t) - m(s))^n}{n!} \eta(s)\, ds, n \geq 0$

Les couples d'applications $(v_0, u_0), (v_1, u_1)$ *construits ci dessus vérifient les propriétés a) et f). Supposons construits* $(v_0, u_0), \ldots (v_n, u_n)$ *d'après la mesurabilité de la multi-application* $F(., x)$ *il existe une application* $v_{n+1} : I \to E$ *mesurable vérifiant*

$$\begin{aligned} v_{n+1}(t) &\in F(t, u_n(t)), \text{ et } \|v_{n+1}(t) - v_n(t)\| \leq \gamma d(v_n(t), F(t, u_n(t))) \\ \|v_{n+1}(t) - v_n(t)\| &\leq \gamma H(F(t, u_{n-1}(t)), F(t, u_n(t))) \leq \gamma k(t) \|u_n(t) - u_{n-1}(t)\| \end{aligned}$$

donc

$$\|v_{n+1}(t)\| \leq \|v_n(t)\| + \gamma k(t) \|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|$$

et par suite v_{n+1} *est Lebesgue-intégrable (Noter que* u_{n-1} *et* $u_n \in L^\infty$*).*

Posons

$$u_{n+1}(t) = a + \int_0^t v_{n+1}(s)\, ds$$

$$\begin{aligned}
\|v_{n+1}(t)-v_n(t)\| &\leq \gamma d(v_n(t),F(t,u_n(t))) \leq \gamma k(t)\|u_n(t)-u_{n-1}(t)\| \\
\|v_{n+1}(t)-v_n(t)\| &\leq \gamma k(t)\left[\delta\frac{(m(t))^{n-1}}{(n-1)!}+\gamma\int_0^t\frac{(m(t)-m(s))^{n-1}}{(n-1)!}\eta(s)\,ds\right] \\
\|u_{n+1}(t)-u_n(t)\| &\leq \int_0^t\|v_{n+1}(t)-v_n(t)\| \leq \int_0^t\varphi_n(s)\,ds=\Psi_n(t) \\
\|u_{n+1}(t)-u_n(t)\| &\leq \delta\frac{(m(t))^n}{n!}+\gamma\int_0^t\frac{(m(t)-m(s))^n}{n!}\eta(s)\,ds
\end{aligned}$$

obtient

$$\|u_{n+1}(t)-u_0(t)\| \leq \sum_{p=0}^{n}\|u_{p+1}(t)-u_p(t)\| \leq \delta\sum_{p=0}^{n}\frac{(m(t))^p}{p!}+\gamma\int\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(m(t)-m(s))^p}{p!}\eta(s)\,ds$$

$$\|u_{n+1}(t)-u_0(t)\| \leq \delta e^{m(t)}+\gamma\int_0^t\eta(s)\,e^{(m(t)-m(s))}ds \tag{3.1}$$

par un calcul analogue on démontre que

$$\|v_{n+1}(t)-v_0(t)\| \leq \gamma k(t)\phi(t)+\gamma\eta(t)=\gamma\left[k(t)\phi(t)+\eta(t)\right]. \tag{3.2}$$

III) *D'après e) la suite de* $(v_n(t))$ *est une suite de Cauchy dans* E *et donc elle converge vers* $v_n(t)\in E$. *De même la relation f) implique que* $(u_n(t))$ *est de Cauchy et donc elle converge vers une fonction* $u_n(t)\in E$.

