الجمهوريـة الجزائريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire

Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence
En: Filière mathématiques fondamentales

CONSTRUCTION DE TOPOLOGIE

Préparé par :

- **BEN MERZOUG NOUR EL HOUDA**
- **KITATNI FATIHA**

Encadré par : SEKHANE CHAFIKA

Année universitaire : 2014/2015

دعاء

سبحان الَّذِي جعَل الشَّمْسَ ضِياءً والقَمَرَ نُوراً وقَدَّرَهُ مَنَازِلَ لنَعْلَمَ عَدَدَ السِنِين والحِسَاب .... ربَّنا ما خلقْتَ هذا باطلاً سبحانك فقِنا عذاب النَّار .....

اللهم ارفعِنا بالعلم، وانفعنا بما علمتنا ، واجعل العلم لنا نورا ينير دروبنا ...... ربنا آتنا من لدنك رحمة وهيء لنا من أمرنا رشدا .....

اللهم اجعلنا ممن يتفكرون في خلق السماوات والأرض ويخافون يوما تتقلب فيه القلوب واجعل لنا من خشيتك ما تحول به بيننا وبين معصيتك....

قال تعالى : هل يستوِي الَّذين يعلمون والَّذين لا يعلمون إنَّما يتذكَّر أولوا الألباب

الزمر آية 9

Remerciements

On voudrait profiter de cet apport unité pour adresser notre profonde gratitude envers Dieu tout puissant qui nous a donné la force et le Courage pour achever notre chemin et pour la réalisation de ce mémoire.

A Mme Sekhane Shafika pour son encadrement et son aide, ses directives ainsi que ses conseils qui nous ont permis d'avancer dans la conception de Notre projet.

A mes Parents, source inépuisable d'amour, d'affection et de soutier, a toute la famille chaque individu à son nom,

Enfin nous remercions tous.

إهداء

يارب في قلبي دعوات عانق أبواب السماء أتذكر أحبتي واختار ماهي أجمل دعوى للأخيار

اسأل الله العزيز الغفار أن يبارك في رزقهم والأعمار وان يسعدهم ما تعاقب الليل والنهار وان يسطر

أسمائهم في عليين مع الأبرار فبرحمتك وعطفك قل لها كن لتكن

إليك أمي جميلة بن زايد كل حرف من حروفك المعلقة تزحم فيها الأشعار

فأوله عشق وأوسطه أمل وآخره تشعين كالشمس اختار ن اسمك أوسطه ومن حنينك أوله وعينيك بريقها

ومن شفتيك كلامها لأقول لك احبك احبك احبك يارب احفظ زينة البشر

إليك والدي أحسن أبي يا صورة تزهو فوق كل الصور يا سيد كل الأسياد

الى الأعضاء المورقة بشجرة الحب وترعرعت بينهم إخوتي هشام وزوجته وا بنتهما الكتكوتة نهال

والى إخوتي سفيان ، عادل ، سمير، حسام والى أخواتي كريمة وزوجها هشام ، وابنهما معتز وأختي رزيقة

والى خالي باديس وعائلته وخالي عبد الوهاب وعائلته وخالي عمار وعائلته والى خالتي بريزة

الى صديقاتي نور الهدى ، روميساء ، ريمة ، حسناء ، فاتن ، أحلام ، آمال ، يامنة ، فيروز

والى جميع من يحمل لقب بن زايد وبن صالح

الى اعز أعز صديق مراد وعائلته

الى كل من ساعدني في انجاز هذا العمل من قريب او من بعيد

إليكم جميعا اهدي ثمرة جهد سنوات من الدراسة

ولأنكم أحباء على قلبي

ولكل منكم قصته أظل أذكركم ما حييت

وسيلة

أمي

يا زهرة في جوفي قد نبتت ... اعرف كم تعبت .. من اجلي .. كم صرخة لم .. سببتها لك

... اعرف أنني قد عشت في أحشائك .. ا كبر .. وا كبر ... واعرف انك لا زلت ترويني بحنانك

...يا درة البصر .... يا لذة النظر... يا نبضي .. لكم ضمتني عيناك واحتوتني

يمناك وكم أهديتني القبل من شهد شفتاك .. لأرقد ملئ أجفاني وارسم ... حلو احلامي ...

وكم أتعبت من جهد . وكم أرقت من جفن . وكم ذرفت من دمع لأهنأ وأعيش في امن ..

. ويوم لفرحت لا اصدق صدق بسماتك وتغاضيك عن آلامك

اليك أمي الغالية عائشة مريوط حفظك الله لنا دوما نورا يضيء لي الحياة

الى أبي ... إني أراك رجلا بأوصاف الملائكة أو ملاكا بأوصاف الرجال .. الكون على سعته

لا يضاهي سعة قلبك .. أنت تحبني بلا مقابل أدعو لك الله من كل قلبي .. أن يديم عليك الصحة والعافية ..

اليك ابي الغالي ابراهيم

خلق البحر ليعانق موج الرمال و الصخور .. تشرق الشمس .. لتلف بدنها الصحاري و البحور

توجد الفراشات دائما مع رق الورود والزهور أختاه يا بحر ... و شمسي .. وباقة زهوري احتاجك دوما

احبك أحبك أحبك أختي الغالية مريم **Maria** و الكتكوتة إكرام .

الى إخوتي .. نحلات قلبي التي تجمع الأراحيق من أكمام الزهر لتحيله عسلا لملائكة جناني .

سأجمع لكم ورود التلال وزهور الجبال ... لأعبد لكم درب الحياة .. وأعطيكم زاد المغامر ..

وجودي معكم من طعم العسل ألذ ..ليت ذلك يدوم الى الأبد

.. إليكم رمزي MIZOU الكتكوت أسامة ، MedMax ، وحمزة

والى خالي العزيز مريوط مزغيش وعائلته والى عمي العزيز رمزي وأمه

والى جدتي جازي يمينة الى صديقاتي فتيحة قيطاتني وحسناء ناقص

والى كل من نسيه قلمي وذكره قلبي

نور الهدى

Table des matières

Introduction General 1

1 Notion d'espaces 2

2 Comparaison de topologies 4

3 Topologie initiale 5

3.1 Topologie image réciproque 5

3.2 Topologie définie par une famille de pseudo-distances 6

3.3 Topologie définie par une famille de semi-normes.....................................6

3.4 Topologie étroite 8

4 Sous-espace topologique 9

5 Topologie produit 11

6 Topologie finale 14

6.1 Topologie somme disjointe 14

6.2 Topologie faible définie par une famille de sous espaces 14

6.3 Topologie de Schwartz 15

7 Topologie Quotient 19

7.1 Distance quotient d'une pseudo-distance 19

7.2 Constructions topologiques par quotients. 20

7.3 Topologie limite inductive 20

8 Groupes et corps topologiques 22

8.1 Groupes topologiques. 22

8.2 Les Groupes classiques. 22

8.3 Anneaux et corps topologiques. 23

8.4 Corps values. 24

9 Espaces vectoriels topologiques 25

9.1 Espaces vectoriels normes sur un corps valué. 25

9.2 Espaces vectoriels topologiques localement convexes. 25

9.3 Continuité des applications linéaires et multilinéaires. 26

9.4 Topologie faible. 27

9.5 Topologie faible-étoile. 28

10 Espace quotient d'une action de groupe 30

Bibliographie 33

Introduction Général

La topologie est une théorie mathématique relativement jeune : elle émerge (sous le nom d'analysis situs) au début du vingtième siécle dans les travaux de Hausdorff et de Tychonoff. Le besoin d'une telle théorie s'est déja fait sentir,a la fin du dix-neuviéme siécle dans les travaux de Riemann et de Hilbert. Dans la recherche actuelle, la topologie joue un rôle fondamental aussi bien en Analyse Fonctionnelle qu'en Géométrie Diffierentielle ou encore en Topologie Algébrique.

Chapitre 1

Notion d'espaces

Définition 1.1 (Topologie)

Soit X un ensemble une topologie sur X est un sous ensemble $A \subset p(X)$ vérifiant :

1) $\theta \in A$, et $X \in A$

2) $\forall u, v \in A, u \cap v \in A$

2) si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de A, alors $\cup_{i \in I} x_i \in A$

Définition 1.2 (espace topologique, ouvert, fermé)

Un espace topologique est un couple (X, A) où X est un ensemle et A est un topologie sur X. Un ouvert de (X, A) est un élément de A. Un fermé de (X, A) est un ensemble Y tel que $X - Y$: (On endéduit que l'unionfine de fermés est un fermé, et que l'interecection quelconque de fermés est un fermé).

Définition 1.3 (Distance, espace métrique)

Une distance sur un ensemble X est une application $X \times X \to \mathbb{R}_+$, telle que

$$\forall x \in X \quad , \quad d(x,x) = 0$$

et vérifiant les axiomes de séparation, symétrie, et l'inégalité trianggulaire. Un espace métrique est un couple (X, d), où d est une distance sur X.

Définition 1.4 (pseudo-distances)

Soit X un ensemble. Une pseudo distance sur X est une application vérifiant les mêmes axiomes qu'une distance, sauf la séparation. Une famille de pseudo distance (d_i) est dite séparante si

$$d_i(x,y) = 0 \quad \forall i \Rightarrow x = y$$

Une semi-norme est une application vérifiant $\|0\| = 0$, au lieu de $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.Une famille de pseudo normes est dite séparante si la famille de pseudo distances associées est séparante, ie le seul vecteur $x \in X$ tel que $\|x\|_i = 0 \;\; \forall i$ est 0.

Définition 1.5 (Topologie associée à une famille de pseudo distances)

Soit E un ensemble, et $(d_i)_{i \in I}$ une famille de pseudo distances sur E. On définit $O \subset p(X)$, par :

$$U \in O \Leftrightarrow \forall \alpha \in U \;\; , \; \exists r > 0 \;\; , \exists J \subset I \;\; , \; finie, \cap \, i \in JB_{d_i}(\alpha, r) \subset U$$

On définit ainsi une topologie sur X.

Définition 1.6 (Partie dense)

$D \subset X$ est dense si $D = X$. Cette définition est équivalente à "tout ouvert non vide de X rencontre D", ou encore " tout ouvert non vide d'une base d'ouverts de X rencontre D".

Définition 1.7 (Espace séparable)

Un espace topologique est séparable s'il existe une partie dénombrable dense.

Tout espace topologique à base dénombrable d'ouvert est séparable.

Définition 1.8 (Espace séparé)

Un espace topologique A est dit séparé si $\forall(x,y) \in A^2$, $\exists U, V$ deux ouverts/voisinages/éléments d'une base de voisinages disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$ Cette notion est invariante par homéomorphisme, et, si A est séparé, $\forall x \in A$, $\{x\}$ est un fermé.

Tout espace métrique est séparé.

