الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence

En: - Filière mathématiques -

Application du calcul différentiel à la Géométrie de l'espace

Préparé par

1.Bensiammer Aziza
2.Guechi Faizi
3.Bouchoucha Bochra

Encadrer par :Bouden Rabah

Année universitaire : 2014/2015

Table des matières

Introduction Générale

Le calcule différentiel et intégral est une branche des mathématiques qui prote sur les taux de variation.Il remonte a'la gréce et a'la chine antiques, mais dans sa forme actuelle , il a commmencé avec Newton et Leibnitz au XVIIe siécle.On l'utilise aujourd'hui beaucoup dans de nombreux domaines scientifiques.

Les notions de base du calcul différentiel et intégral englobent la limite, la dérivée et l'integrale . la dérivée d'une fonction est son taux de variation instantané en rapport une autre variable . Ainsi, la dérivée de la hauteur (en rapport avec la position) est pente ; la dérivée de la position (en rapoort avec le temps) est la vélocité ; et la dérivée de la vélocité (en rapport avec le temps) est l'accélération.

L'intégrale d'une fonction peut être perçue par exemple comme étant l'aire se trouvant sous son graphe ou comme une sorte de total en fonction du temps. Ainsi l'intégrale de la pente est (à une costante prés) la hauteur ; l'intégrale de la vélocité est (à une canstante prés) la position et l'intégrale de l'accélération (en rapport avec le temps) est la vélocité.

De nombreuses fonctions , mais pas toutes , peuvent être représentées par des expressions algébrique. Par exemple l'aire d'un cerle est reliée à son rayon par la formule $A = r^2$,et la distance sur laquelle un corps tombe dans un temps t ,en démarrant immobile, séxprime comme suit : $x = \frac{at^2}{2}$. par de telles expressions, le calcul différentiel et intégral nous permet de trouver des expressions pour l'intégrale et la dérivée de la fonction , quand elles existent .

Ce mémoire constitue de deux chapitres, le premire chapitre présente calcul différentiel ,le deuxième chapitre application du calcul differentil à la géometrié de l'espace .

Chapitre 1

Calcul Différentiel

1.1 Applications Différentiables et formule des accroissements finis Définitions Et Notations.

Définition 1.1.1 *Espace vectoriels normés.*
Dans tout ce chapitre,E et F désigneront des espaces vectoriels normés sur un corps $\mathbb{k}$, qui sera en général $\mathbb{R}$ et plus exceptionnellement $\mathbb{C}$.Leurs normes seront notées $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ ou plus simplement $\|.\|$ s'il n'ya pas de confusion possible .On dire que deux normes et sur E sont équivalentes s'il existe des constantes C_1,$C_2 > 0$ telles

$$\forall x \in E, C_1 \|x\| \leq |\|x\|| \leq C_2 \|x\|$$

Proposition 1.1.2 *Sur les espaces vectoriels de dimension finie,toutes les normes sont équivalentes et seuls les espaces vectoriels de dimension finie ,toutes les normes sont équivalentes et seuls les espaces vectoriels de dimension finie ont cette propriété.Soitn $\in \mathbb{N}$ .l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est toujours muni de sa base canonique, notée $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ $(\{i, j, k\}$ dans le cas $n = 3)$ ou encore par ses coordonnées*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les normes usuelles sur $\mathbb{k}^n$ *sont, pour* $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ *:*

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2| ..., |x_n|\}$$

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2\right)^{1/2}$$

La norme $\|x\|_2$ *provient du produit scalaire* $\langle , \rangle$ *défini par :*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien et la norme associée,définie par $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{1/2}$ *est appelée une norme hilbertienne.*
Notons que l'on peut vérifier l'équivalence des trois normes ci dessus de facon élémentaire en écrivant :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Définition 1.1.3 *Applications linéaires continues.*
L'espace vectoriel des applications linéaires continues de E *dans* F *sera noté* $\mathcal{L}(E, F)$ *ou plus simplement* $\mathcal{L}(E)$ *si* $E = F$*.*
Si $F = \mathbb{k}$ *,on notera* $E^{'}$ *sera appelé le dual de* E*.Les éléments de* $E^{'}$ *seront si de plus ,* $E = \mathbb{k}, \mathcal{L}(E; \mathbb{k}) = \mathcal{L}(\mathbb{k})$ *s'identifie à* $\mathbb{k}$*.*
La valeur d'un élément $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *sur un vecteur* $x \in E$ *sera notée simplement* Tx*.*

Proposition 1.1.4 *Une application linéaire est continue si et seulement sa norme est finie.*

Proposition 1.1.5 *Si* E *et* F *sont de dimension finie, toutes les applications linéaires de* E *dans* F *sont continues.*

Exemple 1.1.6 *Dans le cas où* $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$*,avec* $E_1, E_2, ..., E_n$ *espaces vecto-*

riels normés, on peut munir E de la norme : $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\|x\| = \sum \|x_i\|, i \in [1, n]$$

La norme associée de $\mathcal{L}(E, F)$ est alors définie par

$$\|T\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \|T_i\|$$

pour T tel que

$$Tx = \sum T_i x_i, i \in [1, n].$$

On dira qu' une application linéaire continue de E dans F est un isomorphisme si cette application est bijective et son inverse est continu.

1.2 Applications Différentiables

Définition 1.2.1 *1)Soit E et F deux espaces vectoriels normés,$a \in E$ et V un voisinage de a dans E Une application $f : V \rightarrow F$ est différentiable en a s'il existe une application linéaire contine de E dans F, notée $f'(a)$,telle $\forall h \in E$*
tel que$a + h \in V, f$

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \|h\| \varepsilon(h)$$

ou $\lim\limits_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$-dans F.
2)L'application linéaire continue de E dans F $f'(a)$ est appelée la dérivée (ou la différentielle de f en a et dans ce cas, elle sera notée $Df(a)$)ou encore dans certains cas l'application linéaire tangente à f en a.
3)L'application affine de E dans F ,$x \rightarrow f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée l'application affine tangente à f en a.