Par construction nous avons

$$\begin{aligned}
u_n(t) &= a+\int_0^t v_n(s)\,ds \\
\|v_n(t)\| &\leq \|h(t)\|+\gamma\left[k(t)\phi(t)+\eta(t)\right]
\end{aligned}$$

En applique le théorème de la convergence dominée on obtient

$$u(t)=a+\int_0^t v(s)\,ds,\forall t\in I$$

$$\begin{aligned}
u'(t) &= v(t) \\
u(0) &= a
\end{aligned}$$

d'après 3.1 et 3.2, on obtient après passage à la limite

$$\begin{aligned}
\|u(t)-H(t)\| &\leq \delta e^{m(t)}+\gamma\int_0^t\eta(t)\,e^{(m(t)-m(s))}ds=\Phi(t) \\
\|u'(t)-h(t)\| &\leq \gamma\left[k(t)\phi(t)+\eta(t)\right], p.p.\ d'prés\ b)\ v_{n+1}(t)\in F(t,u_n(t)), p.p.
\end{aligned}$$

Comme la multi-application $F(t,.)$ *a un comportement lipschitzienne et donc elle est de graphe fermé relativement à* $\chi_t=\{x/(t,x)\in\chi\}$ *.or* $(u_n(t),v_n(t))\in gph(F(t,.))$, *en passant à limite on obtient* $(u(t),v(t))\in gph(F(t,.))$ *d'où* $\dot{u}(t)\in F(t,u(t))$.

3.2 Inclusions différentielles avec un second membre semi-continue supérieure

Soit $F : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ semi-continue supérieure

Nous allons étudier l'inclusion différentielle

$$(I) \quad \begin{cases} u'(t) \in F(t, u(t)), p.p. \\ u(0) = a \end{cases}$$

Au cours de la démonstration on utilisera le lemme suivant

Lemme 3.2 *Soient des réels $r_0, ..., r_n \in \mathbb{R}_+$ et un réel $\alpha > 0, k \in \{0, ..., n\}$, supposons que*

$$r_{k+1} \leq \alpha + (1+\alpha) r_k, \text{ pour } k = 0, ..., n-1$$

Alors

$$r_k \leq (1+\alpha)^k (1+r_0) - 1, \text{ pour tout } k = 0, ..., n$$

En particulier pour $\alpha = \frac{\beta}{n}$ on obtient

$$r_k \leq -1 + (1+r_0) e^{\beta}$$

Proposition 3.3 *Soit E un espace de Banach réflexif séparable, supposons que $F : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ est semi-continue supérieure sur $[0,T] \times E$ et à valeurs convexes fermées non vides. Supposons aussi qu'il existe un convexe compact symétrique $K \in \mathbf{B}$ et une constante réelle $c > 0$ telle que*

$$F(t,x) \subset c(1 + \|x\|) K.$$

Alors l'inclusion (I) admet au moins une solution u qui γ_Lipschitzienne et que vérifie

$$\begin{aligned} u(t) &\in a + cT(1+\rho) K \text{ et } u'(t) \in c(1+\rho) K, p.p \\ \text{où } \rho &= (1+|a|) e^{cT} \text{ et } \gamma = c(1+\rho) \end{aligned}$$

Preuve. *Pour chaque $n \geq 1$, soit $t_k^n = \frac{kT}{n}$ pour $k = 0, ..., n$. F est à valeurs non vides, choisissons $v_0 \in F(0,a)$ et posons $u_0^n(t_0^n) = a$ et $v_1^n = v_0$ des fonctions approximatives*

posons aussi

$$u_1^n(t) = a + \int_0^t v_1^n(s)\, ds = a + (t - t_0^n) v_1^n$$

et posons que $t \in [t_0^n, t_1^n]$, choisissons

$$v_2^n(t) \in F(t_1^n, u_1^n(t_1^n))$$

et posons pour $t \in]t_1^n, t_2^n]$,

$$u_2^n(t) = u_1^n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t v_2^n(s)\,ds = u_1^n(t_1^n) + (t - t_1^n)\,v_2^n \tag{3.3}$$