Définition 1.9 (Groupe topologique)

Un groupe topologique est un groupe G muni d'une topologie rendant le produit et le passage à l'inverse continus.

Définition 1.10 (Espace vectoriel topologique)

Un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel muni d'une topologie telle que la somme et la multiplication par un scalaire soient continus. Un morphisme (resp. isomorphisme) d'espaces vectoriels topologiques est une application linéaire (resp. linéaire et bijective) qui est continue pour la topologie de l'espace vectoriel (resp. qui est un homéomorphisme).

Définition 1.11 (Espace complet)

On dit qu'un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy converge.

Définition 1.12 (la convexité)

(1) Ensemble convexe :

Un ensemble X est dit convexe si pour tout $\forall x,y \in X$ et $\forall \lambda \in [0,1]$

On a $\lambda x + (1-\lambda)y \in X$ on dit que X n'est pas convexe.

Si $\ni x,y \in X$, $\ni \lambda \in [0,1]$ On a $\lambda x + (1-\lambda)y \notin X$ D'une façon équivalente on dit que X est convexe si est soulement si pour deux paint quelconques x et y pas dans X, le segment de droite $[x,y]$ tout entie est contenue dans X

(2) Fonction convexe :

Soit X un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, alors la fonction $F : X \to \mathbb{R}$ est convexe si soulement si $\forall x,y \in X, \forall \lambda \in [0,1], F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$.

Toute fonction lineaire est convexe.

La somme de deux fonction convexe est une fonction convexe.

Chapitre 2

Comparaison de topologies

Soit X un ensemble. Une topologie O_1 sur X est moins fine qu'une topologie O_2 sur X si O_1 est contenue dans O_2, et plus fine si O_1 contient O_2. La relation « être moins fine que » est une relation d'ordre sur l'ensemble des topologies de X, qui admet un plus petit et un plus grand élément.

SoientO_1, O_2 deux topologies sur X et, pour tout x dans X, soient med $V_1(x)$ et $V_2(x)$ deux systèmes fondamentaux de voisinages de x pour respectivement O_1 et O_2. Il est immédiat de montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

O_1 est plus fine que O_2 ; tout fermé pour O_2 est fermé pour O_1 ; l'application identique $(X, O_1) \to (X, O_2)$ est continue ; pour tout x de X, tout voisinage de x pour O_2 est voisinage de x pour O_1 ; pour tout x de X, tout élément de $V_2(x)$ contient un élément de $V_1(x)$.

Exemple 2.1: La topologie grossière est la topologie la moins fine sur X, et la topologie discrète est la topologie la plus fine sur X.

Si $n \geq 1$, la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$ (i.e. celle induite par la distance euclidienne) est plus fine que la topologie de Zariski sur $\mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ (et de même en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$).

En effet, tout fermé de Zariski de $\mathbb{R}^n$ est l'intersection des ensembles des zéros d'une famille d'applications polynomiales, donc continues. Donc tout fermé de Zariski est un fermé de la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$.

La topologie induite par la distance SNCF sur $\mathbb{R}^2$ est strictement plus fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout ouvert non vide Ω de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$, la topologie de Schwartz sur $D(\Omega)$ est plus fine que la topologie de Whitney sur $D(\Omega)$. En effet, pour tout voisinage $B'_{f,\varepsilon,k}$ de $f \in D(\Omega)$ pour la topologie de Whitney, si $\varepsilon' = \inf\{\varepsilon, \frac{1}{k}\}$, alors $\varepsilon' \in C^0_{0,+}(\Omega)$ et $B'_{f,\varepsilon,k}$ contient le voisinage $B_{f,\varepsilon'}$ de f pour la topologie de Schwartz.

Propriétés : Si O_2 est séparée, alors O_1 aussi : deux ouverts disjoints pour O_2 sont encore deux ouverts disjoints pour O_1.

Si O_1 est sépa-rable, alors O_2 aussi : comme $O_2 \subset O_1$, une partie de X qui rencontre tout ouvert non vide de O_1 rencontre aussi tout ouvert non vide de O_2.

Pour toute partie **A** de X, l'intérieur de **A** pour O_2 est contenu dans l'intérieur de **A** pour O_1, et l'adhérence de **A** pour O_1 est contenue dans l'adhérence de **A** pour O_2 (car l'intérieur d'une partie est le plus grand ouvert contenu dans une partie et son adhérence est le plus petit fermé la contenant).

Si une application $F : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est continue, alors elle est encore continue pour toute topologie plus fine sur X et pour toute topologie moins fine sur Y.[1]

Chapitre 3

Topologie initiale

Soit X un ensemble, soit $(y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour tout $i \in I$, soit $f_i : X \to y_i$ une application. La topologie initiale sur X définie par $(f_i)_{i \in I}$ est la topologie la moins fine rendant continues les application f_i pour $i \in I$ Celle-ci existe, car l'intersection d'une famille de topologies sur X, rendant toutes les applications f_i continues, rend encore toutes les f_i continues.

Propriétés : la topologie engendrée par :

$$\{f_i^{-1}(U_i) \; : \; i \in I \;\; , \;\; U_i \text{ ouvert de } y_i\}.$$

Dans le cas particulier où I est un singleton, nous pouvons omettre les mots "engendrée par " : la topologie initiale est l'ensemble des images réciproques des ouverts de l'espace d'arrivée par l'unique élément de la famille.

- Si B_i est une base d'ouverts de y_i pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de

$$\{f_i^{-1}(U_i) \; : \; i \in I, U_i \in B_i\}$$

est une base d'ouverts de X.

En particulier, si I est dénombrable, et si y_i est à base dénombrable pour tout $i \in I$, alors X est à base denombrable.

- Si $x \in X$ et V_i est un système fondamental de voisinages de $f_i(x)$ dans yi pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de

$$\{f_i^{-1}(V_i) \; : \; i \in I, V_i \in V_i\}$$

est un système fondamental de voisinages de x dans X.

- Si $\mathbb{Z}$ est un espace topologique et si $g : \mathbb{Z} \to X$ est une application, alors g est continue si et seulement si chacune des applications $f_i \circ g$ est continue.

En effet, si g est continue, alors $f_i \circ g$ l'est par composition d'applications continues. Réciproquement, comme les $f_i^{-1}(U_i)$, où $i \in I$ et U_I est un ouvert de Y_i, engendrent la topologie de X, pour montrer que g est continue, il suffit de montrer que les $g^{-1}(f_i^{-1}(U_i))$ sont des ouverts de $\mathbb{Z}$. Or

$$g^{-1}(f_i^{-1}(U_i)) \;\; = (f_i \circ g)^{-1}(U_i)$$

ce qui montre le sens réciproque.[2]

3.1 Topologie image réciproque

Si X est un ensemble, si (y, O) est un espace topologique et si $f : X \to y$ est une application, alors la topologie image réciproque $f^{-1}(O)$ est la topologie initiale sur X définie par f.

3.2 topologie définie par une famille de pseudo-distances

Soit X un espace topologique dont la topologie est définie par une famille de pseudo-distances $(d_i)_{i\in I}$, alors cette topologie O_1 coincide avec la topologie initiale O_2 sur X définie par la famille d'applications $(f_{\alpha,x_0} : x \mapsto d_\alpha(x,x_0))_{x_0\in X,\alpha\in A}$ de pseudo-distances à un point.

En effet, comme la pseudo-boule $B_\alpha(x_0,\epsilon)$ est égale à $f^{-1}_{x,x_0}([0,\epsilon[)$, la topologie O_1 est moins fine que O_2.

Réciproquement, soient

$x_0 \in X$, $t_0 \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, $x \in f^{-1}_{\alpha,x_0}(]t_0-\epsilon,t_0+\epsilon[)$, et $\epsilon' = \epsilon - |d_\alpha(x,x_0) - t_0|$

Alors $\epsilon' > 0$ par définition de x. De plus, $B_\alpha(x,\epsilon')$ est contenue dans

$$f^{-1}_{\alpha,x_0}(]t_0-\epsilon\ ,\ t_0+\epsilon[)$$

Car si $y \in B_\alpha(x,\epsilon')$, alors

$$|d_\alpha(y,x_0) - t_0| \leq |d_\alpha(y,x_0) - d_\alpha(y,x_0)| + |d_\alpha(x,x_0) - t_0|$$

$$\leq d\alpha(x,y) + |d_\alpha(x,x_0) - t_0|$$

$$< \epsilon' + |d_\alpha(x,x_0) - t_0| = \epsilon$$

Donc

$$f_{\alpha,x_0}{}^{-1}(]t_0-\epsilon,t_0+\epsilon[)$$

est un voisinage pour O_1 de chacun de ses points. Comme l'ensemble des

$$f_{\alpha,x_0}{}^{-1}(]t_0-\epsilon,t_0+\epsilon[)$$

Pour $x_0 \in X$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ est un pré base d'ouverts de O_2 par la seconde propriété ci-dessus, la topologie O_2 est moins fine que O_1, et les deux topologies coïncident.

En particulier, la topologie d'un espace métrique (X,d) est la topologie initiale définie par la famille d'application:

$$(x \mapsto d(x,x_0))_{x_0\in X}$$

De X dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les applications de distance à un point.

3.3 Topologie définie par une famille de semi-normes

Soit X un espace vectoriel réel ou complexe, et $(\|.\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de semi-normes sur X.

- La topologie définie par la famille $(\|.\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ sur X est la topologie initiale définie par la famille d'applications $(f_{\alpha,x_0} : x \mapsto \|x-x_0\|_\alpha)_{x_0\in X,\alpha\in A}$ de X dans $[0,+\infty[$,c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continue ces applications.

-La topologie dé.nie par $(\|.\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ est exactement la topologie de X définie par la famille de pseudo-distances

$$d_\alpha(x,y) = \|x-y\|_x$$

par ce qui précède.

En particulier, elle est engendrée par les pseudo-boules

$$B_\alpha(x_0,\epsilon) = \{x \in X : \|x - x_0\|_\alpha < \epsilon\}$$

Où $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$. et $\alpha \in A$. Donc elle A pour base d'ouverts les intersections finies de telles boules. De plus, l'ensemble des parties

$$\bigcap_{\alpha\in A'} \{x \in X : \|x - x_0\|_\alpha < \epsilon\}$$

De X, où $\epsilon > 0$ et A' est une partie finie de A, est un système fondamental de voisinages d'un point donné $x_0 \in X$.

Notons que les translations sont des homéomorphismes : pour tout v_0 dans E, l'application t_{v_0} de X dans X définie par $x \rightarrow x + v_0$ est bijective, d'inverse t_{-v_0} , et elle est continue, car pour tous $x_0 \in X$ et $\alpha \in A$, nous avons

$$f_{\alpha,x_0} \circ t_{v_0} = f_{\alpha,x_0-v_0}$$

et on applique le quatrième point ci-dessus.

