الجمهوريـــة الجزائـــريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـــــم العالـــي والبحـــث العلمـــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence
En Filière : Mathématiques

Fonctions dérivables et Fonctions différentiables

Préparé par:

- **Bouzit Mohammed.**
- **Saidi Amor.**
- **Zarezi Nadjib.**
- **Bouzraa Amir**

Encadrer par :

Mme Laib Hafida

Année universitaire :2014/2015

Dédicace

-Je tiens en premier lieu à dédier ce travail à mes parents, qui sont la lumière de ma vie et je prie Dieu à les protéger et me les garder (je suis reconnaissant pour vos sacrifices et soutient moral).

- A ma mère et mon père.
- A mes frères et mes sœurs.
- A ma famille.
- A famille de université de Mila.
- A tous les amies.

Nadjib

Dédicace

-Je tiens en premier lieu à dédier ce travail à mes parents, qui sont la lumière de ma vie et je prie Dieu à les protéger et me les garder (je suis reconnaissant pour vos sacrifices et soutient moral).

- A ma mère et mon père.
- A mes frères et mes sœurs.
- A ma famille.
- A famille de université de Mila.
- A tous mes amés :

(“Haroune.B”,”Khaled.M”,”Moulod.B”).

Mohammed

Dédicace

-Je tiens en premier lieu à dédier ce travail à mes parents, qui sont la lumière de ma vie et je prie Dieu à les protéger et me les garder (je suis reconnaissant pour vos sacrifices et soutient moral).

- A ma mère et mon père.
- A mes frères et mes sœurs.
- A ma famille.
- A famille de université de Mila.
- A tous les amies :

(« Redha.B », « Saad.D », « Samir.B»,

«Hicham.A »).

AMOR

Dédicace

-Je tiens en premier lieu à dédier ce travail à mes parents, qui sont la lumière de ma vie et je prie Dieu à les protéger et me les garder (je suis reconnaissant pour vos sacrifices et soutient moral).

- ***A ma mère et mon père.***
- ***A mes frères et mes sœurs.***
- ***A ma famille.***
- ***A famille de université de Mila.***

Amir

Remerciement

-Pour commencer, nous venons adresser nos remerciements à nos directrice de mémoire pour sa grande disponibilité et ses encouragements tout au long de la rédaction de ce mémoire

-Et Nous tenons à remercier l'ensemble de professeurs qui ont contribué à notre promotion tout au long de la période d'études à le centre universitaire de mila.

Et remercié on fin Madame Maskine Habiba pour tout sa conscience et bon courage à sa vie et retourne très vite à son travail……merci pour tout personne qui participer dans ce travail moralement ou par un idée …………merci.

Table des matières

Introduction

La notion de dérivée et de fonction différentiable est commance avec un premier mené des études sur la notion de tangente à une courbe par Blaise Pascal, au début du 17^{e} siècle. Dès la seconde moitié du 17^{e} siècle, le domaine mathématique de l'analyse numérique connaît une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral.
Le marquis de l'Hôpital participe aussi, à la fin du 17^{e} siècle, à étoffer cette nouvelle théorie, notamment en utilisant la dérivée pour calculer une limite dans le cas de formes indéterminées particulières
Finalement, c'est Lagrange (fin du 18e siècle) qui a introduit la notation $f'(x_0)$ pour d´esigner la dérivée de f en x_0. Leibniz notait $\frac{df}{dx_0}(x_0)$ et Newton $f^{\cdot}(x_0)$.
Ces trois notations sont encore usitées de nos jours.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions fondamentales de l'espace topologique et de calcul différentiel.

Dans le second chapitre, nous présentons la fonction dérivable qui est une notion fondamentale en analyse. Elle permet d'étudier les variations d'une fonction, de construire des tangentes à une courbe et de résoudre des problèmes d'optimisation. ainsi que des opérations sur les fonctions dérivales, le théorème des accroissements finis et les fonctions dérivables à valeurs dans un espace de Banach.

Dans le troisième chapitre, nous présentons la notion de fonction différentiable qui est la généralisation aux fonctions de plusieurs variables de la notion de fonction dérivable d'une variable réelle. ainsi que les opérations sur les fonctions différentiables, les opérations sur les fonctions de classe ζ^1 et le théorème des accroissements finis.

Chapitre 1

Généralités

Définition 1.0.1 ***(Espace topologie)***
On appelle topologie sur un ensemble E est une partie τ de $p(E)$ qui posséde les propriétés suivantes :
a/ La réunion de toute famille d'éléments de τ est un élément de τ.
b/ L'intersection de toute famille finie d'éléments de τ est un élément de τ.
c/ L'ensemble vide $\emptyset$ et E sont des éléments de τ.

Le couple (E, τ) s'appelle un espace topologique.
Les éléments de τ s'appellent les **ouvets** de (E, τ).

Définition 1.0.2 .
Un espace topologique X est dit ***compact*** *si :*
i) X est séparé
ii) De tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un recouvrement fini de X.
C'est-à-dire, pour tout famille quelconque $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X telle que $\underset{i\in I}{\cup} O_i = X$, il existe $J \subset I$, fini, tel que $\underset{i\in I}{\cup} O_i = X$.

Définition 1.0.3 .
Soit X un espace topologique et $A \subset X$.
on dira que A est une ***partie compact*** *de X si le sous-espace topologique A est compact.*

Proposition 1.0.4 .
Les assertions suivantes sons équivalentes :
i) Le sous-ensemble A est compact dans X.
ii) De tout recouvrement de A par les ouverts de X, on peut extraire un sous-recouverement finie de A.

Définition 1.0.5 *(K-**espace vectoriel**)*

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne (notée additivement) et d'une loi de composition externe (notée multiplicativement) à opérateurs dans le corps K, c'est à dire une application :

$$\begin{gathered} K \times E \to E \\ (\lambda, \overrightarrow{x}) \to \lambda \overrightarrow{x} \end{gathered}$$

On dit que $(E, +, \times)$ est un K-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur le corps K) s'il est vérifié les propriétés suivantes :

1) $(E, +)$ est un groupe commutatif.

2)

a/ Pseudo-associativité : $\forall \lambda, \mu \in K\ \forall \overrightarrow{x} \in E\ \lambda(\mu \overrightarrow{x}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{x}$ (noté donc $\lambda\mu\overrightarrow{x}$)

b/ Pseudo-distributivité à droite de $\times$ sur $+$: $\forall \lambda, \mu \in K\ \forall x \in E(\lambda + \mu)\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x} + \mu\overrightarrow{x}$

c/ Pseudo-distributivité à gauche de $\times$ sur $+$: $\forall \lambda \in K\ \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E\ \lambda(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y}$

d/ $1K$ est un pseudo-élément unité : $\forall \overrightarrow{x} \in E\ 1_K\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$

Définition 1.0.6 *.*

*Un **espace euclidien** est un espace vectoriel(réel) de dimontion finie muni de produit scalaire.*

Définition 1.0.7 *(**Norme**)*

*On appelle **norme** sur un espase vectoriel une application $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions :*

1/ $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

2/ $\|\lambda x\| =\mid \lambda \mid\| x \|$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{k}$.

3/ $\|x + y\| \leq\| x \| + \| y \|$ pour tout x et tout y de E.

Définition 1.0.8 *(**Suites convergentes et de cauchy**) .*

Soient E un espace vectoriel normé et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E. on dira que la suite $(x_n)_n$ converge vers un élément $a \in E$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}/\forall n, n \geq N_0 \Longrightarrow \|x_n - a\| \leq \varepsilon$$

Si la suite $(x_n)_n$ admet une limite a, alors cette limite est unique et on note

$$\lim_{x \to +\infty} x_n = a.$$

la suite $(x_n)_n$ et dite de cauchy, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}/\forall p, q \geq N_0, \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$$

Définition 1.0.9 ***(Espace de Banach)***
On appelle espace de Banach ou espace vectoriel complet tout espace vectoriel normé dans lequel tout suite de cauchy est convergente.