Remarque 1.2.2 *On notera qu' une application différentiable en un point est en particulier continue en ce point.*

1.3 Théoréme Des Accroissements Finis.

Définition 1.3.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés.*
1)Une fonction f définie sur un ouvert Ω de E est dite différentaible sur Ω si elle est différentiable en tout point de Ω.
2)La fonction $f' : \Omega \to \mathcal{L}(E, F)$ est appellée la dériée de f sur Ω.
3)Si f est différentiable sur Ω et si sa dérivée $f' : \Omega \to \mathcal{L}(E, F)$ est continue sur Ω on dire que f est continûment différentiable sur Ω . On dire aussi que f est de classe C^1 sur Ω .
Rappelons le résultat classique pour les fonctions d'une variable scalaire, à valeurs scalaires :

Théorème 1.3.2 *(Théoréme des Accroissements Finis scalaire)*
Soit f une fonction continue d'un intervalle $[a, b]$,à valeurs dans $\mathbb{k}$, dérivable sur $]a, b[$.Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

On en déduit une première extension pour les fonction d'une variable vectorielle, à valeurs scalaires :

Théorème 1.3.3 *(Théoréme des Accroissements Finis pour les fonction d'une variable vectorielle à valeurs scalaires)*
Soit E un espace vectoriel normé et f une application différentiable d'un ouvert Ω de E, à valeurs dans $\mathbb{k}$. Si le segment $[a, a + h] \subset \Omega$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h$$

ce que s'écrit aussi : il existe $c \in]a, a + h[$ tel que

$$F(1) - F(0) = F'(c)$$

ce qui prouve le résultat.

Théorème 1.3.4 *(Théorème des Accroissements Finis)*
Soient E et F deux espaces vectories normés et f une application différentiable dans un ouvert Ω de E, à valeurs dans F . Si $[a, a + h] \subset \Omega$, on a :

$$\|f(a + h) - f(a)\| \leq \|h\| \sup_{x \in]a, a+h[} \|f'(x)\|$$

Preuve. :Soit $v \in F'$.L'application $v \circ f : \Omega \to \mathbb{k}$ est telle que

$$v \circ f(x) = v(f(x) = \langle f(x), v \rangle$$

C'est donc une application différéntiable sur Ω, à valeurs scalaires. On peut donc écrire d'après le théorème :

$$\langle f(a+h) - f(a), v \rangle = v \circ f(a+h) - v \circ f(a) = (v \circ f)'(a + \theta h)(h)$$

avec $\theta \in]0,1[$ (qui dépend de v) . D'où

$$\langle f(a+h) - f(a), v \rangle = v \circ f'(a+\theta h)(h) \leq \|v\| \|f'(a+\theta h)\| \|h\| \leq \|v\| \|h\| \sup \{\|f'(a+\theta h\| / \theta \in]0,1[\}$$

On en déduit donc :

$$\|f(a+h) - f(a)\| = \sup \{|\langle f(a+h) - f(a), v \rangle| / \|v\| \leq 1\} \leq \|h\| \sup \{\|f'(a+\theta h\| / \theta \in]0,1[\}$$

et ceci prouve le théoréme .
On notera que, pour évaluer la norme de $f(a+h) - f(a)$, on a utilisé la propriété suivante :

$$\forall x \in E, \|x\| = \sup \{|\langle x, v \rangle| / v \in E', \|v\| \leq 1\}$$

Cette propriété est vraie dans tous les espaces de Banach grâce au théorème de Hahn Banach (hors programme).Il existe des démonstrations de ce résultat qui n'utilisent par le théorème de Hahn Banach mais qui sont plus difficiles .

■

Chapitre 2

Application du calcul différentiel à la géométrié de l'espace

2.1 Equation d'une courbe dans l'espace

Considérons le vecteur $\overline{OA} = r$ joignant des coordonnées à un point variable $A(x, y, z)$ (fig.196). Ce vecteur est appelé rayon vecteur. Exprimons ce vecteur à l'aide de ses projections sur les axes de coordonnées :

$$r = xi + yj + zk$$

Supposons que les projctions du vecteur r sont fonction d'un certain paramètre t

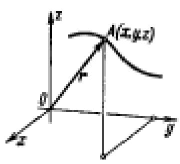
$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t). \tag{2.1}$$

la formule(2.1) peut être alors mise sous la forme

$$r = \varphi(t)i + \psi(t)j + \chi(t)k \tag{2.2}$$

ou

$$r = r(t). \tag{2.3}$$



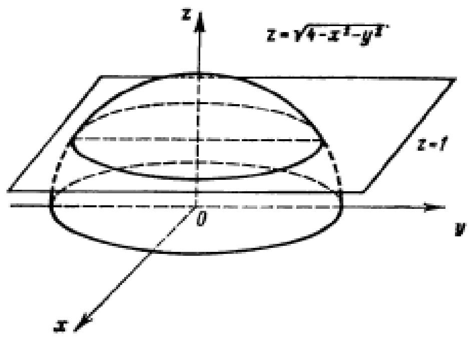


Fig. 197

Quand t varie ,les coordonnées x, y, z varient et le point A , extrémité du rayon vecteur r , décrit dans l'espace une certaine que l'on appelle hodographe du vecteur $r = r(t)$.Les équations(2.1) et (**??**) sont appelées équations vectorielles d'une courbe dans l'espace ou courbe gauche .Les équation (2.3) sont appelées équation paramétriques d'une courbe gauche . A chaque valeur de t ,ces équations font corresponder des valeurs bien détérminées des coordonnées x, y, z d'un certain point de la courbe.

Remarque 2.1.1 *On peut également définir une courbe gauche comme étant le lieu géométrique des points d'intersection de deux surfaces .La courbe peut donc être définie par les deux équations de ces surfaces*

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \Phi_2(x, y, z) = 0. \tag{2.4}$$

par exemple ,les équations

$$x^2 + y^2 z^2 = 4, z = 1$$

sont les équations d'un cercle dans l'espace , ce cercle étant défini comme l'intersection d'une sphére et d'un plan (fig 197).Une courbe gauche peut donc être exprimée soit par les équations paramétrique (2.3),soit par les deux équation des surface (2.4).On passe des courbes paramétriques aux courbes exprimées par l'intersection de deux surfaces en éliminant t des équations (2.3) ;on obtient alors deux équations reliant x, y et z .Inversement,

si l'on pose $x = \varphi(t)$(où $\varphi(t)$ est une fonction arbitraire) et si l'on exprime y et z en fonction de t à partir des équations

$$\Phi_1 [\varphi(t), y, z] = 0.\Phi_2 [\varphi(t), y, z] = 0,$$

on effectue le passage des courbes exprimées par l'intersection de surfaces aux courbes définies paramétriquement.

