

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire
Abd elhafid boussof Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence

En: - Filière mathématiques

Mesure complexes et singée

**Préparé par : CHETTAH SOUMIA
HALLOUFI KHAOULA
TAHRAOUI KENZA**

Encadrer par : MEHAZZEM ALLAL

Année universitaire : 2014/2015

Remerciements

Nous remercions Allah, le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour l'accomplissement de ce mémoire.

En premier lieu nous exprimons toute notre gratitude pour notre encadreur Mr MEHAZZEM ALLAL pour ses précieux conseils, ses disponibilités, la confiance qu'il nous a toujours témoignée et la sollicitude dont elle nous a entouré, et ce tout au long de l'élaboration du présent travail chaleureux apporté nous remercions aussi nos parents, pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis. Pour nous permettre de suivre nos études dans les meilleures conditions et de nous avoir encouragé tout au long de ces années et bien sur les sœur et les frère . Enfin, nous exprimons nos plus remerciements à toute Personne qui nous a aidé à élaborer ce travail de proche ou de loin toutes les amis au Département de mathématique et informatique , et ailleurs, pour leur disponibilité et leur soutien.

Table des matières

Introduction Générale	2
1 MESURES	3
1.1 Mesure	3
1.1.1 La restriction d'une mesure :	7
1.1.2 L'addition de deux mesures :	7
1.1.3 La multiplication par un réel positif :	7
1.2 La mesure de lebesgue	9
2 Mesure complexes	12
2.1 Mesure complexes	12
2.2 Mesures signés	14
2.3 Hahn-Jordan	16
2.4 Mesures complexes	18
Bibliographie	19

Introduction Générale

En mathématiques, une mesure positive (ou simplement mesure quand il n'y pas de risque de confusion) est une fonction qui associe une grandeur numérique à certains sous-ensembles d'un ensemble donné il s'agit d'un important concept en analyse et en théorie des probabilités. Intuitivement, la mesure d'un ensemble ou sous ensemble est similaire à la notion de taille, on de cardinal pour les ensemble discrets. Dans ce sens, la mesure est une généralisation des concepts de longueur, air ou volume dans des espaces de dimension.

Notre mémoire comporte deux chapitres. Dans le premier chapitre une introduction de bases et définitions d'une mesure positive est donnée. Pour le deuxième chapitre le but est d'introduire les mesures signées ainsi que les principaux théorèmes de décomposition (théorème de décomposition de Jordan). Nous nous attachons à la définition des mesure signée ainsi qu'à leurs relations avec les mesures. En ce concerne les mesures complexes se définissent par analogie avec les nombres complexes, sachant que une mesure signée finie est mesure complexe particulière.

Chapitre 1

MESURES

1.1 Mesure

Nous allons maintenant donner un sens mathématique précis à la notion de mesure. Dans tout ce paragraphe, l'espace de base E est fixé et muni d'une tribu $\mathcal{E}$ également fixée (on dit parfois que le couple $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable, ce qui exprime bien qu'on a les ingrédients nécessaire à la construction des mesures).

Définition 1.1.1 Une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ est une application μ de $\mathcal{E}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$, vérifiant “l'axiome de σ -additivité” suivant :

(SA) σ -additivité : $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ qui sont deux-à-deux disjoints (i.e. $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$), ainsi que la propriété $\mu(\emptyset) = 0$. La mesure μ est dite finie, ou de masse totale finie, si $\mu(E) < \infty$. Une mesure est donc une application sur la tribu $\mathcal{E}$; mais par abus de langage la quantité $\mu(A)$ pour un $A \in \mathcal{E}$ s'appelle la “mesure de l'ensemble A ” (ou parfois : la “valeur de μ sur A ”).

Dans l'axiome de σ -additivité (SA), la réunion $\cup_n A_n$ ne dépend pas de l'ordre par lequel on numérote les A_n , la somme $\sum_n \mu(A_n)$ ne dépend pas non plus de l'ordre de sommation.

On verra plus loin que les propriétés (SA) impliquent la propriété d'additivité (A), ce qui n'est pas complètement évident a-priori. Une application de $\mathcal{E}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ qui vérifie seulement (A) s'appelle une mesure additive, bien que ce ne soit pas nécessairement une mesure. Intuitivement parlant, la notion de mesure additive est plus naturelle que celle de mesure, que ce soit pour les mesures “de volume”, “de masse”, évoquées plus haut, ou dans le cadre de la théorie des probabilités. Mais elle a un défaut rédhibitoire : la classe des mesures additives a une structure mathématique extrêmement

pauvre, ne permettant en particulier pas de définir une notion satisfaisante d'intégrale par rapport à ces mesures additives. On est donc conduit à utiliser les mesures au sens de la définition c'est la forme de l'axiome de σ -additivité (SA) qui nous oblige à considérer comme classe d'ensembles "mesurables" une tribu au lieu de la notion plus simple d'algèbre.