Définition 1.0.10 ***(Applications continues)***
Soient E et F deux espaces metriques. On dit qu'une application $f : E \to F$ est continue en un point $a \in E$ si "$f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a", autrement dit si la propriété suivante a lieu :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in E \quad d(x,a) \leq \delta \Longrightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

On dit que l'application f est continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Définition 1.0.11 ***(Applications lipschitziennes)***
Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces metriques. Une application $f : E \to F$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $k < \infty$ telle que :

$$d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y)$$

Définition 1.0.12 *.*
Soit $a \in E$, et soit $r \geq 0$ La ***boule ouverte*** *de centre "a" et de rayon "r" est l'ensemble*

$$B(a,r) = \{x \in E; d(x,a) < r\}$$

Définition 1.0.13 *.*
La ***boule fermée*** *correspondante est l'ensemble*

$$B_f(a,r) = \{x; d(x,a) \leq r\}$$

Exemple 1.0.14 *.*
1) Dans $\mathbb{R}$, la boule ouverte $B(a,r)$ est l'intervalle ouvert $]a-r; a+r[$; la boule fermée est l'intervalle $[a-r; a+r]$.
2) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle, les boules sont des disques.

Définition 1.0.15 ***(Parties bornées, diamétre)***
Soient (X,d) un espace métrique et A une partie de X.
On dira que A est bornée dans (X,d) , si elle est contenue dans une boule (ouvert ou fermée) de (X,d). Ce qui signifie qu'il existe un point $x_0 \in X$ et un réel $r > 0$ tels que : $\forall x \in A$, $d(x_0,x) \leq r$.

On appelle diamétre de A (relativement à la distance d), le réel (fini ou non) noté $diam\,(A)$ et défini par :

$$diam\,(A) = \sup_{x,y\in A} d\,(x,y)$$

Proposition 1.0.16 .
Soit (X,d) un espace métrique.
Une partie A de X est bornée dans (X,d) si et seulement si $diam\,(A)$ est fini.

Définition 1.0.17 ***(Endomorphisme, Isomorphisme.)***
Une application d'un espace vectoreil E dans un espace vectoreil F est dite linéaire quand elle vérifie f

$$(x+y) = f(x) + f(y), f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

pour tout vecteures x et y de E et tout scalaire λ.
Si $E = F$, on dit que F est endomorphisme de E.
Une application linéaire bijectif de E sur F s'appelle isomorphisme.

Définition 1.0.18 ***(Application bilinéaire)***
On appelle ***application bilinéaire*** *sur E tout application $f : E^2 \mapsto \mathbb{R}$ possèdant les propriétés suivant :*
$\cdot f(x,y) = f(y,x)$ pour tous x, y de E.
·pour tout $y_0 \in E$ fixé, l'application $x \in E \to f(x, y_0)$ est linéaire.

Définition 1.0.19 ***(Partie convexe)***
Une partie $C \subset V$ est convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1] \text{ alors } \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

Définition 1.0.20 ***(Application convexe)***
Soit F une fonction définie sur une partie C convexe
On dit que F est une application convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1] \text{ alors } F(x + (1-\lambda) y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda) F(y)$$

Chapitre 2

Fonctions dérivables

2.1 Fonctions réelles dérivables

Définition 2.1.1 .
Une fonction f *définie sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est dite dérivable en un point* x_0 *de* U *si le quotiont* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *possède une limite quand* x *tend vers* x_0 *(par valeurs distinctes de* x_0*) . la limite est alors appelée dérivée de* f *en* x_0*.*
La fonction f *est dite dérivable sur* U *si elle est dérivable en tout point de* U*. Dans ce cas, on appelle fonction dérivable de* f *la fonction définie sur* U *qui à tout point* x *de* U *associe la dérivée de* f *en* x*.*

Notation 2.1.2 .
On note usuellement $f\,'(x_0)$ *ou* $\frac{df}{dx}(x_0)$ *la dérivée de* f *en* x_0*. Plus généralment on peut définir, quand elles existent, la dérivée à droite* $f_d'(x_0)$ *et la dérivée à gauche* $f_g'(x_0)$ *d'une fonction* f *en* x_0 *par*

$$f\,'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0, x>x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

et

$$f\,'_g(x_0) = \lim_{x\to x_0, x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Proposition 2.1.3 .
Toute fonction localment constante est dérivable, et sa dérivée est nulle. Ceci découle immédiatement de la définition, puisque, si f *est localement constante, le quotient* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *est nul pour* x *voisin mais distinct de* x_0*.*

Proposition 2.1.4 .
Toute fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$*.*

Si $f(x) = mx + p$, *on a* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m$
Pour $x \neq x_0$, *et il en résulte immédiatement que* f *est dérivable en tout point, et que sa fonction dérivée est constante, de valeur* m.

Proposition 2.1.5 .
Si la fonction f *est dérivable en* x_0 *,elle et continue en* x_0.
En effet, on a

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \lim_{x \to x_0, x \neq x_0} (x - x_0) = 0$$

ce qui montre que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *et prouve la continuité de* f *en* x_0.

Définition 2.1.6 .
Une fonction réelle f *définie sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}$ *est dite de classe* ζ^1 *ou continuement dérivable si elle est dérivable sur* U *et si sa fonction dérivée* f' *est continue de* U *dans* $\mathbb{R}$.

2.2 Opérations sur les fonctions dérivales

Théorème 2.2.1 .
Soient U *un ouvert de* $\mathbb{R}$, x_0 *un point de* U, f *et* g *deux fonctions de* U *dans* $\mathbb{R}$ *dérivables en* x_0. *Alors la somme et la produit de* f *et* g *sont dérivables en* x_0 *et on a :*

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (fg)'(x_0) &= f(x_0)\,g'(x_0) + g(x_0)\, f'(x_0)\end{aligned}$$

Si,en outre, λ *est un nombre réel, la fonction* λf *est dérivable en* x_0 *et*

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda\, f'(x_0)$$

Preuve. Puisque l'on a

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

et

$$\frac{fg(x) - fg(x_0)}{x - x_0} = g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ainsi que

$$\frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0} = \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

le passage à la limite dans les égalités ci-dessus pour $x \to x_0$ avec $x \neq x_0$ donne immédiatement les résultats annoncés. ■

Théorème 2.2.2 .
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions réelles sur U. Si la fonction g ne s'annule pas sur U, et si, pour un point x_0 de U, les fonctions f et g sont dérivables, le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0, et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Preuve. On a
$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0)- f(x_0)g(x)}{x-x_0} = \frac{g(x_0)}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{f(x_0)}{g(x)\ g(x_0)} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$
et le résultat annoncé s'obtient immédiatemment en passant à la limite. ■

Théorème 2.2.3 .
soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions réelles définies respectivement sur U et V. Si $f(U) \subset V$, Si f est dérivable en un point x_0 de U et si g est dérivable au poit $y_0 = f(x_0)$, la fonctions $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) .f'(x_0) = g' \circ f(x_0) .f'(x_0)$$

Preuve. Si $f'(x_0) \neq 0$, il existe un voisinage U' de x_0 dans U tel que $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq 0$ pour $x \epsilon U'$ et $x \neq x_0$.On a alors, pour $x \in U'$et $x \neq x_0$:

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et puisque f est continue en x_0, la limite quand $x \to x_0$ du quotient $\frac{g \circ f(x)-g \circ f(x_0)}{f(x)-f(x_0)}$ est égale à $g'(y_0)$ .Supposons ,au contraire ,que $f'(x_0) = 0$. Il existe un voisinage V'de y_0 tel que$\left|\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} - g'(y_0)\right| \leq 1$ pour tout y de V'distinct de y_0 . On a donc alors

$$|g(y) - g(y_0)| \leq (1 + |g'(y_0)|)\, |y - y_0|$$

pour $y \ \epsilon V'$.
Il en résulte que si x appartient au voisinage $f^{-1}(V')$ et est distinct de x_0. On a

$$\left|\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq (1 + |g'(y_0)|) \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right|$$

et cette quantité tend vers 0 quand x tent vers x_0 puisque $f'(x_0) = 0$. On en déduit que $g \circ f$ est alors dérivable en x_0 et que sa dérivée y est nulle , ce qui achéve la démonstration. ■

2.3 Extremums

Théorème 2.3.1 .
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle dérivable sur U. Si en un point x_0, la fonction f admet un minimum ou un maximum local, la dérivée de f s'annule en x_0.