Exemple 2.1.2 *Soient* $x = 4t - 1, y = 3t, z = t + 2$*les équations paramétriques d'une droite. En éliminant le paramètre t, nous endéduisons les équations de deux plans. Par exemple, en retranchant successivement de la première équation la deuxième et la troisième, on a* $x - y - z = -3$. *En retranchant de la première la troisième, multipliée préalablement par quatre, on a*$x - 4z = -9$. *La droite donnée est donc la courbe définie par intrsection des deux plans*

$x - y - z + 3 = 0$ *et* $x - 4z + 9 = 0$.

Exemple 2.1.3 *Considérons un cylindre droit de révolution de rayon* a, *dont l'axe coïncide avec l'axe* Oz*(fig. 198). Enroulons autour du cylindre un triangle rectangle flexible* C_1AC, *de sorte que le sommet*A *du triangle coïncide avec le point de rencontre de la génératrice du cylindre et de l'axe* Ox, *et que le côté* AC *s'enroule sur la section de ce cylindre située dans le plan* Oxy.*L'hypothénuse détermine alors sur le cylindre une courbe appelée hélice.Désignons par* x, y,z *les coordonnées d'un point variable* M *de l'hélice et par* t *l'angle* AOP*(voir fig. 198). Alors* $x = acost$,$y = asint$, $z = PM = AP \quad \tan A$, *où* θ *désigne l'angle aigu du triangle* C_1AC. *Remarquons que* $AP = at$, *car* AP*est l'arc de circonférence de rayon* a *correspondant à l'angle au centre* t. *En désignant* $\tan\theta$ *par* m, *on trouve les équations paramétriques de l'hélice* $x = acost$, $y = asint$,$z = amt$ *(où est le paramètre), ou sous forme vectorielle* $r = iacost + jasint + kamt$. *On élimine le paramètre* t *des équations paramétriques de l'hélice ; en élevant lesdeux premières équations au carré et en les ajoutant on trouve* $x^2 + y^2 = a^2$. *C'est précisément l'équation du cylindre sur lequel est tracée l'hélice. Ensuite, endivisant terme à terme la deuxième équation par la première et en remplaçantdans la relation obtenue* t *par son expression tiré de la troisième équation, ontrouve l'équation d'une autre surface sur laquelle est tracée l'hélice :*

$$\frac{x}{y} = \tan\frac{z}{am}.$$

Elle est appelée hélicoïde à plan directeur. On peut la considérer commeengendrée par une demi-droite parallèle au planOxy *d'extrémité située sur l'axe* Oz *lorsque cette demidroite tourne avec une vitesse angulaire constante autourde l'axe* Oz *et qu' elle se déplace vers le haut avec une vitesse constante, de sorteque son extrémité reste constamment sur l'axe* Oz. *L'hélice est définie par l'intersection du cylindre et de la surface hélicoïdale. C'est pourquoi, on peut la définir par les deux équations*

$$x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{y} = \tan\frac{z}{am}$$

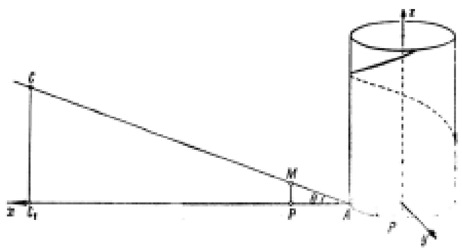


Fig. 198

2.2 Règles de dérivation des vecteurs (fonctions vectorielles)

Nous avons défini la dérivée du vecteur par la relation

$$r(t) = \varphi(t)i + \psi(t)j + \chi(t)k \tag{2.5}$$

par la relation

$$r\prime(t) = \varphi'(t)i + \psi'(t)j + \chi'(t)k. \tag{2.6}$$

Il résulte immédiatement de cette définition que les principales règles de dérivation des fonctions sont valables également pour les vecteurs. Nouétablirons ici les formules de dérivation de la somme et du produit scalaire de vecteurs, et nous nous bornerons à énoncer les autres formules en laissant au lecteur le soin de les démontrer.

2.2.1 La dérivée de la somme de égale à la somme des dérivée de ces vecteurs.

En effet, étant donnés deux vecteurs

$$r_1(t) = \varphi_1(t)i + \psi_1(t)j + \chi_1(t)k, r_2(t) = \varphi_2(t)i + \psi_2(t)j + \chi_2(t)k \tag{2.7}$$

leur somme est égale à

$$r_1(t) + r_2(t) = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]\, i + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]\, j + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]\, k.$$

Par définition, la dérivée du vecteur variable est

$$\frac{d\,[r_1(t) + r_2(t)]}{dt} = [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)]'\, i + [\psi_1(t) + \psi_2(t)]'\, j + [\chi_1(t) + \chi_2(t)]'\, k$$

ou

$$\frac{d\left[r_1(t)+r_2(t)\right]}{dt}=\left[\varphi_1'(t)+\varphi_2'(t)\right]i+\left[\psi_1'(t)+\psi_2'(t)\right]j+\left[\chi_1'(t)+\chi_2'(t)\right]k=\left[\varphi_1'(t)i+\psi_1'(t)j+\chi_1'(t)k\right]+[\varphi_2'($$

Par conséquent,

$$\frac{d\left[r_1(t)+r_2(t)\right]}{dt}=\frac{dr_1}{dt}+\frac{dr_2}{dt}$$

2.2.2 La dérivée du produit scalaire de deux vecteurs est donnée par la formule

$$\frac{d\left(r_1,r_2\right)}{dt}=\frac{dr_1}{dt}r_2+r_1\frac{dr_2}{dt}. \tag{2.8}$$

En effet, si les vecteurs $r_1(t)$ et $r_2(t)$ sont définis par les formules(2.7), leur produit scalaire est égal à

$$r_1(t)r_2(t)=\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2+\chi_1\chi_2$$

C'est pourquoi $\frac{d(r_1,r_2)}{dt}=\varphi_1'\varphi_2+\varphi_1\varphi_2'+\psi_1'\psi_2+\psi_1\psi_2'+\chi_1'\chi_2+\chi_1\chi_2'=(\varphi_1'\varphi_2+\psi_1'\psi_2+\chi_1'\chi_2)+(\varphi_1\varphi_2'+\psi_1\psi_2'+\chi_1\chi_2')$
$=\left(\varphi_1'i+\psi_1'j+\chi_1'k\right)\left(\varphi_2 i+\psi_2 j+\chi_2 k\right)+\left(\varphi_1 i+\psi_1 j+\chi_1 k\right)\left(\varphi_2'i+\psi_2'j+\chi_2'k\right)=\frac{dr_1}{dt}r_2+r_1\frac{dr_2}{dt}$.

