

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf:.....

**Centre Universitaire  
Abd elhafid Boussouf Mila**

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de master**

**Filière mathématiques  
Spécialité mathématiques fondamentales et appliquées**

***Stabilité et bifurcation d'un modèle  
électrique***

**Préparé par :** *Cherafa Selwa*

*Djoudi Kelthoum*

**Soutenu devant le jury**

**Président** N. Hamri

**PROFESSEUR**

**Examineur** W.Laouira

**M. A. A**

**-Promoteur** A. Mohamed Salah

**DOCTEUR**

**Année universitaire :2014/2015**

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>6</b>
<b>1 Systèmes dynamiques</b>	<b>7</b>
1.1 Notions de système dynamique	7
1.1.1 Systèmes autonomes et non-autonomes	8
1.1.2 Flot et trajectoire	8
1.1.3 Points fixes	9
1.1.4 Ensembles limites	9
1.1.5 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs	9
1.1.6 L'espace des phases	10
1.1.7 Portrait de phase	10
1.1.8 Attracteurs et bassin d'attraction	10
1.2 Stabilité	12
1.2.1 Définition général	12
1.2.2 Stabilité d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$	13
1.2.3 Stabilité d'un système non linéaire	17
1.3 Bifurcations et Chaos	20
1.3.1 Bifurcations	20
1.3.2 Chaos	27
1.4 La Section de Poincaré	28
1.5 Exposants de Lyapunov	28
1.6 La méthode de résolution numérique (Runge-Kutta)	31
<b>2 Le modèle électrique</b>	<b>33</b>
2.1 Description du modèle	33
2.1.1 Memristor	33
2.1.2 Les équations du modèle	34
2.2 Etude Théorique	37
2.2.1 L'équilibre du modèle	37

2.2.2	Stabilité du point d'équilibre (l'origine) :	37
2.2.3	Bifurcation de Hopf . . . . .	39
2.3	Etude numérique . . . . .	39
2.3.1	Portraits de phase . . . . .	40
2.3.2	Les attracteurs chaotiques . . . . .	41
2.3.3	Section de Poincaré et diagramme de bifurcation . . . . .	43
2.3.4	Les exposants de Lyapunov . . . . .	46
2.3.5	Dimension de Lyapunov . . . . .	49

<b>Bibliographie</b>	<b>52</b>
----------------------	-----------

# Table des figures

1.1	Attracteurs réguliers [8]	11
1.2	Quelque exemples d'attracteurs étranges [6]	12
1.3	Point selle(col) [10]	14
1.4	Noeud propre ou impropre stable [10]	14
1.5	Foyer stable [10]	15
1.6	Centre stable [10]	16
1.7	Diagramme de stabilité [10]	18
1.8	Convention graphique [10]	21
1.9	Portrait de phase de la bifurcation noeud-col [10]	22
1.10	Diagramme de la bifurcation noeud-col [10]	22
1.11	Portrait de phase de la bifurcation transcritique [10]	23
1.12	Diagramme de la bifurcation transcritique[11]	24
1.13	Diagramme de la bifurcation fourche surcritique [11]	24
1.14	Diagramme de la Bifurcation fourche souscritique [11]	24
1.15	Diagramme de la bifurcation de Hopf [9]	25
1.16	Exemple de diagramme de bifurcation [10]	26
1.17	Intersection de la trajectoire de l'attracteur de Rossler avec un plan P [7]	29
2.1	Schema du circuit simple chaotique basé sur le memristor [5]	34
2.2	Graphe de la fonction du memristance $M(z(t)) = 0.5z(t)^4 - 1.5z(t)^2 - 1.5$ [5]	35
2.3	Solutions et portrait de phase du système pour $\alpha = 0.9$ et $\beta = 1.5$	40
2.4	Solutions et portrait de phase du système pour $\alpha = 0.9$ et $\beta = 2.4$	40
2.5	Solutions et portrait de phase du système pour $\alpha = 0.9$ et $\beta = 3$	41
2.6	Solutions et portrait de phase du système pour $\alpha = 0.9$ et $\beta = 3.4$	41
2.7	Solutions et portrait de phase du système pour $\beta = 1.5$ et $\alpha = 0.6$	41
2.8	Solutions et portrait de phase du système pour $\beta = 1.5$ et $\alpha = 0.75$	42
2.9	Solutions et portrait de phase du système pour $\beta = 1.5$ et $\alpha = 1.2$	42
2.10	Solutions et portrait de phase du système pour $\beta = 1.5$ et $\alpha = 1.35$	42
2.11	Solutions et Portrait de phase du système pour $\beta = 1.5$ et $\alpha = 1.5$	43

2.12	Solutions et Portrait de phase du système pour $\beta = 1.5$ et $\alpha = 1.62$	43
2.13	Solutions et Portrait de phase du système pour $\beta = 1.5$ et $\alpha = 1.9$	43
2.14	les attracteurs chaotique du système pour $\alpha = 0.9$ et $\beta = 1.5$	44
2.15	Section pincaré $\Sigma$ pour $\alpha = 0.9$ et $\beta = 1.5$	44
2.16	Diagramme de bifurcation $\beta$ - $y(t)$	45
2.17	Diagramme de bifurcation $\alpha$ - $y(t)$	45
2.18	Les exposants de Lyapunov du système pour $\alpha = 0.9, \beta = 1.5$	46
2.19	Les exposants de Lyapunov du système pour $\alpha = 0.9, \beta = 2.4$	47
2.20	Les exposants de Lyapunov du système pour $\alpha = 0.9, \beta = 3$	47
2.21	Les exposants de Lyapunov du système pour $\alpha = 0.9, \beta = 3.4$	48

# Introduction Générale

Les systèmes dynamiques représentent des phénomènes qui évoluent dans l'espace du temps. Ces systèmes viennent de la biologie, physique, chimie, économie, médecine,...ou même des sciences sociale, le système dynamique est le sujet qui fournit des outils mathématiques pour son analyse. Ils sont développés et spécialisés au cours du 19<sup>eme</sup> siècle.

Au cours de la fin de ce siècle le mathématicien, philosophe français Henri Poincaré avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps.

Toujours au 19<sup>eme</sup> siècle, le mathématicien russe Alexandre Lyapunov a effectué des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesure de l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines. Lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales. Le météorologue Edward Lorenz venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés systèmes chaotiques.

Les travaux fondateurs de Lorenz en 1963, ont donné un aperçu des scientifiques de la reconnaissance d'un nouveau type de mouvement appelé Chaos.

Le Chaos a été jugée très utile et a une grande potentiel dans de nombreuses disciplines technologiques comme dans les sciences d'informatiques, la protection des systèmes d'alimentation biomédicale, l'analyse des systèmes, la dynamique des flux et le mélange liquide, cryptage et communications.

Le premier attracteur chaotique dans un système autonome en trois dimensions a été découvert par Lorenz en 1963. Tout en étudiant la convection atmosphérique [1]. En 1976, Rössler trouve système autonome chaotique de dimension trois [2].Le système de Rössler propose une structure algébrique simple par rapport au système de Lorenz.

En 1979, Rössler a proposé un autre système [3] plus simple (algébrique). Une certaine attention a été axé sur la création efficace du chaos via des systèmes physiques simples tels que les circuits électronique.

En 1983, Chua a introduit un circuit électronique simple qui présente un comportement chaotique, qui peut être modélisé par un système de trois équations différentielles ordinaires non linéaires [4].

En 1984, Flüggén et Mitschke rapporté l'observation de chaos dans un dispositif bistable optique et étudié sa réalisation sous forme de circuit électronique.

Ce mémoire est constitué d'une introduction et de deux chapitres. On rappelle dans le premier chapitre quelques notions de systèmes dynamiques, l'étude de la stabilité d'un système dynamique, les bifurcations et le chaos, les exposant de Lyapunov, pour finir on donne une méthode de la résolution numérique.

Dans le deuxième chapitre, nous allons étudier un système à comportement chaotique "circuit simple Basé sur le memristor".

# Chapitre 1

## Systèmes dynamiques

Dans ce chapitre, nous présentons les notions des systèmes dynamiques, la stabilité d'un système linéaire dans  $\mathbb{R}^2$  et la stabilité d'un système non linéaire avec deux méthodes, la bifurcation structurelle et nous traitons les quatre types de bifurcation local (neoud-col, transcritique, fourche et Hopf). On donne aussi quelques propriétés du chaos, l'exposant de lyapunov et on termine par la méthode de résolution numérique **Runge-kutta** d'ordre 4.

### 1.1 Notions de système dynamique

Un système dynamique est un modèle évoluant avec le temps, en suivant une loi, qui peut être décrite par un ensemble fini d'équations qui peut prendre des formes mathématiques diverses : équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles,... Nous étudions des systèmes d'équations différentielles de la forme (cas continu) :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, \mu), x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \mu \in V \subseteq \mathbb{R}^q \quad (1.1)$$

Le système (1.1) s'appelle le système dynamique.

$\mathbb{R}^n$  est l'espace des phases.

$\mathbb{R}^q$  est l'espace des paramètres.

**Exemple 1.1.1.** : *L'oscillateur de Duffing* :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \eta \cos \omega t \end{cases}$$

où  $\delta, \eta$  et  $\omega$  sont des paramètres physiques réels. L'espace des phases est  $\mathbb{R}^2$  et L'espace des paramètres est  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.1.1 Systèmes autonomes et non-autonomes

**Définition 1.1.2.** *Un système différentielle est dit autonome si  $f$  ne dépend pas explicitement de  $t$ . Dans ce cas on l'écrira :*

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

*Dans le cas contraire on dira qu'il est non autonome.*

**Exemple 1.1.3.** *Soit l'équation :*

$$\dot{x} = -\frac{t}{1+x}$$

*cette équation est non autonome.*

### 1.1.2 Flot et trajectoire

Considérons le système autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, f \in \mathbb{C}^r(U), U \subseteq \mathbb{R}^q, r \geq 1 \quad (1.2)$$

**Définition 1.1.4.** *Soit  $x(x_0, t)$ ,  $x_0 \in U$ , une solution de (1.2) avec conditions initiales  $x(0) = x_0$ .*

*On appelle **flot** de (1.2), ou du champ de vecteurs  $f$ , l'application  $\phi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par :*

$$\phi_t(x_0) = x(x_0, t).$$

*$\phi_t(x_0)$  possède les propriétés suivantes :*

*(i)  $\phi_t(x_0)$  est de classe  $\mathbb{C}^r$ .*

*(ii)  $\phi_t(x_0) = x_0$ .*

*(iii)  $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$ .*

L'ensemble des points  $\{x(t, x_0)/t \in \mathbb{R}\}$  est la trajectoire (orbite) dans l'espace d'état passant au point  $x_0$  à l'instant initial  $t = 0$ . On note  $\gamma_{x_0} = \{x(t, x_0)/t \in \mathbb{R}\}$ .

Donc, deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initial :

$$\phi(t, x_1) = \phi(t, x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

### 1.1.3 Points fixes

**Définition 1.1.5.** On appelle point fixe (ou point stationnaire ou point d'équilibre ou point critique) de (1.2), le point  $\bar{x}$  de l'espace des phases obtenu en annulant le second membre de (1.2) :

$$f(\bar{x}) = 0.$$

### 1.1.4 Ensembles limites

**Définition 1.1.6.** Un point  $a \in I$  est un point  $\omega$ -limite d'une trajectoire  $x(x_0, t)$  s'il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n} = a.$$

où  $\phi_t$  est le flot du système  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ,  $x \in$

$\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^k(I)$ ,  $I \in \mathbb{R}^n$ ; et  $x(x_0, t)$  est une solution de ce système avec  $x(0) = x_0$ .

Un point  $b \in I$  est un point  $\alpha$ -limite d'une trajectoire  $x(x_0, t)$  s'il existe une suite  $t_n \rightarrow -\infty$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{t_n} = b.$$

**Définition 1.1.7.** L'ensemble des points  $\alpha$ -limites (resp  $\omega$ -limite) est désigné par  $\alpha(x)$  (resp  $\omega(x)$ ), et on définit l'ensemble limite de  $x(x_0, t)$  par l'ensemble :

$$\alpha(x) \cup \omega(x).$$

### 1.1.5 Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs

En physique, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

Les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, et pour préciser cette définition, on dit qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale  $x_0$  a un et un seul état final  $x(t)$ ; il faut pour cela qu'il existe une application bijective de l'espace des phases.

$$\begin{aligned} \phi : F \times \mathbb{R} &\rightarrow F \\ (x, t) &\rightarrow \phi_t(x) = \phi(x, t) \end{aligned}$$

Si le système est dissipatif, le flot  $\phi$  n'est pas bijectif et il existe en général un ou plusieurs attracteurs dans l'espace des phases du système.

### 1.1.6 L'espace des phases

**Définition 1.1.8.** *L'espace des phases est l'ensemble des états possibles d'un système dynamique, on peut également le définir comme un espace abstrait dont chaque variable représente une dimension nécessaire à la description du système à moment donné, le degré de liberté caractérise l'espace des phases. Il représente l'ordre qui est égal à la dimension de l'espace d'état.*

### 1.1.7 Portrait de phase

Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentatives dans l'espace des phases. Etant donné un système dynamique,  $\dot{x} = F(x, t)$ , sans résoudre les équations, on peut toujours, à un instant  $t$ , représenter graphiquement (à l'aide de flèches) le champ des  $\dot{x}$  (le champ des vitesses si  $x$  sont des coordonnées). La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour avoir une idée du comportement du système.

### 1.1.8 Attracteurs et bassin d'attraction

#### Ensemble invariant

**Définition 1.1.9.** *Un ensemble  $E \subset U$  est dit invariant par un champ de vecteur si toute solution  $x(t)$  du système différentiel associé au champ de vecteurs issu de  $E$  vérifie  $x(t) \in E$  pour tout  $t$  pour lequel cette solution est définie.*

#### Attracteurs

**Définition 1.1.10.** *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble d'états) vers lesquels évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.*

*Mathématiquement, l'ensemble  $M$  est un attracteur si :*

*.Pour tout voisinage  $U$  de  $M$ , il existe un voisinage  $V$  de  $M$  tel que toute solution  $x(x_0, t) = \phi_t(x_0)$  restera dans  $U$  si  $x_0 \in V$ .*

*. $\cap \phi_t(V) = M, t \geq 0$ .*

*.Il existe une orbite dense dans  $M$ .*

## Bassin d'attraction

**Définition 1.1.11.** *Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur considéré, c'est l'ensemble*

$$W = \cup \phi_t(V), t < 0.$$

### Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

#### 1- Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

- Le point fixe** : C'est le plus simple attracteur, le système évolue vers un état de repos (point).
- Le cycle limite périodique** : C'est une trajectoire dans l'espace de phase qui se referme sur elle-même.
- Le cycle limite pseudo-périodique** : Le système présente au moins deux périodes simultanées dont le rapport est irrationnel. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension 2 (par exemple un tore).