Et ainsi de suit, on obtient v_n, $u_n : [0,T] \to E$ *avec*

$$v_n(0) = v_0 \text{ et } v_n(t) = v_k^n(t) \text{ si } t \in \left]t_{k-1}^n, t_k^n\right]; k = 1, ..., n. \tag{3.4}$$

$$u_n(0) = a \text{ et } u_n(t) = u_k^n(t) \text{ si } t \in \left]t_{k-1}^n, t_k^n\right]; k = 1, ..., n. \tag{3.5}$$

avec :

$$\begin{cases} v_k^n(t) \in F\left(t_{k-1}^n, u_{k-1}^n\left(t_{k-1}^n\right)\right) \\ \text{et } u_k^n(t) = u_{k-1}^n\left(t_{k-1}^n\right) + \int_{t_{k-1}^n}^t v_k^n(s)\,ds = u_{k-1}^n\left(t_{k-1}^n\right) + \left(t - t_{k-1}^n\right) v_k^n \end{cases}$$

On voit bien que l'application u_n *est une primitive de* v_n *sur* $[0,T]$ *car*

$$u_n(t) = a + \int_0^t v_n(s)\,ds, \forall t \in [0,T]$$

En effet, $\forall t \in [0,T], \exists k \in \{0, ..., n\} / t \in \left]t_{k-1}^n, t_k^n\right]$

$$\begin{aligned} u_n(t) &= a + \int_0^t v_n(s)\,ds \\ &= a + \int_0^{t_1^n} v_n(s)\,ds + \int_{t_1^n}^{t_2^n} v_n(s)\,ds + ... + \int_{t_{k-1}^n}^t v_n(s)\,ds \\ &= u_0^n(t_0^n) + (t_1^n - t_0^n)\,v_0^n + (t_2^n - t_1^n)\,v_1^n + ... + \left(t - t_{k-1}^n\right) v_k^n \\ &= u_k^n(t) = u_n(t) \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\theta_n(0) = 0, \theta_n(t) = t_{k-1}^n \quad si \quad t \in \left]t_{k-1}^n, t_k^n\right]$$

Alors

$$v_n(t) \in F(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))), \text{ pour tout } t \in [0,T]. \tag{3.6}$$

$$u_n(t) = a + \int_0^t v_n(s)\,ds, \text{ pour tout } t \in [0,T]. \tag{3.7}$$

I) *Posons* $z_k^n = u_k^n(t_k^n)$ *pour* $k = 0, ..., n$

d'après 3.3 et 3.6

$$\begin{aligned} \left\|z_{k+1}^n - z_k^n\right\| &= \left(t_{k-1}^n - t_k^n\right)\left\|v_{k+1}^n\right\| \leq c\left(t_{k-1}^n - t_k^n\right)(1 + \|z_k^n\|) \\ t_{k-1}^n - t_k^n &= (k+1)\frac{T}{n} - k\frac{T}{n} = \frac{T}{n} \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned}\left\|z_{k+1}^n\right\| &\leq \left\|z_{k+1}^n - z_k^n\right\| + \|z_k^n\| \\ &\leq c\frac{T}{n}\left(1 + \|z_k^n\|\right) + \|z_k^n\| \\ &= \left(1 + c\frac{T}{n}\right)\|z_k^n\| + c\frac{T}{n}\end{aligned}$$

d'où

$$\left\|z_{k+1}^n\right\| \leq c\frac{T}{n} + \left(1 + c\frac{T}{n}\right)\|z_k^n\|$$

alors d'après le lemme précédant

$$\begin{aligned}\|z_k^n\| &\leq -1 + (1 + \|a\|)\, e^{cT} \\ &\leq (1 + \|a\|)\, e^{cT}\end{aligned}$$

$$\|z_k^n\| \leq (1 + \|a\|)\, e^{cT} = \rho \quad (\rho \quad \textit{depend de } a, c \textit{ et } T). \tag{3.8}$$