Soit y un espace topologique, soit $y_0 \in y$, soit A_{y_0} un système fondamental de voisinages de y_0 dans y, et soit $f : y \rightarrow X$ une application. D'après ce qui précède, si X est munie de la topologie ci-dessus, alors f est continue en y_0 si et seulement si

$$\forall\epsilon > 0 , \forall\alpha \in A , \exists U \in A_{y_0}, \forall y \in U , \|f(y) - f(y_0)\|_\alpha < \epsilon$$

Proposition 3.1:

(1) La topologie définie par une famille de semi-normes est séparée si et seulement si

la famille est séparant.

(2) La topologie sur un espace vectoriel réel ou complexe, définie par une famille dénombrable et séparante de semi-normes, est métrisable.

Preuve. (1) Si la famille n'est pas séparant, alors il existe deux points distincts x et y dans X tels que $\|y - x\|_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in A$, donc y appartient à tout voisinage de x , et X n'est pas séparé. La preuve du sens direct est similaire à celle du fait que la topologie induite par (une distance associée à) une norme est séparée.

En effet, si $x, y \in X$ sont distincts, soit $\alpha \in A$ tel que $\epsilon = \|x - y\|_\alpha > 0$.

Les applications :

$$f_x : u \rightarrow \|u - x\|_\alpha$$

et

$$f_y : u \rightarrow \|u - y\|_\alpha$$

sont continues. donc $f_\alpha^{-1}([0, \frac{\epsilon}{2}[)$ et $f_y^{-1}([0, \frac{\epsilon}{2}[)$ sont des ouverts contenant respectivement x et y.

Ces ouverts sont disjoints, par inégalité triangulaire, car s'il existait z dans X tel que

$$\|z - x\|_\alpha < \epsilon$$

et

$$\|z - y\|_\alpha < \epsilon$$

alors on aurait

$$\|x - y\|_\alpha < \epsilon$$

ce qui n.est pas possible.

Supposons que l'ensemble d'indice A soit égal à $\mathbb{N}$ (ce qui est possible, à bijection

près, quitte à rajouter, si A est fini, des semi-normes nulles). Notons d_n la pseudo-distance associée à la semi-norme $\|.\|_n$, et d la distance définie par :

$$d(x,y) = \sum_{n \in N+1} 2^{-n} min\{1, d_n, (x,y)\}$$

Notons O_{norm} et O_{dis} respectivement la topologie définie par la famille de semi-normes et celle induite par la distance d.

Comme les translations dans X sont des homéomorphismes à la fois pour O_{norm} et O_{dis}, il suffit de montrer que tout voisinage du vecteur nul pour l'une contient un voisinage du vecteur nul pour l'autre.

Rappelons que $\{B_d(0,\epsilon) \,:\, \epsilon > 0\}$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour O_{dis}, et que

$$\cap_{n=0}^{N} \{x \in X : \|x\|_n < \epsilon\} \,:\, N \in \mathbb{N}\,, \epsilon < 0$$

est un système fondamental de voisinages de 0 pour O_{norm}.

Soit $\epsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Soit x dans X. Si $\|x\|_n < \frac{\epsilon}{4}$ pour $0 \leq n \leq N$, alors

$$d(x,0) < \frac{\epsilon}{4} \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$$

Donc tout voisinage de 0 pour O_{dis} contient un voisinage de 0 pour O_{norm}.

Réciproquement, soient $\epsilon \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit x dans X. Si $d(x,0) < \in 2^{-N}$, alors pour tout $n \in N$, on obtient $2^{-n} min\{1, d_n(x,0)\} \;\in 2^{-N}$. Donc, pour $0 \leq n \leq N$,

$$\|x\|_n = min\{1, d_n(x,0)\} \; < \epsilon$$

et le résultat en découle.

3.4 Topologie étroite

Soit X un espace topologique. Notons $M(X)$ l'ensemble des mesures boréliennes positives de probabilité sur X. Notons $\zeta^0_{0,+}(X)$ l'espace vectoriel réel des applications continues bornées de X dans $\mathbb{R}$. La topologie étroite sur $M(X)$ est la topologie initiale définie par la famille d'applications $\mu \to \mu(f)$ lorsque f parcourt $\zeta^0_b(X)$.[3]

Chapitre 4

Sous-espace topologique

Soient X un espace topologique, A une partie de X et $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusion.

La topologie initiale sur A définie par i est appelée la topologie induite sur A. L'ensemble A muni de cette topologie est appelé un sous-espace topologique de X. Sauf mention contraire, toute partie d'un espace topologique sera munie de la topologie induite.

Propriétés:

Si Y est un espace topologique, si $f : X \to Y$ est une application continue et si B est une partie de Y contenant $f(A)$, alors la restriction $g : A \to B$ de f est continue.

Une partie U de A est ouverte dans A si et seulement s'il existe un ouvert U' de X tel que $U = U' \cap A$.

Si B est une base d'ouverts de X, alors $\{U \cap A : U \in B\}$ est une base d'ouverts de A.

Une partie Y de A est fermée dans A si et seulement s'il existe un fermé Y' de X tel que $Y = Y' \cap A$.

Pour tout x dans A, une partie V de A est un voisinage de x dans A si et seulement s'il existe un voisinage V' de x dans X tel que $V = V' \cap A$.

Si v est un système fondamental de voisinages de $x \in A$ dans X, alors $\{V \cap A : V \in v\}$ est un système fondamental de voisinages de x dans A.

Tout ouvert de A est un ouvert de X si et seulement si A est ouvert dans X.

Tout fermé de A est un fermé de X si et seulement si A est fermé dans X.

Si $A \subset B \subset X$, alors l'adhérence de A dans B est l'intersection avec B de l'adhérence de A dans X.

Parties connexes

Soit X un espace topologique. L'espace X est localement connexe si tout point de X admet un système fondamental de voisinages connexes. L'espace X est localement connexe par arcs si tout point de X admet un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

Comme un espace connexe par arcs est connexe, un espace localement connexe par arcs est localement connexe.

Si $f : [0,1] \to X$ et $f' : [0,1] \to X$ sont deux chemins continus tels que $f(1) = f'(0)$, on appelle concaténation des chemins f et f' l'application $g : [0,1] \to X$, notée souvent $f \cdot f'$, définie par

$$g(t) = \begin{cases} f(2t) & si\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f'(2t-1) & si\ t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

la concaténation g est un chemin (continu) de $f(0)$ à $f'(1)$.

Proposition 4.1:[**4**]

Si X est connexe et localement connexe par arcs, alors X est connexe par arcs.

Par concaténation de chemins, l'ensemble non vide A des points de X que l'on peut joindre par un chemin à un point x_0 donné de X est par connexité locale par arcs, à la fois ouvert et de complémentaire ouvert.

On conclut par connexité de X.

Une composante connexe de X est un sous-espace connexe maximal de X. Une composante connexe par arcs de X est un sous-espace connexe par arcs maximal (pour l'inclusion) de X.

Un espace topologique est totalement discontinu si toutes ses composantes connexes sont réduites à des singletons.

Exemple 4.1:

Un espace discret est totalement discontinu, et l'espace de Cantor triadique n'est pas discret, mais est totalement discontinu.

Propriétés :

L'image d'un sous-espace connexe par une application continue est un sous-espace connexe.

L'image d'un sous-espace connexe par arcs par une application continue est un sous-espace connexe par arcs, par composition des applications continues.

Pour tout sous-espace connexe C de X, si $C \subset D \subset \overline{C}$, alors D est connexe. En particulier, l'adhérence d'un connexe est connexe (mais il n'est pas toujours vrai que l'adhérence d'un connexe par arcs est connexe par arcs).

Une composante connexe est fermée. Mais il n'est pas toujours vrai qu'une composante connexe par arcs est fermée.

La réunion d'une famille de sous-espaces connexes d'intersection non vide est connexe. Donc si A est une partie connexe non vide de X, alors la réunion de tous les sous-espaces connexes de X contenant A est la composante connexe de X contenant A. En particulier, deux composantes connexes distinctes sont disjointes. L'ensemble des composantes connexes de X est donc une partition de X.

Chapitre 5

Topologie produit

Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et

$$X = \prod_{i\in I} X_i = \{((x_i)_{i\in I} \in (\bigcup_{i\in I} X_i)^I \,:\, \forall i \in I\,,\, x_i \in X_i\}$$

L'ensemble produit, muni de ses projections canoniques $pr_i : X \to X_i$ avec $pr_i(x) = x_i$ si $x = (x_i)_{i\in I}$. La topologie initiale sur X définie par $(pr_i)_{i\in I}$est appelée la topologie produit sur X. Sauf mention contraire, l'ensemble produit d'une famille d'espaces topologiques sera muni de la topologie produit.

Exemple 5.1:

Si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et si $X_1,\ldots,X_n$ sont des espaces topologiques, alors la topologie produit sur $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ est la topologie la moins fine rendant continues les projections $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto x_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

Un ouvert élémentaire de X est une partie de X de la forme

$$V_{J,(U_j)_{j\in J}} = \{(x_i)_{i\in I} \in X \,:\, \forall j \in J, x_j \in U_j\} = \bigcap_{j\in J} pr_j^{-1}(U_j)$$

pour J une partie finie de I et U_j un ouvert de X_j pour tout j dans J.

Exemple 5.2:

Si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, alors les ouverts élémentaires de X sont exactement les parties de la forme $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ avec U_i un ouvert de X_i.

Propriétés:

Les projections pr_i sont continues, et la topologie produit est la topologie la moins fine rendant continues les projections pr_i.

L'ensemble des ouverts élémentaires de X est une base d'ouverts de la topologie produit de X.

Si B_i est une base d'ouverts de X_i pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des ouverts élémentaires de la forme $V_{J,(U_j)_{j\in J}}$, où J est une partie finie de I et $U_j \in B_i$ pour $j \in J$, est une base d'ouverts de la topologie produit de X.

Si $A = (A_i)_{i\in I} \in X$, si V_i est un système fondamental de voisinages de A_i dans X_i pour tout i dans I, alors l'ensemble des parties de X de la forme

$$\{(x_i)_{i\in I} \in X \,:\, \forall j \in J \;,\; x_j \in V_j\} = \bigcap_{j\in J} pr_j^{-1}(V_j),$$

lorsque J est une partie finie de I et $V_j \in V_j$ pour $j \in J$, est un système fondamental de voisinages de A dans X pour la topologie produit.

Soient Y un espace topologique et $f : Y \to X$ une application. On note $f_i = pr_i \circ f$ la i-ème composante de f, de sorte que $f(y) = (f_i(y))_{i\in I}$. Alors f est continue en $y \in Y$ si et seulement si $f_i : Y \to X_i$ est continue en y pour tout i dans I. De même, f est continue si et seulement si $f_i : Y \to X_i$ est continue pour tout i dans I.

