الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence
en: - Filière mathématiques

Programmation lineaire

Préparé par : Belaouira halima **Benkouh sara**

Lahkiri abla **Laib sabrina**

Soutenue devant le jury **Encadrer par : Baiche kanezia**

Année universitaire :2014/2015

Remerciements :

Je tiens adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude mon encadreur madame Baiche Kanzia, pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations, et ses encouragements que j'ai pu mener bien ce travail.

Nous remercions nos parents, pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis Pour nous permettre de suivre nos études dans les meilleures conditions et de nous avoir en courage tout au long de ces années.

Un remerciement particulier à nos très chers frères, sœurs, collègues et amies et a tout la famille respectives qui nous ont encouragés, soutenu durant tout notre parcours.

sara abla
halima sabrina

Table des matières

Introduction **3**

1 Analyse convexe **4**

1.1 Ensembles convexe **:** 4

1.1.1 Enveloppe convexe et sommet : 5

1.1.2 Directions extrémales : 7

1.1.3 Notation d'intérieur relatif : 8

1.1.4 Support d'un ensemble convexe 10

1.2 Fonction convex 11

1.2.1 Opérations sur les fonction convexe 13

1.2.2 Semi-continuité (inférieure) 13

1.2.3 Régles de calcul 14

1.2.4 Dérivés directionnelles : 15

1.2.5 Rappele et notation de calcul différentiel 16

2 Optimisation **19**

2.1 Problème d'optimisation 19

2.1.1 Problème mathématique 19

2.1.2 Solution réalisable et optimale 20

2.2 Optimisation sans contraintes 21

2.2.1 Présentation du problémes 21
2.2.2 Résultas d'existance et d'unicité 21
2.2.3 Condition d'optimalité 22
2.3 Optimisation avec contrainte 24
2.3.1 Présentation du probléme 24
2.3.2 Existence et unicite de la solution de problème d'optimisation avec contrainte 25
2.3.3 Condition d'optimalite avec contrainte 26

3 programmation linéaire **28**
3.1 Introduction : 28
3.2 Lés formes de programme linéaire 28
3.2.1 La forme général 28
3.2.2 Forme cannonique d'un programmation linéaire 30
3.2.3 Forme standard 30
3.3 Notation de dualite 31
3.3.1 Théoréme de dualite 31
3.3.2 Principes de transformations permettant d'obtenir le dual 32
3.4 quelque méthode de resolution de programme linéaire 33
3.4.1 Méthode de point interieur : 33
3.4.2 Méthode du simplexe 36

Bibliographie **39**

Introduction

Le programmation linéaire est de lion la branche de la programmation mathématique. A plus utilisée dans lés application pratique. Autant le domaine qui a en le plus de succé en optimisation de puis sa formulation de 1930 à 1940, ainsi la programmation linéaire ést un outil trés puissant de la recherche opérationnelle. au plus c'est un outil génerique qui peut résoudre un grande nombre des probléme, en effet, une fois un probléme modalise sous la forme d'équation linéaire, dés méthodes assurent la résolution du probléme de maniére exacte.

Une dés méthodes le plus connue pour résoudre dés programmes linéaire en nombre réels est la méthode du simplexe, décovert en 1947 par Georges B Dantzig[$DAN63$], des chercheurs dans différents domaines : économie, finance... etc, il était modélisé sous forme linéaire, car les modéles non linéaire nécéssitent des algorithme plus étaborés et plus couteux.

Cependant, un nouveaux type de méthodes de resolution a fait son apparition en 1984 du papier de karmarkar est probablement l'événement le plus signification en programmation linéaire aprés la découverte de la méthode du simplexe. l'intérrét du travail de karmarkar vient de la complexité polynomiale de son algorithme, ce travaile a donné naissance aux méthodes de piont interieure, qui restant jusqu'a présent un domaine de recherche trés actif

Dans ce mémoire on s'interesse a la résolution d'un programme linéaire par la méthode de simplexe et les méthodes de piont interieure, est divise en trois chapitre :

Dans le premiere, nous rappallons l'analyse convexe et la notation de calcule differentiel

Dans le deuxiéme chapitre est consacré l'optimisation avec contrainte et sans contrainte

Dans le dernier chapitre, on etude le programmation linéaire

Chapitre 1

Analyse convexe

Se chapitre est présenteé les éléments d'analyse convexe qui nous serant utiles pour étudier lés probléme d'optimisation et les algorithmes qui les résolvent.

1.1 Ensembles convexe :

Définition 1

Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si :

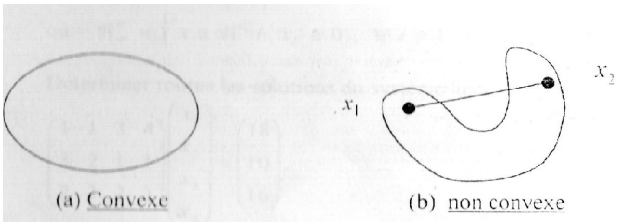
$$(1-\lambda)x + \lambda y \ \in C, \forall (x,y) \in C \ et \ \forall \lambda \, [0,1]$$

Autrement dit si, le segment de droit joignant deux points quelconqus

$$x, y \in C \ : \ [x,y] \ = \{(1-\lambda)x + \lambda y \ / \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Est entièrement inclus dans C

Le schéma suivant illustre la notion d'ensembles convexe :



Dans le cas(b), le segment de droit $[x, y]$ n'est pas entièrement inclus dans b

Définition 2

Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$, est dit affine si :

$$((1-\lambda)x + \lambda y) \in C,\ y \in C\ et\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Remarque 1 *Les opération algébriques suivantes conservent la convexité :*

1. *L'intersection qulconque*
2. *La produit cartésien*
3. *Les transformation affines*
4. *Les combinaisons linéaires* $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i C_i\ , (\alpha_i \in\ \mathbb{R})\, m \in \mathbb{N}$
5. *La translation* $C + a\ \diagup a \in \mathbb{R}^n$

1.1.1 Enveloppe convexe et sommet :

Définition 3

On appelle combinaison convexe de m-vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $x_1, ..., x_m$, toute combinaison ‹‹linéaire›› :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,\ \ ou\ \lambda_i \geq 0\ \ et\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

Proposition 1 *Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si : il contient toutes les combinisons convexes de ses éléments*

Définition 4

L'intersection de tous les ensembles convexes contenant un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est

appelée : envloppe convexe de S On la note $conv(S)$

$$ie : \forall S \subseteq \mathbb{R}^n,\ S \text{ est convexe ssi } : S = conv(S)$$

Théorème 1 $\forall S \subseteq \mathbb{R}^n$, $conv(S) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{k \leq n+1} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$

Définition 5

L'envloppe convexe d'un sous ensemble fini de $\mathbb{R}^n$. $conv(\{x_1, ...x_{k+1}\})$ est appelée : polytope, si du plus les vecteurs $\{x_i - x_1,\ i = 2.....k+1\}$ sont linéairement indépendant alors $conv(\{x_i,\ i = 1, ..., k+1\})$ est appelé : un k-simplexe de sommets $x_1, ..., x_{k+1}$