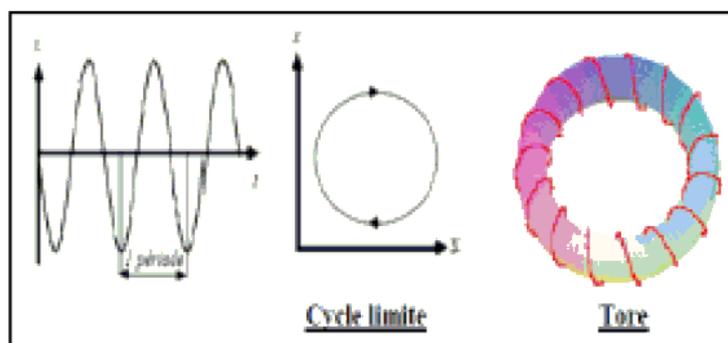


FIGURE 1.1 – Attracteurs réguliers [8]

**2. Attracteurs étrange (chaotiques)** : Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques. L'attracteur étrange se caractérise par :

- a) La sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).

- b) La dimension  $d$  de l'attracteur est fractale ( non entières) avec  $2 < d < n$ .(pour les systèmes autonomes continus).
- c) L'attracteur est de volume nulle dans l'espace des phases.

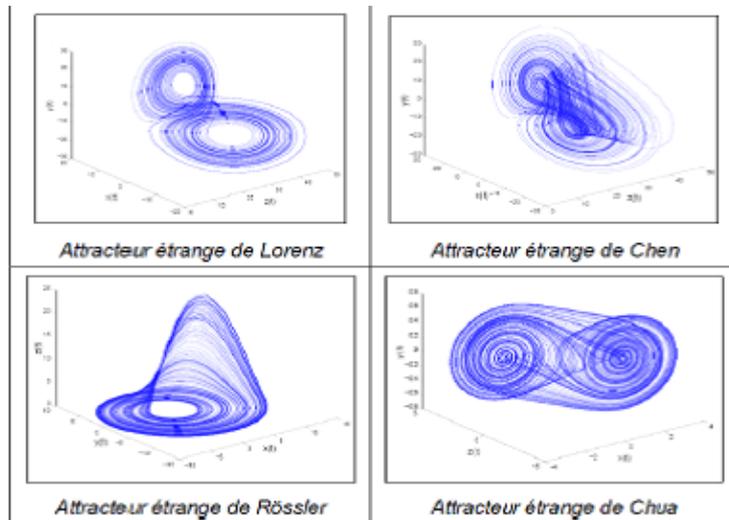


FIGURE 1.2 – Quelques exemples d'attracteurs étranges [6]

## 1.2 Stabilité

### 1.2.1 Définition général

Soit le système dynamique suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t). \quad (1.3)$$

avec  $f$  une fonction non linéaire.

**Définition 1.2.1.** Le point d'équilibre  $x_0$  du système (1.3) est :

Stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < \varepsilon, \forall t > t_0. \quad (1.4)$$

Asymptotiquement stable si :

$$\forall \delta > 0 : \|x(t_0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - x_0\| = 0.$$

Exponentiellement stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x_0\| < a \|x(t_0) - x\| \exp(-bt), \forall t > t_0.$$

Instable si la condition (1.4) n'est pas satisfaite.

## 1.2.2 Stabilité d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Considérons le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax \tag{1.5}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^2$  et  $A$  une matrice carrée ( $2 \times 2$ ).

Le système est définie par l'un des trois cas suivants

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ou } D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

chacune de ces trois possibilité nous donne des différents portraits de phase.

**Cas N°=1 :**

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Dans ce cas la solution du système est donnée par :

$$x(t) = \exp(Bt)x_0 = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\mu t} \end{bmatrix}$$

Donc :

-Si  $\lambda < 0 < \mu$  le système possède l'origine comme **point selle (col)**.

-Si  $\lambda > 0 > \mu$  dans ce cas les flèches dans la (1.3) seront inversés.

**Cas N° = 2**

$$C = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ où } C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

avec  $\lambda < \mu < 0$  donc la solution du système est donnée par :

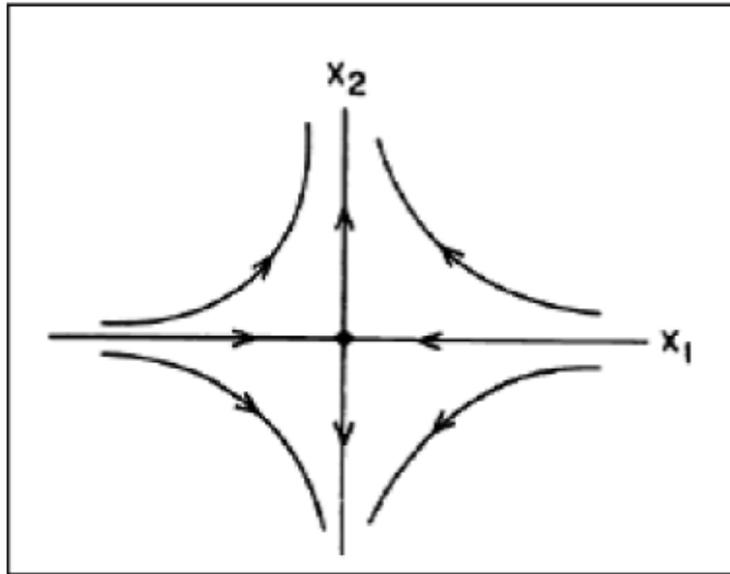


FIGURE 1.3 – Point selle(col) [10]

$$x(t) = \exp(Ct)x_0 = \left(\exp \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t\right)x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \exp(t\lambda) \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \exp(t\lambda) \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas l'origine est un nœud stable. Dans le cas  $\lambda \geq \mu > 0$  où  $\mu \geq \lambda > 0$  les flèches

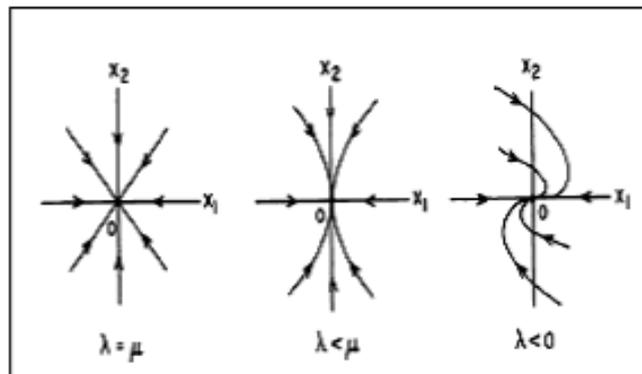


FIGURE 1.4 – Nœud propre ou impropre stable [10]

seront inversé et l'origine est un nœud instable.

Cas N° = 3 :

$$D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

avec  $a < 0$  la solution est donnée par :

$$x(t) = \exp(at) \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}$$

l'origine est un foyer stable.

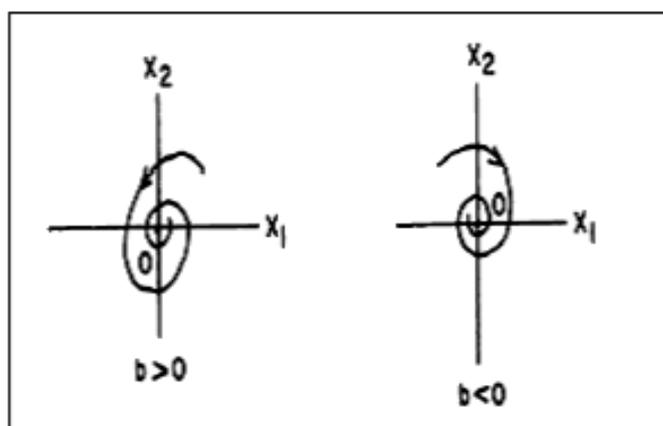


FIGURE 1.5 – Foyer stable [10]

-Si  $a > 0$  la trajectoire s'éloignent de l'origine en spiral lorsque  $t \rightarrow \infty$  dans ce cas l'origine est un foyer instable (les flèches seront inversé de la figure (1.5)).

Cas N°=4 :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

dans ce cas l'origine est un centre et les trajectoires de système satisfaisant  $|x(t)| = cts$ .

Les trajectoires de (1.5) sont des ellipses qui satisfaisant  $m \leq |x(t)| \leq M$ .

**Typologie des solutions des systèmes linéaires dans le plan (tr,det)** La typologie des solutions des systèmes linéaires planaires que nous avons établie à partir de la nature des valeurs propres de la matrice du système peut également se résumer dans un plan (tr, det).

**Théorème 1.2.2.** Soit  $\delta = \det A$  et  $T = \text{trace } A$  et considérons le système (1.5) on a :  
a) Si  $\delta < 0$  alors (1.5) possède un point selle (col).

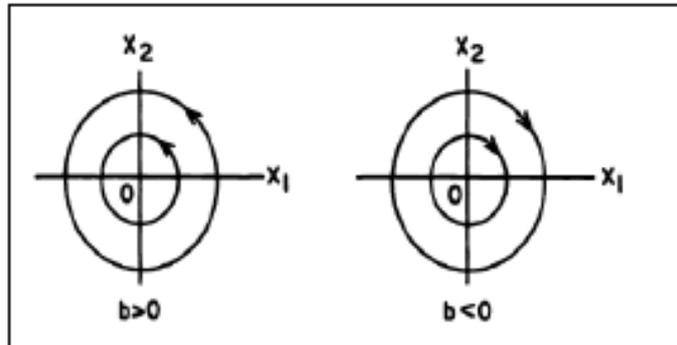


FIGURE 1.6 – Centre stable [10]

- b) Si  $\delta > 0$  et  $T^2 - 4\delta \geq 0$  alors (1.5) possède un nœud à l'origine qui est stable si  $T < 0$ .  
 et instable si  $T > 0$ .
- c) Si  $\delta > 0$  et  $T^2 - 4\delta > 0$  et  $T \neq 0$  alors (1.5) possède un foyer à l'origine qui est stable si  $T < 0$  et instable si  $T > 0$ .
- d) Si  $\delta > 0$  et  $T = 0$  alors (1.5) possède un centre à l'origine.

Les valeurs propres de  $A$  sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

avec

$$\begin{cases} \text{tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(A) &= \lambda_1 \lambda_2 \end{cases}$$

La nature des valeurs propres dépend du signe du discriminant

$$\Delta = (\text{tr}(A))^2 - 4 \det(A).$$

Dans le plan  $(\text{tr}, \det)$ , l'équation  $\Delta = 0$  est celle d'une parabole passant par l'origine :

$$\det(A) = \frac{1}{4}(\text{tr}(A))^2$$

Cette parabole divise le plan en deux grandes régions :

Au-dessus la parabole ( $\Delta < 0$ ), on trouve les portraits de phase des foyers et des centres ;  
 en-dessous ( $\Delta > 0$ ), on trouve les nœuds et les points selles.

**-Cas  $\Delta = 0$**

On a alors  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ , c'est-à-dire

$$\det(A) = \lambda_0^2 > 0 \text{ et } tr(A) = 2\lambda_0.$$

Par conséquent, si la trace est positive ( $\lambda_0 > 0$ ), on a une étoile ou un nœud dégénéré instable, si la trace est négative ( $\lambda_0 < 0$ ), on a une étoile ou un nœud dégénéré stable.

**-Cas  $\Delta > 0$**

On a alors deux valeurs propres réelles distinctes. On est dans la région sous la parabole qui peut encore est partagée en trois zones :

\* $\det(A) < 0$  :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signe opposé, l'origine est un point selle.

\* $\det(A) > 0$  et  $tr(A) > 0$  :  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , l'origine est un nœud instable.

\* $\det(A) > 0$  et  $tr(A) < 0$  :  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , l'origine est un nœud stable.

**-Cas  $\Delta < 0$**

On a alors deux valeurs propres complexes conjuguées,  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , c'est-à-dire :

$$\det(A) = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \text{ et } tr(A) = 2\alpha$$

On est dans la région au-dessus de la parabole, qui se partage là encore en trois zones distinctes :

\* $tr(A) < 0$  : La partie réelle des valeurs propres est négative, l'origine est un foyer stable.

\* $tr(A) > 0$  : La partie réelle des valeurs propres est positive, l'origine est un foyer instable.

\* $tr(A) = 0$  : La partie réelle des valeurs propres est nulle, l'origine est un centre.

**Définition 1.2.3.** - Un nœud ou un foyer stable de (1.5) est appelé un puit.

- Un nœud ou un foyer instable de (1.5) est appelé un source.

### 1.2.3 Stabilité d'un système non linéaire

Pour étudier la stabilité d'un système dynamique non linéaire  $\dot{x} = f(x)$  on a deux méthodes :

- Méthode indirecte basé sur la linérisation de la fonction f.
- Méthode directe basée sur l'utilisation d'une fonction appelé fonction de Lyapunov.

#### Première méthode de Lyapunov(méthode indirecte)

Soit le système :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.6}$$

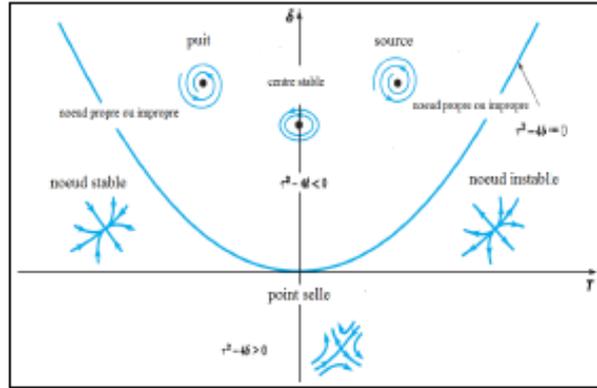


FIGURE 1.7 – Diagramme de stabilité [10]

où  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^1(D)$  et  $D$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  contenant le point d'équilibre du système, i.e :

$$f(0) = 0$$

Par le théorème de la moyenne, nous avons

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x.$$

où,  $z_i$  est un point du segment joignant  $x$  et l'origine. Cette égalité est vraie pour tout  $x \in D$  tel que le segment  $x$  et l'origine reste dans  $D$ . Comme  $f(0) = 0$ , nous pouvons écrire :

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x$$

D'où

$$f(x) = Ax + g(x).$$

avec

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \text{ et } g_i(x) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x$$

La fonction  $g_i(i = 1, \dots, n)$  vérifié :

$$|g_i(x)| \leq \left\| \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] \right\| \|x\|$$

et par la continuité de la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , on remarque que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{x} = 0.$$

Cela signifie que dans un voisinage de zéro suffisamment petit, on peut approcher le système (1.6) par son linéarisé

$$\dot{x} = Ax, \text{ où } A = \frac{\partial f}{\partial x}(0). \quad (1.7)$$

Le théorème qui suit, donne une méthode indirecte de Lyapunov, en utilisant la linéarisation (1.7) du système (1.6) peut dans certain cas apporter une réponse au problème de la stabilité locale. Plus précisément :

**Théorème 1.2.4.** *Soit  $x = 0$  un point d'équilibre du système*

$$\dot{x} = f(x).$$

*où,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^1(D)$ , et  $D$  un voisinage de zéro.*

*Soit*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)|_{x=0}.$$

*Alors,*

- 1. L'origine est asymptotiquement stable si  $Re(\lambda_i) < 0$  pour toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$ .*
- 2. L'origine est instable si  $Re(\lambda_i) > 0$  pour au moins une valeur propre  $\lambda_i$  de  $A$ .*

Notons que ce théorème ne permet pas de conclure sur la stabilité du système lorsque  $Re(\lambda_i) \geq 0$  pour tout  $i$  et  $Re(\lambda_i) = 0$  pour un certain  $i$ .

## Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

La première méthode de Lyapunov est simple à appliquer mais ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. En outre elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attractions. La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre mais, en contrepartie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  est appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction.

**Théorème 1.2.5.** *Le point d'équilibre  $x_0$  du système (1.6) est stable s'il existe une fonction  $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

- 1)  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in D$ .
- 2)  $V(x) > V(x_0) \forall x \neq x_0$  dans  $D$ .
- 3)  $V(x) \leq 0 \forall x \neq x_0$  dans  $D$ .

*Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov. Mais en mécanique et pour les systèmes électriques on peut souvent utiliser l'énergie totale comme fonction de Lyapunov.*

## 1.3 Bifurcations et Chaos

### 1.3.1 Bifurcations

Les changements qualitatifs du portrait de phases d'un système dynamique dépendant de paramètres sont appelés bifurcations. Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, et la construction du portrait de phases nécessite des outils adaptés. L'étude des bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre d'un système continu ou à un point fixe d'un système discret repose sur la théorie de Landau.

Soit le système non linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (1.8)$$

où  $x \in I \subseteq \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^n, f \in C^r$ .

**Définition 1.3.1.** *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $x_0$  du système(1.8) lorsqu'on modifie  $\mu$ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions. La codimension d'une bifurcation est la plus petite dimension de l'espace des paramètres telle que la bifurcation soit persistante.*

### Stabilité structurelle

**Définition 1.3.2.** *Un système est dit structurellement stable (resp. instable) sur une portion de l'espace des paramètres si son comportement qualitatif est monomorphe (resp. polymorphe) sur cette portion. Sur un intervalle de valeurs d'un paramètre qui contient une valeur de bifurcation, un système est donc structurellement instable. L'analyse de bifurcation a pour objectif de localiser ces éventuelles valeurs particulières des paramètres.*

## Types de bifurcations

Il existe plusieurs types de bifurcations, parmi les quelles on peut citer :

- 1 -Bifurcation Nœud-col .
- 2 -Bifurcation Transcritique.
- 3 -Bifurcation fourche.
- 4 -Bifurcation de Hopf.

Dans la suite, chaque bifurcation sera présentée graphiquement. Les conventions des représentations graphiques seront les suivantes :

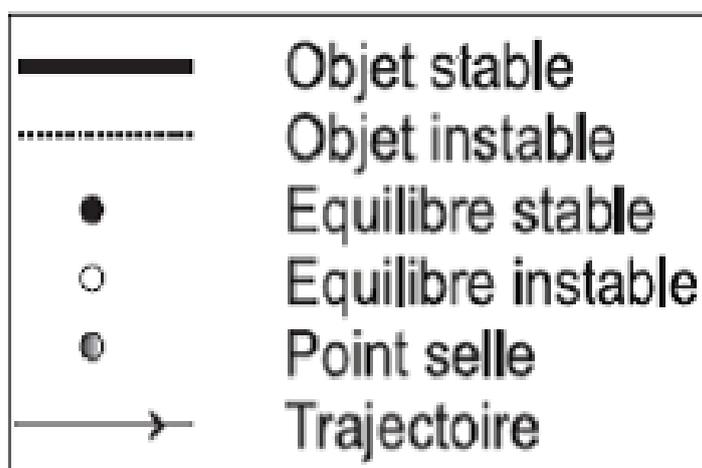


FIGURE 1.8 – Convention graphique [10]

### Bifurcation nœud-col

Une fonction linéaire ne change pas le nombre des racines. Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre  $\mu$  est le polynôme quadratique

$$f(x) = \mu + x^2.$$

Considérons le système (1.8)

Si on peut réécrire la fonction  $f$  sous la forme :

$$f(x) = \mu + x^2.$$

Nous appelons l'équation (1.8) la forme normale de la bifurcation nœud-col.

Soit l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu + x^2.$$

où  $\mu$  est un paramètre, qui peut être positif, négatif ou nul.

Alors :

\* Pour  $\mu < 0$ , il ya deux points fixes, l'une stable et l'autre instable (figure a).

\* Pour  $\mu = 0$ , dans ce cas est un point semi stable ou point selle (figure b).

\* Pour  $\mu > 0$ , dans ce cas il n'y a pas de points fixes (figure c).

L'ensemble des résultats précédents se résume dans un diagramme de bifurcation. Ce diagramme porte en abscisse le paramètre et en ordonnées les coordonnées des points d'équilibre (1.8).

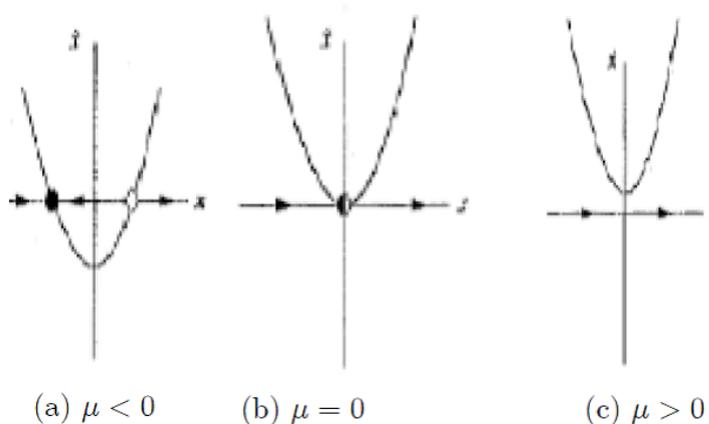


FIGURE 1.9 – Portrait de phase de la bifurcation noeud-col [10]

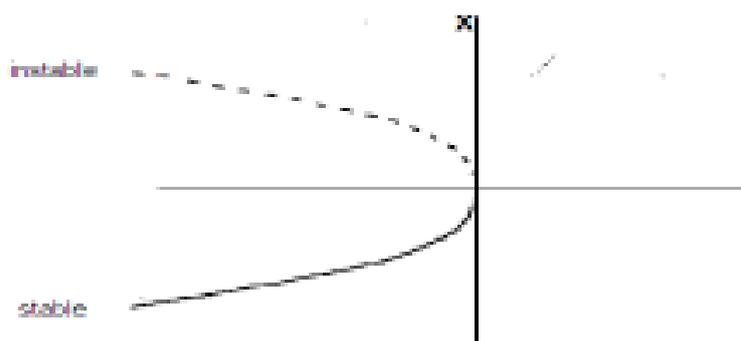


FIGURE 1.10 – Diagramme de la bifurcation noeud-col [10]

### Bifurcation transcritique ou échange de stabilité :

Ce type de bifurcation est caractérisé par un échange de statut de stabilité de deux solutions d'équilibre, comme illustré sur la (1.12). Le système a initialement une solution

d'équilibre stable et une solution d'équilibre instable. Lorsqu'un paramètre varie et atteint une valeur critique, la solution d'équilibre stable devient instable, tandis que l'équilibre instable devient stable et prend le relais. Il y a échange de stabilité dans un tel cas, entre l'origine et le second point d'équilibre.

La forme normale pour une bifurcation transcritique est :

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2.$$

L'analyse usuelle donne :

$$\bar{x}(\mu - \bar{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \mu \end{cases}$$

$$f'(\bar{x}) = \mu - 2\bar{x} = \begin{cases} \mu & \text{pour } \bar{x} = 0 \\ -\mu & \text{pour } \bar{x} = \mu \end{cases}$$

Donc  $\bar{x} = 0$  est stable pour  $\mu < 0$ , instable pour  $\mu > 0$ , tandis que  $\bar{x} = \mu$  fait le contraire : ces points fixes échangent simplement leur stabilité.

La (1.12) représente le diagramme de bifurcation transcritique. Comme sur la figure, le paramètre est considéré comme la variable indépendante, et les points fixes  $\dot{x} = 0$  et  $\dot{x} = \mu$  sont présentés comme variables dépendantes.

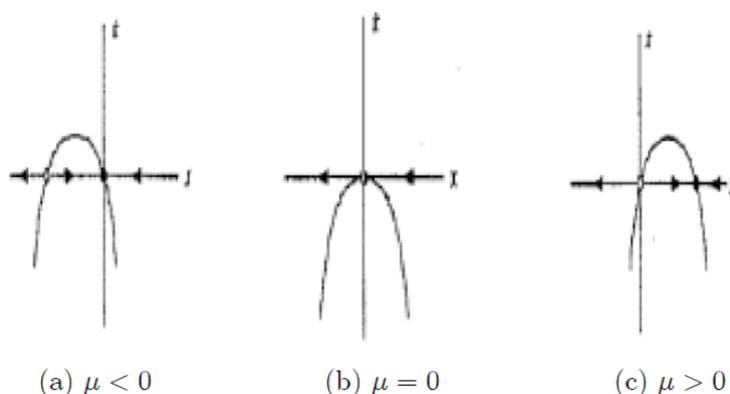


FIGURE 1.11 – Portrait de phase de la bifurcation transcritique [10]

### Bifurcation fourche (pitchfork)

La forme générale des systèmes que nous allons étudier sera donc la suivante :

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3.$$

Ce type de bifurcation est caractérisé par la division d'une solution d'équilibre stable

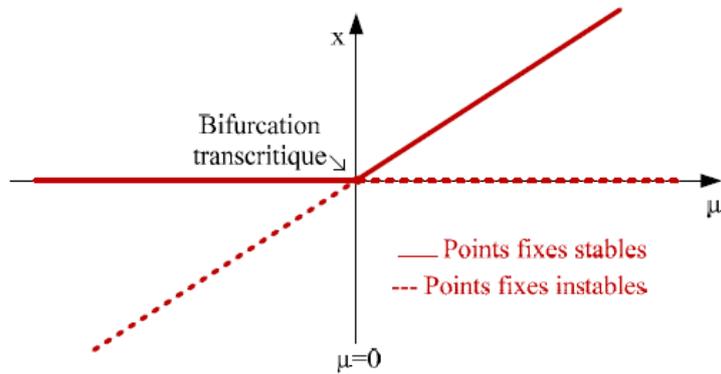


FIGURE 1.12 – Diagramme de la bifurcation transcritique[11]

en deux solutions d'équilibres stables dans le cas de bifurcation fourche supercritique, comme représenté sur la (1.13). Une bifurcation fourche subcritique est caractérisée par la disparition soudaine d'une solution d'équilibre stable, comme illustré sur la (1.14). Ce type de bifurcation est désigné, respectivement, sous le nom pitchfork bifurcation supercritique.

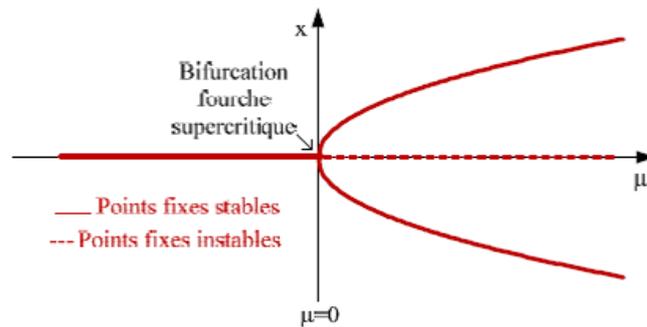


FIGURE 1.13 – Diagramme de la bifurcation fourche surcritique [11]

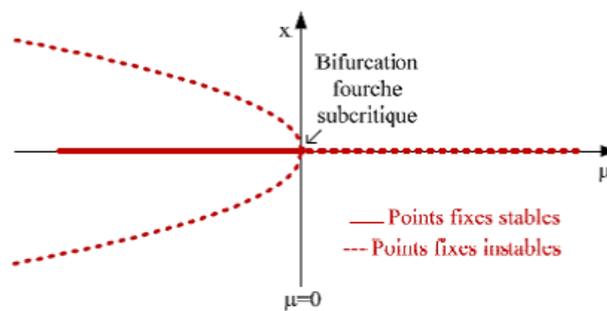


FIGURE 1.14 – Diagramme de la Bifurcation fourche souscritique [11]

## Bifurcation de Hopf

C'est la bifurcation associée à l'équation dans le plan complexe :

$$\dot{z}(t) = f(z(t)) = (\mu + i\omega)z(t) - |z|^2z(t).$$

Pour étudier cette équation, on écrit la variable  $z$  sous la forme  $z(t) = x(t)e^{i\theta(t)}$ . l'équation s'exprime sous forme d'un système :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}$$

La première équation n'est autre qu'une bifurcation fourche de paramètre de contrôle  $\mu$ . Le diagramme de bifurcation dans l'espace  $(\text{Re}(z), \text{Im}(z), \mu)$  est illustré dans la (1.15).

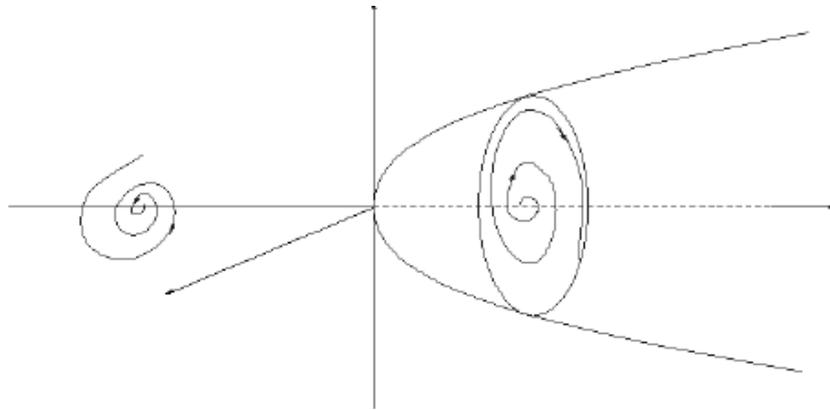


FIGURE 1.15 – Diagramme de la bifurcation de Hopf [9]

Nous partons d'un système où le paramètre  $\mu$  est négative. Le système possède un point d'équilibre stable qui correspond ici à un puit : les trajectoires s'enroulent en spirale vers l'origine. Lorsque  $\mu = 0$ , ce point d'équilibre perd sa stabilité. Puis lorsque  $\mu > 0$ , il se forme alors une trajectoire périodique stable ou cycle limite.