Le fait que $\mu(A) \geq 0$ pour tout A est une restriction propre à ce cours : il conviendrait d'appeler la notion définie ci-dessus une mesure positive, mais pour des raisons de simplicité nous ne le ferons pas en général. Le fait que $\mu(A)$ puisse être infini pour certains A est indispensable pour les applications. Par exemple si $E = \mathbb{R}$ et si μ représente la mesure de longueur, $\mu(\mathbb{R})$ (qui est la "longueur totale" de $\mathbb{R}$) vaut $+\infty$.

Exemple 1.1.2 1) La mesure nulle est celle qui vaut $\mu(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{E}$ et la σ -additivité (SA) sont évidemment vérifiées.

2) La mesure infinie est celle qui vaut $\mu(A) = +\infty$ pour tout $A \in \mathcal{E}$ qui n'est pas vide, et $\mu(\emptyset) = 0$: (SA) est évidemment vérifié.

3) La mesure de Dirac en un point x : c'est la mesure notée $\mathcal{E}_x$, qui vaut

$$\mathcal{E}_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Là encore (SA) est évidemment vérifié. Si $E = \mathbb{R}^3$, la mesure $\mathcal{E}_a$ peut être interprétée comme la "mesure de masse" associée à la masse "ponctuelle" au point a , au sens de la mécanique rationnelle.

4) La mesure de comptage est celle pour laquelle $\mu(A)$ est le nombre de points de l'ensemble A .

Tous ces exemples sont élémentaires, dans le sens où la vérification de (SA) est évidente. D'ailleurs, ces mesures sont définies sur une tribu quelconque, et en particulier sur la tribu $\rho(E)$ de toutes les parties de E (et ceci, quel que soit l'espace E). Nous énoncerons plus bas des résultats d'existence de mesures plus complexes (et plus utiles), notamment pour la mesure de Lebesgue (mesure de longueur sur $\mathbb{R}$, ou de volume sur $\mathbb{R}^d$). Mais auparavant nous donnons quelques propriétés simples des mesures.

Proposition 1.1.3 Toute mesure μ sur $(E, \mathcal{E})$ vérifie l'additivité (A), ainsi que les propriétés suivantes (ci-dessous on a $A, B, A_1, \dots, A_n$ dans $\mathcal{E}$) :

$$(1) \dots \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$$

si les $A_1, \dots, A_n$ sont deux-à-deux disjoints

$$(2) \dots \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

$$(3) \dots A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B).$$

En particulier, (1) implique (A). Remarquer l'écriture de (2) : on ne peut pas en général écrire $\mu(A \cup B) = \mu(A) + (B) - \mu(A \cap B)$, puisque dans le second membre il se peut que tous les termes soient infinis, et que $\infty - \infty$ n'a pas de sens ; en revanche $+\infty + \infty$ " vaut " naturellement $+\infty$, de sorte que (2) a bien un sens dans tous les cas.

Preuve. Se déduit immédiatement de (1) appliqué à la suite

$$B_1 = A_1, \dots, B_n = A_n, B_{n+1} = \phi, B_{n+2} = \phi.$$

Pour (2) on pose

$$C = A \cap B, A' = \frac{A}{C} \text{ et } B' = \frac{B}{C}.$$

On remarque que

$$A \cup B = A' \cup C \cup B', A = A' \cup C.$$

et $B = B' \cup C$. Tandis que les trois ensembles A', C, B' sont deux-à-deux disjoints. Par suite (1) implique

$$\mu(A \cup B) = \mu(A') + \mu(C) + \mu(B'),$$

$$\mu(A) = \mu(A') + \mu(C),$$

$$\mu(B) = \mu(B') + \mu(C).$$

En additionnant ces trois égalités membre à membre, on obtient (2). Enfin, si $A \subset B$, en posant $A' = \frac{B}{A}$ on a $\mu(B) = \mu(A) + \mu(A')$ par (1) et comme $\mu(A') \geq 0$, on obtient (3). Les mesures possèdent également des propriétés de "continuité" pour les suites d'ensembles, que nous énonçons ci-dessous : ■

Théorème 1.1.4 Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{E})$

- a) Pour toute suite croissante $(A_n)_{n \geq 1}$ d'éléments $\mu(\lim_n \uparrow A_n) = \lim_n \uparrow \mu(A_n)$.
- b) Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{E}$ convergeant vers une limite A et s'il existe un $B \in \mathcal{E}$ tel que $A_n \subset B$ pour tout n et $\mu(B) < \infty$, Alors $\mu(A_n) \longrightarrow \mu(A)$.

L'assertion (b) ci-dessus est une version préliminaire d'un théorème plus général, fondamental dans la théorie de l'intégration, qu'on appelle le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Ce résultat est en général faux sans l'hypothèse que les A_n sont contenus

dans un ensemble de mesure finie, comme le montre le contre-exemple suivant : soit μ la mesure de comptage sur $E =]0,1]$, et soit $A_n =]0, \frac{1}{n}]$; on a $\mu(A_n) = \infty$ puisqu'il y a une infinité de points dans A_n ; cependant A_n décroît vers l'ensemble vide $A = \phi$, de sorte que $\mu(A_n)$ ne converge pas vers $\mu(A)$.

Preuve. a) Posons $A_0 = \phi$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Les ensembles B_n sont deux-à-deux disjoints, et on a $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$.