1. *un polytope est toujours fermé et borne (compact)*
2. *dans la cas d'un k-simplexe, le point x_0 défini par : $x_0 = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i = \frac{1}{k+1}$ est le barycentre (ou le centre) du simplexe*

Définition 6

Soint C un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in C$. Le point x est extrémal (ou sommet de C)s'il n'est pas à l'intérieur d'un sengment de droit contenu dans C. Autrement dit : si $\forall x_1, x_2 \in C$, $\forall$

$\lambda \in]0,1[$: $x = (1-\lambda)\, x_1 + \lambda x_2 \Longrightarrow x = x_1 = x_2$ *L'ensemble des sommets de C est not par E_C ou E si aucune confusion n'est à craindre*

Proposition 2 *Soient $C \neq \phi$ un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ et E, l'ensemble des sommets de C, alors :*

1. *$C = conv(E_C)$, (théoréme de Minkowki)*
2. *$E_C \neq \phi$, c'est le plus sous-ensemble S de C tel que $C = conv(S)$*

1.1.2 Directions extrémales :

Définition 7

L'ensemble des directions de C(convexe fermé de $\mathbb{R}^n$) est défini par

$$\{d \in \mathbb{R}^n,\ d \neq 0,\ x + \lambda d \in C,\ \forall x \in C,\ \forall \lambda \geq 0\}$$

Proposition 3 (propriétés topologiques d'un convexe) *Désignons par B, La boule unite euclidienne de $\mathbb{R}^n$: $B = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\} = \{x / d(x,0) \leq 1\}$ est un convexe fermé et borné et nous avons :*

1. *$cl(C) = \bigcap_{\varepsilon \succ 0} \{C + \varepsilon B\} =$ fermeture (clôture) de C*
2. *$int(C) = \{x \in \mathbb{R}^n / \exists\ \varepsilon \succ 0 : x + \varepsilon B \subset C\}$ intérieur de C*

Théorème 2 *Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide. Alors*

$\forall x \in int(C), \forall y \in cl(C) : \forall \lambda \in [0,1[\,.(1-\lambda)x + \lambda y \in int(C)$

Preuve 4 *Supposer $\lambda \in [0,1[$, et montrons qu'il existe $\bar{\varepsilon} \succ 0$ tel que :*

$(1-\lambda)x + \lambda y + \bar{\varepsilon}B \subset C$ *En effet :* $y \in cl(C) \Longrightarrow \forall \varepsilon \succ 0\ ,\ y \in C + \varepsilon B$

$\Longrightarrow \quad (1-\lambda)x + \lambda y + \bar{\varepsilon}B \subseteq (1-\lambda)x + \lambda(C + \bar{\varepsilon}B) + \bar{\varepsilon}B = (1-\lambda)\left[x + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\bar{\varepsilon}B\right] + \lambda C$

D'autre part $x \in int(C) \Longrightarrow \forall \varepsilon_0 \succ 0 \,/ x + \varepsilon_0 B \subseteq C$ *Donc :*

$x + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\bar{\varepsilon}B \subseteq C$ *si* $\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_0$ *soit* $\bar{\varepsilon} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0$ *alors :*

$(1-\lambda)x + \lambda y + \bar{\varepsilon}B \subseteq (1-\lambda)[x + \bar{\varepsilon}B] + \lambda C \subseteq (1-\lambda)C + \lambda C = C$

Corollaire 1 *Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $int(C) \neq \phi$*

1. *$int(C)$ et $cl(C)$ sont convexe*
2. *$cl(int(C)) = cl(C)$, $int(\ cl(C)) = int(C)$, $Fr\,(int(C)) = Fr\,(C)$*
3. *$aff\,(int(C)) = aff\,(C) = aff\,(cl(C))$*

***** *d'où la méme dimension pour les trois ensemble :*

$$C \ \ ouvert \Longrightarrow conv\,(C) \ \ ouvert \qquad C \ \ fermé \ \not\Rightarrow \ \ conv\,(C) \ \ fermé$$
$$cl\,(conv\,(C)) = cl\,(conv\,(\ cl\,(C))) \qquad C \ \ compact \Longrightarrow conv\,(C) \ \ compact$$

1.1.3 Notation d'intérieur relatif :

Définition 8

1. *L'intérieure relatif d'un sous-ensemble non vide C de $\mathbb{R}^n$. noté $ri\,(C)$ est défini comme l'intérieur de C vu comme sous-ensemble de $aff\,(C)$, Ce dernier étant muni de la topologie induite.*

$$ri\,(C) : \{x \in aff\,(C) \diagup \exists \varepsilon \succ 0, \quad (x + \varepsilon B) \cap aff\,(C) \subseteq C\}$$

Evidemment $int\,(C) \subseteq ri\,(C) \ \subseteq C \subseteq cl\,(C)$

2. *L'ensemble $cl\,(C) \diagdown ri\,(C) = \{\ x \in cl\,(C)\,,\ x \notin ri\,(C)\ \}$ est appelé frontiére relative de C*
3. *C est dit relativement ouvert si $ri\,(C) = C$*

Remarque 2

1. *Pour un convexe C de dimension n, $aff(C) \in \mathbb{R}^n$. et par conséquent $ri(C) = int(C)$*
2. *$C_2 \subset C_1 \nRightarrow ri(C_2) \subset ri(C_1)$ il suffit de considérer $C_1 = [0,1] \times [0,1]$ et $C_2 = [0,1] \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^n$, Alors*

$$C_2 \subset C_1;\ ri(C_1) =]0,1[\times]0,1[\quad et\ ri(C_2) =]0,1[\times \{0\}$$

d'où

$$ri(C_1) \cap ri(C_2) = \phi$$

Théorème 3 *Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$, $x \in ri(C)$ et $y \in cl(C)$alors*

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in ri(C) \subseteq C,\ \forall \lambda \in [0,1[$$

Théorème 4 (caractérisation de ri(C)) *Soit C un convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, alors*

$$ri(C) = \{z / \ \forall x \in C; \exists \mu \succ 1 \quad (1-\mu)x + \mu z \in C\}$$

Autrement dit tout segment de droit dans C ayant z comme extrémité, peut étre prplongé au-detà de z sans sortir de C

Proposition 5 *Soit $\{C_i \ , i \in I$ (ensemble d'indices)$\}$, un famille de convexes dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\bigcap_{i\in I} ri(C) \neq \phi$, alors*

* $cl\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) = \bigcap_{i\in I}(C_i)$

si de plus I est fini : on a

* $ri\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) = \bigcap_{i\in I}(ri(C_i))$

1.1.4 Support d'un ensemble convexe

Définition 9

Soit C un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, et $\bar{x} \in Fr\,(C)$,l'hperplan

$H = \left\{x \in \mathbb{R}^n / \; a^T\,(x - \bar{x}) = 0\right\}$ (cotenant évidemment $\bar{x}$) est appelé hyperlan de support (ou d'appui) de C en $\bar{x}$ si : $C \subseteq H^+ = \left\{x \;/\; a^T\,(x - \bar{x}) \geq 0\right\}$

ou $C \subseteq H^- = \left\{x \;/\; a^T(x - \bar{x}) \leq 0\right\}$ si de plus $C \nsubseteq H$; on dit que H supporte proprement C en $\bar{x}$