La bifurcation de Hopf correspond à une instabilité oscillatoire.

## La valeur du paramètre de bifurcation de Hopf

Tout d'abord, rappelons les conditions d'obtention d'une bifurcation de Hopf. En effet, on a le système dynamique (1.8) qui a un point fixe  $x = x^*(\mu)$  et que sa matrice jacobienne possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_{1,2} : \lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$  telle que :

- pour une certaine valeur du paramètre  $\mu = \mu_r$

$$\alpha(\mu_r) = 0 \text{ et } \left. \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_r} \neq 0$$

- les  $n - 2$  autres valeurs propres évaluées en  $\mu_r$  aient leur partie réelle strictement négative.
- Si ces hypothèses sont satisfaites alors  $(x^*(\mu_r), \mu_r)$  est un point de bifurcation de Hopf de l'état d'équilibre  $x^*(\mu_r)$  vers un cycle limite.

### Diagramme de bifurcation

L'objectif de analyse des bifurcations est d'arriver à un, ou plusieurs, diagrammes de bifurcations. Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcations.

Les logiciels actuels ne permettent de construire que des diagrammes de bifurcation en deux dimensions. Les ensembles de points de bifurcations de même nature (Hopf, noeud col etc) forment donc des courbes, appelées courbes de bifurcation. Elles délimitent des zones de l'espace dans lesquelles le comportement qualitatif du système est monomorphe. Par exemple, trois zones sont délimitées dans la (1.16) :

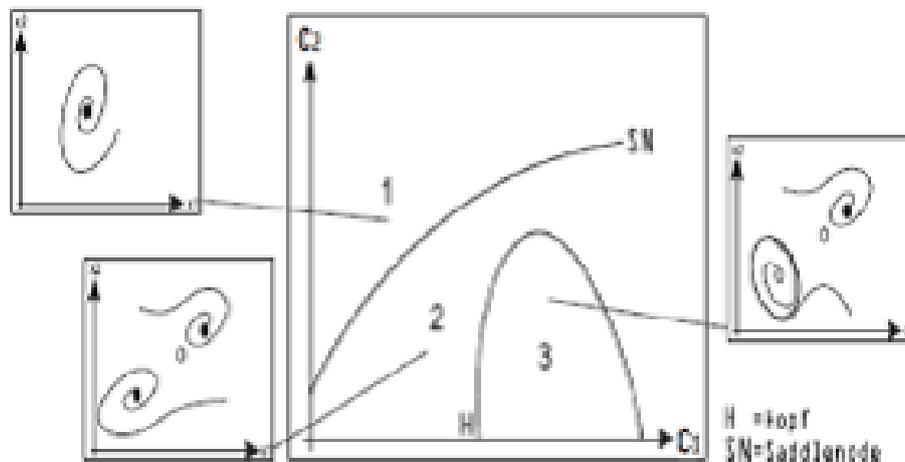


FIGURE 1.16 – Exemple de diagramme de bifurcation [10]

Dans ce cas, pour  $c_1$  croissant, le système est d'abord attiré par un équilibre stable (Zone 1). En suite une bifurcation noeud-col fait apparaître deux nouveaux équilibres, un stable et l'autre instable. Dans la nouvelle zone (Zone 2), deux attracteurs sont donc présents et l'équilibre atteint pas le système dépend des conditions initiales pour  $x_1$  et  $x_2$ . En fin pour  $c_2$  assez petit et  $c_1$  assez grand, il existe une zone délimitée par une bifurcation de Hopf de l'équilibre initial. Dans ce cas (Zone 3), deux attracteurs sont présents mais ils

ne sont pas de même nature : il y a un cycle et un équilibre. Le régime adopté dépend encore une fois des conditions initiales.

### 1.3.2 Chaos

La théorie du chaos traite des systèmes dynamiques déterministes qui présentent un phénomène fondamental d'instabilité appelé "sensibilité aux conditions initiales", ce qui les rend non prédictibles en pratique sur le "long" terme. Le Chaos est défini généralement comme un comportement semblant aléatoire (ou imprévisible) d'un système dynamique défini par des équations déterministes.

#### Définitions du chaos

Il n'y a aucune définition standard du chaos néanmoins, les dispositifs du chaos incluent :

- La non-linéarité** : Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- La déterminisme** : Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).
- La sensibilité aux conditions initiales** : De très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
- L'imprévisible** : En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- L'irrégularité** : Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables.

#### Caractérisation du chaos

La caractérisation du comportement dynamique d'un système chaotique peut se faire par divers outils classiques, dont l'exposant de Lyapunov, l'espace des phases et le diagramme de bifurcation.

##### **Par détermination des exposants de Lyapunov**

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système. Un système, sensible à de très petites variations de la condition initiale, aura un exposant positif lorsqu'il est chaotique. En revanche, l'exposant est négatif si le système n'est pas sensible à de petites variations des conditions initiales ; les trajectoires se rapprochent et l'information sur les conditions initiales est donc perdue.

##### **Par le diagramme de bifurcations**

Une manière rapide de représenter la transition vers le chaos est le diagramme de bifurcations. Les changements du comportement dynamique d'un système, ou bifurcations, peuvent être donc observés en fonction du paramètre dit de bifurcation.

## 1.4 La Section de Poincaré

Henri Poincaré a apporté une contribution très utile pour l'étude des systèmes chaotiques. Parmi ces contributions on trouve les sections de Poincaré. Faire une section de Poincaré revient à couper la trajectoire dans l'espace des phases, afin d'étudier les intersections de cette trajectoire avec, par exemple en dimension trois, un plan. On passe alors d'un système dynamique à temps continu à un système dynamique à temps discret. Les mathématiciens ont bien sûr démontré que les propriétés du système sont conservées après la réalisation d'une section de Poincaré judicieusement choisie.

**Définition 1.4.1.** *Soit un système dynamique défini par l'équation suivante :*

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), x(0) = x_0 \quad (1.9)$$

avec  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, n > 2$ , et soit un ensemble de  $\mathbb{R}^2$ , l'intersection du plan et la trajectoire du système (1.9) nous permet de définir une fonction  $G$  comme suit :

$$G : U \subset \Omega \rightarrow \Omega \\ x(t) \mapsto \phi(x(t), \tau)$$

avec  $\tau$  désigne le temps qu'il faut pour que les trajectoires  $x(t)$  démarrent de  $U$  pour arriver à  $\Omega$ . La fonction  $G$  est appelée **la fonction de premier retour**.

**Remarque 1.4.2.** *Dans les systèmes à temps discret, pour une variable d'état  $x$ , l'application de premier retour consiste plus simplement à associer  $x(t)$  à  $x(t - 1)$  :*

## 1.5 Exposants de Lyapunov

Alexandre Lyapunov a développé une quantité permettant de mesurer la divergence des trajectoires qui sont voisines au départ, cette quantité est appelée " exposant de Lyapunov " qui est souvent utilisé pour déterminer si un système est chaotique ou non.

### Cas des systèmes discrets unidimensionnels

Soit  $f$  une application discrète de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui applique  $x_n$  sur  $x_{n+1}$ . On choisit deux conditions initiales très proches, soit  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$  et on regarde comment se comportent les trajectoires qui sont des ces conditions issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra alors trouver un réel  $\lambda$  tel qu'après  $m$  itérations :

$$|f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)| = \varepsilon e^{m\lambda}.$$

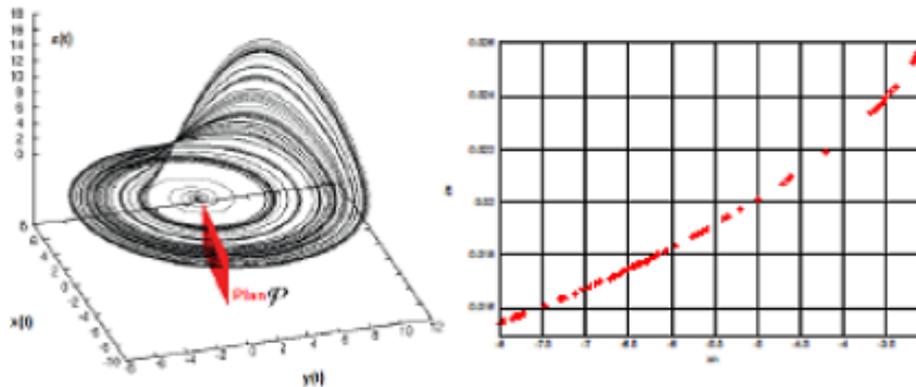


FIGURE 1.17 – Intersection de la trajectoire de l’attracteur de Rossler avec un plan P [7]

En passant au logarithme, on trouve :

$$\ln \left| \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \right| = m\lambda$$

Si l’on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, il vient :

$$\lambda = \frac{1}{m} \ln \left| \frac{df(x_0)}{dx_0} \right|$$

Finalement, en faisant tendre  $m$  vers l’infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \ln \left| \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \right|$$

$\lambda$  est appelé exposant de **Lyapunov**. Il indique le taux moyen de divergence par itération.

### Cas des systèmes discrets multidimensionnels

Commençons par préciser qu’un système  $p$  dimensionnel possèdera  $p$  exposants de **Lyapunov**. Chacun d’entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu’en moyenne un hyper volume initial  $V_0$  évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 \exp^{n(\lambda_1 + \dots + \lambda_p)} .$$

Notons que si un système est dissipatif, alors la somme des exposants soit négative.

Soit une hyper sphère dans un espace  $p$  dimensionnel de rayon  $\varepsilon$  des conditions initiales et examinons son évolution. Nous nous intéressons à  $\|f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\|$ ; posons  $y = x_0 + \varepsilon$  et linéarisons  $f$  ou voisinage de  $y$  :

$$x_n - x_0 = J^n(x_0)(x_0 - y).$$

Où  $J^n(x_0)$  est la matrice jacobienne de l'application  $f^n$  en  $x_0$ . Si cette dernière est diagonalisable, il existe une matrice inversible  $D_n$  tel que :

$$A^n = D_n^{-1} J^n D_n.$$

Où  $A^n$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de  $J^n$  étant donné que la jacobéenne  $A^n f^n$  est semblable à  $A^n$ , par conséquent, les applications linéaires, qu'elles définissent, sont linéairement conjuguées, on peut étudier l'évolution de la divergence selon cette matrice  $A^n$ .

Notons  $\Lambda_i^n, i = 1, \dots, p$ , les valeurs propres de la matrice jacobienne  $J^n$ , on définit alors les  $m$  exposants de **Lyapunov** de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln[\Lambda_i^n], i = 1, \dots, p.$$

### Cas des systèmes continus multidimensionnels

L'un des algorithmes utilisé pour le calcul est celui appelé algorithme de **Wolf**. Cet algorithme permet de calculer les exposants de Lyapunov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après  $t$  pas de temps. L'algorithme fait en plus varier un paramètre de contrôle choisi pour permettre de visionner l'évolution de la sensibilité aux conditions initiales selon ce dernier. Il faut remarquer que l'algorithme de **Wolf** calcule l'exposant de Lyapunov le plus grand. Pour ce faire, il fait la moyenne des sommes des divergences normalisées, et puisque l'exposant le plus grand aura la plus grande influence sur le système.

Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1. Changement du paramètre de contrôle.
2. Choix aléatoire d'une condition initiale.
3. Evolution du système dans le but d'atteindre un attracteur.
4. Création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une petite perturbation.
5. Évolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calcul de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires.

6. Réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédant le calcul d'une moyenne de la divergence.
7. Retour au point (5) effectué selon un nombre donné.
8. Retour au point (1).
9. Dessin de l'exposant de Lyapunov le plus grand en fonction du paramètre de contrôle donné.

### Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Un exposant de Lyapunov positif indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Il s'agit donc bien là d'une caractérisation d'un attracteur étrange. Les différents types d'attracteurs d'un système de dimension 3 en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont représentés dans le tableau ci-dessous :

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	$(-, -, -)$
Cycle limite périodique	$(0, -, -)$
Cycle limite quasi-périodique	$(0, 0, -)$
Attracteur rétrange	$(+, 0, -)$

### Dimension de Lyapunov

Soit  $M$  un attracteur représenté dans un espace multidimensionnel de dimension  $d$ . **Kaplan** et **York** ont suggéré de calculer la dimension de cette attracteur en utilisant ses exposants de Lyapunov de la manière suivante : classant les exposants de Lyapunov  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$  La dimension de Lyapunov  $DL$  est définie par :

$$DL = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\lambda_{j+1}} \quad (1.10)$$

où  $j$  est le plus grand entier positif qui satisfait :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j \geq 0$$

## 1.6 La méthode de résolution numérique (Runge-Kutta)

Dans les méthodes de résolution des problèmes à valeurs initiales, le processus de calcul est un processus fini. On avance de  $N$  pas, à partir du temps initial jusqu'au temps final

et on s'arrête. Chaque valeur est donc calculée une fois pour toutes. Sauf technique plus complexe d'adaptation de maillage, il n'y a pas de  $r$  itération pour améliorer le résultat. Il faudra donc utiliser des méthodes suffisamment précises. Ceci explique le recours à des méthodes d'ordre élevé. Les méthodes de **Runge-Kutta** sont des généralisations de la méthode d'Euler à des ordres supérieurs à un. Elles s'obtiennent à partir des formules d'intégration numériques plus précises que la formule des rectangles.

Considérons tout d'abord l'utilisation de la formule des trapèzes. Elle conduit à la méthode :

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné} \\ x_{n+1} & = x_n + (h/2)(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})) \end{cases}$$

Cette méthode est une méthode implicite. Le calcul de la nouvelle valeur  $x_{n+1}$  nécessite la résolution d'une équation. Si l'on veut obtenir une méthode explicite du même ordre, on peut procéder de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné} \\ x_{n+1} & = x_n + hf(t_n, x_n) \\ x_{n+1} & = x_n + (h/2)(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})) \end{cases}$$

Ceci peut s'interpréter comme une itération de point fixe. On obtient ainsi la méthode de **Runge-Kutta** d'ordre 2 : (**RK2**).

De même l'utilisation de la formule d'intégration de Simpson est à la base de la formule de Runge-Kutta d'ordre 4 : (**RK4**).

C'est l'une des formules les plus utilisées, elle s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné pour } n_0 \geq 0 \\ k_1 & = hf(t_n, x_n) \\ k_2 & = hf(t_n + h/2, x_n + k_1/2) \\ k_3 & = hf(t_n + h/2, x_n + k_2/2) \\ k_4 & = hf(t_n + h, x_n + k_3) \\ x_{n+1} & = x_n + 1/6[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \end{cases}$$

# Chapitre 2

## Le modèle électrique

Dans ce chapitre, nous allons étudier un modèle électrique, constituer d'un circuit simple mais chaotique, nous avons analysé le comportement chaotique à l'aide des portraits de phase, des diagrammes de bifurcation et des exposants de Lyapunov.