Le théorème est démontré.Nous déduisons de la formule (2.8) un corollaire d'une grande importance.

Corollaire 2.2.1 *La dérivée du vecteur unitaire e (c'est-à-dire tel que$|e|=1$)est perpendiculaire à ce vecteur.*

Preuve. Si a est un vecteur unitaire, alors

$$\varrho\varrho=1.$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à t

$$\varrho\frac{d\varrho}{dt}+\frac{d\varrho}{dt}\varrho=0$$

ou

$$2\varrho\frac{d\varrho}{dt}=0$$

Donc, le produit scalaire

$$\varrho\frac{d\varrho}{dt}=0;$$

cela signifie justement que le vecteur $\frac{d\varrho}{dt}$ est perpendiculaire au vecteur e. ■

2.2.3 Si$f(t)$ est une fonction scalaire et $r(t)$ une fonction vectorielle, alors la dérivée du produit $f(t) \cdot r(t)$ est donnée par la formule

$$\frac{d(fr)}{dt} = \frac{df}{dt}r + f\frac{dr}{dt}, \tag{2.9}$$

Preuve. Si le vecteur $r(t)$ est déterminé par la formule (2.5) alors

$$f(t)r(t) = f(t)\varphi(t)i + f(t)\psi(t)j + f(t)\chi(t)k.$$

Nous obtenons d'après la formule (2.6)
$\frac{d(f(t)r(t))}{dt} = \left(\frac{df}{dt}\varphi + f\frac{d\varphi}{dt}\right)i + \left(\frac{df}{dt}\psi + f\frac{d\psi}{dt}\right)j + \left(\frac{df}{dt}\chi + f\frac{d\chi}{dt}\right)k =$
$\frac{df}{dt}(\varphi i + \psi j + \chi k) + f\left(\frac{d\varphi}{dt}i + \frac{d\psi}{dt}j + \frac{d\chi}{dt}k\right) = \frac{df}{dt}r + f\frac{dr}{dt}$. ■

2.2.4 On peut sortir un facteur numérique constant de sous le signe de la dérivée

$$\frac{d(a.r(t))}{dt} = a\frac{dr}{dt} = ar'(t). \tag{2.10}$$

Cela découle de (2.9), si $f(t) = a = const$. Par conséquent, $\frac{df}{dt} = 0$.

2.2.5 La dérivée du produi scalaire de deux vecteurs r1 (t) et r2 (t) est déterminée par la formule

$$\frac{d(r_1, r_2)}{dt} = \frac{dr_1}{dt}r_2 + r_1\frac{dr_2}{dt}. \tag{2.11}$$

Elle se démontre comme la formule (2.8).

2.3 Dérivées première et seconde d'un vecteur par

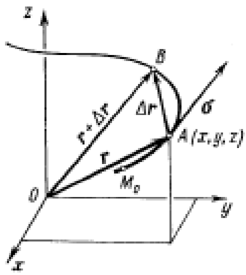


Fig. 202

rapport à la longueur de l'arc. Courbure de la courbe . Normale principale. Vitesse et accélération du point dans un mouvement curviligne

La longueur de l'arc d'une courbe gauche$\hat{M}_0 A = s$ est définie de la même manière que pour une courbe plane (fig. 202). La longueur de l'arc s varie quand le point variable $A(x, y, z)$ se déplace le long de la courbe ; inversement, quand s varie, les coordonnées x, y, z du point variable A de la courbe varient. Par conséquent, on peut considérer les coordonnées x, y, z du point variable A de la

courbe comme des fonctions de la longueur de l'arc s

$$x = \varphi(s), y = \psi(s), z = \chi(s).$$

Dans ces équations paramétriques le paramètre est la longueur de l'arc s.

Le vecteur OA = r s'exprime de la manière suivante

$$r = \varphi(s)i + \psi(s)j + \chi(s)k$$

ou

$$r = r(s)$$

c'est-à-dire le vecteur r est une fonction de la longueur de l'arc s. Elucidons la signification géométrique de la dérivée $\frac{dr}{ds}$.

Il découle de la figure 202 les égalités

$$\hat{M}_0 A = s, AB = \Delta s, \hat{M}_0 B = s + \Delta s,$$

$$OA = r(s), OB = r(s+\Delta s), AB = \Delta r = r(s+\Delta s) - r(s), \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{\overline{AB}}{AB}.$$

Nous avons vu, au , que le vecteur $\frac{dr}{dt} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s}$ est dirigé suivant la tangente à la courbe au point A dans le sens des s croissants. D'autre part, nous avons l'égalité $\lim \left| \frac{\overline{AB}}{AB} \right| = 1$ (la limite du rapport de la longueur de la corde à la

longueur de l'arc soustendu). Par conséquent , s est un vecteur u n i t a i r e dirigé suivant la tangente. Désignons-le par σ :

$$\frac{dr}{dt} = \sigma.$$

Si le vecteur r est donné par ses projections

$$r = xi + yj + zk, \tag{2.12}$$

alors

$$\sigma = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k, \tag{2.13}$$

où

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = 1.$$

Considérons, ensuite, la dérivée s e c o n d e $\frac{d^2r}{ds^2}$ de la fonction vectorielle r, c'est-à-dire la dérivée de $\frac{dr}{ds}$, et donnons la signification géométrique de cette dérivée seconde.Il vient de la formule (2.12) que

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{dr}{ds}\right] = \frac{d\sigma}{ds}.$$