Théorème 5 (de Gordan) *Pour $A \in \mathbb{R}^{m\times\, n}$ un et un seul des deux systémes suivants admet une solution*

1. *systeme 1 $\exists x \in \mathbb{R}^n \diagup Ax \prec 0$*
2. *systeme 2 $\exists y \in \mathbb{R}^m_+ \;\diagup\; y \neq 0$ et $A^T y = 0$*

Ensemble strictement convexe : Un sous-enesemble $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit strictement convexe s'il vérifie

$\forall x,\, y \in C,\, (x \neq y)\,,\,]x, y[= \{(1-t)\,x + ty \;/\; t \in]0,1[\} \subset int\,(C)$

Ensemble fortement convexe : Une partie $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite fortement convexe $\forall x, y \in C,\, x \neq y,\, \forall t \in]0,1[\, \exists \gamma \succ 0$ tel que : $B\,[(1-t)\,x + ty, \gamma] \subset C$ Nous avons : C fortement convexe $\Rightarrow C$ strictement convexe $\Rightarrow C$ convexe

1.2 Fonction convex

Définition 10

1. *l'ensemble :* $epi\,(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;\; f\,(x) \leq y\}$ *est appelé épigraphe de* f
2. *l'ensemble :* $\{x \in \mathbb{R}^n / \; f\,(x) \prec +\infty\} = \mathbb{R}^n \setminus \{x / \; f\,(x) = +\infty\}$

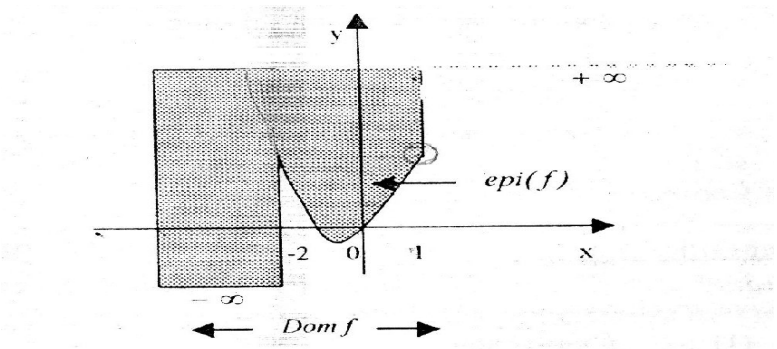
   $= \{x \in \mathbb{R}^n \;\; \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \;\; , (x,\alpha) \in \; epi\,(f)\}$ *est appelé domaine effectif de f, C'est projection de* $epi\,(f)$ *sur* $\mathbb{R}^n$
3. *si* $dom\; f \neq \phi$ *et* $f\,(x) \succ -\infty \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$, *on dit que* f ***est propre*** *dans le cas contraire* f *est dite* ***impropre***
4. *l'ensemble* $S_\alpha\,(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / f\,(x) \prec \alpha\}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ *est appelé ensemble de niveau a ou section (inférieur large) de* f

- *Notons que dom* f *est différent en général du domaine de définition habituel(* $D_f \subseteq dom\; f$ *)et nous avons les relations simples suivantes*

  * $dom\; f \;\; = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} S_\alpha \;\; (f)$
  * $S_\alpha \;\; (f) \times \{\alpha\} = \; epi\,(f) \cap [\mathbb{R}^n \times \{\alpha\}] \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}$
  * $f\,(x) = \inf \{\alpha \in \mathbb{R} / (x,\alpha) \in \; epi\,(f)\} = \inf \{\alpha \in \mathbb{R} / x \in S_\alpha \;\; (f)\}$
  * $S_\alpha \;\; (f_2) \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R} \subseteq S_\alpha \;\; (f_1) \Leftrightarrow epi\,(f_2) \subseteq epi\,(f_1) \Leftrightarrow f_1 \leq f_2$

Exemple 1

$$f(x) = \begin{cases} -\infty & , \ x \leq -3 \\ x^2 + 2x & , \ -3 \prec x \prec 1 \\ 5 & , \quad x = 1 \\ +\infty & , \quad x \succ 1 \end{cases}$$



Dom $f =]-\infty, 1]$, *le domaine de définition classique de* f *est* $D_f =]-3, 1]$, *notons que est impropre*

Définition 11

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *on dit que* f *est convexe (sur I) lorsque :*

$\forall (x, y) \in I, \ \forall \lambda \in [0, 1]$. *tel que* $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$ f *sera dite concave si* $-f$ *est convexe*

Remarque 3 f *est à la fois convexe et concave si et seulement si* f *est affine* $f(x) = Ax + a$

Proposition 6 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ *est convexe si l'un des deux propiétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \ \lambda \in [0, 1]$.
2. $f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} f(\lambda_i x_i) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall \lambda_i \geq 0 \diagup \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \ x_i \in \mathbb{R}^n$

si l'inegalité 1) est stricte pour $x \neq y$ *et* $\lambda \in]0, 1[$, f *est dite strictement convexe*

l'inegalité 2) est appelé inegalité de jensen

Proposition 7 *Soit $f \in C^1(C)$, C est un convexe ouvert de $\mathbb{R}^n$ (ou $C \in \mathbb{R}^n$)alors les affirmation suivantes sont équivalentes :*

1. *f convexe*
2. *$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x),\ y - x \rangle\ \forall x,\ y \in C$*
3. *$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x),\ y - x \rangle \geq 0,\ \forall x,\ y \in C$*

1.2.1 Opérations sur les fonction convexe

Lemme 1 *Toute combinaison linéaire positive de fonction convexe propres est convexe*

$$\begin{cases} f_1 \ldots\ldots f_m \\ \lambda_1 \geq 0 \ldots\ldots\ldots \lambda_m \geq 0 \end{cases} \Rightarrow\ f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i,\ \textit{convexe}$$

Lemme 2 *Soit $(f_i)_{i \in I}$ un famille quelconque de fonction convexe. Alors leur enveloppe supérieur $f(x) = \sup f_i(x)$ est un fonction convexe*

1.2.2 Semi-continuité (inférieure)

Définition 12

Un fonction $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ est dite semi-continuité (s.c.i.) en $x^0 \in \mathbb{R}^n$ si :

$\forall\ \varepsilon \succ 0,\ \exists\ \ \delta \succ 0\ /\ f(x) \geq f(x^0) - \varepsilon$ *dés que* $\|x - x^0\| \leq \delta$

*f est dite semi-continuité supérieurement (s.c.s.) en x^0 si $-f$ est **(s.c.i.)** en x^0*

*Evidemment, f est continue en x^0 si et seulement si elle est à la fois **(s.c.i.)** et **(s.c.s.)** en x^0*

*Enfin, on dit que f est **(s.c.i.)** si elle est (s.c.i.) en tout point $x \in \mathbb{R}^n$*

Théorème 6 (fondamental) *pour tout fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) f *est (s.c.i.)*

(b) $epi\,(f)$ *est fermé*

(c) *Tout les ensembles de niveau inférieure :* $S_\lambda(f) = \{x / f(x) \leq \lambda\}, \lambda \in \mathbb{R}$ *sont fermés*