C'est le circuit qui a montré que le circuit le plus simple capable de générer un attracteur chaotique. Nous avons effectué des simulations numériques pour confirmer l'étude théorique.

### 2.1 Description du modèle

Le modèle est un circuit électrique chaotique simple [5] comprenant seulement trois composants électriques branchés en série, une bobine linéaire passive, un condensateur linéaire passif et un memristor non linéaire actif. voir figure (2.1)

#### 2.1.1 Memristor

En électronique, le memristor (ou memristance) est un composant électronique passif. Il a été décrit comme le quatrième composant passif élémentaire, aux côtés du condensateur, de la résistance et de la bobine. Le nom est formé à partir des deux mots anglais memory et resistor.

Un memristor est une résistance variable car la valeur de sa résistance électrique change, de façon permanente, lorsqu'un courant est appliqué.

Le memristor a été prédit et décrit en 1971 par Leon Chua [19]. Depuis 1971, le memristor était un composant hypothétique, aucun exemple physique n'étant connu. Jusqu'en avril 2008 soit 37 ans plus tard, une implémentation physique du memristor a été reportée dans le journal Nature par une équipe de chercheurs des laboratoires HP conduite par R. Stanley Williams [20].

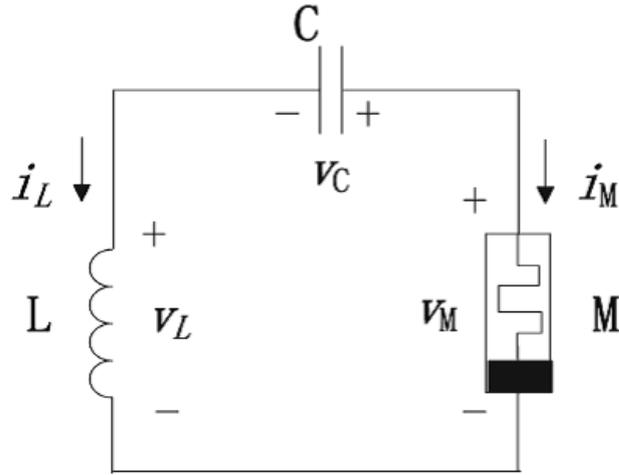


FIGURE 2.1 – Schéma du circuit simple chaotique basé sur le memristor [5]

Dans cette étude le memristor est décrit par une fonction polynomial de quatrième degré qui s'appelle memristance, donné par [5] :

$$M(q(t)) = \delta q(t)^4 + \eta q(t)^2 - \beta$$

avec  $\delta$ ,  $\eta$  et  $\beta$  sont des paramètres.

Le memristor est l'élément responsable du chaos dans le circuit. Sa fonction memristance  $M(q(t))$  possède deux minimum et un maximum (figure (2.2)), et l'exposant de l'état interne du memristor est une fonction de deuxième ordre (2.4), le système génère un attracteur à double-scroll et un attracteur à quatre-scroll [5].

### 2.1.2 Les équations du modèle

Le memristor est un élément dans lequel le flux électrique  $\Phi_e$  est une fonction de la charge électrique  $q$  qui a traversé le composant. Soit,  $\Phi_e = \Phi_e(q)$ . Le taux de changement de flux avec la charge

$$M(q) = \frac{d\Phi_e}{dq}$$

est connu en tant que memristance. Ceci est comparable aux autres trois éléments fondamentaux des circuits, résistance ( $R(I) = \frac{dV}{dI}$ ), condensateur ( $\frac{1}{C(q)} = \frac{dV}{dq}$ ) et inductance ( $L(I) = \frac{d\Phi_B}{dI}$ ). Ici  $q$  est la charge électrique,  $I$  est le courant électrique,  $V$  est le potentiel électrique et  $\Phi_B$  est le flux magnétique.

Comme par ailleurs  $V = \frac{d\Phi_B}{dt}$  et  $I = \frac{dq}{dt}$ , il en résulte que la tension  $V$  aux bornes du

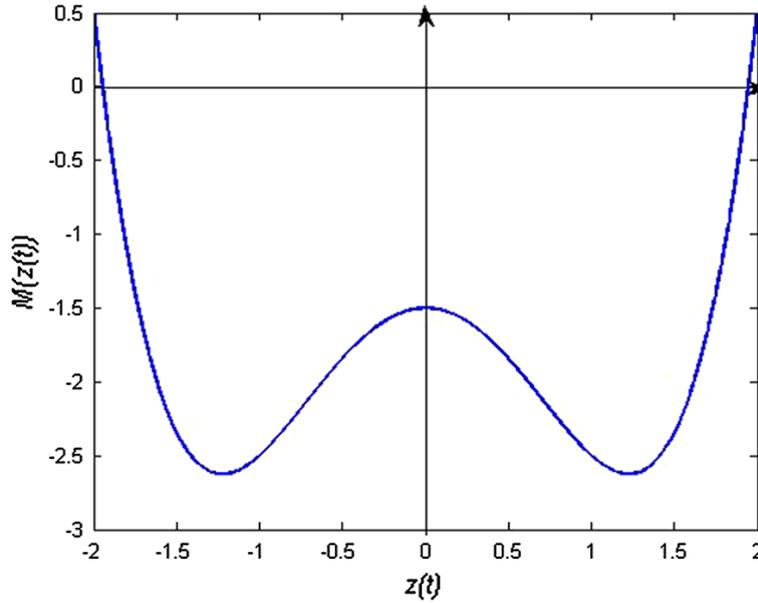


FIGURE 2.2 – Graphe de la fonction du memristance  $M(z(t)) = 0.5z(t)^4 - 1.5z(t)^2 - 1.5$  [5]

memristor est liée au courant  $I$  par la valeur instantanée de la memristance :

$$V(t) = M(q(t))I(t)$$

Ainsi à chaque instant donné, un memristor se comporte comme une résistance ordinaire. Cependant, sa "résistance"  $M(q)$  dépend de l'histoire du courant. Un memristor linéaire (celui pour lequel  $M$  est constant) n'est pas différent d'une résistance linéaire, avec  $M = R$ . Cette étude se base sur le système memristive décrit par les équations suivantes [5] :

$$\begin{cases} v_M = M(q)i_M \\ \dot{q} = i_M = f(q, i_M) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $f(q, i_M)$  fonction d'état interne.

$v_C, v_M$  : le voltage aux bornes de la capacitance  $C$  et le memristor respectivement.

$i_L, i_M$  : le courant à travers le dispositif de l'inductance  $L$  et le memristor respectivement.

$q$  : la charge.

On sait que

$$v_C = \frac{q_c}{C}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dq_c}{dt} &= C \frac{dv_C}{dt} \\ &= i_C \end{aligned}$$

puisque le courant est constant dans un circuit en série alors

$$i_C = i_L = -i_M$$

et donc

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_L \quad (2.2)$$

On applique la lois de kirchhoff sur le circuit pour obtenir la second équation.

On a

$$V_{totale} = \sum V_{partielle}$$

donc

$$v_C + v_L = v_M$$

et

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

alors d'après (2.1) on trouve

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{-1}{L}(v_C + M(q)i_L) \quad (2.3)$$

La troisième équation est donnée par

$$\frac{dq}{dt} = -i_L - \alpha q + i_L^2 q \quad (2.4)$$

On obtient le système d' équations suivant

$$\begin{cases} \frac{dv_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C}i_L(t) \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= \frac{-1}{L}(v_C(t) + M(q)i_L) \\ \frac{dq(t)}{dt} &= -i_L(t) - \alpha q(t) + i_L^2(t)q(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

On utilise le changement des variables et des paramètres suivant :

$$x = v_C(t) , z = q(t) \text{ et } y = i_L(t)$$

et

$$\sigma = \frac{1}{C} , \gamma = \frac{1}{L}$$

Finalement on trouve le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma y \\ \dot{y} = -\gamma(x + M(z)y) \\ \dot{z} = -y - \alpha z + y^2 z \end{cases} \quad (2.6)$$

avec :

$$M(z) = \delta z^4 + \eta z^2 - \beta$$

## 2.2 Etude Théorique

Nous allons étudier Le système dynamique (2.6), l'espace des phases est tridimensionnel. Les paramètres de contrôle sont  $\alpha, \beta, \sigma, \gamma, \delta$  et  $\eta$  avec  $\alpha \in ]0, 2]$  et  $\beta \in [0, 4]$ .

### 2.2.1 L'équilibre du modèle

On cherche les points d'équilibre qui sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

c-à-d :

$$\begin{cases} \sigma y & = 0 \\ -\gamma(x + M(z)y) & = 0 \\ -y - \alpha z + y^2 z & = 0 \end{cases}$$

on trouve :

$$x = 0, y = 0 \text{ et } z = 0$$

donc le seul point d'équilibre est  $E = (0, 0, 0)$ .

L'étude de la stabilité des points d'équilibre dépend des signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne  $A$  obtenu en linéarisant le système autour d'un point d'équilibre.

L'expression de la matrice Jacobienne  $A$  du système est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ -\gamma & -\gamma M(z) & -\gamma y(4\delta z^3 + 2\eta z) \\ 0 & -1 + 2yz & -\alpha + y^2 \end{pmatrix}$$

### 2.2.2 Stabilité du point d'équilibre (l'origine) :

On a la matrice jacobienne associée

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ -\gamma & \gamma\beta & 0 \\ 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

le polynôme caractéristique associe est donné par :

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & \sigma & 0 \\ -\gamma & \gamma\beta - \lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\alpha - \lambda \end{vmatrix}$$

alors

$$P(\lambda) = (-\alpha - \lambda)(\lambda^2 - \beta\gamma\lambda + \sigma\gamma)$$

Les valeurs propres de la matrice  $A_p$  sont les racines du polynôme  $p(\lambda)$

$$P(\lambda) = 0 \implies \begin{cases} -\alpha - \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda^2 - \beta\gamma\lambda + \sigma\gamma = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \lambda = -\alpha \\ \text{ou} \\ \frac{\lambda^2}{\gamma} - \beta\lambda + \sigma = 0 \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\frac{\sigma}{\gamma} \\ &= -(4\frac{\sigma}{\gamma} - \beta^2) \\ &= j^2(4\frac{\sigma}{\gamma} - \beta^2) \\ \sqrt{\Delta} &= j\sqrt{4\frac{\sigma}{\gamma} - \beta^2} \end{aligned}$$

. Si  $4\frac{\sigma}{\gamma} - \beta^2 > 0$ , il existe deux valeurs propres complexes conjugués et dans ce cas les valeurs propres de  $A_p$  sont

$$\lambda_0 = -\alpha < 0, \lambda_1 = \frac{\beta\gamma - j\gamma\sqrt{\frac{(4\sigma - \beta^2\gamma)}{\gamma}}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\beta\gamma + j\gamma\sqrt{\frac{(4\sigma - \beta^2\gamma)}{\gamma}}}{2}.$$

On a

$$\lambda_0 = -\alpha < 0, \text{ pour } \alpha \in ]0, 2]$$

et

$$\text{Re}(\lambda_{1,2}) = \frac{\beta\gamma}{2} \geq 0, \text{ pour } \beta \in [0, 4].$$

donc le point d'équilibre  $(0, 0, 0)$  est un foyer instable.

. Si  $4\frac{\sigma}{\gamma} - \beta^2 \leq 0$ , il existe deux valeurs propres réels

$$\lambda_1 = \frac{\beta\gamma - \gamma\sqrt{\frac{(4\sigma - \beta^2\gamma)}{\gamma}}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\beta\gamma + \gamma\sqrt{\frac{(4\sigma - \beta^2\gamma)}{\gamma}}}{2}.$$

Donc la matrice  $A_p$  possède les valeurs propres

$$\lambda_0, \lambda_1 = \frac{\beta\gamma - \gamma\sqrt{\frac{(4\sigma - \beta^2\gamma)}{\gamma}}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\beta\gamma + \gamma\sqrt{\frac{(4\sigma - \beta^2\gamma)}{\gamma}}}{2}.$$

on a

$$\lambda_0 < 0 \text{ et } \lambda_2 > 0, \text{ puisque } \beta, \gamma > 0 \text{ alors } \lambda_2 > 0$$

donc le point d'équilibre  $(0, 0, 0)$  est un point selle .

### 2.2.3 Bifurcation de Hopf

posons

$$\lambda_{1,2}(\beta) = \mu(\beta) \pm j\omega(\beta)$$

avec

$$\mu(\beta) = \frac{\beta\gamma}{2} \text{ et } \omega(\beta) = \frac{\gamma\sqrt{\frac{(4\sigma - \beta^2\gamma)}{\gamma}}}{2}$$

$$\mu(\beta_c) = 0 \text{ si } \beta_c = 0 \text{ car } \gamma = \frac{1}{L} \neq 0.$$

et

$$\begin{aligned} \omega(\beta_c) &= \omega(0) \\ &= \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{4\sigma}{\gamma}} \\ &= \sqrt{\gamma\sigma} \neq 0 \text{ car } \gamma \neq 0 \text{ et } \sigma \neq 0 \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\Big|_{\beta_c=0} = \frac{\gamma}{2} \neq 0$$

Donc les conditions du théorème de bifurcation de Hopf sont vérifiées au point de bifurcation  $\beta_c = 0$  lorsque  $4\sigma - \beta^2\gamma > 0$ .

alors :

$((0, 0, 0), 0)$  est un point bifurcation de Hopf de l'état d'équilibre  $(0, 0, 0)$  vers un cycle limite.

## 2.3 Etude numérique

Dans ce qui suit nous fixons les valeurs des paramètres  $\delta$  et  $\eta$  telle que

$$\delta = 0.5 \text{ et } \eta = -1.5 \tag{2.7}$$

### 2.3.1 Portraits de phase

Les Portraits des phases du système pour  $\alpha = 0.9$  sont représentés dans les figures (2.3, 2.4, 2.5, 2.6) et pour  $\beta = 1.5$  ils sont représentés dans les figures (2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13).