(Associativité de la topologie produit) Si $I = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ est une partition de I, et si $Y_\alpha = \prod_{i\in I_\alpha} X_i$

, alors l'application canonique

$$\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha \to \prod_{i\in I} X_i$$

définie par $(y_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto (x_i)_{i\in I}$ si $y_\alpha = (x_i)_{i\in I_\alpha}$, est un homéomorphisme.

• (Commutativité de la topologie produit) Si $\sigma : I \to I$ est une bijection, alors l'application $\prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} X_{\sigma(i)}$, définie par $(x_i)_{i\in I} \mapsto (x_{\sigma(i)})_{i\in I}$, est un homéomorphisme.

• Si A_i est une partie de X_i pour tout i dans I, alors

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$$

En effet, l'inclusion du terme de gauche dans le terme de droite découle de la continuité des projections : pour tout i dans I,

$$pr_j((\overline{\prod_{i\in I} A_i})) \subset \overline{pr_j(\prod_{i\in I} A_i)} \subset \overline{A_j}.$$

Réciproquement, soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$, soit J une partie finie de I et soit V_j un voisinage de x_j pour $j \in J$. Posons $V_i = X_i$ si $i \notin J$. Puisque $x_i \in \overline{A_i}$, il existe $a_i \in A_i \cap V_i$ pour tout $i \in I$. Donc

$$(\alpha_i)_{i\in I} \in (\prod_{i\in I} A_i) \cap (\bigcap_{j\in J} pr_j^{-1}(V_j)),$$

ce qui montre l'autre inclusion.

• Il découle du point précédent que si A_i est une partie de X_i, alors $\prod_{i\in I} A_i$ est fermé dans X si A_i est fermé dans X_i pour tout i dans I, la réciproque étant vraie si les A_i sont non vides.

Topologie limite projective

Soit I un ensemble muni d'un ordre $\preceq$; pour tout $i \in I$, soit X_i un espace topologique ; et pour tous $i , j \in I$ tels que $i \preceq j$, soit $f_{ij} : X_j \to X_i$ une application continue telle que $f_{ii} = id$ si $i \in I$ et

$$f_{ij} \circ f_{jk} = f_{jk}$$

si $i \preceq j \preceq k$. Une telle donnée $((X_i),(f_{ij}))$ est appelée un système projectif d'espaces topologiques.

On note $\varprojlim X_i$ l'ensemble des éléments $(x_i)_{i\in I}$ de l'ensemble produit $\prod_{i\in I} X_i$ tels que, $f_{ij}(X_i) = x_i$ pour tout $i \preceq j$. Pour tout i dans I, on note $f_i : \varprojlim X_i \to X_i$ la restriction à $\varprojlim X_i$ de la i-ème projection $pr_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$, qui vérifie

$$f_{ij} \circ f_j = f_i$$

si $i \preceq j$. La topologie initiale sur $\varprojlim X_i$ définie par $(f_i)_{i\in I}$ est appelée la topologie limite projective. Sauf mention contraire, l'ensemble $\varprojlim X_i$ sera muni de cette topologie.

Propriétés:

la topologie limite projective est la topologie la moins fine rendant continue les applications $f_i : \varprojlim X_i \to X_i$; elle coïncide avec la topologie induite sur $\varprojlim X_i$ par la topologie produit sur $\prod_{i\in I} X_i$;

une topologie limite projective d'espaces topologiques séparés est séparée ;

la topologie limite projective d'un système projectif dénombrable d'espaces topologiques à base dénombrable est encore à base dénombrable;

Supposons que I soit filtrant croissant (i.e. pour tous i, j dans I, il existe k tel que $i \preceq k$ et $j \preceq k$). Pour tout i dans I, soit B_i une base d'ouverts de X_i. Alors l'ensemble des $f_i^{-1}(U_i)$ pour $i \in I$ et $U_i \in B_i$ est une base d'ouverts de la topologie limite projective sur $\varprojlim X_i$.

En effet, par les propriétés des sous-espaces et des espaces produits, on sait que l'ensemble des intersections finies de la forme $V = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, pour $k \in \mathbb{N}$, $i_j \in I$et $U_{i_j} \in B_{i_j}$ Pour $1 \leq j \leq k$, est une base d'ouverts de $\varprojlim X_i$. Soit $i \in I$ tel que $i_j \preceq i$ pour $1 \leq j \leq k$. Alors $V = f_i^{-1}(f_{i_1 i}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_k i}^{-1}(U_{i_k}))$. Donc pour tout x dans , le point $f_i(x)$ appartient à l'ouvert $f_{i_1 i}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_k i}^{-1}(U_{i_k}))$.

Cet ouvert contient un élément W de B_i contenant $f_i(x)$. D'où $x \in f_i^{-1}(W) \subset V$, et le résultat en découle.

Exemple 5.3, soit p un nombre premier ; pour $m \leq n$, notons $\pi_{m,n}$ la projection canonique de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, définie par $x \bmod p^n \mapsto x \bmod p^m$, qui vérifie $\pi_{n,n}$ =id et $\pi_{m,n} \circ \pi_{n,r} = \pi_{m,r}$ si $m \leq n \leq r$. Nous munissons l'ensemble fini $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ de la topologie discrète (qui est évidemment métrisable séparable) ; en particulier les $\pi_{m,n}$ sont continues.

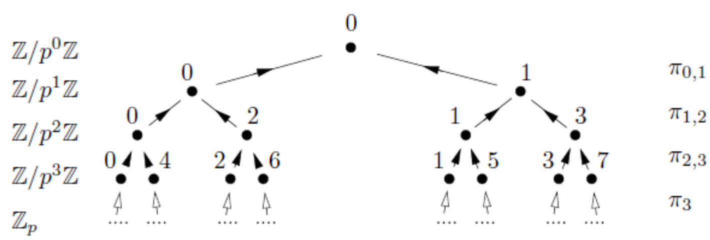


Figure : L'espace topologique $\mathbb{Z}_p$ pour $p = 2$.

L'espace topologique limite projective

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

est un espace topologique métrisable séparable, muni d'applications continues surjectives $\pi_n : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

Chapitre 6

Topologie finale

Soit X un ensemble, soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour tout $i \in I$, soit $f_i : Y_i \to X$ une application. La topologie finale sur X définie par $(f_i)_{i\in I}$ est la topologie dont les ouverts sont les parties U de X telles que pour tout i dans I, la partie $f_i^{-1}(U)$ soit un ouvert de Y_i. Le fait que cette topologie vient du fait que les images réciproques commutent avec intersections et réunions.

Propriétés:

• Une partie Y de X est fermée si et seulement si pour tout i dans I, la partie $f_i^{-1}(Y)$ est un fermé de Y_i.

• Cette topologie est la topologie sur X la plus fine rendant continue toutes les applications f_i.

• Soient Z un espace topologique et $g : X \to Z$ une application. Alors g est continue si et seulement si, pour tout i dans I, l'application $g \circ f_i$ est continue.

6.1 Topologie somme disjointe

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On rappelle qu'un ensemble X muni d'applications $f_i : X_i \to X$ est une somme disjointe des X_i si pour tout ensemble Y muni d'applications $g_i : X_i \to Y$, il existe une unique application (dite canonique) $\phi : X \to Y$ telle que le diagramme suivant commute pour tout i :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

L'ensemble $\{(x,i) \in (\bigcup_{i\in I} X_i) \times I : x \in X_i\}$, muni des applications $f_i : X_i \to X$ définies par $f_i(x) = (x,i)$, convient. Il est unique modulo l'unique bijection faisant commuter les diagrammes ci-dessus. On identifie $x \in X_i$ avec son image par f_i. On note $X = \coprod_{i\in I} X_i$, muni des inclusions $f_i : X_i \hookrightarrow X$.

La topologie finale sur X définie par $(f_i)_{i\in I}$ est appelée la topologie somme disjointe. Sauf mention contraire, un ensemble somme disjointe sera muni de la topologie somme disjointe.

Il est immédiat qu'un espace topologique somme disjointe d'espaces topologiques séparés est séparé, et qu'un espace topologique somme disjointe dénombrable d'espaces topologiques à base dénombrable (resp. séparables) est à base dénombrable (resp. séparable).

6.2 Topologie faible définie par une famille de sous espaces

Soient X un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X. On suppose chaque X_i munie d'une topologie, et on note $f_i : X_i \to X$ l'inclusion. La topologie finale sur X définie par $(f_i)_{i\in I}$ est appelée la topologie faible définie par $(X_i)_{i\in I}$.

Si X est somme disjointe des X_i , alors la topologie faible ci-dessus est la topologie somme disjointe.

Propriétés:

Une partie Y de X est fermée si et seulement si $Y \cap X_i$ est fermée dans X_i pour tout i dans I ;

une partie O de X est ouverte si et seulement si $O \cap X_i$ est ouverte dans X_i pour tout i dans I ;

Soient Z un espace topologique et $g : X \to Z$ une application. Alors g est continue si et seulement si sa restriction $g|_{X_i} : X_i \to Y$ à X_i est continue pour tout i dans I.

La topologie faible définie par une famille dénombrable de parties $(X_i)_{i \in I}$ de X, munies chacune d'une topologie séparable et dont la réunion est X, est séparable, en prenant la réunion d'une famille dénombrable dense dans chaque X_i : tout ouvert non vide de X contient un point de cette réunion.

Une topologie faible n'est pas forcément séparée : il est facile de vérifier que la topologie de l'espace topologique $X = \{0_-, 0_+\} \cup]0, 1]$ est la topologie faible définie par les deux parties $X_\pm = \{0_\pm\} \cup]0, 1]$, homéomorphes à $[0, 1]$ donc séparées.

Exemple 6.1:

Si $X = \mathbb{R}^2$, et si $(X_i)_{i \in I}$est la famille des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, munies de leur topologie usuelle, alors la topologie faible définie par $(X_i)_{i \in I}$ est plus fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$, et même strictement plus fine que la topologie induite par la distance SNCF sur $\mathbb{R}^2$.

6.3 Topologie de Schwartz

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^r$, où $r \in \mathbb{N} - \{0\}$. L'espace vectoriel $D(\Omega)$ des applications lisses à support compact sur Ω est la réunion, pour K parcourant les compacts non vide de Ω, des sous-espaces vectoriels $D_K(\Omega)$ des applications dont le support est contenu dans K.

Munissons l'espace vectoriel $D(\Omega)$de la topologie de Schwartz, de base d'ouverts $(B_{f,\varepsilon})_{f \in D(\Omega), \varepsilon \in C^0_{0,+}(\Omega)}$.

Nous avons muni l'espace vectoriel $D_K(\Omega)$ d'une topologie, définie par la famille de semi-normes $(\|\cdot\|_m)_{m \in \mathbb{N}^r}$.