Ainsi que $A = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ si A désigne la limite croissante des A_n .

(1) entraîne $\mu(A_n) = \mu(B_1) + \dots + \mu(B_n)$, tandis que (SA) entraîne

$$\mu(A) = \sum_{n \geq 1} \mu(B_n).$$

Par définition de la somme (éventuellement infinie) d'une série à termes positifs, on en déduit que $\mu(A)$ est la limite évidemment croissante des sommes partielles $\mu(A_n)$.

b) Supposons maintenant que $A_n \rightarrow A$ et que $A_n \subset B$ pour tout n , avec $\mu(B) < \infty$. Si la suite $(A_n)_n$ est croissante, le résultat a été obtenu dans (a). Supposons ensuite que (A_n) soit décroissante. Si $C_n = A_1 \setminus A_n$, la suite (C_n) est clairement croissante, et sa limite est

$$C = A_1 \setminus A,$$

donc

$$\mu(C_n) \uparrow \mu(A_1 \setminus A).$$

Mais

$$\mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(C_n) \text{ et } \mu(A) = \mu(A_1) - \mu(C).$$

remarquer que les mesures de A_n , C_n , A , C sont toutes finies, puisque ces ensembles sont contenus dans B par hypothèses ; on en déduit que $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$. Passons au cas général. Soit $C_n = \bigcup_{m: m \geq n} A_m$ et $D_n = \bigcap_{m: m \geq n} A_m$. On a $D_n \subset A_n \subset C_n \subset B$, et les suites C_n et D_n sont respectivement décroissante et croissante, et convergent vers les limites $C = \limsup_n A_n$ et $D = \liminf_n A_n$. De plus comme $A_n \rightarrow A$, on a $C = D = A$. Les résultats précédents impliquent $\mu(C_n) \downarrow \mu(A)$ et $\mu(D_n) \uparrow \mu(A)$.

Comme $\mu(D_n) \leq \mu(A_n) \leq \mu(C_n)$, il s'ensuit que $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$. ■

Proposition 1.1.5 Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}$. On a alors $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.

Preuve. Soit $B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$, $C_1 = A_1$ et $C_n = B_n \setminus B_{n-1}$. Si $n \geq 2$.

Comme $C_i \subset A_i$ on a $\mu(C_i) \leq \mu(A_i)$. Par ailleurs les C_n sont deux-à-deux disjoints et $\bigcup_n C_n = \bigcup_n A_n$, donc $\mu(\bigcup_n A_n) = \mu(\bigcup_n C_n) = \sum_n \mu(C_n)$. Donc (4) est immédiat. ■

Il existe trois opérations simples sur les mesures :

1.1.1 La restriction d'une mesure :

Si μ est une mesure sur (E, ε) et si $B \in \mathcal{E}$, la formule $\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$, pour tout $A \in \mathcal{E}$ définit une nouvelle mesure μ_B (comme $B \cap (\cup_n A_n) = \cup_n (B \cap A_n)$). μ vérifie clairement (SA), et aussi $\mu_B(\phi) = 0$.

1.1.2 L'addition de deux mesures :

Si μ et ν sont deux mesures sur $(E, \mathcal{E})$, la formule

$$\eta(A) = \mu(A) + \nu(A),$$

pour tout $A \in \varepsilon$ définit une nouvelle mesure η , notée $\eta = \mu + \nu$.

1.1.3 La multiplication par un réel positif :

Si μ une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ et si $a \in \mathbb{R}_+$, la formule $\nu(A) = a\mu(A)$, pour tout $A \in \mathcal{E}$ définit une nouvelle mesure, notée $\nu = a\mu$

(avec la convention $0 \times \infty = 0$, on a le même résultat si $a = +\infty$).

Il est clair que η et ν vérifient (SA), et associent la valeur 0 à l'ensemble ϕ , donc ce sont des mesures. L'addition des mesures est évidemment

commutative et associative. On a aussi $a(b\mu) = (ab)\mu$, et la distributivité :

$$a\mu + a\nu = a(\mu + \nu).$$

Proposition 1.1.6 Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures sur $(E, \mathcal{E})$.

a) Si la suite (μ_n) est croissante, ce qui signifie que

$$\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A),$$

pour tout n et tout $A \in \mathcal{E}$, la formule

$$\mu(A) = \lim_n \uparrow \mu_n(A),$$

pour tout $A \in \mathcal{E}$ définit une nouvelle mesure appelée la limite croissante des μ_n .

b) La formule $\nu(A) = \sum_n \mu_n(A)$, pour tout $A \in \mathcal{E}$ définit une nouvelle mesure, notée $\nu = \sum_n \mu_n$.