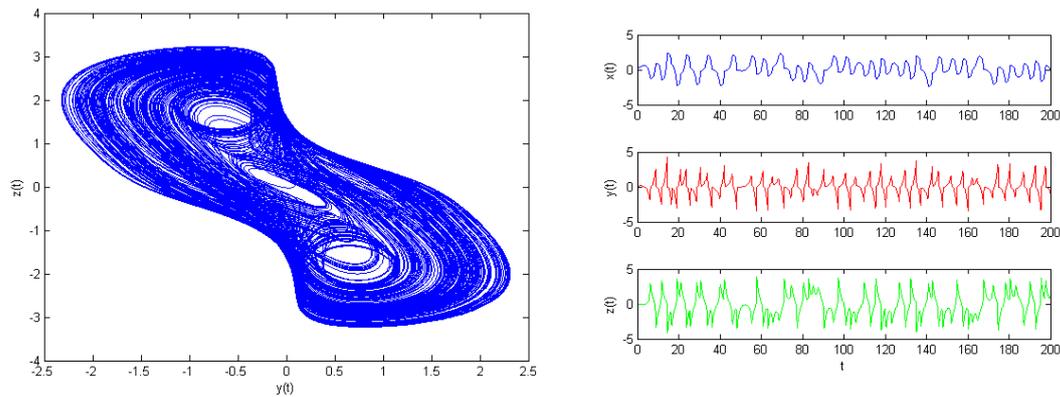


FIGURE 2.3 – Solutions et portrait de phase du système pour  $\alpha = 0.9$  et  $\beta = 1.5$

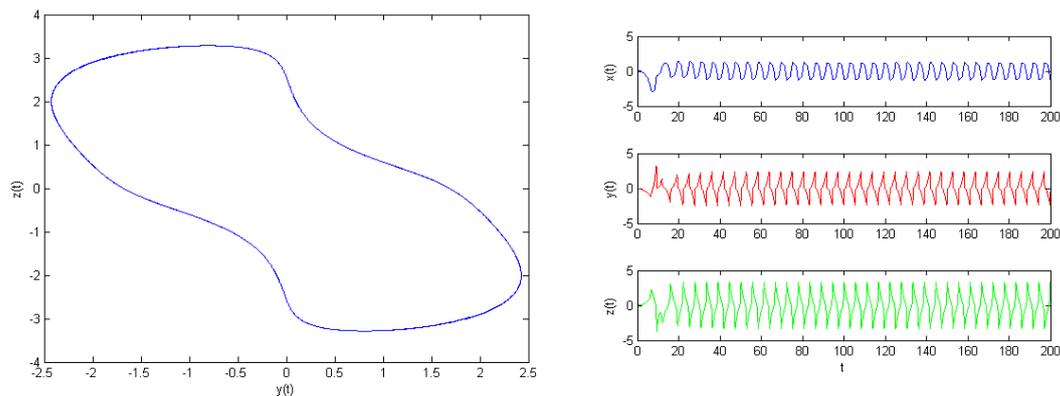


FIGURE 2.4 – Solutions et portrait de phase du système pour  $\alpha = 0.9$  et  $\beta = 2.4$

Les figures (2.3, 2.5) représente un attracteur chaotique à 2-scroll et un attracteur chaotique à 4-scroll respectivement, les figures (2.4, 2.6) représente des cycles limites périodiques.

La figure (2.7) représente un attracteur à 4-scroll, les figures (2.10, 2.12) représente des attracteurs à 2-scroll et les figures (2.8, 2.9) représente des cycles limites-1période et les figures (2.11, 2.13) représente un cycle limite-2 période et un cycle limite-3 période respectivement

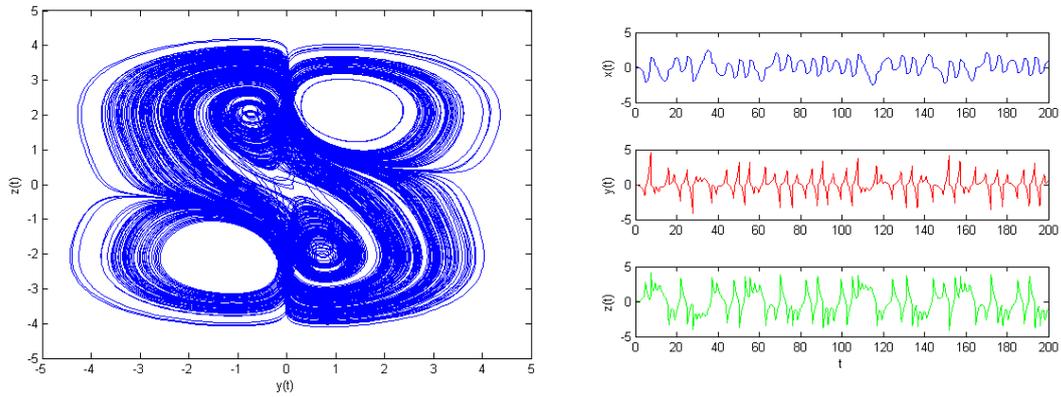


FIGURE 2.5 – Solutions et portrait de phase du système pour  $\alpha = 0.9$  et  $\beta = 3$

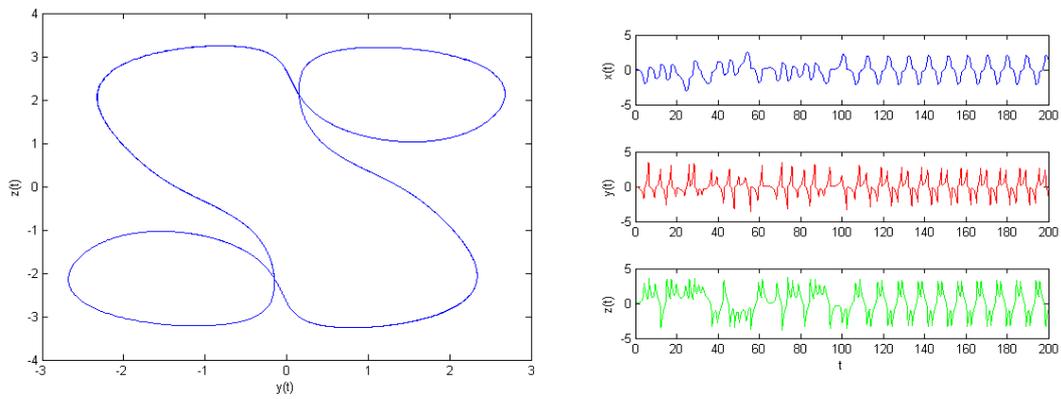


FIGURE 2.6 – Solutions et portrait de phase du système pour  $\alpha = 0.9$  et  $\beta = 3.4$

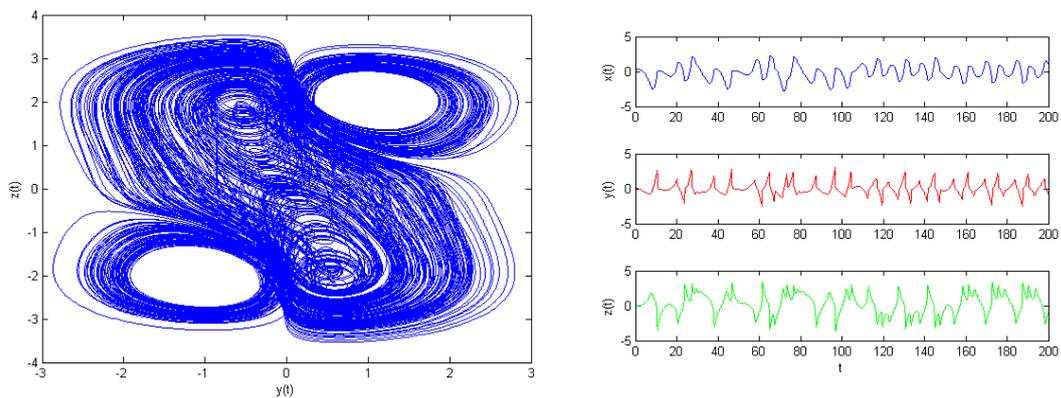


FIGURE 2.7 – Solutions et portrait de phase du système pour  $\beta = 1.5$  et  $\alpha = 0.6$

### 2.3.2 Les attracteurs chaotiques

Nous simulons le système avec (2.7) et nous choisissons les conditions initiales  $x(0) = 0.1$ ,  $y(0) = 0$ , et  $z(0) = 0.1$ , on obtient les attracteurs chaotiques qui sont représentés à

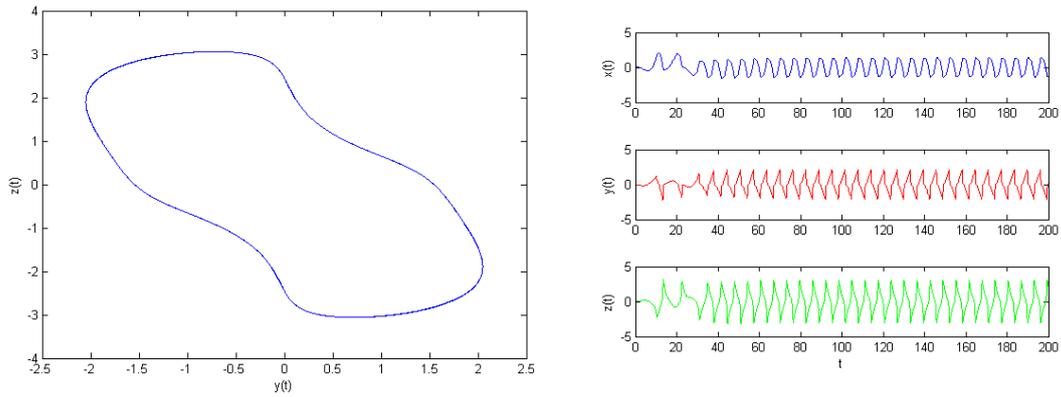


FIGURE 2.8 – Solutions et portrait de phase du système pour  $\beta = 1.5$  et  $\alpha = 0.75$

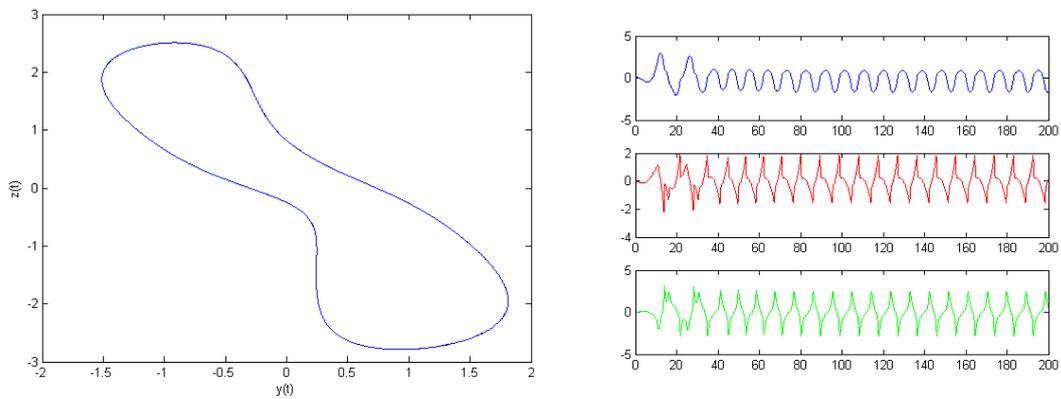


FIGURE 2.9 – Solutions et portrait de phase du système pour  $\beta = 1.5$  et  $\alpha = 1.2$

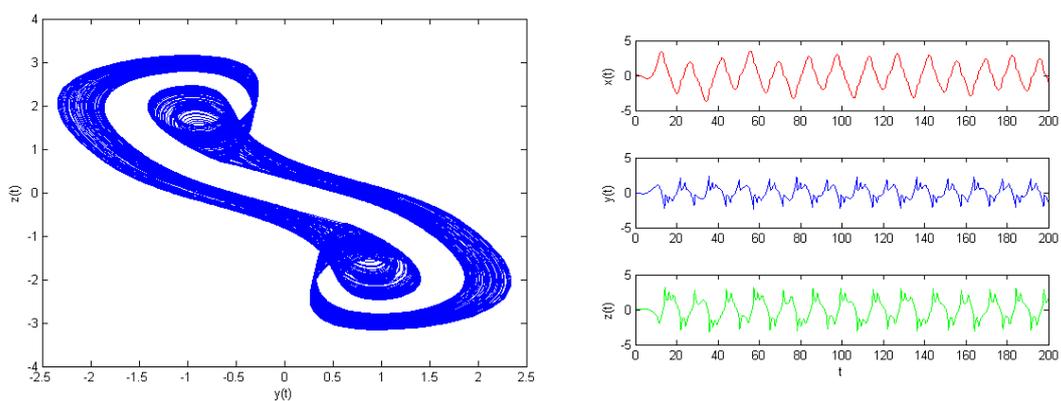


FIGURE 2.10 – Solutions et portrait de phase du système pour  $\beta = 1.5$  et  $\alpha = 1.35$

la figure (2.14) , dans le plan  $(x,y),(x,z)$  et  $(y,z)$ .

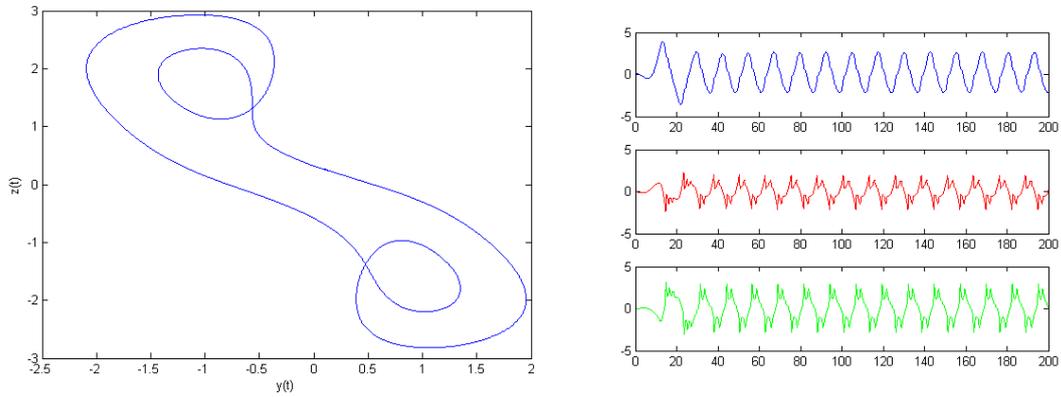


FIGURE 2.11 – Solutions et Portrait de phase du système pour  $\beta = 1.5$  et  $\alpha = 1.5$

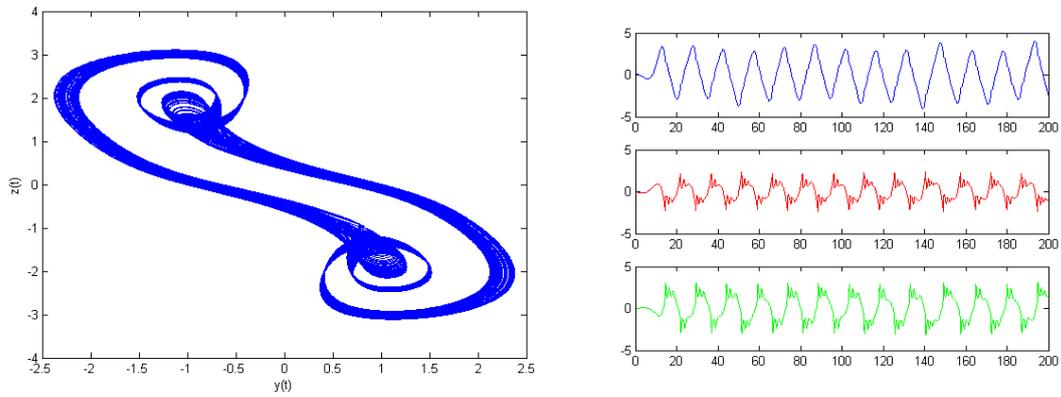


FIGURE 2.12 – Solutions et Portrait de phase du système pour  $\beta = 1.5$  et  $\alpha = 1.62$

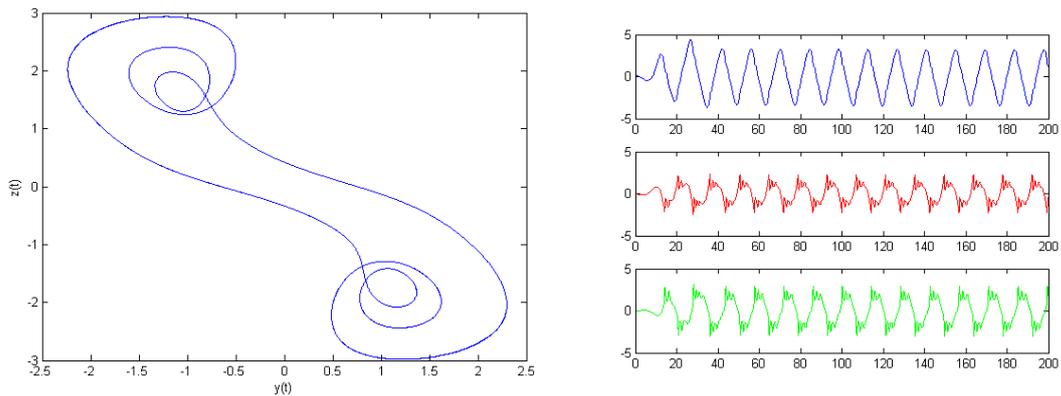


FIGURE 2.13 – Solutions et Portrait de phase du système pour  $\beta = 1.5$  et  $\alpha = 1.9$

### 2.3.3 Section de Poincaré et diagramme de bifurcation

Pour tracer le diagramme de bifurcation on a besoin d'utiliser la section de Poincaré  $\Sigma$  défini par  $\Sigma = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 / x = 0.5\}$  représenté à la figure (2.15).