Preuve. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f admet en x_0 un minimum local ,et quitte à remplacer U par un voisinage ouvert de x_0, on peut supposer que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout x de U. On a alors, pour $x \in U$ avec $x > x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, d'ou $f'(x_0) \geq 0$ en passant à la limite et de même, pour $x \in U$ et $x < x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, d'ou $f'(x_0) \leq 0$ .On en conclut que $f'(x_0) = 0$. ■

Théorème 2.3.2 ***(Rolle)***
Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle réel $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert a, b. Si f s'annule en a et en b, il existe un point $c \epsilon]a,b[$ ou la dérivée de f s'annule .

Preuve. Si f est constamment nulle sur $[a,b]$,on peut prendre pour c n'importe quel point de $]a,b[$ Si, au contraire, il existe un point ξ de $]a,b[$ tel que $f(\xi) \neq 0$, la fonction continue et dérivable $g : x \to f(\xi).f(x)$ prend en ξ une valeur strictement positive. Puisque l'intervalle $[a,b]$ est compact , g atteint en un point c son maximum, qui est strictement positive . On en déduit que c est distinct de a et de b . Le théoréme 30 appliqué à $]a,b[$ et à g donne que $g'(c) = f(\xi)\ f'(c) = 0$,donc que $f'(c) = 0$. ■

2.4 Le théorème des accroissements finis

Les énoncés qui précédent sont de nature locale. Pour pouvoir obtenir des résultats globaux sur les fonctions dérivables, il faut avoir un énoncé qui permette d'évaluer l'accroissement d'une fonction dérivable entre deux points fixés (accroissement "fini", par opposition aux accroissements " infinitésimaux" qui servent à définir la dérivée). C'est pourquoi le théoréme qui suit peut être considéré comme le résultat fondamental concernant les fonctions dérivables.

Théorème 2.4.1 ***(Théorème des accroissements finis)***
Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle réel $[a,b]$, dérivable en tout point de

$]a,b[$. *Alors il existe un point c de l'intervalle ouvert $]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Preuve. Posons $g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$
Puisque g est la somme de f et d'une fonction affine, elle est continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$. De plus, on a clairement $g(a)=g(b)=0$ On déduit alors du théorème de rolle l'existence d'un c dans $]a,b[$ tel que $g'(c)=0$. Et puisque $g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ceci achève la proof. ■

Corollaire 2.4.2 .
Soient U un intervale ouvert et f une fonction dérivable de U dans $\mathbb{R}$.Si la dérivée de f est bornée par M en valeur absolue sur U, la fonction f est M-lipschitzienne. En particulier, si la dérivée de f est identiquement nulle, f est constante .

Preuve. Soient a et b deux points de U. Si $a=b$, on a clairement

$$|f(b)-f(a)|=0\leq M|b-a|$$

Et si $a\neq b$, quitte à permuter a et b, on peut supposer $a<b$. Il résulte alors du théorème des accroiements finis que

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|=|\ f\ '(c)|\leq M$$

c'est-à-dire

$$|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$$

Si f'est nulle sur U, on a $M=0$, et on en déduit que f est constante . ■

Théorème 2.4.3 .
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$. Si la dérivée de f est positif (resp strictement positive, négative, strictement négative) sur $]a,b[$, la fonction f est croissante (resp strictement croissante,décroissante, strictement décroissante) sur $[a,b]$.

Preuve. Supposons $f'\geq 0$ et soient x et y dans $[a,b]$, avec $x<y$. Il existe, d'aprés théorème dés accroissements finis, un $z\in]x,y[$ tel que

$$\frac{f(y)\quad-\quad f(x)}{y-x}=f'(c)\geq 0$$

d'où l'on déduit

$$f(y) - f(x) = (y-x)\ f'(c) \geq 0$$

ce qui montre que f est croissante. On voit même que si $f^{'} > 0$,on a

$$f(y) - f(x) = (y-x)\ f'(c) > 0$$

ce qui montre que f est strictement croissante .
On raisonne de même si $f' \leq 0$ ou si $f' < 0$ ■

Théorème 2.4.4 .
Soient U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de U dans $\mathbb{R}$. On suppose que la dérivée f'est par tout strictement positive sur U. Alors f est un homéomorphisme de U sur un intervalle ouvert V, et la fonction réciproque $g = f^{-1}$ est dérivable sur V. On a de plus

$$g'(y) = \frac{1}{f' \circ g(y)}$$

Preuve. Puisque f est continue, $V = f(U)$ est conexe, donc est un intervalle. Il résulte du théorème précédent que f strictement croissante, donc que V ne peut contenir ni sa borne inférieure ni sa borne supérieure, ce que montre que V est un intervalle ouvert.
Soit $x_0 \in U$. Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe x_1 et x_2 dans U tels que $x_0 - \varepsilon < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \varepsilon$.
Alors, puisque f est strictement croissante, on a $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$, et pour tout $y \in]f(x_1), f(x_2)[$, on a $f^{-1}(y) \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, ce qui montre la continuité de f^{-1} et $f(x_0)$.
Donc f est un homéomorphisme de U sur V . Enfin, si $y_0 \in V$ et $x_0 = g(y_0)$, on a pour $y \in V$ et $y \neq y_0$,

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} = \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}}$$

qui tend vers $\frac{1}{f' \circ g(y_0)}$quand y tend vers y_0 puisque, alors, $g(y)$ tend vers $g(y_0)$. ■

2.5 Fonctions dérivables à valeurs dans un espace de Banach

On va maintenant étendre les définitions et résultats précédents au cas des fonction définiés sur un ouvert de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach.

Définition 2.5.1 .
Une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace de Banach E est dite dérivable en un point x_0 de U si le quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ possède une limite dans E quand x tend vers x_0 (par valeurs distinctes de x_0).La limite est alors appelée dérivée de f en $x_{0.}$
La fonction f est dite dérivable sur U si elle est dérivable en tout point de U. Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f la fonction à valeurs dans E définie sur U qui à tout point x de U associe la dérivée de f en x.

Notation 2.5.2 .
On note usuellement $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$la dérivée de f en x_0. Comme dans le cas d'une fonction a valeurs réelles, on peut définir , quand elles existent, la dérivée à droite $f'_d(x_0)$ et la dérivée à gauche $f\,'_g(x_0)$ d'une fonction f en x_0 par

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad et \quad f\,'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Les résultats suivants sont analogues à ceux qui été ont démontrés plus haut pour les fonctions dérivables et se démontrent de la même maniére.

Proposition 2.5.3 .
Toute fonction dérivable en un point y est continue.

Proposition 2.5.4 .
Toute fonction localement constante est dérivable, de dérivée nulle. Toute fonction affine est dérivable et sa dérivée est constante.