Proposition 8 *Si* f, g *et* $f_i\,(i \in I)$*sont des fonctionnelle (s.c.i.). Alors il en est de même pour :*

1. $f + g$
2. $\alpha f, \forall \alpha \succ 0$
3. $\inf(f, g)$
4. $f \circ T$, $\forall T$ *continue (avec* $\circ$ *compatible)*
5. $\sup_{i \in I}(f_i)$

1.2.3 Régles de calcul

$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x), \ \forall \lambda \succ 0$

$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) \subseteq \partial(f_1 + f_2), \forall x, \forall f_1, f_2$ convexes propres

Il y a égalité si $ri\,(dom\ f_1) \cap (dom\ f_2) \neq \phi \quad f(x) = \sup_{i \in I}(f_i)$, f_i convexe

$\forall i \ \Rightarrow \partial f(x) = co\,\{\partial f_i(x),\ i : f_i(x) \ = f(x)\ \}$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe (propre)$\Rightarrow \partial\varphi(t_0) = \left[\varphi'_-(t_0), \varphi'_+(t_0)\right], \forall t_0 \in int\,(dom\ \varphi)$

Proposition 9 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$*, alors :* $y^0 \in \partial f(x^0)$ *si et seulement si :* $f(x^0) + f^*(y^0) = \langle x^0, y^0 \rangle$

1.2.4 Dérivés directionnelles :

Définition 13

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ $/ f(x^0)$ *finie* $x^0 \in \mathbb{R}^n$, *la dérivée directionnelle de* f *en* x^0 *suivant la direction* $d \in \mathbb{R}^n$ *est definie par :*

$$f'\left(x^0, d\right) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(x^0 + td) - f(x^0)}{t} \in \bar{\mathbb{R}}$$

$$f \text{ convexe } \Rightarrow f'(x^0, d) = \inf_{t \succ 0} \frac{f'\left(x^0+td\right)-f\left(x^0\right)}{t} \ \forall d$$

* $f'(x, d) \leq f(x + d) - f(x)$, $\forall x,\ d \in \mathbb{R}^n$

* $g \in \partial f(x^0) \Longleftrightarrow f'(x^0, d) \geq \langle g, d\rangle \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$

* $f'(x^0, d) = h(b) = \sup_{g \in \partial f(x^0)} \langle g, d\rangle$

* h *est (s.c.i.)* $\Longrightarrow f'(x^0, d) = \sup_{g \in \partial f(x^0)} \langle g, d\rangle$

* $\partial f(x^0) = \phi \ \Rightarrow f'(x^0, d) = -\infty$, $\forall d$

  * *Si* $\exists\ d \in \mathbb{R}^n / f'(x^0, d) = -\infty$ *alors* $\partial f(x^0) \neq \phi$

  * *Si* $f'(x^0, d) \geq -\infty$,$\forall d$ *alors* $\partial f(x^0) \neq \phi$

  * $\partial f(x^0)$ *est compact non vide* $\Longleftrightarrow a \in \inf(dom\ f)$

Conclusion 10 *1.* $f'(x^0, d) \leq f(x^0 + d) - f(x^0), \forall x^0, d \in \mathbb{R}^n$

2. Si f *est différentiable on a* $f'(x^0, d) = \langle \nabla f(x^0), d\rangle$ *et* $\langle \nabla f(x^0), y - x^0\rangle \leq f(y) - f(x^0), \forall y$

Théorème 7 *soit* f *une fonction convexe de* $\mathbb{R}^n$ *prenant une valeur finie en* $x^0 \in \mathbb{R}^n$, *Alors*

i) $g \in \partial f(x^0)$ *si et seulement si* $f'(x^0, d) \geq \langle g, d\rangle$, $\forall d$

ii) *la fermeture de la fonction convexe :* $h(d) = f'(x^0, d)$ *est la fonction d'appui de* $\partial f(x^0)$ *:*

$$\partial f\left(x^0\right)\ h(d) = \sigma_{\partial f(x^0)}(d) = \sup_{g \in \partial f(x^0)} \langle g, d\rangle$$

Conclusion 11

(a) *si f n'est pas sous différentiable en x^0, soit $\partial f(x^0) = \phi$ alors $f'(x^0, d) = -\infty \quad \forall d$*

(b) *la polaire de $f'(x^0, d) = h(d)$, est la fonction indicatrice de $\partial f(x^0)$, d'où*

$$\begin{cases} h^* = \Psi_{\ \partial f(x^0)} \\ h^{**}(x) = \sup\limits_{y \in \partial f(x^0)} \langle x, y \rangle \end{cases}$$

(c) *En particulier si h est(s.c.i.)on a $f'(x^0, d) = \sup\limits_{g \in \partial f(x^0)} \langle g, d \rangle$*

1.2.5 Rappele et notation de calcul différentiel

Définition 14

Soient E et F des espaces vectoriels normés f une application de E dans F et $x \in E$ on dit que f est différentiable an x s'il existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ (ensemble des application linéaires continues de E dans F)telle que $f(x+h) = f(x) + T(h) + \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$, l'application T, est alors unique et on la note $Df(x) = T \in \mathcal{L}(E, F)$ Exami nous quelques cas particulairs d'espace E et F : cas où $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^p$soit $f = \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ $x \in \mathbb{R}^n$ et sopposons que f est différentiable en x, alors $Df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$et il existe $A \in M_{p,n}(R)$tell que :

$$Df(x)(y) = Ay \quad \forall \quad y \in \mathbb{R}^n$$

on conford alors l'application linéaire $Df(x)$ et la matrice A qui la représente (appelée matrice jacobienne) .on écrit donc :

$$A = Df(x) = (a_{ij})_{\ 1 \le i \le p \quad 1 \le j \le n} \quad \text{où } a_{ij} = \partial_j f_i(x)$$

∂_j désgneant la dérivée partielle par rapport à la $j^{éme}$ variable

Exemple 2 *On pose $N = 3$ et $p = 2$, notons $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ et considérons*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

définie par :

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^3 + x_3^4 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

on vérifiera par le calcule que pour : $h = (h_1, h_2, h_3)^t$, on a :

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} & \frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} \end{pmatrix} donc\ Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 3x_2^2 & 4x_3^3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Df(x) * h = \begin{pmatrix} 2x_1h_1 + 3x_2^2h_2 + 4x_3^3h_3 \\ 2h_1 - h_2 \end{pmatrix}$$

et donc avec les notations précédentes :

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 3x_2 & 4x_3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cas où $E = \mathbb{R}^n$. $F = \mathbb{R}$ c'est un sous-cas du paragraphe précédent , on a ici (avec le méme abus de notation signalé dans le paragraphe précédent) $Df(x) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ et on peut définir le gradient de f, en x par

$$\nabla f(x) = (Df(x))^t \in \mathbb{R}^n$$

pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n * \mathbb{R}^n$ on à donc :

$$Df(x)\, y = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x)\, y_j = \nabla f(x)\, y$$

$$o\grave{u}\nabla f\left(x\right)=\left[\begin{array}{c}\partial_1 f\left(x\right)\\ \vdots\\ \partial_n f\left(x\right)\end{array}\right]\in\mathbb{R}^n$$

Définition 15 (materice hessienne)

Soit $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction deux fois défférentiable la fonction notée :*

$$\nabla^2 f\left(x\right):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n*n}$$

est apelée matrice hessienne de défini par :

$$\nabla^2 f\left(x\right)=\left(\begin{array}{cccc}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2}\end{array}\right)$$

la matrice hessienne est toujour symetrique

Chapitre 2

Optimisation

L'optimisation est un branche importante des mathématiques appliquées plusieurs domaine d'activité peut se réduire à un proplème maximisation ou de minimisation.