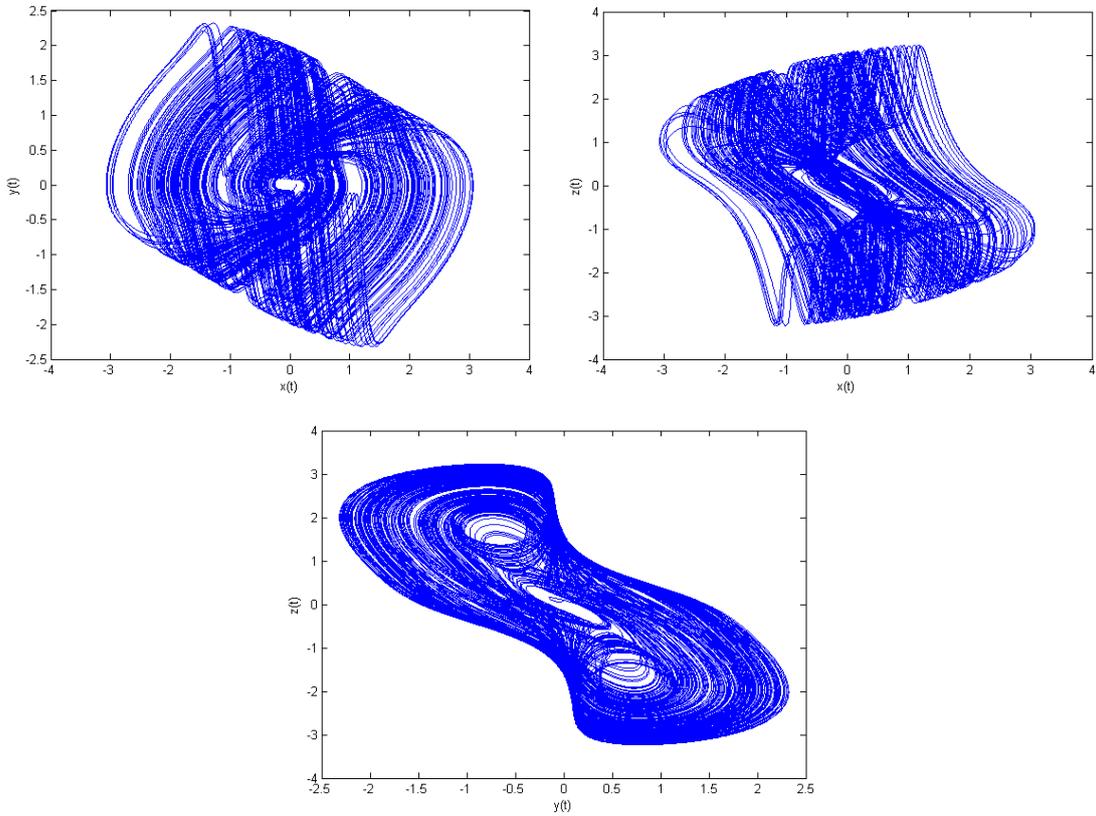


FIGURE 2.14 – les attracteurs chaotique du système pour  $\alpha = 0.9$  et  $\beta = 1.5$

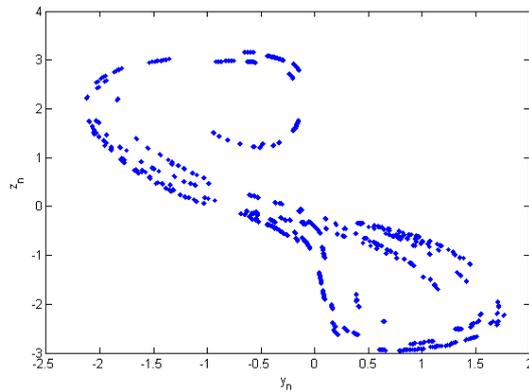


FIGURE 2.15 – Section pincaré  $\Sigma$  pour  $\alpha = 0.9$  et  $\beta = 1.5$

Nous traçons les diagrammes de bifurcation à partir des paramètres donnés à (2.7). La figure (2.16, 2.17) montre des diagrammes de bifurcation pour le paramètre de contrôle  $\beta$  sur l'intervalle  $0 \leq \beta \leq 4$  avec  $\alpha = 0,9$  et le paramètre de contrôle  $\alpha$  sur  $0 \leq \alpha \leq 2$  avec  $\beta = 1,5$ .

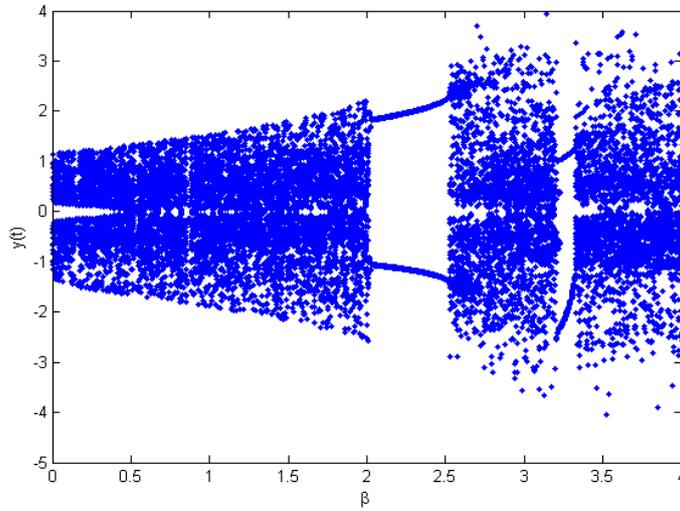


FIGURE 2.16 – Diagramme de bifurcation  $\beta$ - $y(t)$

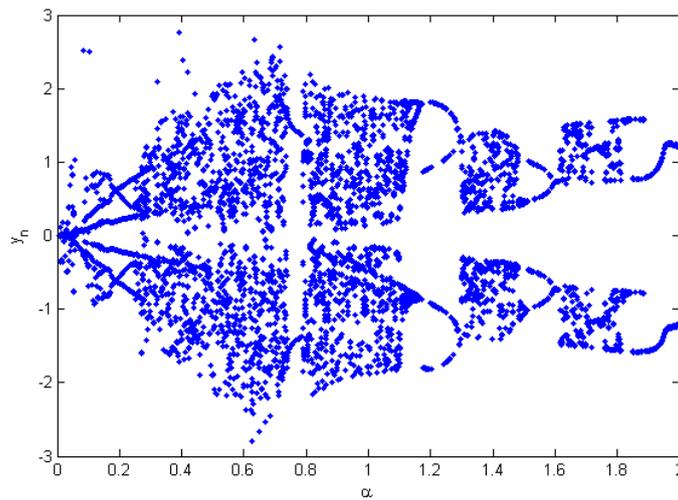


FIGURE 2.17 – Diagramme de bifurcation  $\alpha$ - $y(t)$

Dans la figure (2.16), nous pouvons voir que le système montre un comportement non linéaire ou chaotique.

La figure (2.3) montre que l'attracteur est double scroll lorsque  $\beta = 1.5$ . Suivi par un cycle limite lorsque  $\beta$  augmente, voir figure (2.4).

Puis, dans l'intervalle  $2.6 < \beta < 3.35$ , le système présente un nouveau comportement chaotique, la figure (2.5) montre que l'attracteur est de 4-scroll lorsque  $\beta = 3$ .

Une troisième région chaotique peut être vue dans l'intervalle  $3.55 < \beta < 4$ , après une deuxième fenêtre de comportement périodique (figure (2.6)).

Dans la figure (2.17), nous pouvons voir que lorsque  $0.3 < \alpha < 0.7$ , le système peut

présenter un comportement chaotique. La figure(2.7) montre que l'attracteur est de 4-scroll lorsque  $\alpha = 0.6$ , suivi par un cycle limite lorsque  $\alpha$  augmente, voir figure (2.8).

Puis, dans l'intervalle  $0.8 < \alpha < 1$ , le système présente un nouveau comportement chaotique, la figure (2.3) montre que l'attracteur est de double scroll lorsque  $\alpha = 0.9$ .

Par suite une troisième région chaotique peut être observé dans l'intervalle  $1.3 < \alpha < 1.45$  à la suite d'une deuxième fenêtre de comportement périodique (voir figure ( 2.9))

La figure (2.10) montre que l'attracteur est de double scroll lorsque  $\alpha = 1.35$ . Suivi par un cycle limite lorsque  $\alpha$  augmente qui est représenté sur la figure (2.11).

Puis, dans l'intervalle  $1.6 < \alpha < 1.68$ , le système présente une quatrième région chaotique. La figure (2.12) montre que l'attracteur est de double scroll lorsque  $\alpha$  est égale à 1.62, suivi par un cycle limite périodique à nouvelle fenêtre de comportement périodique lorsque  $\alpha = 1.9$ . voir figure (2.13).

### 2.3.4 Les exposants de Lyapunov

Maintenent nous calculons les exposants de Lyapunov et les résultats correspondant au portrait de phase.

En raison d'erreurs numériques dans le processus de calcul, on peut considérer dans ce travail  $\lambda_i < 0.01$  comme équivalente à  $\lambda_i = 0$ .

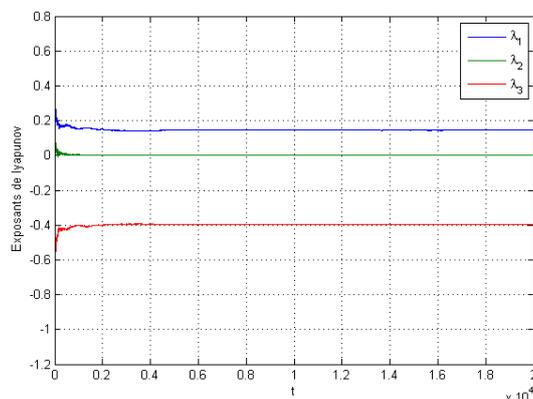


FIGURE 2.18 – Les exposants de Lyapunov du système pour  $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 1.5$

Pour ( $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 1.5$ ) les exposants de Lyapunov du système sont :

$$\lambda_1 = 0.14592, \quad \lambda_2 = 0.000056, \quad \lambda_3 = -0.397255$$

On remarque que le premier exposant est positif, ce qui veut dire que pour ces paramètres, le système est chaotique (voir figure(2.3), avec l'attracteur est de type attracteur étrange (car les signes des exposants sont  $(+, 0, -)$ ).

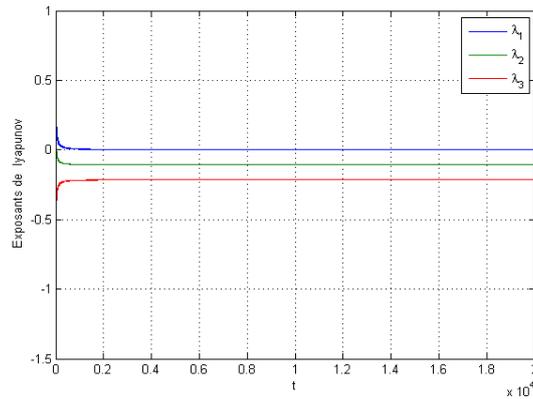


FIGURE 2.19 – Les exposants de Lyapunov du système pour  $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 2.4$

Pour  $(\alpha = 0.9, \beta = 2.4)$  les exposants de Lyapunov du système sont :

$$\lambda_1 = 0.000499, \quad \lambda_2 = -0.108660, \quad \lambda_3 = -0.213314$$

Le premier exposant est presque nul, c-à-d le système est périodique (voir figure (2.4)), avec le type d'attracteur est un cycle limite périodique (car les signes des exposants sont  $(0, -, -)$ ).

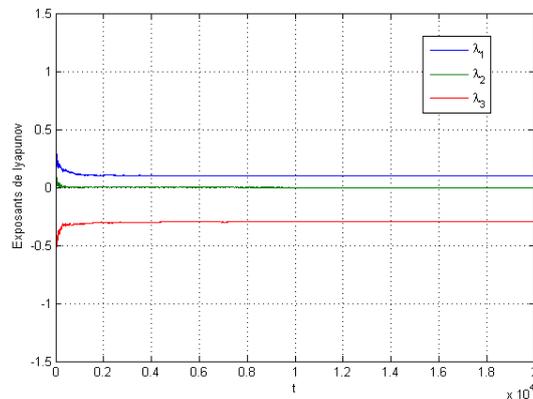


FIGURE 2.20 – Les exposants de Lyapunov du système pour  $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 3$

Pour  $(\alpha = 0.9, \beta = 3)$  les exposants de Lyapunov du système sont :

$$\lambda_1 = 0.100783, \quad \lambda_2 = -0.000526, \quad \lambda_3 = -0.295885$$

le premier exposant est positif, donc le système est chaotique (voir figure (2.5)), l'attracteur est de type attracteur étrange (car les signes des exposants sont  $(+, 0, -)$ ).