Théorème 2.5.5 .
Si f et g sont définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach E et dérivables en un point x_0 de U, leur somme $f + g$ est dérivable en x_0 et on a

$$(\ f + g\ )'(x_0) = \ f'(x_0) + g'(x_0)$$

Si, en outre, λ est un nombre réel, la fonction λf est dérivable en x_0 et

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda\ f'(x_0)$$

Théorème 2.5.6 .
Si f est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach

E, et λ une fonction réelle définie sur U, si f et λ sont dérivables en x_0, λf est dérivable en x_0 et

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda(x_0)\ f'(x_0) + \lambda'(x_0) f(x_0)$$

Théorème 2.5.7 .
Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions défines respectivement sur U et V, à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$ et dans un espace de Banach E.
On suppose que $f(U) \in V$, que f est dérivable en x_0 et que g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$.
Alors la fonctions $g \circ f : U \rightarrow E$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \,.\, f'(x_0) = g' \circ f(x_0) \,.\, f'(x_0)$$

Cas de la dimension finie.

Quand E est un espace vectoriel de dimension finie, on peut aisément se ramener au cas des fonctions réelles. Si E est de dimension n, *et si* $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E, toute fonctions f définie sur un ouvert U à valeurs dans E possède des fonctions coordonnées $(f_1, f_2, ..., f_n)$ à valeurs réelles et on a, pour tout x de U

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) .e_j$$

Théorème 2.5.8 .
Soit f Une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace E de dimension finie .
Alors, f est dérivable en point x_0 de U si et seulment si chacune des fonctions coordonnées de f est dérivable en x_0. Dans ce cas, les coordonnées de la dérivaée $f'(x_0)$ sont les dérivées en x_0 des fonctions coordonnées .

Preuve. Puisque f s'exprime comme la somme $\sum_{j=1}^{n} f_j(x) .e_j$, les formules de dérivation de sommes et de produit montrent que, si les fonctions f_j sont toutes dérivables en x_0, il en est de même de f et que $f'(x_0) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_0) .e_j$, d'où l'on déduit que les coordonnées de $f'(x_0)$ sur la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ sont les $f'_j(x_0)$. Inversement, chacune des formes linéaires coordonnées $\pi_j : E \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $x = \sum_{j=1}^{n} \pi_j(x) .e_j$ est continue sur E, puisque celui-ci est de dimension finie . Et on a $f_j(x) = \pi_j(f(x))$pour tout x de U. Donc, si f est dérivable en x_0, on a :

$$\frac{f_j(x) - f_j(x_0)}{x - x_0} = \pi_j\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

et ceci tend vers $\pi_j\ (f\ '(x_0))$. On en déduit donc que f_j, est dérivable en x_0, de dérivée $\pi_j\ (f\ '(x_0))$. ■

2.6 Inégalités des accroissements finis

En dépit des similitudes entre le cas des fonctions réelles et celui des fonctions à valeurs dans un espace de Banach, le théorème 2.4.1 ne s'étend pas à ce dernier cas.

Exemple 2.6.1 .
La fonction f *de* $\mathbb{R}$ *dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$f(x) = (\cos x, \sin x)$$

a en chaque point une dérivée de norme 1, *et il n' existe aucun point* c *de* $\mathbb{R}$ *tel que* $f(2\pi) - f(0) = 2\pi\ f\ '(c)$.
La dérivée de f *en* x *a pour coordonnées* $(-\sin x, \cos x)$. *Donc*

$$||f\ '(x)||^2 = sin^2\ x + cos^2\ x = 1.$$

Et puisque $f(2\pi) = f(0)$, *on ne peut avoir*

$$||f(2\pi) \quad - f(0)|| \ = 0 = \ 2\pi\, ||\ f'(c)|| \ = 2\pi.$$

Le théorème fondamental sera donné par l'énoncé suivant

Théorème 2.6.2 .
Soit f *une fonction continue sur l'intervalle* $[\ a, b\ ]$ *de* $\mathbb{R}$, *à valeurs dans un espace de Banach* E . *Si* f *est dérivable à droite en tout point de* $]a, b[$ *et vérifie* $||f\ '_d(x)|| \leq M$ *pour tout* x *de* $]a, b[$, *on a*

$$||f(b) - f(a)|| \ \leq M(b-a)$$

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$ et $a^{'} > a$. On considère l'ensemble

$$T_\varepsilon = \{x \in [a', b] : ||f(x) - f(a')|| \leq (M+\varepsilon)(x-a')\}$$

et on va montrer que $b \in T_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci montrera que

$$||f(b) - f(a')|| \leq (M + \varepsilon)(b - a')$$

pour tout $\varepsilon > 0$, donc que $||f(b) - f(a')|| \leq M\ (b - a')$ pour tout $a' > a$ et la démonstration sera achevée en passant à la limite quand a' tend vers a.
Il est clair que $a' \in T_\varepsilon$. Puisque f est continue, la fonction δ définie par

$$\delta(x) = ||f(x) - f(a')|| - (M + \varepsilon)(x - a')$$

est continue sur $[a, b]$, et $T_\varepsilon = \{x : \delta(x) \leq 0\}$ est fermé. Le compact non vide T_ε possède donc un plus grand élément $c \geq a'$, et on a donc

$$||f(c) - f(a')|| \leq (M + \varepsilon)(c - a')$$

Et si $c < b$, on a $||f\ '_d(c)|| < M + \varepsilon$.
La boule ouverte de E centrée en 0 et de rayon $M + \varepsilon$ est donc un voisinage de $f'_d(c)$: il en résulte qu'existe un voisinage W de c dans $]a, b[$ telque,
pour tout $x \in W\ /\{C\}$, on ait

$$\left\|\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right\| < M + \varepsilon$$

En particulier, $W \cap\ ]c, b[\ \neq \varnothing$, et pour $x \in W \cap\ ]c, b[$, on a

$$||\ f(x) - f(c)|| \leq (M + \varepsilon)(x - c)$$

Donc :

$$\begin{aligned} ||\ f(x) - f(a')|| &\leq ||\ f(c) - f(a')|| + ||\ f(x) - f(c)|| \leq (M + \varepsilon)(c - a') + (M + \varepsilon)(x - c) \\ &= (M + \varepsilon)(x - a') \end{aligned}$$

ce qui montre que $x \in T_\varepsilon$, contrairement à la définition de c. Donc $b = c \in T_\varepsilon$.
On peut obtenir une version légèrement plus générale du théorème précédent . Par souci de simplicité, nous ne la donnerons que dans le cas où f est dérivable . ■

Théorème 2.6.3 .
Soient f une fonction continue sur l'intervalle $[\ a, b\ ]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace de Banach E et g une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, Si f et g sont dérivables en tout

point de $]a,b[$ *et vérifient* $||f'(x)|| \leq g'(x)$ *pour tout* x *de* $]a,b[$ *,on a*

$$||f(b) - f(a)|| \leq g(b) - g(a)$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $\gamma : x \rightarrow g(x) + \varepsilon x$ est continue sur $[\, a, b\,]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\gamma'(x) \geq \varepsilon > 0$ pour tout x. C'est donc un homéomorphisme de $[\, a, b\,]$ sur $[\gamma(a), \gamma(b)]$, et γ^{-1} est dérivable en tout point de $]\gamma(a), \gamma(b)[$. On a alors , pour $\varphi = f \circ \gamma^{-1}$,

$$||\varphi'(y)|| = \left|\left| f' \circ \gamma^{-1}(y) \times \frac{1}{\gamma' \circ \gamma^{-1}(y)} \right|\right| = \frac{||f'(\gamma^{-1}(y))||}{\varepsilon + g'(\gamma^{-1}(y))} < 1$$

Si on applique à φ l'ingalité précédente, on obtient

$$||f(b) - f(a)|| = ||\varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))|| \leq \gamma(b) - \gamma(a) = g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a)$$

et on obtient le résultat cherché en passant à la limite quand ε tend vers 0. ■

Corollaire 2.6.4 .
Soient U *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction dérivable de* U *dans l'espace de Banach* E*. Si* $||f'(x)|| \leq M$ *pour tout* x *de* U*, la fonction* f *est M-lipchitzienne . En particulier, si* f'*est nulle sur* U*,* f *est constante.*

Preuve. Soient a et b deux points distincts de U. Quitte à permuter a et b, on peut supposer $a < b$. L'application du théorème précédent montre alors que

$$||f(b) - f(a)|| \leq M(b-a) = M|b-a|$$

d'où le résultat cherché .
Dans le cas où $f'(x) = 0$ pour tout x de U, on peut prendre $M = 0$, et en déduit que f est constante . ■

2.7 Primitives

Définition 2.7.1 .
Soient U *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue de* U *dans un espace de Banach* E*.On dit que la fonction* φ *est une primitive de* f *sur* E *si elle est dérivable et si sa dérivée est égale à* f*. Toute primitive de la fonction continue* f *est nécessairement de classe* ζ^1*.Si* φ_1*et* φ_2*sont deux primitives de* f*, leur différence a une dérivée nulle , donc*

est localement constante .Il en résulte, en particulier, que si U est un intervalle, on a unicité de la primitive de f à l'addition près d'une constante.