Preuve. a) On a clairement

$$\mu(\phi) = 0.$$

Il rest donc à montrer que μ vérifie (SA). Pour cela, il suffit de prouver que si A_n est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{E}$,

si $A = \cup_n A_n$ et si

$$a = \sum_n \mu(A_n),$$

alors $\mu(A) = a$. On a

$$\mu_n(A) \geq \mu_n(A_1) + \dots + \mu_n(A_p),$$

pour tout p entier, et en passant à la limite en n on obtient

$$\mu(A) \geq \mu_n(A_1) + \dots + \mu_n(A_p).$$

Comme ceci est vrai pour tout p , on a aussi $\mu(A) \geq a$. Si $a = +\infty$, on en déduit que $\mu(A) = a$. Si maintenant $a < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe p tel que

$$\sum_{i:i>p} \mu(A_i) \leq \varepsilon.$$

Comme $\mu_n(A_i) \leq \mu(A_i)$ on a aussi $\sum_{i:i>p} \mu(A_i) \leq \varepsilon$ pour tout n , ce qui entraîne $\mu_n(A) \geq \mu_n(A_1) + \dots + \mu_n(A_p) + \varepsilon$, par (SA) appliqué à μ_n .

En passant à la limite en n d'après cette inégalité, on trouve

$$\mu_n(A) \geq \mu_n(A_1) + \dots + \mu_n(A_p) + \varepsilon,$$

donc $\mu(A) \leq a + \varepsilon$, et comme cette inégalité est valide pour tout $\varepsilon > 0$ on a en fait $\mu(A) \leq a$, par suite $\mu(A) = a$.

b) Si $\nu_n = \mu_1 + \dots + \mu_n$ (l'addition des mesures), on obtient une suite croissante $(\nu_n)_n$ de mesures, et $\nu(A) = \lim_n \uparrow \nu_n(A)$, pour tout $A \in \mathcal{E}$: il suffit alors d'appliquer (a) pour obtenir le résultat. ■

Parmi toutes les mesures, les seules qu'on sache vraiment étudier sont les mesures finies (i.e. telles que $\mu(E) < \infty$), et les suivantes :

Définition 1.1.7 Une mesure μ sur $(E, \mathcal{E})$ est dite σ -finie s'il existe une suite croissante $(E_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ dont la limite est E , et telle que $\mu(E_n) < \infty$, pour tout n . Ces mesures sont dites limites croissantes de mesures finies, à savoir des restrictions μ_{E_n} de μ à chaque E_n . On peut aussi les considérer comme des somme infinies de mesures finies

à savoir les restrictions μ_{E_n} de μ à chaque ensemble E_n (avec la convention $E_0 = \phi$).

Noter qu'il existe des mesure qui ne sont pas σ -finie : la mesure infinies, ou la mesures de comptage sur E lorsque E n'est pas fini ou dénombrable (cette dernière mesure est finie si E est fini, et σ -finie si E dénombrable). Enfin, on peut "normaliser" une mesure finie non nulle μ en la multipliant par la constante $a = \frac{1}{\mu(E)}$. La nouvelle mesure $\nu = a\mu$ vérifie $\nu(E) = 1$.

Ainsi, l'étude des mesure σ -finies se ramène, pour beaucoup de leurs propriétés, à celle des mesures de masse totale 1, qui portent un nom spécial .

Définition 1.1.8 Une probabilité (ou mesure de probabilité) sur $(E, \mathcal{E})$ est une mesure de masse totale $\mu(E) = 1$.

1.2 La mesure de lebesgue

Dans ce paragraphe nous définissons la mesure qui est de loin la importante en analyse (et en probabilités), qui est la mesure de Lebesgue (mesurant la "longueur" dans le cas de $\mathbb{R}$, la "surface" dans $\mathbb{R}^2$ le " volume" dans $\mathbb{R}^3$). Nous commençons par le cas de $\mathbb{R}$, qu'on munit de la tribu borélienne $B(\mathbb{R})$. On connaît bien-sûr la longueur des intervalles:

$$\lambda(A) = b - a \text{ si } A = [a, b], \text{ ou } A = [a, b[, \text{ ou } A =]a, b], A =]a, b[.$$

Cette propriété est compatible avec (SA) , au sens ou $\lambda(A) = \sum \lambda(A_n)$ dès que les A_n sont des intervalles deux-à-deux disjoints dont la réunion A est encore un intervalle (cette propriété est assez fasile à vérifier, mais pas complètement évidente sauf dans le cas où on peut numérotter les A_n de sorte que A_n soit à gauche de A_{n+1} pour tout n , ou bien à droite de A_{n+1} pour tout n , mais il y a des cas où aucune de ces deux propriétés n'est vérifiée). La question qui se pose est donc la suivante: existe-t-il (une plusieurs) mesure (s) sur les boréliens de $\mathbb{R}$. La réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 Il existe une mesure λ et une seule sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ et qu'on appelle la mesure de Lebesgue.

Ce résultat est difficile, et pour le moment nous l'admettrons. Il contient en fait deux résultats de nature différente. D'abord il y a l'existence de λ qu'on appelle le théorème de prolongement).On connaît λ sur la classe A des intervalles, cette classe engendre la tribu borélienne, et on peut "prolonger" λ à la tribu $B(\mathbb{R})$, de façon à obtenir (une mesure c'est la partie la plus difficile du théorème. La difficulté tient au fait qu'on ne sait pas

décrire de manière “concrète” les boréliens). Ensuite, il y a un résultat d’unicité, qui sera démontré plus loin et qui est beaucoup plus facile. En fait, la tribu $B(\mathbb{R})$ n’est pas tout à fait la plus grande possible sur laquelle on puisse définir la mesure de Lebesgue: ce qui veut dire que le prolongement dont il est question ci-dessus peut se faire sur une tribu $B'(\mathbb{R})$ plus grande que (qu’on appellera plus loin la “complétée” de $B(\mathbb{R})$). Mais il est remarquable que la mesure de Lebesgue ne puisse pas se prolonger à la tribu $\rho(\mathbb{R})$.