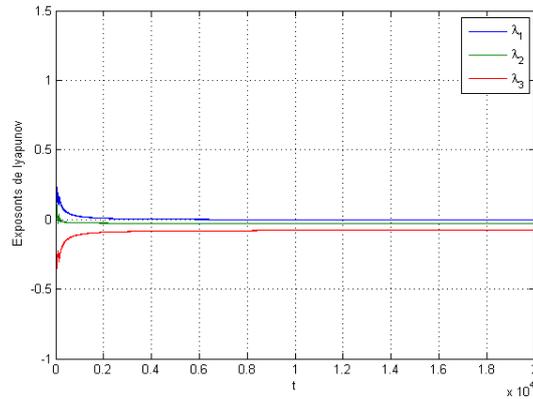


FIGURE 2.21 – Les exposants de Lyapunov du système pour  $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 3.4$

Et pour ( $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 3.4$ ) les exposants de Lyapunov du système sont :

$$\lambda_1 = -0.001569, \quad \lambda_2 = -0.027081, \quad \lambda_3 = -0.077105$$

On a le premier exposant est null, c-à-d le système est périodique (voir figure (2.6)), et l'attracteur est un cycle limite périodique (car les signes est  $(0, -, -)$ ).

Les exposants de Lyapunov et les résultats correspondant au portraits des phases lorsque  $\beta = 1.5$  sont illustrés dans le tableau 1.

Tableau.1 Exposants de Lyapunov

Figures	paramètres	exposants de Lyapunov	le type d'attracteur
Fig (2.7)	$\alpha = 0.6$	$\{0.022132, -0.001649, -0.125701\}$	attracteur étrange
Fig (2.8)	$\alpha = 0.75$	$\{0.004170, -0.087918, -0.130827\}$	Cycle limite périodique
Fig (2.3)	$\alpha = 0.9$	$\{0.14592, 0. - 000056, -0.397255\}$	attracteur étrange
Fig (2.9)	$\alpha = 1.2$	$\{0.000682, -0.221540, -0.225464\}$	Cycle limite périodique
Fig (2.10)	$\alpha = 1.35$	$\{0.094548, -0.000020, -0.517400\}$	attracteur étrange
Fig (2.11)	$\alpha = 1.5$	$\{0.004738, -0.057654, -0.472997\}$	Cycle limite périodique
Fig (2.12)	$\alpha = 1.62$	$\{0.108489, -0.000301, -0.631801\}$	attracteur étrange
Fig (2.13)	$\alpha = 1.9$	$\{0.004896, -0.069691, -0.586374\}$	Cycle limite périodique

Comme le montre les données du tableau.1, les simulations des figures (2.7, 2.3, 2.10, 2.12) présente l'état chaotique tandis que les figures(2.8, 2.9, 2.11, 2.13) produit des cycles limites stables.

### 2.3.5 Dimension de Lyapunov

On calcule la dimension de Lyapunov de l'attracteur :  
lorsque  $(\alpha = 0.9, \beta = 1.5)$  les trois exposants de Lyapunov sont :

$$\lambda_1 = 0.14592, \quad \lambda_2 = 0.000056, \quad \lambda_3 = -0.397255$$

et

$$D_L = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|}$$

$$D_L = 2 + \frac{0.14592}{|-0.397255|}$$

$$D_L = 2.367.$$

lorsque  $(\alpha = 0.9, \beta = 2.4)$  les trois exposants de Lyapunov sont :

$$\lambda_1 = 0.000499, \quad \lambda_2 = -0.108660, \quad \lambda_3 = -0.213314$$

Appliquant la formule (1.10), on trouve la dimension fractale de système, il est  $D_L = 1$ .

**Conclusion 2.3.1.** *Dans ce chapitre, nous avons présenté et étudié un système chaotique autonome de trois dimensions avec une non-linéarité polynômiale de quatrième degré, ce qui peut générer un attracteur chaotique à 2-scroll et un attracteur chaotique à 4-scroll, avec une seule point d'équilibre.*

*Les comportements dynamiques de ce système, y compris les propriétés dynamiques, bifurcations, fenêtres périodiques, ont été analysés théoriquement et numériquement, par les diagrammes de bifurcation, la section de Poincaré, les portraits des phases et le spectre de Lyapunov.*

Dans cette partie, nous introduisons des algorithmes utilisatrice en Matlab.

### 1. Résolution de système ( Algorithme rung kutta4)

```

clear all;
close all;
clc;
T=2000;
j=0.5;
e=-1.5;
s=1;
m=1/3;
b=1.5;
a=0.9;
x(1)=0.1;
y(1)=0;
z(1)=0.1;
N=999999;
h=T/N;
t=0 :h :T;
for i=1 :N
k1=h*(s*y(i));
l1=-h*m*(x(i)+(j*(z(i).^4)+e*(z(i).^2)-b)*y(i));
p1=h*(-y(i)-a*z(i)+(y(i).^2)*z(i));
k2=h*s*(y(i)+l1/2);
l2=-h*m*((x(i)+k1/2)+(j*((z(i)+p1/2).^4)+e*((z(i)+p1/2).^2)-b)*(y(i)+l1/2));
p2=h*(-(y(i)+k1/2)-a*(z(i)+p1/2)+((y(i)+l1/2).^2)*(z(i)+p1/2));
k3=h*s*(y(i)+l2/2);
l3=-h*m*((x(i)+k2/2)+(j*((z(i)+p2/2).^4)+e*((z(i)+p2/2).^2)-b)*(y(i)+l2/2));
p3=h*(-(y(i)+k2/2)-a*(z(i)+p2/2)+((y(i)+l2/2).^2)*(z(i)+p2/2));
k4=h*s*(y(i)+l3);
l4=-h*m*((x(i)+k3)+(j*((z(i)+p3).^4)+e*((z(i)+p3).^2)-b)*(y(i)+l3));
p4=h*(-(y(i)+k3)-a*(z(i)+p3)+((y(i)+l3).^2)*(z(i)+p3));
x(i+1)=x(i)+(1/6)*(k1+(2*k2)+(2*k3)+k4);
y(i+1)=y(i)+(1/6)*(l1+(2*l2)+(2*l3)+l4);
z(i+1)=z(i)+(1/6)*(p1+(2*p2)+(2*p3)+p4);
end
nn=900000;

```

```

for i=1 : N-nn
xx(i)=x(i+nn);
yy(i)=y(i+nn);
zz(i)=z(i+nn);
end
figure(1);
plot(t,x,'k',t,y,'b',t,z,'g');
title('la solution du systeme 2');
figure(2);
plot(y,z);
title('attracteur de systeme 2');

```

```

2.Diagramme de bifurcation : clear all;
close all;
clc;
T=500;
j=0.5;
e=-1.5;
s=1;
m=1/3;
a=0.9;
x(1)=0.1;
y(1)=0;
z(1)=0.1;
N=999999;
h=T/N;
eps=0.005;
nn=700;
p=4/nn;
bb(1)=0;
yy(1)=0;
k=1;
t=0 :h :T;
for f=1 :nn
b=f*p;
for i=1 :N
k1=h*(s*y(i));

```

```

l1=-h*m*(x(i)+(j*(z(i).^4)+e*(z(i).^2)-b)*y(i));
p1=h*(-y(i)-a*z(i)+(y(i).^2)*z(i));
k2=h*s*(y(i)+l1/2);
l2=-h*m*((x(i)+k1/2)+(j*((z(i)+p1/2).^4)+e*((z(i)+p1/2).^2)-b)*(y(i)+l1/2));
p2=h*(-(y(i)+k1/2)-a*(z(i)+p1/2)+((y(i)+l1/2).^2)*(z(i)+p1/2));
k3=h*s*(y(i)+l2/2);
l3=-h*m*((x(i)+k2/2)+(j*((z(i)+p2/2).^4)+e*((z(i)+p2/2).^2)-b)*(y(i)+l2/2));
p3=h*(-(y(i)+k2/2)-a*(z(i)+p2/2)+((y(i)+l2/2).^2)*(z(i)+p2/2));
k4=h*s*(y(i)+l3);
l4=-h*m*((x(i)+k3)+(j*((z(i)+p3).^4)+e*((z(i)+p3).^2)-b)*(y(i)+l3));
p4=h*(-(y(i)+k3)-a*(z(i)+p3)+((y(i)+l3).^2)*(z(i)+p3));
x(i+1)=x(i)+(1/6)*(k1+(2*k2)+(2*k3)+k4);
y(i+1)=y(i)+(1/6)*(l1+(2*l2)+(2*l3)+l4);
z(i+1)=z(i)+(1/6)*(p1+(2*p2)+(2*p3)+p4);
    if i>90000
        if abs(x(i+1)-0.5)<eps
            yy(k)=y(i+1);
            bb(k)=b;
            k=k+1;
        end
    end
end
end
figure(1);
plot(bb,yy,'');
title('diagramme de bifurcation du systeme');

```

# Bibliographie

- [1] Lorenz, E.N. : Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20, 130–141 (1963).
- [2] Rössler, O.E. : An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A* 57, 397–398 (1976).
- [3] Rössler, O.E. : Continuous chaos ; four prototype equations. *Ann. N.Y. Acad. Sci.* 316, 376–392 (1979).
- [4] Chua, L.O. Kouro, M. Matsumoto, T. : The double scroll family. Parts I and II. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 33, 1073–1118 (1986).
- [5] Lin, Herbert H. C, Iu Xingyuan Wang Xiukun Wang : Chaotic behavior in fractional-order memristor-based simplest chaotic circuit using fourth degree polynomial. *Nonlinear Dyn.* 77, 231–241 (2014)
- [6] Ibtissam Talbi. Systèmes dynamiques non linéaire et phénomènes de chaos. Mémoire de magistère, Université de Mentouri, Constantine, (2010).
- [7] Menacer Tidjani. Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires. Mémoire de magistère, Université de Mentouri, Constantine. (2009).
- [8] Benbouda A, Bendjeddou M, Étude des bifurcations locales dans quelques systèmes dynamiques, Mémoire de master, Centre universitaire de Mila, (2014).
- [9] Eric Goncalves Da Silva, Introduction aux systemes dynamiques et chaos Ecole d'ingenieur. Institut Polytechnique de Grenoble, (2004).
- [10] Guessoum A, Sennoune M.R, Etude d'un système dynamique a comportement chaotique, Mémoire de master, Centre universitaire de Mila, (2014).
- [11] Roghayeh Gavagsaz Ghaochant, Comportement dynamique non lineaire dans les convertisseurs statique : Regulariteurs de courant et stabilite des reseaux dc, université de lorraine, (2012).
- [12] 19. Hsü, I.D, Kazarinoff, N.D : An applicable Hopf bifurcation formula and instability of small periodic solutions of the Field–Noyes model. *J. Math. Anal. Appl.* 55, 61–89 (1976).
- [13] Jeffrey, A, Zwillinger, D. : Tables of Integrals, Series, and Products, 6th edn. vol. 1076. Academic Press, San Diego (2000).

- [14] Hsü, I.D. Kazarinoff, N.D : An applicable Hopf bifurcation formula and instability of small periodic solutions of the Field–Noyes model. *J. Math. Anal. Appl.* 55, 61–89 (1976).
- [15] Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A. : Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica* 16, 285–317 (1985).
- [16] Muthuswamy, B., Chua, L.O. : Simplest chaotic circuit. *Int.J. Bifurc. Chaos* 20(5), 1567–1580 (2010).
- [17] LEON O. CHUA. Simplest chaotic circuit. No. 5 (2010) 1567–1580.
- [18] Donato Cafagna · Giuseppe Grassi. On the simplest fractional-order memristor-based chaotic system. *Nonlinear Dyn* (2012).
- [19] Chua Leon O, Memristor—The Missing Circuit Element, vol. CT-18, 507-519 (1971).
- [20] Strukov Dmitri B, Snider Gregory S, Stewart Duncan R, Williams Stanley R, The missing memristor found, vol. 453, 80-83 (2008).

## ***Résumé***

Dans ce travail, nous avons présenté quelques notions des systèmes dynamiques (stabilité, bifurcations, Chaos, ...).

Nous avons étudié un modèle électrique représenté par un simple circuit chaotique, composé de trois éléments électriques en séries. La non linéarité responsable du chaos dans ce modèle vient de la fonction « memristance » qui est une fonction polynômial de quatrième degré. C'est le plus simple circuit capable de générer un attracteur chaotique à 4-scroll.

Une étude systématique de la dynamique de ce modèle a été réalisée en utilisant les critères de stabilité, les portraits des phases, les diagrammes de bifurcation, les exposants de Lyapunov.

Les résultats obtenus montrent que le modèle étudié présente une dynamique riche (comportement stationnaire, comportement périodique et la dynamique chaotique).

## ***Mots clés***

Stabilité, Bifurcations, Chaos, Portraits de phase, Spectre de Lyapunov, Diagramme de bifurcation.

## ***Abstract***

In this *work*, we have presented some concepts of dynamical systems (stability, bifurcation, Chaos,...).

We have studied an electrical the model represented by a simple chaotic circuit consisting of three elements per series. Non linearity responsible of the chaos in this model comes from the "memristance" which is a fourth degree polynomial function. It is the simplest circuit which can generate a 4-scroll chaotic attractor.

A systematic study of the dynamics of this model was carried out using the stability criteria, phase portraits, bifurcation diagrams and Lyapunov exponents.

The results show that the studied model presents a rich dynamic (stationary behavior, periodic behavior and chaotic dynamics).

## ***Key words***

Stability, Bifurcations, Chaos, Phase Portraits, Lyapunov spectrum, bifurcation diagram.

## الملخص

في هذه المذكرة، قدمنا بعض المفاهيم من الأنظمة الديناميكية (الاستقرار، التشعب، الفوضى،...)

ودرسنا نموذج كهربائي الذي تمثله دائرة بسيطة فوضوية، تتألف من ثلاث عناصر كهربائية مربوطة على التسلسل .

العنصر غير الخطي المسؤول عن الفوضى في هذا النموذج يأتي من دالة "المقاومة الذاتية" وهي دالة كثير حدود من الدرجة الرابعة، هذه الدارة تعد أبسط دائرة قادرة على توليد جذب الفوضى بأربع لفات، كما أجرينا دراسة منهجية لديناميكيات هذا النموذج باستخدام معايير الاستقرار، صور المرحلة، الرسوم البيانية للتشعب، مركبات ليابونوف .

النتائج المتحصل عليها برهنت أن النموذج المدروس يمثل ديناميكية غنية (السلوك الثابتة، السلوك الدوري و ديناميات الفوضى)

## الكلمات المفتاحية:

الاستقرار ، التشعب، الفوضى، صور المرحلة، مركبات ليابونوف، الرسم البياني للتشعب.