Théorème 2.7.2 .
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de U dans un espace de Banach E. Alors f posséde une primitive.

Preuve. Voir 1 ■

2.8 Formule de Taylor

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe ζ^1 de U dans un espace de Banach E, la dérivée f' de f est une fonction continue de U dans F. Si cette dérivée est elle -même de classe ζ^1 , on dit que f est de classe ζ^2 et on appelle dérivée seconde de f la dérivée de f'.

Plus généralement, on définit par récurrence les fonctions de classe ζ^n, pour n entier supérieur à 1, comme les fonctions de classe ζ^1 dont la dérivée est de classe ζ^{n-1}.On note alors $f^{(n)}(x)$la dérivée $n^{ème}$ de f en x ,c'est-à-dire la dérivée$(n-1)^{ème}$ def' on x.
On a alors une généralisation du théorème des accroissements finis, qui permet une estimation de l'accroissement d'une fonction de classe ζ^n entre deux points fixés quand on connaît les dérivée successives de cette fonction.

Théorème 2.8.1 ***(Taylor)***
Soient U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe ζ^n sur U. Si a et b sont deux points de U. on a l'inégalité :

$$\left\|f(b)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(b-a)^j}{j!}f^{(j)}(a)\right\|\leq\frac{|b-a|^n}{n!}\sup_{x\in[a,b]}\left\|f^{(n)}(x)\right\|$$

Preuve. Voir [1] ■

Théorème 2.8.2 ***(Formule deTaylor-Young)***
Si U est un ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe ζ^n de U dans un espace de Banach E ,on a pour tout $a\in U$,

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(x-a)^j}{j!}f^{(j)}(a)+(x-a)^n\varepsilon_n(x)$$

où ε_n est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers a .

Preuve. Si on pose

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$$

Il est clair que g est de classe ζ^n sur U, et que les dérivées $g^{(j)}(a)$ sont nulles pour 0 $\leq j \leq n$.
Par continuité de $g^{(n)}$ en a, il existe pour tout $\varepsilon \geq 0$ un $r > 0$ tel que $]a-r, a+r[$ $\subset U$ et que $\| g^{(n)}(x) \| < \varepsilon$ pour$| x-a |< r$. On obtient alors, pour $x \in]a-r, a+r[$, d' aprés l' inégalité précédente,

$$||g(x)|| = \left\| g(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^n}{n!} \underset{y \in [a,x]}{sup} ||g^n(x)|| \leq \frac{\varepsilon}{n!} |x-a|^n$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_n(x) = (x-a)^{-n} g(x) = (x-a)^{-n} \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right) \to 0$$

lorsque x tend vers a ,ce qui est le résultat cherché. ∎

Chapitre 3

Fonctions différentiables

On cherche maintenant à étendre la notion de fonction dérivable au cas de fonctions définies sur un domaine de dimension supérieure à 1. Puisque le quotient de l'accroissement de la fonction par l'accroissement de la variable (dont la limite définit la dérivée) n'a plus de sens dans ce cadre, on doit trouver une définition mieux adaptée.On va, en fait, définit les fonctions différentiables en un point comme des fonctions qu'on peut "bien" approcher par des fonctions affines, et on verra que cette définition, dans le cas des fonctions de variable réelle, redonne la notion de fonction dérivable.

3.1 Notations de Landau

Définition 3.1.1 .

soient X un espace topologique, a un point de X, f et g deux fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On dira que g est $o(f)$ quand x tend vers a - et on écrira $g = o(f)$ - si

$$\forall \varepsilon \succ 0 \ \exists V \text{ voisinage de } a \text{ dans } X \text{ telque } \forall x \in V \quad | g(x) | \leq \varepsilon \mid f(x) \mid$$

On dira de mème que g est $O(f)$ quand x tend vers a -et on écrira $g = O(f)$- si

$$\exists M \succ 0 \ \exists V \text{ voisinage de } a \text{ dans } X \text{ tel que } \forall x \in V \quad | g(x) | \leq M \mid f(x) \mid$$

Dire que $g = o(f)$ signifie que le quotient $\frac{|g(x)|}{|f(x)|}$ tend vers 0 quand x tend vers a .
Et dire que $g = O(f)$signifie que ce quotient est borné au voisinage de a .
On doit faire attention à la notation $g = o(f)$: il est clair qu'on peut avoir $g_1 = o(f)$et $g_2 = o(f)$ sans avoir $g_1 = g_2$. On devrait plutôt écrire $g \in o(f)$, mais la notation est maintenant traditionnelle.

Proposition 3.1.2 .

Si $g = o(f)$, alors $g = O(f)$.

Ceci se déduit immédiatement des définitions.

Théorème 3.1.3 .
Si f, g_1 et g_2 sont des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ et si g_1 et g_2 sont $o(f)$quand x tend vers a, $g_1 + g_2$ est $o(f)$ quand x tend vers a .
Si f , g_1 et g_2 sont des fonctions de X dans E et si g_1 et g_2 sont $O(f)$ quand x tend vers a , $g_1 + g_2$ est $O(f)$ quand x tend vers a.
Ceci se déduit sans peine du fait que si $\mid g_1(x) \mid \leq q_1 \mid f(x) \mid$ pour tout x d'un voisinage V_1de a et si $\mid g_2(x) \mid \leq q_1 \mid f(x) \mid$ pour tout x d'un voisinage V_2 de a, on a

$$\mid (g_1 + g_2)(x) \mid \leq \ (q_1 + q_2) \mid f(x) \mid$$

pour tout x de $V_1 \cap V_2$.

Théorème 3.1.4 .
Si f_1, f_2, g_1 et g_2 sont des fonctions de X dans $\mathbb{R}$, si g_1 est $o(f_1)$ et g_2 est $O(f_2)$ quand x tend vers a, alors g_1g_2 est $o(f_1f_2)$ quand x tend vers a.
En particulier, si g_1 est $o(f_1)$ et g_2 est $o(f_2)$, alors g_1g_2 est $o(f_1f_2)$.
Si f_1, f_2, g_1 et g_2 sont des fonctions de X dans $\mathbb{R}$, si g_1 est $O(f_1)$ et g_2 est $O(f_2)$ quand x tend vers a, alors g_1g_2 est $O(f_1f_2)$ quand x tend vers a.
Supposons $g_1 = o(f_1)$ et $g_2 = O(f_2)$. Soit $\varepsilon > 0$. Si V_2 est un voisinage de a tel que $\mid g_2(x) \mid \leq M \mid f_2(x) \mid$ pour tout x de V_2, il existe un voisinage V_1 de a tel que $\mid g_1(x) \mid \leq \frac{\varepsilon}{M} \mid f_1(x) \mid$ pour tout x de V_1. On a alors

$$\mid g_1g_2(x) \mid \leq M.\frac{\varepsilon}{M} \mid f_1f_2(x) \mid = \varepsilon \mid f_1f_2(x) \mid$$

pour tout x de $V_1\cap$ V_2. Ceci signifie que $g_1g_2 = o(f_1f_2)$.
Supposons $g_1 = O(f_1)$ et $g_2 = O(f_2)$. Alour , il existe des voisinagesV_1 et V_2 de a et des nombres M_1 et M_2 tels que $\mid g_j(x) \mid \leq M_j \mid f_j(x) \mid$ pour tout x de V_j $(j = 1, 2)$. On en déduit que

$$\mid g_1g_2(x) \mid \leq M_1M_2 \mid f_1f_2(x) \mid$$

pour tout x de $V_1 \cap V_2$.