L'importance de l'optimisation dans la résolution des proplèmes pratiques en mathématiques appliquées ou dans d'outre activités de recharche est soulignées par de nombreux auteurs.

2.1 Problème d'optimisation

On définit un problème d'optimisation avec contraintes comme suite

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases} \qquad \text{(p)}$$

où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ensemble des contraintes

si $C = \mathbb{R}^n$, (p) est appelé problème d'optimisation sans contraintes

2.1.1 Problème mathématique

Un problème mathématique (PM) est un problème d'optimisation dans lequel l'ensemble de contraintes C est exprimé essentiellement par des inégalités (et, ou) des éga-

lités, c'est-à-dire C est de la forme

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n / f_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., n;\ g_i(x) = 0,\ i = 1, ..., m\}$$

et $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

2.1.2 Solution réalisable et optimale

Solution réalisable :

Un point $x^* \in C$ (c'est-à-dire vérifiant les contraintes de (p)) est appelé solution réalisable de (p)

Solution optimal globale :

Solution réalisable qui minimse f sur C est appelé solution optimal globale de (p), nous la noterons x^*

l'ensemble de solution globale est note :

$$\arg \min_C f(x)$$

Solution optimal local :

Un point $x^* \in C$ est solution optimal local de (p) s'il existe un voisinage V de x^*tel que

$$f(x^*) \leq f(x)\,; \forall x \in V$$

on note par :

$$\log \min_C f(x)$$

(l'ensemble des solution optimales local de (p))

Nous avont toujours $\arg \min_C f(x) \subseteq \log \min_C f(x)$

Si le problème (p) est convexe les deux ensemble sont égaux

2.2 Optimisation sans contraintes

2.2.1 Présentation du problémes

Soit $f \in C(E, \mathbb{R})$ et E une espace vectoriel normé on cherche soit une minimum global de f c'est -à-dire : $x^* \in E$ tel que :

$$f(x^*) \leq f(y) \quad \forall y \in E \qquad (1)$$

où un minimum locale. c'est -à-dire : $x^* \in E$ tel que

$$\exists \alpha \succ 0,\ f(x^*) \leq f(y)\ \ \forall y \in B(x^*, \alpha) \qquad (2)$$

2.2.2 Résultas d'existance et d'unicité

Théorème 8 (existance) *Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $f = E$ un application tel que :*

1. *f est continue*
2. *$f(x) \to +\infty$ quand $\| x \| \to +\infty$ alors il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$f(x^*) \leq f(y)$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n$

Théorème 9 (d'unicité) *Soit un espace vectoriel normé et f strictement convexe alors il existe au plus un x^n tel que :*

$$f(x^n) \leq f(y) \quad \forall\ y \in E$$

Démonstration 1 *Soit f strictement convexe. supposons qu'il existe x^*et x^{**}, tel que*

$$f(x^*) = f(x^{**}) = \min f$$

comme f est strictement convexe, si $x^* \neq x^{**}$ alors :

$$f\left(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{**}\right) \leq \frac{1}{2}f(x^*) + \frac{1}{2}f(x^{**}) = f(x^*) \min_{\mathbb{R}^n} f$$

ce qui est impossible donc $x^* = x^{**}$

Théorème 10 (Existance et unicité) *Soit $E = \mathbb{R}^n$, et soit $f = E \longrightarrow \mathbb{R}$ on suppose que*

1. *f continue*
2. *$f(x) \to +\infty$ quand $\| x \| \to +\infty$*
3. *f est strictement convexe alors il existe un unique $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$f(x^*) = \min_{\mathbb{R}^n} f$$

2.2.3 Condition d'optimalité

Proposition 12 (condition nécéssaire d'optimalité) *Soit E un espace vectoriele normé. et soient $f \in C(E, \mathbb{R})$ et $x^* \in E$tel que f est défférentiable en x^* si x^* est solution de (2) alors : $Df(x) = 0$*

Démonstration 2 *Supposons qu'il existe $\alpha \succ 0$ tel que : $f(x^*) \leq f(y)$ pour tout $y \in B(x^*, \alpha)$. soit*

$$x \in E \diagdown \{0\}$$

alors si $\mid t \mid \prec \frac{\alpha}{\|z\|}$ on à $\frac{-\alpha}{\|z\|} \prec t \prec \frac{\alpha}{\|z\|} x^* + tz \in B(x^*, \alpha)$ (où $B(x^*, \alpha)$ désigne la boul ouverte de centre x^* et de rayon α) et on a donc : $f(x^*) \leq f(x^* tz)$ comme est differentiable en x^*, on a

$f(x^*, tz) = f(x^*) + Df(x^*)(tz) + \mid t \mid \varepsilon_z(t)$ *où* $\varepsilon_z(t) \to 0$ *lors que* $t \to 0$ *on à donc*

$$f(x^*) + Df(x^*)(z) + \mid t \mid \varepsilon_z(t) \geq f(x^*)$$

et pour $\frac{\alpha}{\|z\|} \succ t \succ 0$ *on à* $Df(x^*)(z) + \varepsilon_z(t) \geq 0$ *en faisant tendre* t *vers* 0*, on abtient que*

$$Df(x^*)(z) \geq 0 \forall z \in E$$

on a aussi : $Df(x^*)(-z) \geq 0 \forall z \in E$ *et donc :*

$$-Df(x^*)(z) \leq 0$$

alors

$$Df(x^*)(z) \leq 0$$

on en conclut que : $Df(x^*) = 0$

Théorème 11 (condition suffisantes d'optimalité) *Soit une fonction* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fios différentiable dans un sous-ensemble ouverte* v *de* $\mathbb{R}^n$*, et siot* $x^* \in v$ *qui vérifie des condition* $\nabla f(x^*) = 0$ *et* $\nabla^2 f(x^*)$ *est définie positive alors :* x^* *est un minimun local de* f

2.3 Optimisation avec contrainte

2.3.1 Présentation du probléme

Définition 16

Soit $E = \mathbb{R}^n$, soit $f \in C(E, \mathbb{R})$et soit $\Bbbk$ un sous enesembl de E, on s'interesse a la recherche de $x^* \in \Bbbk$ tel que :

$$\begin{cases} x^* \in \Bbbk \\ f(x^*) = \min\limits_{\Bbbk} f \end{cases} \tag{3}$$

ce probléme est un probléme des minimisation avec contrainte(ou sous contrainte) au sens où l'on cherche de qui minimisation f en est reignant x a étre dans $\Bbbk$, voyons quelques exemples de ces contrainte (définie par l'ensemble $\Bbbk$) qu'on va expliciter à l'aide des p fonctions continues, $g_i \in C(E, \mathbb{R})$, $i = 1, ..., p$