Étudions la relation entre ces topologies.

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts dans Ω, i.e. $K_0 = \emptyset$, K_n est un compact de Ω, contenu dans l'intérieur de K_{n+1}, et Ω est la réunion des K_n pour $n \in \mathbb{N}$. On a alors aussi que Ω est la réunion des ouverts K_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 6.2:

On peut prendre, avec d la distance euclidienne, les fermés bornés contenus dans Ω définis par

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^r : d(x, {}^c\Omega) \geq 1/(n+1) \ , \ d(0,x) \leq n-1\}.$$

Soit X un espace topologique. Un recouvrement ouvert de X est une famille d'ouverts de X, de réunion X. Une famille $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$ de parties de X est localement finie si pour tout x dans X, il existe un voisinage de x ne rencontrant qu'un nombre fini de P_α.

Une partition (lisse) de l'unité de Ω est une famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'applications C^∞ de Ω dans $\mathbb{R}$, d'images contenues dans $[0, 1]$, dont la famille des supports est localement finie, et qui vérifie $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$.

Soit $U = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de Ω. Une partition de l'unité subordonnée à U est une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i\in I}$ de Ω , telle que, pour tout $i \in I$, le support de φ_i soit contenu dans U_i.

Proposition 6.1 Tout recouvrement ouvert de Ω admet une partition lisse de l'unité qui lui est subordonnée.

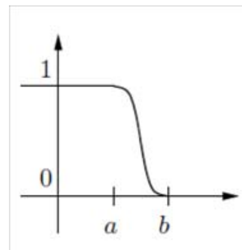
La preuve de cette proposition utilisera le lemme suivant.

Lemme 6.1 Pour tout x_0 dans $\mathbb{R}^r$ et tout voisinage U de x_0, il existe une application C^∞ de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}$, de support contenu dans U, constante égale à 1 sur un voisinage de x_0, et à valeurs dans $[0,1]$.

Preuve. Rappelons que $\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t^n} e^{-\frac{1}{t}} = 0$ pour tout n dans $\mathbb{R}$. Il est alors facile de vérifier que, pour tous $a < b$,

l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} \left(1 + e^{\frac{2t-(a+b)}{(b-t)(t-a)}}\right)^{-1} & si \quad a < t < b \\ 1 & si \quad t \le a \\ 0 & si \quad t \ge b \end{cases}$$



Preuve: Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts dans Ω. Posons $K_{-1} = \emptyset$, et $K'_n = K_{n+1} - K_n$, qui est un compact de Ω.

Soit $u = (U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert de Ω. Posons

$$V_{n,\alpha} = U_\alpha \cap (K_{n+2} - K_{n-1})$$

Alors $(V_{n,\alpha})_{\alpha\in A}$ est un recouvrement ouvert de K'_n .

Pour tout x dans K'_n, soit W_x un voisinage ouvert de x, contenu dans $V_{n,\alpha}$ pour un α dans A .

une application φ_i de dans [0,1] de classe C^∞, de support contenu dans W_x, constante égale à 1 sur un voisinage ouvert W'_x de x. Comme la famille d'ouverts $(W'_x)_{x\in K'_n}$recouvre le compact K'_n, il existe une partie finie B_n de K'_n telle que $(W'_x)_{x\in B_n}$ recouvre K'_n . Posons

$$\varphi : y \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N},\, x\in B_n} \varphi_x(y),$$

qui est une somme n'ayant localement qu'un nombre fini de termes non nuls, et qui est strictement positive pour tout y dans Ω.

Posons $\varphi'_\alpha = \varphi_x/\varphi$.Alors $(\varphi'_\alpha)_{n\in\mathbb{N},x\in B_n}$ est une partition de l'unité que l'on peut rendre subordonnée à U.

La topologie de Schwartz sur $D(\Omega)$est strictement moins fine que la topologie faible définie par la famille de sous-espaces $D_k(\Omega)$ pour K compact de Ω .

Mais ces deux topologies sont quand même très proches, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 6.2 Les ouverts convexes pour la topologie de Schwartz sur $D(\Omega)$sont exactement les ouverts convexes pour la topologie faible définie par la famille des espaces topologiques $(D_{k_n}(\Omega))_{n\in\mathbb{N}}$.

Donc il découle de cette proposition que les ouverts convexes pour la topologie de Schwartz sur $D(\Omega)$ sont aussi exactement les ouverts convexes pour la topologie faible définie par la famille des espaces topologiques $(D_k(\Omega))_K$ où K parcourt tous les compacts non vides de Ω.

Preuve. Comme les translations préservent la convexité et sont des homéomorphismes à la fois pour la topologie de Schwartz et pour la topologie faible, il suffit de montrer que tout voisinage convexe de la fonction nulle 0 pour l'une des deux topologies contient un voisinage de 0 pour l'autre, et réciproquement.

Puisque tout voisinage (convexe ou pas) de 0 pour la topologie de Schwartz contient $B_{0,\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon \in C^0_{0,+}(\Omega)$, il suffit de démontrer, pour en déduire que la topologie de Schwartz est moins fine que la topologie faible, que tout $B_{0,\varepsilon}$ est un voisinage de 0 pour la topologie limite inductive. Il suffit pour cela de démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'intersection $B_{0,\varepsilon} \cap D_{K_n}(\Omega)$ est un voisinage de 0 dans $D_{K_n}(\Omega)$. Soit $N = max_{x\in K_n} \frac{1}{\varepsilon(x)}$, qui est fini car K_n est compact et ε est continue non nulle sur K_n, et $\eta = inf_{x\in K_n}\varepsilon(x)$ qui est strictement positif car K_n est compact, et ε est continue, strictement positive, sur K_n.

Alors

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}^r:|m|\leq N} \{f \in D_{K_n}(\Omega) \ : \ \|f\|_m < \eta\}$$

est un voisinage de 0 dans $D_{K_n}(\Omega)$, qui est contenu dans $B_{0,\varepsilon} \cap D_{K_n}(\Omega)$.

Réciproquement, soit V un voisinage convexe de 0 pour la topologie faible, et montrons qu'il contient un voisinage de 0 pour la topologie de Schwartz. Puisque V est un voisinage de 0 pour la topologie faible, pour tout n dans N, il existe $N_n \in N - \{0\}$ et $\eta_n > 0$ tel que

$$V_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}^r:|m|\leq N_n} \{f \in D_{K_{n+2}}(\Omega) \ : \ \|f\|_m < \eta_n\}$$

soit contenue dans $V \cap D_{K_{n+2}}(\Omega)$.

Nous pouvons supposer que la suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante vers $+\infty$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante vers 0.

La famille $U = (\mathring{K}_{n+2} - K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de Ω . La proposition 5.2 fournit une partition lisse de l'unité $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ subordonnée à ce recouvrement, que nous

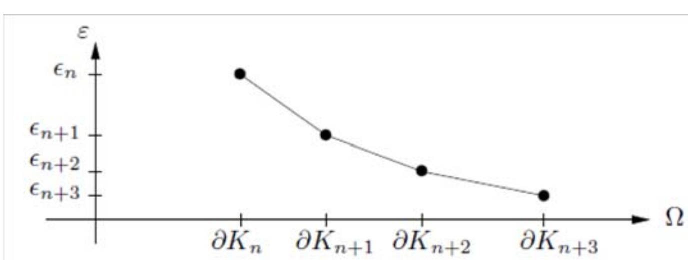
fixons. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, comme le support de φ_n est contenu dans $K_{n+2} - K_n$, et par la formule de dérivation de Leibnitz, il existe une constante $k_n > 0$ telle que pour tout f dans $D(\Omega)$ et tout $\epsilon > 0$, si

$$\forall x \in {}^cK_n, \forall m \in \mathbb{N}^r , \ |m| \leq N_n \Rightarrow |\partial^m f(x)| < \epsilon \ ,$$

alors

$$\forall m \in \mathbb{N}^r, |m| \leq N_n \Rightarrow \|2^{n+1}\varphi_n f\|_m < k_n\epsilon \ .$$

Nous pouvons supposer que la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante vers $+\infty$.



Posons $\epsilon_n = min\{\frac{\eta_n}{k_n}, \frac{1}{N_n}\}$, de sorte que la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0. Il est facile de construire une application ε dans $C^0_{0,+}(\Omega)$ telle que pour tout x dans ${}^cK_n$, on ait $\varepsilon(x) \leq \epsilon_n$.

Il suffit de montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'application $2^{n+1}\varphi_n f$ est dans V_n (qui est contenu dans V). Or $2^{n+1}\varphi_n f$ est nulle en dehors de $K_{n+2} - K_n$, donc en particulier appartient à $.D_{K_{n+2}}(\Omega)$ De plus, pour tout x dans ${}^cK_n$ et tout $m \in \mathbb{N}^r$, si $|m| \leq N_n$, alors $|m| \leq \frac{1}{\epsilon_n} \leq \frac{1}{\varepsilon(x)}$ par la construction de ε. Donc puisque $f \in B_{0,\varepsilon}$, pour tout x dans ${}^cK_n$ et tout $m \in \mathbb{N}^r$ tel que $|m| \leq N_n$, nous avons $|\partial^m f(x)| < \varepsilon(x) \leq \frac{\eta_n}{k_n}$.

Donc par définition de k_n, pour tout m $\in \mathbb{N}^r$ tel que $|\mathrm{m}| \leq \mathrm{N}_n$, nous avons $\|2^{n+1}\varphi_n f\|_m < \eta_n$. Par conséquent, $2^{n+1}\varphi_n f$ appartient bien à V_n .

Chapitre 7

Topologie quotient

Soient X un ensemble et $\Re \subset X \times X$ une relation d'équivalence sur X. On note $Y = X/\Re$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\Re$ et

$$\pi : X \to X/\Re = Y$$

la projection canonique, qui à $x \in X$ associe sa classe d'équivalence $\Re(x)$, que l'on notera souvent $[x]$ s'il n'y a pas d'ambiguité. On rappelle la propriété universelle des quotients :

pour tout ensemble Z et pour toute application $f : X \to Z$ constante sur chaque classe d'équivalence de $\Re$, il existe une et une seule application $f' : X/\Re \to Z$ telle que $f = f' \circ \pi$, i.e. telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ X/\Re \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

commute. On dit que f' est l'application obtenue par passage au quotient de f.

Si X est un espace topologique, alors la topologie finale sur Y définie par π est appelée la topologie quotient. Sauf mention contraire, tout ensemble quotient sera muni de la topologie quotient.

Propriétés :

une partie U de Y est ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X

une partie Y de Y est fermée si et seulement si $\pi^{-1}(Y)$ est fermé dans X

la projection canonique π est continue, et la topologie quotient est la topologie la plus fine sur Y rendant continue π

• pour tout espace topologique Z, une application $f: Y \to \mathbb{Z}$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : X \to Z$ est continue.