Ainsi pour tout $k = 0, 1, ..., n$ *on a d'après 3.6*

$$v_n(t) \in c(1 + \rho) K \ \textit{Pour tout } t \in [0, T], \tag{3.9}$$

ce qui assure d'après. Puisque K *est convexe fermé symétrique*

$$u_n(t) \in a + cT(1 + \rho) K. \tag{3.10}$$

de plus en posent $\gamma = c(1 + \rho)$*, on a d'après 3.7 et 3.9 donc*

$$\|u_n(t) - u_n(t')\| \leq \left\|\int_0^t v_n(s)ds - \int_0^{t'} v_n(s)ds\right\| = \left\|\int_t^{t'} v_n(s)ds\right\| \leq \gamma\,|t - t'|$$

$$\|u_n(t) - u_n(t')\| \leq \gamma\,|t - t'|\,, \forall t, t' \in [0, T] \tag{3.11}$$

de 3.10 et 3.11 $(u_n(t))$ *est relativement compact et* $(u_n)_n$ *est équi-continue donc par le théorème d'Ascoli-Arzela* (u_n) *admet une sous suite qui converge uniformément sur* $[0, T]$ *vers une application* $u : [0, T] \to E$ *qui est* γ*-lipschitzienne. Notons encore* $(u_n)_n$ *cette suite.*

D'après 3.9 $(v_n(t)) \subset c(1 + \rho)$ *(*(v_n) *est bornée dans* L_E^2 *qui est réflexif).*

Par extraction d'une sous suite en peut supposer que (v_n) *converge faiblement dans* L_E^2 *vers une fonction* v

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}|\theta_n(t) - t| &\leq \frac{T}{n} \Rightarrow \theta_n(t) \to t \\ \textit{et } \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| &\leq \|u_n(t) - u(t)\| + \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \\ &\leq \|u_n(t) - u(t)\| + \gamma\,|\theta_n(t) - t|\end{aligned}$$

II) *(v_n) converge faiblement vers v dans L^2_E . Par le lemme de Banach-Mazur, il existe une suite $(\varphi_n) \in co\{v_p, p \geq n\}$ qui converge fortement dans L^2_E vers v. On peut extraire de (φ_n) une sous suite qui converge p.p vers v dans L^2_E.*

F étant semi-continue supérieure alors pour chaque $x' \in E'$,

$$\begin{aligned}(t,x) &\mapsto \delta^*(x', F(t,x)) \text{ est semicontinue supérieure} \\ &\Rightarrow \limsup \delta^*(x', F(\theta_p(t), u_p(\theta_p(t))) = \delta^*(x', F(t,x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(t) &\in \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cap}} \overline{co}\{v_p(t), p \geq n\}, p.p \\ &\subset \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cap}} \overline{co}\left\{\underset{p\geq n}{\cup} F(\theta_p(t), u_p(\theta_p(t)))\right\}, p.p \\ &\subset \underset{n=1}{\overset{\infty}{\cap}} \underset{p\geq n}{\cup} F(\theta_p(t), u_p(\theta_p(t))), p.p \\ &\subset F(t, u(t)), p.p \\ &\Rightarrow v(t) \in F(t, u(t))\end{aligned}$$

comme

$$\varphi_n(t) \in c(1+\rho)K$$

alors

$$v(t) \in c(1+\rho)K \text{ p.p.}$$

Montrons maintenant que $u_n(t) = a + \int_0^t v_n \, ds$

Fixons $x' \in E'$, alors pour chaque $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\langle x', u_n(t) - a\rangle &= \left\langle x', \int_0^t v_n(s)ds \right\rangle \\ &= \int_0^t \langle x', v_n(s)\rangle \, ds \\ &= \int_0^t \left\langle \chi_{[0,t]}(s)x', v_n(s)\right\rangle ds \text{ , } v_n \in L^2_E, \chi_{[0,t]}x' \in L^2_{E'}\end{aligned}$$

et comme $v_n \to v$ faiblement dans L^2_E on aura :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle x', u_n(t) - a\rangle &= \langle x', u(t) - a\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\langle \chi_{[0,t]}(s)x', v_n(s)\right\rangle ds \\ &\to \int_0^T \left\langle \chi_{[0,t]}(s)x', v_n(s)\right\rangle ds = \left\langle x', \int_0^t v(s)\, ds\right\rangle\end{aligned}$$