Contrainte egalités

On pose $K = \{x \in E, g_i(x) = 0, i = 1, ..., p\}$, on verra plus loin que le probléme de minimisation de f peut alors étre résolu gràce au théoreme des multiplicateurs de lagrange

Contrainte inegalités :

On pose $K = \{x \in E, g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., p\}$, on verra plus loin que le probléme de minimisation de f peut alors étre résolu gràce au théoreme de Kuhn-Tucker

2.3.2 Existence et unicite de la solution de problème d'optimisation avec contrainte

Théorème 12 (Existence) *Soit* $E = \mathbb{R}^n$, *et* $f \in C(E, \mathbb{R})$

1. *Si* K *est un sous-ensemble fermé et bornné de* E *alors il existe* $x^* \in K$ *tel que :* $f(x^*) = \min_K f$
2. *si* K *est un sous-ensemble fermé et bornné de* E, *et si* f *est croissante à l'infini c'est-a-dire que* $f(x) \longrightarrow +\infty$ *quand* $\shortmid x \shortmid \longrightarrow +\infty$, *alors* $\exists x^* \in K$ *tel que :* $f(x^*) = \min_K f$

Démonstration 3

1. *Si* K *est un sous-ensemble fermé et bornné de* E *comme* f *est continue, elle atteint ses borné sur* K, *d'où l'existence de* x^*
2. *Si* f *est croissant à l'infin, il existe* $r \succ 0$ *tel que si* $\|x\| \succ r$ *alors :* $f(x) \succ f(0)$, *donc* $\min_K f = \min_{K \cap B_R} f$ *où* B_R *désigne la boule de centre* 0 *et de rayon* R *l'ensemble* $K \cap B_R$ *est compact, car intersection d'un fermé et d'un compact. Donc : par ce qui précéde, il existe* $x^* \in K$ *tel que* $f(x) = \min_{K \cap B_R} f = \min_{B_R} f$

Théorème 13 (Unicite) *Soit* $E = \mathbb{R}^n$ *et* $f \in C(E, \mathbb{R})$, *on suppose que* f *est strictement convexe et que* K *est convexe. Alors il existe au plus un element* x^* *de* K *tel que :* $f(x^*) = \min_K f$

Théorème 14 (Existence et unicite) *Soit* $E = \mathbb{R}^n, f \in C(E, \mathbb{R}^n)$ *une fonction strictement convexe et* K *un sous ensemble convexe fermé de* E. *Si* K *est bornné ou si* f *est croissante a l'infini, c'est-à-dire si* $f(x) \longrightarrow +\infty$ *quand* $\| x \| \longrightarrow +\infty$, *alors il existe un unique element* x^**de* K *solution du probléme de minimation*(3)

$$i.e \text{ tel que} : f(x^*) = \min_K f$$

2.3.3 Condition d'optimalite avec contrainte

Condition d'optimalité simple :

Proposition 13 *Soient* $E = \mathbb{R}^n$, $f \in C(E, \mathbb{R}^n)$ *et* $x^* \in K$ *tel que* $f(x^*) = \inf_K f$, *on supposose que* f *et differentiable en* x^*

1. *Si* $x^* \in K^0$ *alors* $\nabla f(x^*) = 0$ *(K^0 l'interieur de l'ensemble K)*
2. *Si* K *est convexe, alors* $\nabla f(x^*)(x - x^*) \geq 0$ *pour tout* $x \in K$

Preuve 14

1. *Si* $x^* \in K^0$, *alors il existe* $\varepsilon \succ 0$ *tel que* $B(x^*, \varepsilon) \subset K$ *et*

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in B(x^*, \varepsilon)$$

alors on a déjà vu, que ceci implique $\nabla f(x^*) = 0$

2. *Soit* $x \in K$, *comme* x^* *realise le minimum de* f *sur* K *on a :*

$$f(x^* + t(x - x^*)) = f(tx + (1-t)x^*) \geq f(x^*)$$

pour tout $t \in]0, 1]$ *par convexite de* K. *on en déduit que :*

$$\frac{f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*)}{t} \geq 0 \quad pour \quad tout \quad t \in]0, 1]$$

En passant à la limite lorsque t *tend vers* 0 *dans cette derniére inégalité,on obtient* $\nabla f(x^*)(x - x^*) \geq 0$

Théorème 15 (Multiplication de lagrange) *Soit* $x^* \in K$ *tel que* $f(x^*) = \min_K f$, *on suppose que* f *est différenttable en* x *et* $\dim(\mathrm{Im}(Dg(x^*))) = p$ *(ou* $rang(Dg(x^*)) = p$*), alors : il existe* $(\lambda_1 ...., \lambda_p)^t \in \mathbb{R}^p$ *tel que :* $\nabla f(x^*) + \sum \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$

Théorème 16 (kuhn-tucker) *Soit* $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, *sont* $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *pour* $i = 1, ..., p$ *et soit :* $K = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leq 0 \ \forall i = 1\}$ *on suppose qu'il existe* x^* *solution de* (3), *et on pose* $I(x^*) = \{i \in \{1, ..., p\}; g_i(x^*) = 0\}$ *on suppose que* f *est différenttable en* x^**et que la famille de* $(\mathbb{R}^n)$ $\{\nabla g_i(x^*), i \in I(x^*)\}$ *est libre. Alors il existe une famille* $(\lambda_i)_{i \in I(x^*) C R_+}$ *tel que :* $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$

Chapitre 3

programmation linéaire

3.1 Introduction :

La programmation linéaire est un méthode mathematique qui permet de trouves la solution optimal de certains probléme.

Elle est utilisée en particulier,dans l'industrie et dans la planification économique

3.2 Lés formes de programme linéaire

3.2.1 La forme général

Un programme linéaire s'écrit sous la forme suivente :

$$\min z(ou \max) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

sous les contraintes ou condition : p équations

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = d_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = d_2$$

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pn}x_n = d_p$$

et $(n-p)$ inéquations

$a_{(p+1)1}x_1 + a_{(_{p+1})2}x_2 + ... + a_{(p+1)n}x_n \leq d_{p+1}$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq d_m$

$x_j \geq 0$ (variable réalisables) $j = 1, 2, ..., q$

$x_j \; \forall$ (variable qualconques) $j \succ q$

on peut écrire ce systéme sous un autre forme condensée

$$(I) \begin{cases} \min z(ou \max w) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = d_i \quad (i = 1, ..., p) \\ \sum_{r=1}^{n} a_{ir} x_r \leq d_i \quad (i = p+1, ..., m) \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, ..., q \\ x_j \forall \quad j = q+1, ..., n \end{cases}$$

a_{ij},d_i,c_i étant des données n un ériques réelles on adoptera les natations suiventes $M = \{1, ..., n\}$ ensemble des indices de contraintes et $N = \{1, ..., m\}$ ensemble des indices de variables.