En particulier, toute application obtenue par passage au quotient d'une application continue est encore continue.

7.1 Distance quotient d'une pseudo-distance

Soit x un ensemble, muni d'une pseudo-distance d, celle-ci induit une topologie sur X, de la même manière que pour les distances, les (pseudo-)boules ouvertes $B(x,\epsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}$ pour $x \in X$ et $\epsilon > 0$ formant une base d'ouverts de la topologie.

Considérons la relation d'équivalence $\Re$ sur X définie par $x \sim y$ si et seulement si $d(x,y) = 0$. Remarquons que si $x \sim x'$ et si $y \sim y'$, alors $d(x,y) = d(x',y')$. L'ensemble quotient $X' = X/\Re$, muni de l'application $d' : X' \times X' \to [0,+\infty[$ définie par $d'(x',y') = d(x,y)$ pour tous $x \in x'$, $y \in y'$, est clairement un espace métrique, appelé l'espace métrique quotient de l'espace pseudo-métrique (X,d).

Comme les (pseudo-)boules ouvertes pour d sont des ouverts saturés, il est immédiat que la topologie induite par d' sur X' est la topologie quotient de la topologie sur X induite par d. L'espace topologique X' est le "plus grand" quotient séparé de X, au sens que si Y est un espace topologique séparé et si $f : X \to Y$ est une application continue, alors il existe une application (continue) $f' : X' \to Y$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow & \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y. \end{array}$$

Si X est un espace vectoriel muni d'une semi-norme, alors il existe un - plus grand - espace vectoriel normé quotient. Pour tout $p \in [0,+\infty[$, pour $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\Bbbk = \mathbb{C}$, pour tout ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^r$, où $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, il sera vu en cours d'Intégration et probabilité que, sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}_p(\Omega, \Bbbk)$ des applications mesurables de Ω dans $\Bbbk$ de puissance p-ème intégrable, l'application

$$\|\bullet\|_p : f \mapsto \left(\int_{x\in\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

est une semi-norme, et l'espace vectoriel normé quotient est noté $\mathbf{L}_p(\Omega, \Bbbk)$: la relation d'équivalence identifie deux fonctions si elles diffèrent d'une fonction presque partout nulle.

7.2 Constructions topologiques par quotients.

La topologie quotient est l'une des plus utile en mathématiques (parfois tellement naturelle que l'on n'y pense même pas). Elle permet en particulier de donner un sens précis à de nombreuses notions de recollements, pincements et autres modifications topologiques, pour construire de nouveaux espaces topologiques à partir d'espaces topologiques donnés.

Exemple 7.1 : les écrasements. Soient X un espace topologique et A une partie de X. L'écrasement de A dans X, noté $X/\langle A\rangle$, est l'espace topologique quotient $X/\mathfrak{R}$ où $\mathfrak{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $x \sim x'$ pour tous x, x' dans A.

On vérifie que si A est ouvert ou fermé, alors la restriction à $X - A$ de la projection canonique

$\pi : X \to X/\langle A\rangle$ est un homéomorphisme sur son image. Par exemple, $CX/\langle X\rangle$ et SX sont homéomorphes.

7.3 Topologie limite inductive

Soit I un ensemble muni d'un ordre $\preceq$ filtrant croissant ; pour tout $i \in I$, soit X_i un espace topologique ; pour tous $i, j \in I$ tels sur $i \preceq j$, soit f_{ji}: $X_i \to X_j$ une application continue ;

supposons que $f_{ii} = id$ si $i \in I$ et que

$$f_{kj} \circ f_{ji} = f_{ki}$$

si $i \preceq j \preceq k$. Une telle donnée $((X_i),(f_{ij}))$ est appelée un système inductif d'espaces topologiques.

On note $\varinjlim X_i$ l'ensemble quotient de l'ensemble somme disjointe $\coprod_{i\in I} X_i$ par la relation d'équivalence ~ définie par, pour $, j \in I$ et $x_i \in X_i,\ x_j \in X_j$,

$$x_i \sim x_j \Leftrightarrow \exists k \in I\ ,\ i \preceq k\ ,\ j \preceq k, f_{ki}(x_i) = f_{kj}(x_j)$$

Pour tout i dans I, on note $f_i : X_i \to \varinjlim X_i$ la composition de l'inclusion canonique $X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$ avec la projection canonique $\coprod_{i\in I} X_i \to \varinjlim X_i$, qui vérifie

$$f_j \circ f_{ji} = f_i$$

si $i \preceq j$. La topologie finale sur $\varinjlim X_i$ définie par $(f_i)_{i\in I}$ est appelée la topologie limite inductive. Sauf mention contraire, l'ensemble $\varinjlim X_i$ sera muni de cette topologie.

Propriétés :

la topologie limite inductive est la topologie la plus fine rendant continue les applications $f_i : X_i \to \varinjlim X_i$ elle coïncide avec la topologie quotient sur $\varinjlim X_i$ de la topologie somme disjointe sur $\coprod_{i\in I} X_i$;

une partie A de $\varinjlim X_i$ est ouverte si et seulement si $f_i^{-1}(A)$ est un ouvert de X_i pour tout $i \in I$;

• si Z est un espace topologique et $g : \varinjlim X_i \to Z$ est une application, alors g est continue si et seulement si, pour tout i dans I, l'application $g \circ f_i : X_i \to Z$ est continue.[5]

Chapitre 8

Groupes et corps topologiques

8.1 Groupes topologiques.

Un groupe topologique est un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une structure d'espace topologique compatibles, *i*.e. telles que l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ (x,y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$$

Soit continue. Par composition d'applications continues, il revient au même de demander que les applications d'inverse $x \mapsto x^{-1}$, soient continues.[6]

Un morphisme de groupes topologiques entre deux groupes topologiques est un morphisme de groupes qui est continu. Un isomorphisme de groupes topologiques est un isomorphisme de groupes qui est un homéomorphisme. Deux groupes topologiques sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de groupes topologiques de l'un sur l'autre.

La composante neutre d'un groupe topologique est la composante connexe de son élément neutre.

Soit G un groupe topologique, d'élément neutre e. Définissons la translation à gauche $Lg : G \to G$ et la translation à droite $Rg : G \to G$, respectivement par $x \mapsto gx$ et $x \mapsto xg^{-1}$. Ces applications sont des homéomorphismes, car continues et bijectives d'inverses $L_{g^{-1}}$ et $R_{g^{-1}}$ respectivement. Il est à remarquer que ces applications commutent : pour tous g,h dans G,

$$R_g \circ L_h = L_h \circ R_g.$$

Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes, avec G' un groupe topologique, alors, pour tout g dans G,

$$f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f.$$

Donc un morphisme de groupes entre deux groupes topologiques est continu si et seulement s'il est continu en l'élément neutre.

Si Homéo (G) désigne le groupe des homéomorphismes de G, alors les applications de G dans Homéo(G) définies par $g \mapsto L_g$ et $g \mapsto R_g$ sont des morphismes de groupes :

$$L_{gh} = L_g \circ L_h, \quad R_{gh} = R_g \circ R_h.$$

$$L_e = id, (L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}, R_e = id, (R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}.[7]$$

8.2 Les groupes classiques.

Le corps des scaliaires $\Bbbk$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$. rappelons que $M_n(\Bbbk)$ désigne le $\Bbbk$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colones et à coefficients dans $\Bbbk$. C'est un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimention n^2. on identifie canoniquement $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ à $\mathcal{L}(\Bbbk^n)$ grâce à la base canonique de $\Bbbk^n$. Ainsi, le choix d'une norme sur $\Bbbk^n$ définit une norme sur $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$. Notons aussi que toutes les normes sur $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ sont équivalentes car $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ est de dimension finie. Donc, on peut choisir n'importe quelle norme sur $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$; cela dépend de la propriété que l4on cherche à montrer. Rapplons aussi,

Si $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$, on a:

$$A^* = \begin{cases} {}^tA = [\alpha_{ij}] \text{ si } A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \\ {}^tA = [\beta_{ij}] \text{ si } A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}). \end{cases}$$

Ou $\alpha_{ij} = a_{ij}$ et $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$. Notons aussi que l'on peut identifier $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ à $\Bbbk^{n^2}$, par exemple au moyen de l'isomorphisme linéaire ψ, qui à la matrice $[a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$ associe l'élément $(x_k), 1 \leq k \leq n^2$ de $\Bbbk^{n^2}$, défini par $x_{(i-1)n+j} = a_{ij}$, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

$\mathrm{GL}(n, \Bbbk) = \{A \in \mathrm{M}_n(\Bbbk) \text{ ; } \det(A) \neq 0\}$, c'est l'ensemble des matrices invisibles dans $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$. meni de la loi produit de deux matrices, c'est un groupe dont l'élément neutre est la matrice identité I_n, il est rappelé **groupe linéaire**.

$\mathrm{SL}(n, \Bbbk) = \{A \in \mathrm{M}_n(\Bbbk); \det(A) = 1\}$, c'est un sous-groupe distingé de $\mathrm{GL}(n, \Bbbk)$, appelé **groupe spécial linéaire**.

$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}); {}^tAA = I_n\}$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, appelé **groupe orthogonal**.

$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n); \det(A) = 1\}$, c'est un sous groupe de $\mathrm{O}(n)$. appelé **groupe spécial orthogonal ou groupe des rotations**.

$\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}); A^*A = I_n\}$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, appelé **groupe unitaire**.

$\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{U}(n); \det(A) = 1\}$, c'est un sous-groupe de $\mathrm{U}(n)$, appelé **groupe spécial unitaire**.[8]

8.3 Anneaux et corps topologiques.

Un anneau topologique est un ensemble A muni d'une structure d'anneau et d'une structure d'espace topologique compatibles, *i*.e. telles que les applications

$$\begin{array}{rcl} A \times A & \rightarrow & A \\ (x,y) & \mapsto & x - y \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcl} A \times A & \rightarrow & A \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

soient continues. En particulier, le groupe additif $(A,+)$ est un groupe topologique. Un morphisme entre deux anneaux topologiques est un morphisme d'anneaux qui est continu. Un isomorphisme d'anneaux topologiques est un isomorphisme d'anneaux qui est un homéomorphisme. Deux anneaux topologiques sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'anneaux topologiques de l'un sur l'autre.

Tout sous-anneau d'un anneau topologique, muni de la topologie induite, est un anneau topologique. Le produit d'une famille d'anneaux topologiques, muni des structures d'anneau produit et d'espace topologique produit, est un anneau topologique. Par continuité des opérations, l'adhérence d'un sous-anneau d'un anneau topologique est encore un sous-anneau.