Extension des définitions

Plus généralement, si f et g sont des fonctions de X dans des espaces de Banach E et F , on dira que g est $o(f)$ si la fonctions$\parallel g(.) \parallel : x \longmapsto \parallel g(x) \parallel$ est o($\parallel f(.) \parallel$) et on dira que g est $O(f)$ si la fonction $\parallel g(.) \parallel :x \longmapsto \parallel g(x) \parallel$ est $O(\parallel f(.) \parallel)$.

3.2 Différentiabilité

Définition 3.2.1 .
Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et f une fonction de U dans F. On dit que f est différentiable en un point a de U s'il existe une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(x) - f(a) - T.(x - a) = o(x - a)$$

quand x tend vers a.
Autrement dit, la différentiabilité de f en a signifie qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tel que , pour $x \in U$ avec $\parallel x - a \parallel < \delta$, on ait

$$\parallel f(x) - f(a) - T.(x - a) \parallel \leq \varepsilon \parallel x - a \parallel$$

Ceci signifie encore que la fonction affine continue $x \longmapsto f(a) + T.(x - a)$ diffère de la fonction f au voisinage de a d'une fonction infiniment plus petite que la distance à a.

Remarque 3.2.2 .
La différentiabilité de f en a ne dépend que de la topologie des espaces E et F.
En fait, si on remplace les normes de E et de F par des normes équivalentes, les applications linéaires continues de E dans F sont inchangées, ainsi que les applications de U dans F qui sont $o(x - a)$quand x tend vers a.

Proposition 3.2.3 .
Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, f une fonction de U dans F et a un point de U. Si V est un voisinage ouvert de a dans U et si la restriction $f\,|_V$ de f à V est différentiable en a, f est différentiable en a.

Proposition 3.2.4 .
Si f est différentiable en a, elle y est continue. Puisque T est continue et que l'on a , au voisinage de a,

$$\parallel f(x) - f(a) - T.(x - a) \parallel \leq \varepsilon \parallel x - a \parallel$$

on a nécessairement $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$ ce qui traduit la continuité de f en a.

Théorème 3.2.5 .
Si $f : U \to F$ est différentiable en a, il existe une seul application linéaire $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(x) - f(a) - T.(x - a) = o(x - a)$.

Preuve. Supposons que T_1 et T_2 possèdent cette propriété. On a alors, en notant $g_j(x) = f(x) - f(a) - Tj.(x-a)$:

$$\begin{aligned}(T_2 - T_1).(x-a) &= (f(x) - f(a) - T_1.(x-a)) - (f(x) - f(a) - T_2.(x-a)) \\ &= g_1(x) - g_2(x) \\ &= o(x-a)\end{aligned}$$

Il en résulte que, pour tout $h \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda(T_2 - T_1).h = (T_2 - T_1).(\lambda h) = o(\lambda)$$

quand λ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$, puisque, pour $|\lambda|$ assez petit, le point $x = a + \lambda h$ appartient à U. On a donc

$$\| \lambda(T_2 - T_1).h \| = |\lambda| \| (T_2 - T_1).h \| = o(\lambda)$$

ce qui entraine $\| (T_2 - T_1).h \| = 0$, c'est –à–dire $(T_2 - T_1).h = 0$. Et comme h est arbitraire dans E, l'application $T_2 - T_1$ est nulle, c'est–à–dire $T_1 = T_2$. ■

Définition 3.2.6 .
Si la fonction f est différentiable en a, on appelle différentielle de f au point a l'unique application linéaire $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(x) - f(a) - T.(x-a) = o(x-a)$$

Notation 3.2.7 .
On notera le plus souvent $f'(a)$ la différentielle de f au point a . une autre notation fréquente pour la différentielle de f est $\nabla f(a)$.

Définition 3.2.8 .
La fonction $f : U \to F$ sera dite différentiable sur U si elle est différentiable en chaque point de U. La fonction $f : U \to F$ sera dite continuement différentiable sur U, ou de classe ζ^1 sur U, si elle est différentiable en chaque point de U et si l'application différentielle $f' : U \to \mathcal{L}(E, F)$ est contiue de U dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E, F)$.

On va examiner maintenant le lien entre dérivabilité et différentiabilité pour les fonctions d'une variable réelle.

Théorème 3.2.9 .
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction de U dans un espace de Banach F. Alors f est différentiable en un point x_0 de U si et seulement si elle y est dérivable. De plus, si m

$\in F$ est la dérivée de f en x_0, la différentielle de f en x_0 est l'application linéaire T_m : $\mathbb{R} \to F$ définie par

$$T_m(\lambda) = \lambda.m$$

Preuve. Supposons f dérivable en x_0, de dérivée $m = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
Alors la fonction $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m$ tend vers 0 en x_0 . Et puisque l'on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)(m + \varepsilon(x)) \\ &= f(x_0) + T_m(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \\ &= f(x_0) + T_m(x - x_0) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

on voit que f est différentiable en x_0 et que sa différentielle est $T_m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$.
Inversement, si f est différentiable en x_0, de différentielle $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$, et si on pose $m = T(1)$, on a, par linéarité, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(\lambda) = \lambda T(1) = \lambda.m = T_m(\lambda).$$

Donc, on a

$$f(x) = f(x_0) + m.(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$, et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m + \varepsilon(x) \to m$ quand $x \to x_0$.
Ceci démontre que f est dérivable en x_0, de dérivée m. ■

Théorème 3.2.10 .
Si T est une application linéaire continue de E dans F et a un élément de F, la fonction affine $f : x \to T.x + a$ est différentiable sur E et sa différentielle est égale à T en tout point de E.

Preuve. On a pour tout x_0 et tout x de E :

$$f(x) - f(x_0) - T.(x - x_0) = (T.x + a) - (T.x_0 + a) - T.(x - x_0) = 0 = o(x - x_0)$$

et ceci justifie le résultat annoncé. ■

3.3 Opérations sur les fonctions différentiables

Théorème 3.3.1 .
Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, f et g deux fonctions de U

dans F. Si f et g sont diffèrentiables en un point x_0 de U, il en est de même de $f+g$. Et on a

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Preuve. Par définition, les fonction

$$\varepsilon(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x - x_0)$$

et

$$\eta(x) = g(x) - g(x_0) - g'(x_0).(x - x_0)$$

sont $o(x - x_0)$quand x tend vers x_0. On en déduit que

$$\varepsilon(x) + \eta(x) = (f+g)(x) - (f+g)(x_0) - (f'(x_0) + g'(x_0)).(x - x_0)$$

est aussi $o(x - x_0)$, ce qui signifie que f $+g$ est différentiable en x_0, de différentielle $f'(x_0) + g'(x_0)$. ■