Par conséquent, nous devons calculer $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta s}$.D'après la figure (203),

$$AB = \Delta s, AL = \sigma, BK = \sigma + \Delta\sigma.$$

Menons du point B le vecteur$BL_1 = \sigma$. Il vient du triangle BKL_1 :

$$BK = BL_1 + L_1K,$$

ou

$$\sigma + \Delta\sigma = \sigma + L_1K$$

Par conséquent, $L_1K = \Delta\sigma$. Puisque la longueur du vecteur σ est constante,

$$|\sigma| = |\sigma + \Delta\sigma|;$$

il en résulte que le triangle BKL_1est isocèle. L'angle $\Delta\varphi$ au sommet de ce triangle est l'angle de rotation de la tangente à la courbe quand on passe du point A au point B. Il correspond donc à l'accroissement de la longueur ds de l'arc Δs. Il vient du triangle BKL_1 :

$$\overline{L_1K} = |\Delta\sigma| = 2\,|\sigma| \left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right|.$$

(car $|\sigma| = 1$). Divisons les deux membres de cette égalité parΔs

$$\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = 2\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

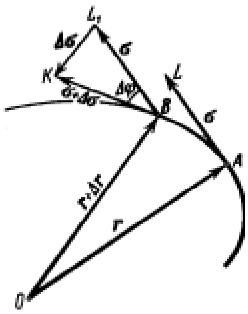


Fig. 203

Passons à la limite dans les deux membres de cette égalité, en faisant tendre Δs vers zéro. A gauche, nous trouvons

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\sigma}{ds}\right|$$

De plus,

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right| = 1,$$

puisque nous considérons des courbes pour lesquelles la limite $\lim\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$existe et que, par conséquent, $\Delta\varphi \to 0$ quand $\Delta s \to 0$.Ainsi, nous avons, après le passage à la limite,

$$\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| \tag{2.14}$$

On appelle courbure moyenne de l'arc AB de la courbe considérée le rapport de l'angle de rotation $\Delta\varphi$ de la tangente, quand on passe du point A au point B, à la valeur absolue de la longueur Δs de l'arc AB courbure moyenne $=\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$.La limite de la courbure moyenne quand $\Delta s \to 0$ est appelée courbure de la courbe au point A et désignée par la lettre K

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|$$

Mais alors il vient de l'égalité (2.14) que $\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| = K$, c'est-à-dire la longueur de la dérivée par rapport à la longueur de l'arc du vecteur unitaire de la tangente est égale à la courbure de la courbe en ce point. Le vecteur a étant un vecteur unitaire, la dérivée ds lui est perpendiculaire . Ainsi, le vecteur $\frac{d\sigma}{ds}$ est dirigé suivant la perpendiculaire au vecteur de la tangente, sa longueur est égale à la courbure en ce point.

Définition 2.3.1 *On appelle normale principale à la courbe, en un point donné, une droite coïncidant avec le support du vecteur*$\frac{d\sigma}{ds}$ *. On désigne par n le vecteur unitaire de cette direction. La longueur du vecteur $\frac{d\sigma}{ds}$ est égale à la courbure K de la courbe, par conséquent,*

$$\frac{d\sigma}{ds} = Kn.$$

La quantité $\frac{1}{K}$ est appelée rayon de courbure de cette courbe au point donné, et on la désigne par R, c'est-à-dire $\frac{1}{K} = R$, on peut donc écrire :

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{n}{R} \tag{2.15}$$

Il vient de cette formule :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2r}{ds^2}\right)^2. \tag{2.16}$$

Mais

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}i + \frac{d^2y}{ds^2}j + \frac{d^2z}{ds^2}k.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{2.17}$$

La formule (2.17) permet de calculer la courbure en un point quelconque d'une courbe donnée par ses équations paramétriques, dont le paramètre est la longueur de l'arc s (c'est-à-dire quand le rayon vecteur du point variable de cette courbe est une fonction de la longueur de l'arc).Considérons le cas où le rayon vecteur r est fonction d'un paramètre quelconque $r = r(t)$.Dans ce cas, nous considérerons s comme une fonction du paramètre t. Le calcul de la courbure est alors effectué de la manière suivante

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{2.18}$$

Comme $\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1$ *alors*

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \tag{2.19}$$

Dérivons les deux membres de cette égalité et simplifions par 2*, nous avons :*

$$\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{2.20}$$

I1 vient de la formule (2.18) :

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

Dérivons par rapport à s *les deux membres de cette égalité*

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} - \frac{dr}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3};$$

en substituant l'expression trouvée pour $\frac{d^2r}{ds^2}$ *dans la formule (2.16), nous avons :*

$$\frac{1}{R^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2}\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} - \frac{dr}{dt}\frac{\frac{d^2s}{dt^2}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}\right]^2 = \frac{\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - 2\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt}\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6}.$$

Exprimons maintenant $\frac{ds}{dt}$ *et* $\frac{d^2s}{dt^2}$ *à partir des formules (2.19) et (2.20) en fonction des dérivées der*(t)*, nous avons*

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt}\right)^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}. \tag{2.21}$$

La formule (2.21) peut être mise sous la forme

$$K^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{\left[\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right]^2}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3} \tag{2.22}$$

Nous avons donc établi une formule permettant le calcul de la courbure en tout point d'une courbe donnée par des équations paramétriques de paramètre q u e l c o n q u e . Si, en particulier, la courbe est plane et est située dans le plan Oxy, elle a pour équations paramétriques

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = 0.$$

En substituant ces expressions de x, y, z dans la formule (2.22), nous retrouvons la formule exprimant la courbure d'une courbe plane, donnée par des équations paramétriques, que nous avions précédemment étabélice

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi"(t) - \psi'(t)\varphi"(t)|}{\left\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\right\}^{3/2}}$$

Exemple 2.3.2 *Calculer la courbure de l'hélice*

$$r = ia\cos t ja\sin t + kamt,$$

en un point quelconque.

Solution 2.3.3 $\frac{dr}{dt} = -ia\sin t + ja\cos t + kam$, $\frac{d^2r}{dt^2} = -ia\cos t - ja\sin t$,

$$\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & am \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = ia^2m\sin t - ja^2m\cos t + ka^2,$$

$\left(\frac{dr}{dt}\times\frac{d^2r}{dt^2}\right) = a^4\left(m^2+1\right),$

$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2m^2 = a^2\left(1+m^2\right).$

par conséquent,

$$\frac{1}{R^2} = \frac{a^4\left(m^2+1\right)}{\left[a^2\left(1+m^2\right)\right]^3} = \frac{1}{a^2\left(1+m^2\right)^2}.$$

d'où

$$R = a\left(1+m^2\right) = const.$$

Nous concluons donc que le rayon de courbure de l'hélice est constant.