Voici quelques propriétés simples de la mesure de Lebesgue: la mesure (ou “longueur”) des singletons est $\mu(\{a\}) = 0$ (appliquer avec $A = [a,a]$). Tout ensemble fini ou dénombrable A est borélien, de mesure $\lambda(A) = 0$: on peut écrire en effet $A = \cup_{n \geq 1} \{a_n\}$, où les a_n sont les points de A (qu’on peut toujours énumérer en une “suite” finie ou infinie). Il suffit alors d’appliquer (SA) pour obtenir les résultats dans un intervalle $A = [a,b]$ peut également s’écrire comme la réunion des singletons $\{x\}$ pour $x \in A$. Cependant on n’a pas $\lambda(A) = \sum_{x \in A} \lambda(\{x\})$ (en d’autres termes, la propriété (SA) ne s’étend pas à des familles non dénombrables d’ensembles): en effet $\lambda(A) > 0$, tandis que tous les termes de la somme de droite sont nuls, donc la seule valeur qu’on puisse raisonnablement donner à cette somme est 0 (une autre raison plus fondamentale est en fait que la somme d’une infinité non dénombrable de termes n’a a-priori pas de sens). En particulier, la mesure de Lebesgue de l’ensemble $\mathbb{Q}$ de tous les rationnels est nulle: cette propriété manifeste le fait que la mesure de Lebesgue est une extension de la notion de longueur, mais ne se réduit pas à cette notion; en effet un ensemble de structure aussi compliquée que $\mathbb{Q}$ n’a pas de longueur au sens “physique” du terme, bien qu’il admette une mesure de Lebesgue. Le fait que certaines parties de $\mathbb{R}$ n’admettent pas de mesure de Lebesgue montre qu’il y a des parties dont la structure est encore beaucoup plus compliquée que celle de $\mathbb{Q}$. Passons maintenant au cas de $\mathbb{R}^d$, qu’on munit de la tribu borélienne $B(\mathbb{R})^d$. Le volume d’un rectangle de la forme

$$A = \prod_{i=1}^d]a_i, b_i[.$$

$$\text{est } \lambda_d(A) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) .$$

Théorème 1.2.2 *Il existe une mesure λ_d et une seule sur $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R})^d)$, et qu’on appelle la mesure de Lebesgue.*

(Ce théorème se réduit lorsque $d = 1$). Une autre manière de voir les choses consiste à remarquer que $\lambda_d(A) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ peut s’écrire

$$\lambda_d\left(\prod_{i=1}^d A_i\right) = \prod_{i=1}^d \lambda(A_i). \text{ Lorsque les } A_i \text{ sont des intervalles. Cette propriété, qui}$$

d'une certaine manière traduit le fait que la mesure de Lebesgue λ_d sur $\mathbb{R}^d$ est la puissance $d^{\text{ème}}$ de la mesure de Lebesgue $\lambda = \lambda_1$ sur $\mathbb{R}$, se généralise ainsi :

Théorème 1.2.3 *Si les A_i sont des boréliens de $\mathbb{R}$, le produit $A = \prod_{i=1}^d A_i$ est un borélien de $\mathbb{R}^d$, et on a la propriété $\lambda_d \left(\prod_{i=1}^d A_i \right) = \prod_{i=1}^d \lambda(A_i)$.*

Chapitre 2

Mesure complexes

2.1 Mesure complexes

Soit X un ensemble muni d'une tribu de sous-ensembles. Une mesure complexes μ est une fonction sur cette tribu, à valeurs dans $\mathbb{C}$, qui vérifie l'axiome d'additivité dénombrable: pour toute partie mesurable $A \subset X$, et pour toute partition dénombrable

$$A = \cup_n A_n, 0 \leq n < N \quad (1 \leq N \leq +\infty).$$

On a :

$$\mu(A) = \sum_{0 \leq n < N} \mu(A_n).$$

Lorsque $\mu(A) \in \mathbb{R}$ pour tout A on dit que μ est une mesure signée, à noter : une mesure positive ne peut être considérée comme une mesure signée (ou complexe) que si elle est finie ($\mu(X) < +\infty$). Les parties réelle et imaginaire d'une mesure complexe sont des mesures signées. Comme exemple (instructif) de mesure signée ou complexe, on peut prendre $X = [0,1]$ avec la tribu de Borel ou de Lebesgue et $\mu(A) = \int_A f(x) dx$ pour une certaine fonction $f \in L^1([0,1]; dx)$. On déduit de l'axiome d'additivité les relations habituelles $\mu(\emptyset) = 0$ (*).