8.4 Corps valués.

Soit K un corps. Une valeur absolue sur K est une application $|\cdot|$ de K dans $[0,+\infty[$ telle que, pour tous x,y dans K,

(i) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

(ii) $|xy| = |x||y|$,

(iii) $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Par (ii), on a $|x| = |1||x|$, et comme K contient un élément non nul, (i) implique que $|1| = 1.$ Donc $|-1|^2 = 1$ et $|-1| = 1$.

Par (ii) encore, on en déduit que $|-x| = |x|$.

Toujours par (ii), nous avons $|x^{-1}| = \frac{1}{|x|}$.

On montre comme pour les distances que $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

Une valeur absolue est dite ultra-métrique si la troisième condition est remplacé par la condition.

$$|x+y| \leq \max\{|x|,|y|\}.$$

Une valeur absolue est dite triviale si elle est constante égale à 1 en dehors de l'élément neutre.

Un corps valué est un corps muni d'une valeur absolue. Il est dit non discret si sa valeur absolue n'est pas triviale. Un isomorphisme de corps valués d'un corps valué K dans un corps valué K' est un isomorphisme de corps $f : K \to K'$ tel que $|f(x)| = |x|$ pour tout x dans K.

Les valeurs absolues usuelles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des valeurs absolues, et $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (qui seront munis, sauf mention contraire, de leur valeur absolue usuelle) sont des corps valués.

L'application $d : K \times K \to [0,+\infty[$ définie par $d(x,y) = |x-y|$ est une distance sur K, qui est ultramétrique si la valeur absolue l'est. La topologie induite par cette distance munit K d'une structure de corps topologique (la preuve est la même que celle pour $\mathbb{C}$). Un corps valué sera muni de la topologie induite par la distance associée à sa valeur absolue. Ainsi, un corps valué est un corps topologique.[9]

Chapitre 9

Espaces vectoriels topologiques

Soit $\mathbb{k}$ un corps topologique. Un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{k}$ est un ensemble X muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$ et d'une structure d'espace topologique compatibles, i.e. telles que les applications

$$X \times X \to X$$

$$(x,y) \mapsto x - y$$

$$\mathbb{k} \times X \to X$$

$$(\lambda,y) \mapsto \lambda y$$

soient continues. En particulier, le groupe additif $(X,+)$ est un groupe topologique. Les translations $t_X : y \mapsto y + x$, où $x \in X$, sont des homéomorphismes. Les homothéties

$h_\lambda : y \mapsto \lambda y$, où $\lambda \in \mathbb{k}^*$, sont des homéomorphismes. Tous les espaces vectoriels topologiques de ce cours seront réels ou complexes.

Un morphisme d'espaces vectoriels topologiques entre deux espaces vectoriels topologiques est une application linéaire qui est continue. Un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques est un isomorphisme linéaire qui est un homéomorphisme. Deux espaces vectoriels topologiques sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de l'un sur l'autre.

9.1 Espaces vectoriels normés sur un corps valué.

La classe la plus importante d'espaces vectoriels topologiques est bien sûr fournie par celle des espaces vectoriels normés.

Soit $\mathbb{k}$ un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$.

Soit X un espace vectoriel sur K. Une norme sur X est une application $\|\cdot\|$ de X dans $[0,+\infty[$ telle que, pour tous x , y dans X et tout λ dans $\mathbb{k}$,

(i) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

(ii) $\|yx\| = |y|\,\|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + c$.

Cette norme est ultramétrique si la troisième condition est remplacée par $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$

9.2 Espaces vectoriels topologiques localement convexes.

Un espace vectoriel topologique réel ou complexe X est dit localement convexe si le vecteur nul admet un système fondamental de voisinages convexes.

Par continuité des translations et puisque l'intérieur d'un convexe est convexe, tout point admet alors un système fondamental de voisinages convexes ouverts.

Lemme 9.1 *Soient X un espace vectoriel topologique sur* $\Bbbk=\mathbb{R}$ *ou* $\Bbbk=\mathbb{C}$*, et C un voisinage convexe de 0. Appelons jauge de C l'application:*

$$\|\bullet\|_C : X \to [0,+\infty[$$

définie par $\|x\|_C = \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in C\}$

Elle vérifie les propriétés suivantes:

(1) $\forall x, y \in X, \forall \lambda > 0,$

$$\|\lambda x\|_C = \lambda \|x\|_C$$

et

$$\|x+y\|_C \le \|x\|_C + \|y\|_C.$$

(2) L'application $\|\bullet\|_C$ est continue. En particulier, si X est un espace vectoriel normé, alors il existe $M \ge 0$ tel que $\forall x \in X, \|x\|_C \le M\|x\|$.

(3) Si C est ouvert, alors $C = \{x \in X : \|x\|_C < 1\}$.

(4) Si $\Bbbk = \mathbb{R}$ et si C est symétrique i.e. si $-x$ appartient à C pour tout x dans C, alors la jauge de C est une semi-norme sur X.

(5) Si C' est un voisinage convexe de 0 tel que $C' \subset C$,alors $\|\bullet\|_C \le \|\bullet\|_{C'}$.

(6) Si $(C_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille de convexes de X telle que $\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha$ soit un voisinage de 0, alors $\|\bullet\|_{\bigcap_{\alpha\in A} C_\alpha} = \sup_{\alpha\in A} \|\bullet\|_{C_\alpha}$.

(7) Pour tous $\lambda > 0$ et $x \in X$, $\|x\|_{\lambda C} = \frac{1}{\lambda}\|x\|_C$.

Exemples 9.1 *Les exemples suivants sont des cas particuliers d'espaces vectoriels réels ou complexes, munis de topologies définies par une famille de semi-normes, Les espaces vectoriels normés réels ou complexes sont localement convexes. L'espace de Schwartz* $L(\mathbb{R}^n)$ *des fonctions lisses à décroissance rapide sur* $\mathbb{R}^n$ *est localement convexe. Pour tout ouvert* Ω *non vide de* $\mathbb{R}^r$*,où* $r \in \mathbb{N}$*, pour tout compact non vide K dans , les espaces vectoriels réels ou complexes* $D(\Omega)$ *et* $D_K(\Omega)$ *sont localement convexes.*

Si X est un espace vectoriel topologique localement convexe, et $f : D(\Omega) \to X$ est une application linéaire, alors f est continue pour la topologie de Schwartz sur $D(\Omega)$ si et seulement si, pour tout compact non vide K de Ω , la restriction $f_{D_K(\Omega)} : D_K(\Omega) \to X$ est continue pour la topologie de $D_K(\Omega)$.

9.3 Continuité des applications linéaires et multilinéaires.

Soit $\Bbbk$ un corps muni d'une valeur absolue non triviale $|\bullet|$. Soient X, Y deux espaces vectoriels normés sur $\Bbbk$. Pour toute application linÈaire $f : X \to Y$, on pose

$$\|f\| = \sup_{x\in X-\{0\}} \frac{\|f(x)\|}{x}$$

Lorsque $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\Bbbk = \mathbb{C}$, on a aussi $\|f\| = \sup_{x\in X,\ \|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{x\in X,\ \|x\|\le 1} \|f(x)\|$.

Si $Y = \Bbbk = \mathbb{R}$, cíest-à-dire lorsque f est une forme linéaire réelle, on a aussi, par invariance de la sphère unité et de la boule unité par passage à l'opposé

$$\|f\| = \sup_{x\in X,\|x\|=1} f(x) = \sup_{x\in X,\|x\|\le 1} f(x)[10]$$

Propposition 9.1 : soient$(X_1,\|\quad\|_1),\ldots,(X_n,\|\quad\|_n),(Y,\|\quad\|')$ des espaces normé et $f : X = X_1\times\ldots\times X_n \longrightarrow Y$ une appliation multlinéaire.

Propriété .

(i) f est continue,

(ii) f est continue en 0,

(iii) Il existe M> 0 tel que pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in X_1\times\ldots\times X_n$, on ait :

$$\|f(x_1,\ldots,x_n)\|' \le M\|x_1\|_1\ldots\|x_n\|_n.$$

Preuve. l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est triviale .montrons l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) concidérons la norme $\|(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\|x_i\|_i$ sur X comme f est continue en 0, il exist $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in X$ vérifiant $\|z\|_\infty \le \eta$. on ait $\|f(z)\|' \le 1$. soit $x = (x_1,\ldots,x_n) \in X$, on peut supposer tous les $x_i \neq 0$ soit $z_i = \frac{\eta}{\|x_i\|_i}x_i$, alors on a $\|(z_1,\ldots,z_n)\|_\infty \le \eta$, d'où $\left\|f(\frac{\eta}{\|x_1\|_1}x_1,\ldots,\frac{\eta}{\|x_n\|_n}x_n)\right\|' \le 1$. D'autre part, on a $f(\frac{\eta}{\|x_1\|_1}x_1,\ldots,\frac{\eta}{\|x_n\|_n}x_n) = \frac{\eta^n}{\|x_1\|_1\ldots\|x_n\|_n}f((x_1,\ldots,x_n)$, d'où $\|f(x_1,\ldots,x_n)\|' \le \frac{1}{\eta^n}\|x_1\|_1\ldots\|x_n\|_n$. preuve de (iii) $\Rightarrow$ (i). on fixe $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in X$ on veut montrer que f est continue en a d'après le lemme précédent, pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in X$ on a :

$$f(x_1,\ldots,x_n) - f(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{i=1}^{n} f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i - a_i,x_{i+1},\ldots,x_n).$$

D'oû on a :

$$\|f(x_1,\ldots,x_n) - f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\|' \le \sum_{i=1}^{n}\|f(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i - a_i,x_{i+1},\ldots,x_n)\|' \le \sum_{i=1}^{n} M\|x_i - a_i\|_i$$

$\|a_1\|_1\ldots\|a_{i-1}\|_{i-1}\ldots\|x_n\|n$. en ne déduit que si $x = (x_1,\ldots,x_n) \in B(a,1)$, on a:

$$\|f(x_1,\ldots,x_n) - f(a_1,\ldots,a_n)\|' \le \sum_{i=1}^{n} M\|x-a\|_\infty(1+\|a\|_\infty)^{n-1}$$

$$= nM\|x-a\|_\infty(1+\|a\|_\infty)^{n-1}$$

Donc la restriction de f à $B(a,1)$ est continue en a par conséquent, f est continue en a.[11]

9.4 Topologie faible.

Soit X un espace vectoriel topologique sur un corps topologique $\mathbb{k}$. La topologie de X (par exemple celle induite par la distance induite par la norme, le cas échéant) est aussi appelée la topologie forte, et une application continue de X, muni de la topologie forte, dans un espace topologique est dite fortement continue. Le dual topologique X' (aussi noté X^*, voire X , le plus simple est de toujours préciser si l'on prend le dual algébrique ou topologique) de X est l'espace vectoriel des formes linéaires fortement continues sur X.