Théorème 3.3.2 .
Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ et g une fonctions de U dans F. Si f et g sont différentiables en un point x_0 de U, il en est de même de $f.g$. Et on a, pour $h \in E$

$$(f.g)'(x_0).h = (f'(x_0).h)\, g(x_0) + f(x_0)(g'(x_0).h)$$

Preuve. Par définition, les fonctions

$$\varepsilon(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0).(x - x_0)$$

$$\eta(x) = g(x) - g(x_0) - g'(x_0).(x - x_0)$$

sont $o(x - x_0)$quand x tend vers x_0. On en déduit que
$f(x).g(x) = (f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + \varepsilon(x)).(g(x_0) + g'(x_0).(x - x_0) + \eta(x))$
$= f(x_0).g(x_0) + (f'(x_0).(x - x_0))\, g(x_0) + f(x_0).(g'(x_0).(x - x_0))$
$+f(x_0).\eta(x) + \varepsilon(x).g(x_0) + f'(x_0).(x - x_0).\eta(x) + \varepsilon(x).g'(x_0).(x - x_0)$
$+(f'(x_0).(x - x_0)).(g'(x_0).(x - x_0)) + \varepsilon(x).\eta(x)$
Et il suffit de remarquer que chacun des six derniers termes de cette somme est $o(x - x_0)$.
Ceci est clair pour les termes
$(f(x_0).\eta(x), \varepsilon(x).g(x_0), f'(x_0).(x - x_0).\eta(x), \varepsilon(x).g'(x_0).(x - x_0))$ et $\varepsilon(x).\eta_{(x).}$
Puisque $f'(x_0) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, on a $|\ f'(x_0).(x - x_0)\ | \leq \| f'(x_0) \| . \| x - x_0 \|$ et de même ,puisque $g'(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$,on a $\| g'(x_0).(x - x_0) \| \leq \| g'(x_0) \| . \| x - x_0 \|$, d'ou

$\| (f'(x_0) . (x - x_0)) . (g'(x_0)(x - x_0)) \| \leq \| f'(x_0) \| . \| g'(x_0) \| . \| x - x_0 \|^2 = o(x - x_0)$
Ceci achève la démonstration. ■

Théorème 3.3.3 .
Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de E et V un ouvert de F, f une fonction de U dans F et g une fonctions de V a valeurs dans G. Si $f(U) \subset V$, si f est différentiable en un point x_0 de U, et g différentiable en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est diffiretiable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0)$$

Preuve. Par définition, les fonctions

$$\varepsilon(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) . (x - x_0) = f(x) - y_0 - f'(x_0) . (x - x_0)$$

et

$$\eta(y) = g(y) - g(y_0) - g'(y_0) . (y - y_0)$$

sont respectivement $o(x - x_0)$ quand x tend vers x_0 et $o(y - y_0)$ quand y tend vers y_0. on en déduit que

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(y_0) + g'(y_0) . (f(x) - y_0) + \eta(f(x) - y_0) \\ &= g(y_0) + g'(y_0) . (f'(x_0) . (x - x_0) + \varepsilon(x)) + \eta(f'(x_0) . (x - x_0) + \varepsilon(x)) \\ &= g(y_0) + g'(y_0) . (f'(x_0) . (x - x_0)) + g'(y_0) . \varepsilon(x) + \eta(f'(x_0) . (x - x_0) + \varepsilon(x)) \end{aligned}$$

puisque $\| g'(y_0) . \varepsilon(x) \| \leq \| g'(y_0) \| \| \varepsilon(x) \| = o(x - x_0)$, que

$$\| f'(x_0) . (x - x_0) \| \leq \| f'(x_0) \| \| x - x_0 \| = O(x - x_0)$$

donc que $f'(x_0) . (x - x_0) + \varepsilon(x) = O(x - x_0)$et que $\eta(y) = o(y - y_0)$ donc que

$$\frac{\| \eta(f'(x_0) . (x - x_0) + \varepsilon(x)) \|}{\| x - x_0 \|} \leq \frac{\| \eta(f'(x_0) . (x - x_0) + \varepsilon(x)) \|}{\| f'(x_0) . (x - x_0) + \varepsilon(x) \|} . \frac{\| f'(x_0) . (x - x_0) + \varepsilon(x) \|}{\| x - x_0 \|} \to 0$$

quand x tend vers x_0, on obtient que $\eta(f'(x_0) . (x - x_0) + \varepsilon(x)) = o(x - x_0)$, d'ou le résultat cherché. ■

3.4 Opérations sur les fonctions de classe ζ^1

Théorème 3.4.1 .
Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E,f et g deux fonctoins de U

dans F. Si f et g sont de classe ζ^1sur U, il en est de même de $f+g$.

Preuve. Le théorème 3.3.1 montre que $f+g$ est différentiable en tout point de U .Il reste a montre que la différentielle de$f+g$ est continue de U dans $\mathcal{L}(E,F)$. Et ceci résulte immédiatement de ce que $(f+g)'=f'+g'$ et que la somme de deux applications continues à valeures dans $\mathcal{L}(E,F)$ est elle-même continue . ■

Théorème 3.4.2 .
Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ et g une fonction de U dans F. Si f et g sont de classe ζ^1sur U, il en est de même de $f.g$.

Preuve. La fonctions $f.g$ est différentiable en tout point de U et la différentielle de $f.g$ est la fonction de U a valeurs dans $\mathcal{L}(E,F)$définie par

$$(f.g)'(x_0).h=(f'(x_0).h)\,g(x_0)+f(x_0)\,(g'(x_0).h)$$

On a donc, pour x et x_0 dans U et h dans E :

$$(f.g)'(x).h-(f.g)'(x_0).h=(f'(x).h)\,g(x)-(f'(x_0).h)\,g(x_0)+f(x)\,(g'(x).h)-f(x_0)\,(g'(x_0).h)$$

donc
$\| \left((f.g)'(x)-(f.g)'(x_0)\right).h \| \leq \| (f'(x).h)\,g(x)-(f'(x_0).h)\,g(x) \|$

$+\| (f'(x_0).h)\,g(x)-(f'(x_0).h)\,g(x_0) \|$
$+\| f(x)\,(g'(x).h)-f(x)\,(g'(x_0).h) \| + \| f(x)\,(g'(x_0).h)-f(x_0)\,(g'(x_0).h) \|$
dont on déduit
$\| \left((f.g)'(x)-(f.g)'(x_0)\right) \| \leq | f'(x)-f'(x_0) | . \| g(x) \| + | f'(x_0) | \| g(x)-g(x_0) \|$
$+ | f(x) | \| g'(x)-g'(x_0) \| + | f(x)-f(x_0) | \| g'(x_0) \|$
et cette dernière quantité tend vers 0 quand x tend vers x_0 puisque f, f', g et g' sont continues en x_0. Ceci montre la continuité de $(f.g)'$ en x_0. ■

Théorème 3.4.3 .
Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de E et V un ouvert de F, f une fonctions de U dans F et g une fonctions de V à valeurs dans G. Si $f(U)\subset V$, si f est de classe ζ^1sur U et g de classe ζ^1sur V, alors $g\circ f$ est de classe ζ^1sur U.

Preuve. La fonction $g\circ f$ est différentiable en tout point de U. Pour montrer la continuité de $(g\circ f)'$, on remarque que, puisque

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)\circ f'(x_0)$$

on a

$$(g \circ f)'(x) = \gamma(f'(x), g' \circ f(x))$$

où γ désigne l'application bilinéaire continue $(u, v) \mapsto v \circ u$ de $\mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$ dans $\mathcal{L}(E, G)$. Puisque f , f' et g' sont continues, il en est de même de $g' \circ f$ et donc de $(g \circ f)'$.
■

3.5 Le théorème des accroissements finis

Comme pour les fonctions dérivables d'une variable reélle, le résultat fondamental du calcul différentiel est celui qui à partir de la connaissance des différentielles d'une fonction en chaque point de son domaine, permet d'estimet l'accroissement de cette fonction entre deux points fixes à l'avance. On se ramène pour cela au cas des fonctions d'une variable, en considérant la restriction de la fonction au segment qui joint les deux points.