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B), \text{ et } \mu(X \setminus A) = \mu(X) - \mu(A).$$

De plus, si les A_n forment une partition infinie de A , on peut les permuter arbitrairement et donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$ converge même après un réordonnement quelconque indices.

Cela n'est possible que si elle est absolument convergente. On peut donc considérer la quantité finie $\sum_{0 \leq n < N} |\mu(A_n)|$, puis prendre la borne supérieure $\nu(A)$ de toutes ces quantités pour toutes les partitions finies ou infinies dénombrables de A . Nous allons montrer que ν est une mesure positive; puis dans un deuxième temps nous montrerons qu'elle est finie. On l'appelle « mesure des variations de μ » et on la note $\nu = |\mu|$. On a $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$, pour tout A de la tribu, mais l'inégalité peut être stricte (réfléchir à l'exemple $d\mu = f(x) dx$, à votre avis qu'est-ce que $|\mu|$?). A propos, évidemment, on ne dira pas que A est μ -négligeable si elle vérifie $\mu(A) = 0$, mais seulement sous l'hypothèse plus forte $\mu(B) = 0$ pour tout $B \subset A$, ce qui d'ailleurs équivaut à $|\mu|(A) = 0$. Montrons que ν est effectivement une mesure positive. Notons que $\nu(\emptyset) = 0$. Supposons que l'on se donne une partition dénombrable (finie ou infinie)

$$A = \cup_{\lambda} B_{\lambda}.$$

On veut prouver $\nu(A) = \sum_{\lambda} \nu(B_{\lambda})$. Donnons nous une autre partition $A = \cup_j A_j$ de A (**). Pour chaque J on a

$$\mu(A_j) = \sum_{\lambda} \lambda \mu(A_j \cap B_{\lambda}).$$

Donc

$$|\mu(A_j)| \leq \sum_{\lambda} \lambda |\mu(A_j \cap B_{\lambda})|.$$

Donc

$$\sum_j |\mu(A_j)| \leq \sum_j \sum_{\lambda} |\mu(A_j \cap B_{\lambda})| = \sum_{\lambda} \sum_j |\mu(A_j \cap B_{\lambda})| \leq \sum_{\lambda} \nu(B_{\lambda}).$$

L'égalité du milieu car nous manipulons des séries à termes positifs, L'inégalité de droite par définition des $\nu(B_{\lambda})$. En prenant le sup sur toutes les partitions $A = \cup_j A_j$ on obtient $\nu(A) \leq \sum_{\lambda} \nu(B_{\lambda})$. pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, nous observons tout d'abord que si $\nu(B_{\lambda}) < +\infty$ pour au moins un λ alors en adjoignant $A \setminus B_{\lambda}$ à une partition de B_{λ} , On obtient une partition de A et donc on obtient des partitions de A rendant les sommes des modules de μ arbitrairement grandes, donc $\nu(A) = +\infty$, et donc l'identité $\nu(A) = \sum_{\lambda} \nu(B_{\lambda})$ vaut. On supposera donc que pour tout λ , on a

$$\nu(B_{\lambda}) < \infty.$$

On se donne un $\varepsilon > 0$, on suppose que l'ensemble des indices λ est $\mathbb{N}$ ou $\{0, 1, \dots, N-1\}$, on se donne pour chaque B_{λ} une partition dénombrable

$B_\lambda = \cup_j B_{\lambda,j}$, avec $\sum_j |\mu(B_{\lambda,j})| \geq \nu(B_\lambda) - \frac{\varepsilon}{2^\lambda}$. prises toutes ensemble ces partitions donnent une partition (dénombrable car $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable) de A : $A = \cup_{\lambda,j} B_{\lambda,j}$ et la somme associée

$$\sum_{\lambda,j} |\mu(B_{\lambda,j})| \geq \sum_{\lambda} \left(\nu(B_\lambda) - \frac{\varepsilon}{2^\lambda} \right) \geq \left(\sum_{\lambda} \nu(B_\lambda) \right) - 2\varepsilon.$$

Donc $\nu(A) \geq \sum_{\lambda} \nu(B_\lambda) - 2\varepsilon$ et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire $\nu(A) \geq \sum_{\lambda} \nu(B_\lambda)$. Finalement on a bien prouvé

$$\nu(A) = \sum_{\lambda} \nu(B_\lambda).$$

pour toute partition dénombrable (finie ou infinie) $A = \cup_{\lambda} B_\lambda$ d'une partie mesurable $A \subset X$. Donc $\nu = |\mu|$ est bien une mesure positive. On a évidemment par la définition $|\mu|(X) \leq |\operatorname{Re}(\mu)|(X) + |\operatorname{Im}(\mu)|(X)$ donc pour montrer que $|\mu|$ est finie il suffira de considérer le cas des mesures signées.

2.2 Mesures signées

Supposons donc que μ soit à valeurs réelles. Si A est une partie mesurable, qui a été partitionnée en des A_n , on peut faire l'union des A_n avec $\mu(A_n) \geq 0$, ce qui donne un certain $B \subset A$.