Remarque 2.3.4 *On peut toujours supposer qu'une courbe plane est située dans le plan Oxy. (Il suffit d'effectuer un changement d'axes de coordonnées). Dans le plan Oxy, $z = 0$; mais alors*

$$\frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

et, par conséquent, le vecteur n est également situé dans le plan Oxy. Une conclusion s'impose donc : la normale principale à une courbe plane est située dans le plan de la courbe.vitesse d'un point en mouvement curviligne . Supposons qu'à l'instant t du temps le point mobile se trouve au point M déterminé par le rayon vecteur $\overline{OM} = r(t)$ (fig. 200), et qu'à l'instant $t + \Delta t$ au point M_1déterminé par le rayon vecteur $\overline{OM_1} = r\left(t + \Delta t\right)$. Le vecteur $\overline{MM_1}$ est alors appelé vecteur du déplacement du point. Le rapport du vecteur du déplacement MM_1 à l'accroissement correspondant du temps Δt est appelé vitesse *moyenne du point au cours de ce laps de temps* $V_{moy} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \overline{MN}$ *.Le vecteur de la vitesse moyenne est également dirigé suivant la corde* MM_1 *dans le sens du mouvement du point (lors d'un mouvement rectiligne il est orienté suivant la trajectoire elle même). La vitesse du point à un instant donné est définie ainsi*

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} (\underset{moy}{V}) = \lim \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

autrement dit

$$V = \frac{dr}{dt} \tag{2.23}$$

On peut dire ainsi que la vitesse du point à un instant donné est la dérivée première du rayon vecteur du point par rapport au temps. I1 découle de la formule (2.12) que les projections de la vitesse sur les axes de coordonnées seront

$$V_x = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}, V_z = \frac{dz}{dt}$$

Le module de la vitesse est déterminé d'après la formule (2.7)

$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \tag{2.24}$$

Si l'on introduit la longueur de l'arc s, comme nous l'avons fait au début de ce paragraphe, et si nous considérons la longueur de l'arc s comme une fonction du temps t, alors la formule (2.23) peut s'écrire ainsi

$$V = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = \sigma V \tag{2.25}$$

où $V = \frac{ds}{dt}$ *est la valeur absolue de la vitesse,* σ *le vecteur unitaire, orienté suivant la tangente dans le sens du mouvement.accélération du point en mouvement curviligne . Demême que nous l'avons défini au , on appelle accélération* W *du point en mouvement curviligne la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps*

$$W = \frac{dV}{dt}. \tag{2.26}$$

Or $V = \frac{dr}{dt}$*, par conséquent*

$$W = \frac{d^2r}{dt^2}. \tag{2.27}$$

Si nous nous basons sur la formule (2.25) nous obtenons :

$$W = \frac{dv}{dt} = \frac{d(V.\sigma)}{dt}$$

Calculant cette dernière dérivée d'après la formule (2.9), nous obtenons

$$w = \frac{dV}{dt}\sigma + V\frac{d\sigma}{dt} \tag{2.28}$$

Transformons la dérivée da en utilisant les formules (2.18) et (2.15)

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{n}{R}V.$$

Portant dans l'égalité (2.28) nous obtenons en définitive

$$W = \frac{dV}{dt} + V^2\frac{n}{R}. \tag{2.29}$$

Ici σ désigne le vecteur unitaire orienté suivant la tangente dans le sens du mouvement, n le vecteur unitaire orienté suivant la normale principale. La formule (2.29) peut être énoncée ainsi. La projection de l'accélération du point sur la tangente est égale à la dérivée première de la valeur absolue de la vitesse, et la projection de l'accélération sur la normale principale est égale au carré de la vitesse, divisé par le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré. Comme les vecteurs σ et n sont perpendiculaires, le module de l'accélération est déterminé par la formule

$$W = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V}{R}\right)^2}. \tag{2.30}$$

2.4 Plan osculateur. Binormale. Torsion d'une courbe gauche

Définition 2.4.1 *On appelle plan osculateur à une courbe donnée au point A leplan défini par la tangente à la courbe et la normale principale en ce point. Il est évident que le plan osculateur à une courbe plane coïncide avec le plan decette courbe. Si la courbe n'est pas plane, les plans osculateurs, correspondant à deux pointsP et P_1 de la courbe, forment entre eux un angle dièdre μ. Plus μ est grand, plus la courbe diffère d'une courbe plane. Pour être plus précis, introduisons la définition suivante.*

Définition 2.4.2 *On appelle binormale la normale à la courbe perpendiculaire au plan*

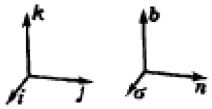


Fig. 204

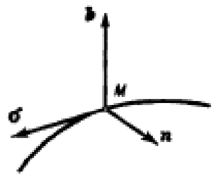


Fig. 205

osculateur. Choisissons, sur la binormale, un vecteur unitaire b et orientons-le de sorte que les vecteurs σ, n,b forment un trièdre trirectangle de même orientation que les vecteurs unitaires i, j, k des axes de coordonnées (fig. 204, 205).Nous avons, en vertu de la définition des produits scalaire et vectoriel

$$b = \sigma \times n; bb = 1. \tag{2.31}$$

Calculons la dérivée$\frac{db}{ds}$*. En vertu de la formule (2.10), nous avons :*

$$\frac{db}{ds} = \frac{d(\sigma \times n)}{ds} = \frac{d\sigma}{ds} \times n + \sigma \times \frac{dn}{ds} \tag{2.32}$$