comme E est séparable on obtient

$$u(t) - a = \int_0^t v(s)\, ds$$

d'où

$$u'(t) = v(t)$$

et donc

$$\begin{cases} u'(t) \in F(t, u(t)), p.p \\ u(0) = a \end{cases}.$$

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté une approche théorique pour prouver l'existence de solutions d'une inclusion différentielle du premier ordre. Le point principale était de ramener notre problème à l'aide de théorème d'Ascoli-Arzela, alors celui ci serait une solution de notre problème, ou bien nous mène à une solution. De cette façon on aura montrer que notre problème admet une solution. Ceci à l'aide des outils de l'analyse fonctionnelle et multivoque. En parallèle de ce qu'on a fait, il existe d'autres approches, ils s'agit des méthodes numériques. De toutes les manières, l'approche théorique ou numérique ou autre, les inclusions différentielles sont devenues à la mode dans le monde des mathématiques où la créativité du mathématicien ne cesse d'évoluer.

Bibliographie

[1] L. Aicha Faik : Contribution à l'analyse des multi-fonction et l'etude de quelque problèmes d'évolution, Thèse de doctorat (zamai 1995), univ. Mon-pellier II.

[2] J.P. Aubin et A. Cellina, (1984), Differential Inclusions, Set valued maps ansviability theory, Spring-Verlag, Berlin MR 91d : 49001.

[3] A.Bouzid, J. Galbux, Théorie de la mesure et de l'intégration.

[4] H.Brisis. Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications Masson, Paris, 1993.

[5] Bressana. And Colombog. Generalized Baire Category and differential inclusion in Banach space, J. Differential equations 76 1987,135-158.

[6] C. Castaing, M. Valadier, convexe analyse and mesurable multi-fonction. Lecture Notes in mathematics, Vol. 580, springer verlag, Berlin, 1977 Publication de l'université de Rouen, 1993.

[7] W. Rudin, Analyse réelle et complexe. Hermann, Paris, 1997.

[8] L. Schwartz, Analyse, Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann, Paris, 1970.

[9] L. Schwartz, Analyse III. Hermann, Paris, 1998.

[10] "Symposium-School on Ordinary Differential Equations", TIPAZA, May 13-18, 2006.

Résumé

Le principe de ce mémoire est l'étude de l'existence d'une solution d'un inclusion différentielle du premier ordre dans un espace de Banach de la forme

$$\begin{cases} u'(t) \in F\big(t, u(t)\big) \\ u(0) = a \end{cases}$$

On présente deux théorèmes, dans le premier on prend une multi-application vérifie les conditions de Lipchitz, pour la preuve on utilise le théorème de convergence dominé.Dans le deuxième théorème, la multi-application est semi continue supérieure, la preuve est basé sur le théorème d'Ascoli-Arzela et le lemme de Banach-Masur.

Abstract

The principal of this thesis is the study of existence of a solution of a first order differential inclusion in a space of Banach of the form

$$\begin{cases} u'(t) \in F\big(t, u(t)\big) \\ u(0) = a \end{cases}$$

We present two theorems, in the first we take a multi-application verifies the conditions of Lipchitz, for the proof we use the dominated convergence theorem.In the second theorem, the multi-application is upper semi continuous, the proof is based on the theorem of Ascoli- Arzela and Lemma of Banach- Masur.

ملخص

المبدأ الأساسي لهذه المذكرة هو دراسة وجود حل لاحتواء تفاضلي من الرتبة الأولى في فضاء بناخ من الشكل

$$\begin{cases} u'(t) \in F\big(t, u(t)\big) \\ u(0) = a \end{cases}$$

نقدم نظريتين، في الأولى نأخذ تطبيق متعدد القيم يحقق شروط ليبشيتز، للبرهان نستعمل نظرية التقارب المهيمن. في النظرية الثانية، التطبيق متعدد القيم شبه مستمر من الأعلى، البرهان يعتمد على نظرية أسكولي–أرزيلا وتوطئة بناخ–مازير.