Alors

$$\sum |\mu(A_n)| = \mu(B) + |\mu(C)|.$$

avec

$$C = A \setminus B.$$

Comme

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(C).$$

on a

$$|\mu(C)| \leq \mu(B) + |\mu(A)|,$$

et donc

$$2\mu(B) \geq -|\mu(A)| + \sum |\mu(A_n)|.$$

Donc si $\nu(A) = +\infty$ alors on peut trouver $B \subset A$ avec $\mu(B)$ arbitrairement grand,

disons $\mu(B) \geq 2|\mu(A)| + 1$ Mais de $\mu(A) = \mu(B) + \mu(C)$ on déduit

$$|\mu(C)| \geq \mu(B) - |\mu(A)|.$$

donc $|\mu(C)| \geq |\mu(A)| + 1$ Et comme ν est une mesure on a $\nu(B) = +\infty$ ou $\nu(C) = +\infty$.

On peut donc par récurrence, si l'on suppose $\nu(X) = +\infty$, affirmer l'existence de :

$$A_0 = X, A_1 \subset A_0, \dots, A_{n+1} \subset A_n.$$

avec pour tout n

$$|\mu(A_{n+1})| \geq |\mu(A_n)| + 1.$$

$$\text{et } \nu(A_{n+1}) = +\infty.$$

Mais alors

$$|\mu(A_n \setminus A_{n+1})| \geq 1.$$

et la série

$$\sum_n \mu(A_n \setminus A_{n+1}),$$

ne peut être convergente ce qui contredit l'axiome d'additivité dénombrable (pour une réunion disjointe). C'est donc que l'hypothèse $\nu(X) = +\infty$ est à rejeter. On a ainsi $\nu(X) < +\infty$. Cette valeur finie s'appelle la variation totale de μ sur X . Posons

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \text{ et } \mu_2 = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Ce sont clairement deux mesures positives finies. Et $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Toute mesure signée est donc la différence de deux mesures positives finies. Réciproquement soit σ_1 une mesure positive finie vérifiant $\sigma_1(A) \geq \mu(A)$, pour tout A . Il est immédiat que

$$\sigma_2(A) = \sigma_1(A) - \mu(A).$$

est une mesure positive (finie). Comme $\mu = \sigma_1 - \sigma_2$, on a clairement $|\mu| \leq \sigma_1 + \sigma_2$ Donc en sommant $2\mu_1 \leq 2\sigma_1$, et en soustrayant, $2\mu_2 \leq 2\sigma_2$. Cela montre que μ_1 est caractérisée comme étant la plus petite mesure positive σ_1 vérifiant $\sigma_1 \geq \mu$ Et μ_2 est la plus petite mesure positive σ_2 vérifiant $\sigma_2 \geq -\mu$. Bien sur $|\mu|$ est la plus petite mesure positive minorée par $\max(\mu, -\mu)$ c'est-à-dire telle que pour tout A

$$|\mu|(A) \geq \max(\mu(A), -\mu(A)).$$

Comme μ peut s'écrire comme la différence de deux mesure positives, on peut définir

$$\int X f(X) d\mu(X).$$

de manière évidente :

$$\int_X f(X) d\sigma_1(X) - \int_X f(X) d\sigma_2(X).$$

2.3 Hahn-Jordan

Notons à nouveau $\nu = |\mu|$ et considérons l'espace de Hilbert $L^2(X, \nu)$.

Alors $L(f) = \int_X f(X) d\mu(X)$, est une forme linéaire continue sur $L^2(X, \nu)$, par l'inégalité que nous venons d'établir (et Cauchy-Schwarz ; rappelons que $\nu(X) < \infty$). par le théorème de Fréchet-Riesz, il existe une fonction de carré integrable g telle que pour toute $f \in L^2(X, \nu)$ on a

$$\int_X f(X) d\mu(X) = \int_X f(X) g(X) d\nu(X).$$

En particulier $\mu(A) = \int_A g(X) d\nu(X)$ est reel pour tout A, donc

$$\int_A \text{Im}(g(X)) d\nu(X) = 0.$$

Pour tout A, donc $\text{Im}(g) = 0$, et on peut donc prendre g à valeurs réelles.

Soit $c > 1$ (par exemple $c = 1 + \frac{1}{n}$) et soit $A = \{x / g(x) \geq c\}$.

Alors $\mu(A) = \int_X 1_A(x) d\nu(x) \geq c\nu(A)$. Mais $|\mu(A)| \leq \nu(A)$. Donc en fait

$$\nu(A) = 0.$$

Par union dénombrable le lieu des X avec $g(x) > 1$ est de ν -mesure nulle.

De même pour $c < -1$. Soit maintenant $0 < a < 1$ (par exemple $a = 1 - \frac{1}{n}$) et soit

$$A = \{x / |g(x)| \leq a\}.$$

Alors pour toute partie $B \subset A$ on a:

$$|\mu(B)| \leq a\nu(B).$$

Donc si on fait une partition dénombrable $\cup A_n$ de A on a ensuite

$$\sum_n |\mu(A_n)| \leq a \sum_n \nu(A_n) = a\nu(A).$$

Donc en prenant le sup $\nu(A) \leq a\nu(A)$. Ici encore on trouve $\nu(A) = 0$. Finalement par union dénombrable le lieu des X avec $|g(X)| < 1$ est de ν -mesure nulle.