Mais $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{n}{R}$*, c'est pourquoi*

$$\frac{d\sigma}{ds} \times n = \frac{1}{R} n \times n = 0$$

et la formule (2.32) peut être mise sous la forme

$$\frac{db}{ds} = \sigma \times \frac{dn}{ds} \tag{2.33}$$

I1 découle de la définition du produit vectoriel que le vecteur $\frac{db}{ds}$ *est perpendiculaire au vecteur de la tangente* σ*. D'autre part*$\frac{db}{ds}$ *est perpendiculaire à* b*, puisque* b *est un vecteur unitaire .Nous concluons donc que le vecteur* $\frac{db}{ds}$ *est perpendiculaire à* σ *et à* b*,autrement dit, colinéaire au vecteur* n *Désignons par* $\frac{1}{T}$ *la longueur du vecteur* $\frac{db}{ds}$*, c'est-à-dire posons*

$$\left|\frac{db}{ds}\right| = \frac{1}{T};$$

alors

$$\frac{db}{ds} = \frac{1}{T} \times n \tag{2.34}$$

On appelle $\frac{1}{T}$ *torsion de la courbe donnée.L'angle dièdre* μ *formé par les plans osculateurs correspondant à deux points de la courbe, est égal à l'angle formé par les binormales. Nous* *pouvons alors écrire une formule analogue à la formule (2.34)*

$$\left|\frac{db}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mu}{|\Delta s|}.$$

Ainsi, la torsion de la courbe au point A est égale, en valeur absolue, à la limite du rapport de l'angle μ formé par les plans osculateurs au point A et au point voisin B, à la longueur $|\Delta s|$ de l'arc AB quand $\Delta s \to 0$.Si la courbe est p 1 a n e , le plan osculateur ne varie pas et, par conséquent, latorsion est égale à zéro. Il résulte de la définition de la torsion que cette quantité caractérise l'écart entre une courbe gauche et une courbe plane. La quantité T est appelée rayon de torsion de la courbe. Trouvons la formule donnant la torsion. Il vient des formules (2.33) et (2.34)

$$\frac{1}{T}n = \sigma \times \frac{dn}{ds}0$$

Multiplions scalairement les deux membres de l'égalité par n, nous avons :

$$\frac{1}{T}nn = n\left[\sigma \times \frac{dn}{ds}\right].$$

Le second membre de cette égalité est ce que l'on appelle le produit mixte de Le second membre de cette égalité est ce que l'on appelle le produit mixte de trois vecteurs n, σ et $\frac{dn}{ds}$. On sait que ce produit ne varie pas lors de la permutation circulaire des facteurs. Comme $nn = 1$, nous pouvons mettre la dernière égalité sous la forme

$$\frac{1}{T} = \sigma\left[\frac{dn}{ds} \times n\right]$$

ou

$$\frac{1}{T} = -\sigma\left[n \times \frac{dn}{ds}\right]. \tag{2.35}$$

Mais comme $n = R\frac{d^2r}{ds^2}$*,alors*

$$\frac{dn}{ds} = R\frac{d^3r}{ds^3} + \frac{dR}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}$$

$$\left[n \times \frac{dn}{ds}\right] = R\frac{d^2r}{ds^2} \times \left\{R\frac{d^3r}{ds^3} + \frac{dR}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}\right\} = R^2\left[\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3}\right] + R\frac{dR}{ds}\left[\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^2r}{ds^2}\right],$$

le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même étant égal à zéro,

$$\left[\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^2r}{ds^2}\right] = 0$$

Ainsi
$$\left[n \times \frac{dn}{ds}\right] = R^2 \frac{dr}{ds}\left[\frac{d^2r}{ds} \times \frac{d^3r}{ds^3}\right].$$
En remarquant que $\sigma = \frac{dr}{ds}$ *et en revenant à l'égalité (2.35), on a*

$$\frac{1}{T} = -R^2 \frac{dr}{ds}\left[\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3}\right]. \tag{2.36}$$

Si r *est exprimé en fonction d'un paramètre arbitraire* t*, on peut démontrer, de la même manière que dans le paragraphe précédent*

$$\frac{dr}{ds}\left[\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds}\right] = \frac{\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{d^3r}{dt^3}\right]}{\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}^3}.$$

En substituant cette expression dans la formule (2.36) et en remplaçant R^2*par son expression tirée de la formule (2.22), nous trouvons en définitive*

$$\frac{1}{T} = -\frac{\frac{dr}{dt}\left[\frac{d^2r}{dt^2} \times \frac{d^3r}{dt^3}\right]}{\left[\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}\right]^2} \tag{2.37}$$

Cette formule nous permet de calculer la torsion en tout point d'une courbe donnée par ses équations paramétriques dans le cas d'un paramètre arbitraire t*.Remarquons que les formules exprimant les dérivées des vecteurs* σ*,* b*,* n *sont appelées formules de Serret-Frénet :*
$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{n}{R}, \frac{db}{ds} = \frac{n}{T}, \frac{dn}{ds} = -\frac{\sigma}{R} - \frac{b}{T}.$$
La dernière d'entre elles peut être établie comme suit

$$\frac{dn}{ds} = \frac{d\,(b \times \sigma)}{ds} = \frac{db}{ds} \times \sigma + b \times \frac{d\sigma}{ds} = \frac{n}{T} \times \sigma + b \times \frac{n}{R} = \frac{1}{T} n \times \sigma + \frac{1}{R} b \times n;$$

mais
$$n \times \sigma = -b; b \times n = -\sigma$$

c'est pourquoi
$$\frac{dn}{ds} = -\frac{b}{T} - \frac{\sigma}{R}.$$

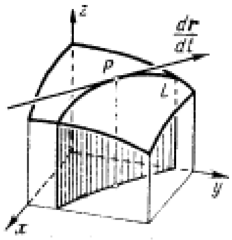


Fig. 206

2.5 Plan tangent et normale à une surface

Soit

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2.38}$$

l'équation d'une surface. Introduisons les définitions suivantes.