$M_1 \subset M$ un sous ensemble de $M, N_1 \subset N$ un sous ensemble de N

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ un matrice $m \times n$, $i \in M$, $j \in N$

a_j la j iéme coloone de A un vecteur colonne

α_i la i iéme ligne de A un vecteur ligne

x un vecteur colonne à n composantes $x_1, x_2, ..., x_n$

C un vecteur colonne à n composantes $c_1, c_2, ..., c_n$

D un vecteur colonne à m composantes $d_1, d_2, ..., d_m$

A est appelée matrice technologique

D vecteur de domand ; C vecteur de prix et X vecteur des inconnues.

La probléme (I) s'ecrit aussi :

$$\begin{cases} \min Z \text{ (ou } \max W) = cx \text{ (produit scalaire)} \\ \alpha_i x = d_i \quad i \in M_1 \\ \alpha_i x \leq d_i \quad i \in M - M_1 \\ x_j \succeq 0 \quad j \in N_1 \\ x_j \ \forall j \in N - N_1 \end{cases}$$

3.2.2 Forme cannonique d'un programmation linéaire

Définition 17

Un programmation linéaire (PL) est dit sous la forme canonique s'il ecrit :

$$\begin{cases} \max z = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

3.2.3 Forme standard

Définition 18

Un programation linéaire sous la forme standard s'il écrit :

$$\begin{cases} \max z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

on dit de plus que le Programation Linéaire est sous la forme standard siplicial si A de la taille $m * n$ avec $m \leq n$,se décompose en : $A = (I_m \backslash H)$

I_m : matrice indentité de la taille $m * n$

H : matrice de la taille $m * (n - m)$

Proposition 15 *Toute Programation Linéaire sous la forme standard s'écret de façon equivalante un (PL) sous la forme canonique*

Démonstration 4 *Soit un Programation Linéaire sous forme canonique on a :* $Ax \leq b \Longleftrightarrow Ax + e = b \quad e \geq 0$ *ou* $e = (e_1, ..., e_m)^T$ *sont appellées variable d'ecart :*

Ainsi :

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (A \backslash I_m)\binom{x}{e} \\ \binom{x}{e} \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \tilde{A}\tilde{x} = b \\ \tilde{x} \geq 0 \end{cases}$$

avec $\tilde{A} = (A \backslash I_m)$ *matricede taille* $m * (n - m)$

riciproque : soit un Programation Linéaire sous forme standard on a :

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ Ax \geq b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \end{cases} \Longleftrightarrow \left(\frac{A}{-A}\right) x \leq \left(\frac{b}{-b}\right) \Longleftrightarrow A \leq \tilde{b}$$

ou $A^{\approx}$ *est une de matrice de taille* $2m * n$ *et* $b \in \mathbb{R}^{2m}$

3.3 Notation de dualite

La dualite est un concept fondamental en programmation linéare et conduit à un résultat de prande partée théorique et pratique

3.3.1 Théoréme de dualite

Soit le probléme linéaire suivant :

$$(p) \quad \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ \max Z = c^t x \end{cases}$$

son dual est programme linéaire suivant

$$D \begin{cases} Ay \geq c \\ \min W = yb \\ y \geq 0 \end{cases}$$

3.3.2 Principes de transformations permettant d'obtenir le dual

Lorsqu'on formule le dual à partir du primal,

1. Le sens de l'optimisation est inversé. La maximisation dans le primal devient une minimisation dans le dual, et inversement.
2. Les signes sont inversés dans les inégalités correspondant aux contraintes, mais la contrainte de non-négativité sur les variables de décision subsiste.
3. Les lignes de la matrice des coefficients des contraintes du primal deviennent des colonnes de la matrice des coefficients du dual.
4. Le vecteur ligne des coefficients de la fonction objectif du primal devient un vecteur colonne de constantes associées aux contraintes du dual.
5. Le vecteur colonne des constantes du primal devient un vecteur colonne de constantes associées aux contraintes du dual.
6. Les variables de décision du primal (x_j) sont remplacées par les variables de décision du dual (y_i).

Les six points précédents nous montrent que le dual du dual donne le primal.

Théorème 17 (dualité faible) *x est une solution réalisable primale et y un solution réalisable dual alors $by \leq cx$ lorsque primale du type minimusation et $by \geq cx$ lorsque primle du type maximusation*

Théorème 18 (dualité forte) *si x^*est une solution optimal pour le programe primal alors le programe dual admet un solution optimal y^* telle que $by^* = cx^*$*

3.4 quelque méthode de resolution de programme linéaire

3.4.1 Méthode de point interieur :

nous sommes a présent en mesure de donner une premier description dés methodes de point interieur, en particulieur d'expliciter leur dénonination, placons nous dons le cas du programme linéaire dons sa forme standard

$$\begin{cases} \min c^T x, \ x \in \mathbb{R}^n \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

le principe des méthodes de point interieure consiste alors à faire évoluer de façon itérative ce point vers une solution optimal du probléme toute en restant à l'interieur strict (ζ_0) avec $\zeta_0 = \{x \setminus Ax = b \text{ et } x \succ 0\}$ $x \in \zeta_0$ du polyédre admussible en d'autre terme on construit une suite d'itrés interieur convergent vers une solution, de puis parmi les critére couramment utisées pour deffirentier les méthodes mentionnons : espace itrérés : une méthode est dite primale-dual lorsque ses itrés appartiennent respectivement à l'espace de variables primales-duales ou le produit cartésin de ces deux espaces, et type itrés, le type d'algorithme et type de pas

Méthode de karemarkare

En 1984, l'algorithme de Karmarkar a été annoncé comme la première méthode de programmation linéaire dont la complexité est polynomiale. Cette méthode utilise uniquement le domaine primal sans faire référence au problème dual ni aux variables duales. A chaque itération, l'algorithme exécute une transformation projective de l'espace admissible qui fait de l'itéré courant $\bar{x}$ le centre de l'ensemble projeté dans lequel une direction de descente est ensuite calculée.

La méthode de Karmarkar est destinée à résoudre les problèmes de la forme :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ Ax = 0 \\ x \in \Delta \end{cases} \qquad \text{(A. 1)}$$

Le domaine admissible noté Δ est défini par :

$$\Delta = \left\{ x \mid Ax = 0,\ e^t x = 1,\ x \geq 0 \right\}$$

Alors l'idée de Karmarkar est de transformer l'itéré courant X_k en centre analytique de l'ensemble admissible projeté Δ par la projection T . En effet, on peut montrer que le centre analytique $T(\bar{x}) = e$ est le centre analytique de Δ.

la transformation projective

Soit X_k la solution courante, la transformation projective est definie par :

$$x' = T_k(x) = \frac{(X_k)^{-1}x}{e^t(X_k)^{-1}x}$$

est sont inverse est donnée par :

$$x = T_k^{-1}(x') = \frac{X_k x'}{e^t X_k x'}$$

Sous cette transformation on peut vérifier que le point courant $\bar{x}$ devient $\frac{1}{n}e$ que le simplexe unite Δ demeure inchangé. En fait la transformation affine : $\tilde{x} = \frac{1}{n}X_k^{-1}x$ suivie d'une projection radiale : $x' = \frac{\tilde{x}}{e^t\tilde{x}}$