Donc quitte à modifier g on pourra supposer que g ne prend que les deux valeurs $+1$ et -1 . Notons $X_1 = \{x / g(x) = 1\}$ et $X_2 = X / X_1$. Alors pour toute partie mesurable on a :

$$\mu(A) = \int_X 1_A(x) g(x) d\nu(x) = \nu(A \cap X_1) - \nu(A \cap X_2).$$

Dans le même temps on a $\nu(A) = \nu(A \cap X_1) + \nu(A \cap X_2)$. Donc $\mu_1(A) = \nu(A \cap X_1)$ et $\mu_2(A) = \nu(A \cap X_2)$. Donc si $A \subset X_1$ on a $\mu(A) = \mu_1(A) = \nu(A)$ et si $A \subset X_2$ on a $\mu(A) = -\mu_2(A) = -\nu(A)$. Autrement dit on a trouvé une décomposition de X en deux sous-ensembles disjoints tels que la restriction de μ au premier est une mesure positive (finie) et la restriction de μ au second est l'opposé d'une mesure positive (finie). Une telle décomposition est dite décomposition de Hahn-Jordan de la mesure signée μ . par exemple si

$$d\mu = f(X) dX.$$

cela revient à décomposer l'intervalle $[0,1]$ en

$$\{X / f(X) \geq 0\} \cup \{X / f(X) < 0\}.$$

Si l'on a une autre décomposition

$$X = X_{t_1} \cup X_{t_2}.$$

de type Hahn-Jordan alors pour tout

$$A \subset X_1 \cap X_{t_2}.$$

on a $\mu(A) = 0$ (car à la fois positive et négatif) donc

$$X_1 \Delta X_{t_2}.$$

est μ -négligeable. De même $X_2 \cap X_{t_1}$ est μ -négligeable. Donc la différence symétrique

$$X_1 \Delta X_{t_1} = (X_1 \cap X_{t_2}) \cup (X_2 \cap X_{t_1}),$$

est μ -négligeable, et aussi $X_2 \Delta X_2$ que est la même chose. . .). La décomposition de Hahn-Jordan est donc unique à la modification près de X_1 et X_2 par des négligeables.

2.4 Mesures complexes

Reprenons le cas d'une mesure complexe μ . On peut l'écrire

$$\mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4),$$

avec quatre mesures positives finies, et donc donner un sens à

$$\int_X f(X) d\mu(X) = (\text{compléter})$$

en montre que cela ne dépend pas du choix des μ_i (à partir du moment où toutes les intégrales considérées sont absolument convergentes; prendre d'abord f à valeurs réelles).

Si on prend les μ_i définies par les décompositions canoniques de $\operatorname{Re}(\mu)$ et $\operatorname{Im}(\mu)$ alors certainement chacune vérifie $\mu_i \leq |\mu|$ (car $|\operatorname{Re}(\mu)| \leq |\mu|$, . . ., Justifier). Donc on peut définir ainsi,

$$\int_X f(X) d\mu(X) \text{ pour toute } f \in L^1(X, \nu).$$

Supposons que f soit une fonction simple, avec les A_j deux-à-deux disjoints. Alors

$$\int_X f d\mu = \sum c_j \mu(A_j),$$

Donc

$$|\int_X f d\mu| \leq \sum |c_j| \mu(A_j) \leq \sum |c_j| |\mu|(A_j) = \int_X |f| d|\mu|.$$

Dans le cas général de $f \in L^1(X, \nu)$ il existe des fonctions simples f_n qui convergent vers f dans $L^1(X, \nu)$. Donc aussi dans $L^1(X, \mu_i)$ pour chacune des μ_i puisque $\mu_i \leq |\mu|$.

Donc $\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$. Alors car on a aussi $|f_n| \rightarrow |f|$ dans $L^1(X, \nu)$. On peut alors à nouveau considérer

$$f \rightarrow \int_X f(X) d\mu(X).$$

Comme une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace de Hilbert associé à la mesure des

variations $\nu = |\mu|$. Il existe donc une fonction g à valeurs complexes telle que $\mu = g\nu$. Je vous délègue la tâche de montrer que $|g| = 1$ ν -presque partout. C'est dans le même style en un peu plus difficile que dans le cas réel. Par ailleurs vous montrerez que si λ est une mesure positive (finie ou non) et si $F \in L^1(X, \lambda)$. Alors (avec des notations évidentes) $F\lambda$ est une mesure complexe dont la mesure des variations est la mesure finie $|F| \lambda$.

Bibliographie

- [1] J.Schemet - théorie de la mesure. Notes de cours.Université de Liège, 1998.
- [2] G.E Shilov & B.L.Gurevich. Integral, mesure ; A Unified Approach Dover, New-York, 1977.
- [3] R.M.Solovay A modal of set-théory in Which every set of real Lebesgue mesurable. Ann. Of math, 92 (2) : 1-56, 1970.
- [4] Mémoire de licence, Mesure complexe, UFR, Université LILLE 1- 2005 / 2006.