Définition 2.5.1 *On dit qu'une droite est tangente à une surface en un point $P(x, y, z)$ si elle est tangente à une courbe quelconque tracée sur cette surface et passant par ce point. Puisqu'une infinité de courbes tracées sur la surface passe par le point $P(x, y, z)$,il y aura également en ce point une infinité de tangentes à cette surface. Définissons les points simples et les points singuliers d'une surface $F(x, y, z) = 0$.On dit que le point M est un point singulier de la surface si les trois dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ s'annulent simultanément en ce point ou l'une au moins les dérivées n'existe pas en ce point. Le point M est dit point simple si les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ existent et sont continues en ce point et si l'une d'entre elles au moins est différente de zéro. Enonçons le théorème suivant.*

Théorème 2.5.2 *Toutes les droites tangentes à la surface (2.38) au point simple P appartiennent à un même plan.*

Preuve. Considérons sur la surface une courbe L (fig. 206) passant par un point P donné de lasurface. Soient

$$x = \varphi(t); y = \psi(t), z = \chi(t) \tag{2.39}$$

les équations paramétriques de cette courbe. La tangente à cette courbe est, pardéfinition, une tangente à la surface. Les équations de cette tangente sont

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}}.$$

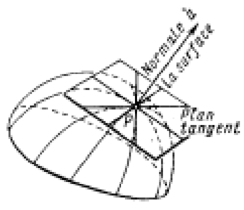


Fig. 207

Si l'on substitue les expressions (2.39) dans l'équation (2.38), cette équation devient une identité en t puisque la courbe (2.39) est tracée sur la surface (2.38). Dérivons cette identité par rapport à t,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0.$$

Considérons, ensuite, les vecteurs N et $\frac{dr}{dt}$, passant par le point P :

$$N=\frac{\partial F}{\partial x}i+\frac{\partial F}{\partial y}j+\frac{\partial F}{\partial z}k.$$

Les projections $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}$ de ce vecteur dépendent des coordonnées x,y,z du point P.Remarquons que ces projections ne s'annulent pas simultanément au point P,puisque P est un point simple. C'est pourquoi

$$|N|=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\neq 0.$$

Le vecteur

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j+\frac{dz}{dt}k \tag{2.40}$$

est tangent à la courbe passant par le point P et tracée sur la surface. On peut calculer les projections de ce vecteur à partir de l'équation (2.39), en donnant au paramètre t la valeur qui correspond au point P. Calculons le produit scalaire des vecteurs N et $\frac{dr}{dt}$; il est égal à la somme des produits des projections correspondantes

$$N\frac{dr}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

En vertu de la formule (2.40), le second membre de cette expression est égal à zéro et, par conséquent, $N\frac{dr}{dt}=0$ .On déduit de cette égalité que le vecteur N est perpendiculaire au vecteur $\frac{dr}{dt}$ de la tangente à la courbe (2.39) au point P. La démonstration que nous venons de donner est valable pour toute courbe (2.39) passant par le point P et tracée sur la surface. Par conséquent, toutes les tangentes à cette surface au point P sont perpendiculaires à un même vecteur N ; elles appartiennent donc toutes à un même plan perpendiculaire au vecteur N. Le théorème est démontré. ■

Définition 2.5.3 *Le plan formé par toutes les tangentes en un point P aux courbes tracées sur une surface et passant par ce point est appelé plan tangent à la surface au point P (fig. 207).Notons que le plan tangent peut ne pas exister si P est un point singulier de la surface. En de tels points, les drones tangentes à la surface peuvent ne pas appartenir à un plan unique. Le sommet d'un cône, par exemple, est un point singulier et en ce point les tangentes à la surface n'appartiennent pas à un plan unique (elles constituent précisément la surface conique).Formons l'équation du plan tangent à la surface (2.38) en un point simple. Ce plan étant perpendiculaire au vecteur (2.41), son équation est de la forme*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0. \tag{2.41}$$

Si la surface est donnée par l'équation $z=f(x,y)$ ou $z-f(x,y)=0$,alors

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}=1$$

et l'équation du plan tangent est

$$Z-z=\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y). \tag{2.42}$$

Remarque 2.5.4 *Si l'on pose dans la formule (2.42) $X-x=\Delta x, Y-y=\Delta y$,on a*

$$Z-z=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y.$$

le second membre est la différentielle totale de la fonction $z=f(x,y)$. Par conséquent, $Z-z=dz$. Ainsi, la différentielle totale dune fonction de deux variables au point $M(x,y)$, qui correspond aux accroissements Δx et Δy des variables indépendantes x et y, est égale à l'accroissement correspondant de la cote (z) du plan tangent à la surface représentant le graphique de cette fonction.

Définition 2.5.5 *On appelle normale à la surface (2.38) en un point $P(x,y,z)$ la droite perpendiculaire au plan tangent à la surface en ce point (fig. 207). Formons l'équation cle la normale. Celle-ci étant orientée suivant le vecteur N,son équation est*

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{2.43}$$

Si l'équation de la surface est $z = f(x, y)$ *ou* $z - f(x, y) = 0$*.l'équation de la normale sera*

$$\frac{X - x}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y}{-\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z - z}{1}$$

Remarque 2.5.6 *Supposons que la surface* $F(x, y, z) = 0$ *soit la surface de niveaupour une fonction de trois variables* $u(x, y, z)$ *, autrement dit,*$F(x, y, z) = u(x, y, z) - C = 0$*. I1 est évident que le vecteur* N*, défini par la formule (2.40), dirigé suivant la normale à la surface de niveau* $F(x, y, z) - C = 0$*,sera*

$$N = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k,$$

c'est-à-dire

$$N = \operatorname{grad} u.$$

Par cela même nous avons démontré que le gradient de la fonction $u(x, y, z)$ *est dirigé suivant la normale à la surface de nivèau passant par le point donné.*

Exemple 2.5.7 *Former l'équation du plan tangent et l'équation de la normale à la sphère* $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ *au point* $P(1, 2, 3)$*.*

Solution 2.5.8 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F}{\partial z} = 2z;$$

pour $x = 1, y = 2, z = 3$ *nous avons*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2, \frac{\partial F}{\partial y} = 4, \frac{\partial F}{\partial z} = 6$$

Par conséquent, l'équation du plan tangent est

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 3) = 0$$

ou

$$x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

L'équation de la normale est

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 3}{3}$$

ou

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3}.$$

Conclusion générale

En conclusion , on peut dire que calcul différentiel permet à étudier théorème des accroissements finis et l'application du calcul différentiel à la géométié de l'espace qui sont incapables de résoudre par algeber.

Bibliographie

[1] N N.PISKOUNOV, Calcul differentiel et Integral,Tradiction Frençaise Editions Mir 1980.

[2] Sylvie Sylvie DELABRIERE, Calcul differentiel,Universite Pierre et Marie Curie - Paris 6