Sous la transformation projection, le programme linéaire devient :

$$\begin{cases} \min\limits_x \frac{c^t X_k x'}{e^t X_k x'} \\ AX_k x' = 0 \\ x' \in \Delta \end{cases} \qquad \text{(A.2)}$$

Algorithme de karmarkar

Initiatisation $\rho \geq 0$;

$x_0 = \frac{e}{n}$ point initial intérieure ;

Début

$x_c := x_0$;

Tan que critére d'arret pas satifait faire

Début

$X := X_c$;

$\hat{c} := X_c$;

$\hat{A} := AX$;

$B := \begin{bmatrix} \hat{A} \\ e^t \end{bmatrix}$;

$\hat{d} := (I - B^t(BB^t)^{-1}B)\hat{c}$;

$\hat{x} := \frac{e}{n} + \frac{\rho}{||d||}d$

evalue critere d'arret ;

$x_c := \frac{c^t X\hat{x}}{e^t X\hat{x}}$;

Fin

Fin

Méthode de mise à l'échelle affine

Nous pouvons aussi citer, parmi les méthodes primales historiques, les méthodes de mise à l'échelle affine (affine scaling methode). Elles ont été développées en premier lieu dans le cadre primal par Dickin. Ces méthodes de réduction de potentiel se basent sur des transformations projectives affines et non pas sur la notion de chemin central ou sur des méthodes de Newton. Dans le problème primal, la contrainte de positivité sur x est remplacée par une contrainte d'appartenance à un ellipsoïde centré autour de l'itéré

courant :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ Ax = a \\ \left\| (X^{(k)})^{-1}(x - x^{(k)}) \right\| \leq 1 \end{cases}$$

Où $x^{(k)}$ représente l'itéré courant, $X^{(k)}$ la matrice diagonale comportant le vecteur $x^{(k)}$ sur la diagonale. On peut montrer que l'ellipsoïde, appelé ellipsoïde de Dikin, est entièrement inclus à l'intérieur de Δ. Le minimum sur cette ellipsoïde est obtenu en $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$ ou $\Delta x^{(k)} = -\frac{X^{(k)} P_{AX^{(k)}} X^{(k)} c}{\left\| P_{AX^{(k)}} X^{(k)} c \right\|}$

Si les méthodes primales ont un intérêt théorique en termes d'analyse de complexité et de vitesse de convergence ou encore en termes de concept de point intérieur, il apparaît que ce sont surtout les méthodes utilisant les variables primales et duales qui ont été largement codées dans les solveurs numériques disponibles

3.4.2 Méthode du simplexe

Le principe de l'algorithme simplexe

principe de l'algorithm simplexe partant de la forme canonique d'un programme linéaire

$$\begin{cases} \max z = c^T x, \ x \in \mathbb{R}^n \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ou A est un matrice $m * n$ de range m

l'idée principale de la méthode du simplexe est de caractriser les sommets du polyédre de façon algébrique, chaqun sommets sont appelle une base admissible, l'algorithme consiste à partie d'un sommet initial puis de passer successivement d'un sommet à un sommet adjacent

une caractréstique trés importante de l'algorithme du simplexe est donc liée au fait que cet l'algorithme ne visite pas tous les sommets polyédre mais passe d'un sommet à autre qui améliore la valeur de la fonction objective. par ce processus, un gain de temps

trés appréciable peut etre obtenu particulierement lors de la résolution des probleme de grand dimensions

Théorème 19 (théoreme 4 de convergence finie) *Sous l'hypothése de non-degenerxence, l'algorithme du simplexe converge en un nombre fini d'itération*

Algoritheme du simplexe :

on dipose d'un base réalisable $\mathring{B}$

1. $\mathring{B}$ base réalisable du départ, itération $k = 0$
2. $k \leftharpoondown k + 1$
3. à l'iteration k ,soit B la base courante $x = (x_B, x_N)$ la solution de base correspondante : calculer $\bar{b} = B^{-1}b$ $\pi = c_B B^{-1}$ (les multiplicateur du simplexe) $\bar{c}_N = c_N - \pi N$
4. si $\bar{c}_N \leq 0$: l'optimum est atteint si $\exists$ s tq $\bar{c}_N \succ 0$alors
5. siot A^s la colonne s de : calculer $\bar{A}^s = B^{-1}A^s$

   - si $A^s \prec 0$ stop :l'optimume est non borné $(+\infty)$
   - si non calculer $\hat{x}_s = \frac{\bar{b}_r}{A^s_r} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{A^s_i} : \bar{A}^s_i \succ 0\right\}$

6. siot x_t la variable correspondant à la r^{ieme} ligne de la base c_a_d telle que $B^{-1}A_t = e_r$ (m-vecteur à composante r egale à 1),alors la variable s prend la valeur $\hat{x}_s \succ 0$ (entre en base) ; la variable t s'annule $(\hat{x}_t = 0)$(sort de la base)la nouvelle base réalisable $\hat{B} = B + \{A^s\} - \{A^t\}$ calculer l'inverse de la nouvelle base $\hat{B}^{-1}$.

Tableau simplexe :

Définition 19

on dit qu'un programme linéaire est mis sous forme canonique relativement à la base des variables $(X_1, ..., X_m)$ *si :*

1. *Z est exprimé en fonction des variable hors base (considérées comme variables indépendantes)*
2. *Les colonnes de la matrice des contraintes correspondant aux variables en base forment (à une perturbation prés) un matrice unité*

Tableau simplexe :

$X_1\ X_2 \ldots\ldots X_m$	$X_{m+1} \ldots\ldots X_n$	Z	
0 0.....0	$\overline{C_N} = C_N - \pi N$	-1	$-Z_B$
1 0.....0 0 1.....0 ... 0 0.....1	$\overline{N} = B^{-1}N$	0 0	$\overline{b} = B^{-1}b$
variables en base	variables hors base		

1. la solution de base
2. valeur Z_B de la fonction objectif (avec le signe)
3. les coùts réduit $\bar{C}_N$ des variables hors base

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté un etude génerale d'un probléme linéaire, en présentant quelques resultats d'analyse convexe et optimisation ; de la dualité de la programmation linéaire ainsi que la formulation d'un probléme linéaire et essentielement quelques méthodes de resolution de ce probleme.

Bibliographie

[1] A. Keraghel, Analyse convexe : Théorie fondamentale et exercices, Editions Dar El'houda Ain Mlila , Algérie, (2001).

[2] J-B Hiriart-urrutg OPTIMISATION ET ANALYSE CONVEXE :exercices corrigés. ED sciences, 2009.

[3] J.chr.culioli ,Introduction à l'optimisation. Ellipses ,2012.

[4] M.Bergounioux Optimisation et contrôle des systémes linéaires ,cours et exercices avec solution. Dunod ,2001.

[5] M. Minoux, Programmation mathématique : Théorie et algorithmes, T1 et T2, Dunod, 1983.

[6] C.BREZISKI : Initiation à la programmation linéaire et à l'algorithme du simplexe .La pie 1869.

[7] Cours de programation linéair donné par le Dr -Ali DERBALA .