Théorème 3.5.1 .
Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert convexe de E et f une fonction différentiable sur U. Si on a $\| f'(x) \| \leq M$ pour tout x de U, on a pour tout a et tout b de U :

$$\| f(b) - b(a) \| \leq M \| b - a \|$$

Preuve. Puisque U est supposé convexe, on a pour a et b dans U et pour $t \in [0, 1]$, $a + t(b - a) \in U$.
Il en résulte que la fonction $\psi : [0, 1] \to F$ définie par

$$\psi(t) = f(a + t(b - a))$$

composée de f et de la fonction affine $t \mapsto a + t(b - a)$ est continue sur $[0, 1]$ et différentiable en tout point de $]0, 1[$. Sa différentielle en t est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans F

$$\lambda \mapsto f'(a + t(b - a)) . (\lambda(b - a))$$

ce qui signifie que la dérivée de ψ en t est

$$\psi'(t) = f'(a + t(b - a)) . (b - a) .$$

On a donc

$$\| \psi'(t) \| \leq \| f'(a + t(b - a)) \| \| b - a \| \leq M \| b - a \|$$

et il résulte alors du théorème 2.6.2 que

$$\| f(b) - f(a) \| = \| \psi(1) - \psi(0) \| \leq (1-0) M \| b-a \| = M \| b-a \|$$

qui est le résultat cherché. ■

Remarque 3.5.2 .
Il résulte de la preuve qui précède que l'inégalité

$$\| f(b) - f(a) \| \leq M \| b-a \|$$

est valable dés que le segment $[a,b]$ *est tout entier continue dans le domaine de* f *et que la différentielle est majorée en norme par* M *sur ce segment.*

Corollaire 3.5.3 .
Soient E *et* F *deux espaces de Banach,* U *un ouvert convexe de* E *et* f *une fonction différentiable sur* U*. Si on a* $\| f'(x) \| \leq M$ *pour tout* x *de* U*, la fonction* f *est M-lipschitzienne.*

Ceci résulte immédiatement du théorème précédent.

Corollaire 3.5.4 .
Soient E *et* F *deux espaces de Banach,* U *un ouvert connexe de* E *et* f *une fonction différentiable sur* U*. Si* f' *est nulle en tout point de* U*, alors* f *est constante.*

Preuve. Il résulte du corollaire précédent, avec $M = 0$, que f est constante sur chaque boule ouverte contenue dans U, donc localement constante. Et si U est connexe, on en déduit que f est constante. ■

L'hypothèse de convexité de U, qui a été utilisée pour pouvoir étudier la restriction de f au segment d'extrémités a et b ne peut être remplacée par la connexité de U. On a en effet l'exemple suivant :

Exemple 3.5.5 .
Soient U *l'ouvert de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^2$ *défini par*

$$U = \left\{ (x,y) : x > 0 \text{ et } x^2 + y^2 > 1 \right\}$$

et $\psi : U \to \mathbb{R}$ *telle que* $\psi(x,y) = arctg \frac{y}{x}$.
Alors U *est connexe, la différentielle de* ψ *vérifie* $\| \psi'(x,y) \| < 1$ *pour tout* (x,y) *de* U *et* ψ *n'est pas k-lipschitzienne pour* $k < \frac{\pi}{2}$.

Preuve. Il est aisé de voir que U est réunion de demi-droites parallèles à l'axe des x, qui coupent toutes la droite d'équation $x = 2$, et d'en déduire la connexité de U.
Par ailleurs, ψ est la composée de la fonction arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et du produit des fonctions $(x, y) \mapsto y$ et $(x, y) \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. L'utilisation des théorème 3.3.2 et 3.3.3 montre alors que ψ est différentiable et que, pour $h = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\psi'(x,y).h = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \times \left(\frac{1}{x}v + y\frac{-u}{x^2}\right) = \frac{xv - yu}{x^2+y^2}$$

d'ou l'on déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\mid \psi'(x,y).h \mid^2 \leq \left(\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\left(u^2+v^2\right) = \frac{\parallel h \parallel^2}{x^2+y^2}$$

donc que $\parallel \psi'(x,y) \parallel \leq (x^2+y^2)^{\frac{-1}{2}} < 1$.

Enfin, si a_n et b_n désignent respectivement les points $\left(\frac{1}{n}, -\frac{n+1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)$ de U, on vérifie sans peine que $\parallel b_n - a_n \parallel \to 2$ et que

$$f(b_n) - f(a_n) = 2 \arctan(n+1) \to \pi$$

donc que ψ ne peut être k-lipschitzienne sur U pour aucun $k < \frac{\pi}{2}$.
En dépit du contre-exemple précédent, on peut, dans certains cas, utiliser le théorème des accroissements finis dans des domaines non convexes, comme dans l'exemple suivant. ■

Théorème 3.5.6 .
Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, a un point de U et f une application différentiable de $U \setminus \{a\}$ dans F. On suppose que E est de dimension au moins 2, et que f' posséde une limite φ en a. Alors f se prolonge en une fonction différentiable sur U, et $f'(a) = \varphi$

Preuve. Soit g la fonction définie sur $U \setminus \{a\}$ par

$$g(x) = f(x) - \varphi.x$$

Alors g est différentiable sur $U \setminus \{a\}$ et on a $g'(x) = f'(x) - \varphi$.
Il existe un $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$ et que $\parallel f'(x) - \varphi \parallel \leq 1$ pour tout x de $B(a,r) \setminus \{a\}$ si x et y sont deux point de $B(a,r)$ tels que le segment $[x,y]$ ne contienne pas a, il résulte du théorème des accroissement finis(remarque 3.5.2), qu'on a

$$\parallel g(x) - g(y) \parallel \leq \parallel x - y \parallel$$

pour x fixé dans $B(a,r) \setminus \{a\}$, l'ensemble $L_x = \{y : \|g(y) - g(x)\| \leq \|x - y\|\}$, qui est fermé dans $B(a,r) \setminus \{a\}$ puisque g est continue, contient donc toute la boule $B(a,r)$ à l'exception éventuelle de la droite passant par x et a. Mais puisque E est de dimension au moins 2, cette droite est d'intérieur vide, ce qui montre que $L_x = B(a,r) \setminus \{a\}$.
On en déduit que g est 1-lipschitzienne sur $B(a,r) \setminus \{a\}$.
On posera $\alpha = g(a) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \varphi.a + \alpha$, et on prolongera f à $B(a,r)$ en posans $f(a) = \alpha + \varphi.a$.
Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe un $\rho < r$ tel que $\|f'(x) - \varphi\| \leq \varepsilon$ en tout point x de $B(a,\rho) \setminus \{a\}$. On voit alors comme plus haut que si x et y sont deux points de $B(a,\rho)$ distincts de a, on a

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$$

Et en faisant tendre y vers a, on obtient

$$\|f(x) - f(a) - \varphi.(x - a)\| = \|g(x) - \alpha\| \leq \varepsilon \|x - a\|$$

pour tout x de $B(a,r)$, ce qui montre que f est différentiable en a, de différentielle φ. ■

Bibliographie

[1] J.S. Raymond. Topologie, Espaces Normés, Calcul Différentiel et Variable Complexe – Université Pierre et Marie Curie / Décembre 2003

[2] F. Cottet-Emard, Algèbre linéaire et bilinéaire, Boeck Supérieur s.a, 2006.

[3] L. Todjihounde. Topologie élémentaire -2e Edition- , Cépaduès-Edition, Janvier 2013.

[4] D. Sondaz, Introduction à la topologie, Cépaduès-Edition, Décember 2008.

Conclusion

Nous sommes accomplir ce modeste travail que nous avons touché à travers les trois chapitre d'étude des fonctions dérivables et fonctions différentiables.

Dont à partir de ce thème nous donnons les définitions des fonctions dérivables et fonctions différentiables, le théorème des accroissements finis et sa généralisation qui permet une estimation de l'accroissement d'une fonction de classe C^n entre deux points fixés quand on connait les dérivées successives de cette fonction.