La topologie initiale sur X définie par la famille $(\ell)_{\ell\in X'}$ est appelée la topologie faible sur X, voire pour préciser la topologie faible $\sigma(X,X')$. Par définition, la topologie faible sur X est la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires fortement continues.

Remarque. Pour tout ℓ dans X', l'application de X dans $[0,+\infty[$ définie par $x \longmapsto |\ell(x)|$ est clairement une semi-norme sur X, par linéarité de ℓ. La topologie faible sur X coïncide avec la topologie définie par la famille de semi-normes $x \mapsto |\ell(x)|_{\ell \in X'}$ (toujours par linéarité des $\ell \in X'$).

Les propriétés suivantes découlent de celles des topologies initiales, ou sont élémentaires:

• si $x_0 \in X$, alors l'ensemble des parties de la forme

$$V_{\epsilon,\ell_1,\ldots,\ell_n}(x_0) = \{x \in X : |\ell_i(x) - \ell_i(x_0)| < \epsilon, 1 \leq i \leq n\}$$

lorsque $\epsilon > 0, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $\ell_1, \ldots, \ell_n \in X'$, est un système fondamental de voisinages de x_0 dans X pour la topologie faible ;

• les ouverts pour la topologie faible sont les unions d'intersections finies de parties de la forme $\ell^{-1}(O)$ avec O ouvert de $\Bbbk$ et $\ell \in X'$;

• la topologie forte sur X est plus fine que la topologie faible (car la topologie forte rend continue les formes linéaires fortement continues, par définition) ;

• l'espace vectoriel X, muni de la topologie faible, est un espace vectoriel topologique (par la linéarité des applications définissant la topologie initiale) ; si $\Bbbk$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

alors comme les voisinages $V_{\epsilon,\ell_1,\ldots,\ell_n}(0)$ sont convexes, par linéarité des ℓ_i, l'espace vectoriel topologique X est localement convexe ;

• si X est un espace vectoriel normé sur $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\Bbbk = \mathbb{C}$ de dimension finie n, alors la topologie forte et la topologie faible coïncident.

En effet, lorsque nous aurons montré que deux espaces vectoriels normés sur $\Bbbk$ de même dimension finie sont homéomorphes, cela découlera du fait que sur $\Bbbk^n$ muni de la norme $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, si $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont les formes linéaires coordonnées (qui sont continues, car de norme 1), alors la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\epsilon > 0$ est égale à $\bigcap_{i=1}^n \ell_i^{-1}(\{x \in \Bbbk : |x| < \epsilon\})$, donc est un ouvert faible, ce qui conclut par les deux points précédents.

9.5 Topologie faible-étoile.

Soient X un espace vectoriel topologique sur un corps topologique $\Bbbk$, et X^* le dual topologique de X. La topologie faible-étoile est la topologie initiale sur X^* définie par la famille d'applications $(\varphi_x : X^* \to \Bbbk)_{x \in X}$, où $\varphi_x : \ell \to \ell(x)$. Attention, c'est une topologie sur X^*, pas sur X. C'est donc la topologie la moins fine sur X^* rendant continue les applications d'évaluation en tout point de X des formes linéaires fortement continues sur X.

Proposition 9.2 *La topologie faible-étoile sur X^* est séparée.*

La famille des semi-normes $(\ell \to |\ell(x)|)_{x \in X}$est clairement séparante.

Preuve. Si ℓ' et ℓ'' sont deux éléments distincts de X^*, alors il existe un élément x dans

X tel que $\epsilon = |\ell'(x) - \ell''(x)| > 0$. Par conséquent $\{\ell \in X^* : |\ell(x) - \ell'(x)| < \frac{\epsilon}{2}\}$ et $\{\ell \in X^* : |\ell(x) - \ell''(x)| < \frac{\epsilon}{2}\}$ .sont deux voisinages ouverts disjoints de ℓ' et ℓ'' respectivement, pour la topologie faible-étoile.

Soit X un espace vectoriel normé réel. Pour tout l dans X^*, posons

$$\|\ell\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\ell(x)| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \ell(x).$$

L$'$application $\ell \to \|\ell\|$ est une norme sur X^*, appelée la norme duale. Donc $(X^*, \| \ \|)$ un espace vectoriel réel normé. Il est facile de voir que toute application φ_x, pour $x \in X$, est une forme linéaire fortement continue sur X^* pour cette norme : $|\ell(x)| \leq \|x\| \, \|\ell\|$ pour tout ℓ dans X^*. La topologie faible-étoile de X^*est donc moins fine que la topologie faible de X^*. Lorsque X est de dimension finie, il est facile de montrer que ces trois topologies sur X^* coïncident. Nous *y* reviendrons ultérieurement.

Proposition 9.3 *Soit X un espace vectoriel normé réel, D une partie de X, et* O_D *la topologie initiale sur* X^* *définie par* $(\varphi_x\colon X^* \to \mathbb{R})_{x\in D}$. *Alors* O_D *est moins fine que la topologie faible-étoile sur* X^*. *De plus, si D est dense dans X, alors sur tout borné (pour la norme duale) de* X^*, *les restrictions des topologies* O_D *et faible-étoile coïncident.*

Preuve. La première assertion est immédiate.

Par les propriétés des topologies initiales, pour tout $\ell_0 \in X^*$, l'ensemble des parties de la forme

$$V\epsilon\ ,x_1,\dots,x_n(\ell_0) = \{\ell \in X\ :\ \forall i \in \{1,\dots,n\}, |\ \ell(x_i) - \ell_0(x_i)|\ < \epsilon\}$$

lorsque $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $x_1,\dots,x_n \in D$, est un système fondamental de voisinages de ℓ_0 pour O_D.

Pour tous $\ell, \ell_0 \in X^*$ de normes duales au plus c, et pour tous $x,y \in X$, nous avons

$$\begin{aligned}|\ell(x) - \ell_0(x)| &\le |\ell(x) - \ell(y)| + |\ell(y) - \ell_0(y)| + |\ell_0(y) - \ell_0(x)|\\ &\le ||\ell||||x - y|| + |\ell(y) - \ell_0(y)| + ||\ell_0||||x - y||\\ &\le |\ell(y) - \ell_0(y)| + 2c||x - y||.\end{aligned}$$

Le résultat en découle.

En analyse, on considère fréquemment des espaces vectoriels topologiques d'applications à valeurs réelles ou complexes, que l'on appelle souvent espaces fonctionnels, ainsi que des applications linéaires entre espaces fonctionnels, que l'on appelle souvent opérateurs.

Chapitre 10

Espace quotient d'une action de groupe

Un exemple important d'ensemble quotient est l'ensemble des orbites de l'action d'un groupe sur un ensemble. Il est important d'étudier les topologies quotients dans ce cadre.

Nous renvoyons au cours d'Algèbre I pour les notions d'actions de groupes sur des ensembles.

Soient G un groupe topologique et X un espace topologique. Une action continue

(à gauche) de G sur X est une action (à gauche) de G sur X qui est continue, i.e. c'est une application continue de l'espace topologique produit $G \times X$ dans X, notée $(g,x) \to g \cdot x$ ou tout simplement $(g,x) \to gx$ s'il y a pas de risque de confusion, telle que

$$\forall x \in X, \forall g,h \in G, e \cdot x = x, \text{ et } (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x).$$

Dans toute la suite de ce texte et sauf mention contraire, toute action d'un groupe topologique sur un espace topologique sera une action continue (à gauche). Notons qu'alors, pour tout g dans G, l'application $x \to g \cdot x$ est un homéomorphisme de X, d'inverse $x \mapsto g^{-1} \cdot x$, et que l'application du groupe G dans le groupe des homéomorphismes de X défini par $g \mapsto (x \mapsto g \cdot x)$ est un morphisme de groupes.

Si G est un groupe topologique, si H est un sous-groupe de G, alors les actions de H sur G par translations à gauche $(h,g) \mapsto hg$ et par translations à droite $(h,g) \mapsto gh^{-1}$ sont clairement continues.

Soient G un groupe topologique et X un espace topologique muni d'une action (continue à gauche) de G. Notons $\mathfrak{R}$ la relation d'équivalence définie par $x\mathfrak{R}y$ si et seulement si x et y sont dans la même orbite, i.e. s'il existe g dans G tel que $y = gx$. Notons $G/X = X/\mathfrak{R}$ l'ensemble quotient de cette action et $\pi: X \to G\backslash X$ la projection canonique. Chaque orbite sera, sauf mention contraire, munie de la topologie induite, et l'ensemble quotient $G\backslash X$ sera muni de la topologie quotient.

La projection canonique π est alors continue par définition de la topologie quotient, mais elle est de plus ouverte.

En particulier, si H est un sous-groupe de G, nous notons respectivement $H\backslash G$ et G/H les espaces topologiques quotients des actions par translations à gauche et par translations à droite. Nous verrons dans le corollaire ci-dessous que l'action de G par translations à gauche sur l'espace topologique quotient G/H, définie par

$$G \times G/H \to G/H$$

$$(g, g'H) \mapsto gg'H,$$

et l'action de G par translations à droite sur l'espace topologique quotient $H\backslash G$, définie par

$$G \times H\backslash G \to H\backslash G$$

$$(g, Hg') \mapsto Hg'g^{-1},$$

sont continues.

Proposition 10.1 Pour toute action continue d'un groupe topologique G sur un espace topologique X, la projection canonique $\pi\colon\ X \to G\backslash X$ est ouverte.

Preuve. Pour tout ouvert U de X, son image $\pi(U)$ est un ouvert de $G\backslash X$,car $\pi^{-1}(\pi(U)) \ = \bigcup_{g\in G} gU$, qui est une union d'ouverts, car G agit par homéomorphismes.

Voici un critère simple pour savoir quand l'espace quotient d'une action est séparé.

Proposition 10.2 *L'espace topologique quotient $G\backslash X$ est séparé si et seulement si $\mathfrak{R}$ est un fermé de $X \times X$. Dans ce cas, toute orbite de G dans X est fermée*.

Preuve. Soient x et y deux points de X qui ne sont pas dans la même orbite.

Si $G\backslash X$ est séparé, alors il existe deux ouverts saturés disjoints U et V contenant respectivement x et y. Donc $U \times V$ est un voisinage de (x,y) dans $X \times X$ ne rencontrant pas $\mathfrak{R}$, et $\mathfrak{R}$ est fermé.

Réciproquement, si $\mathfrak{R}$ est fermé, alors il existe des voisinages ouverts U de x et V de y tels que $(U \times\ V) \cap \mathfrak{R} = \emptyset$. Comme π est ouverte, $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont deux voisinages ouverts de $\pi(x)$ et $\pi(y)$ respectivement, qui sont disjoints par construction.

Donc $G\backslash X$ est séparé.

Comme les singletons d'un espace séparé sont fermés, l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé, la dernière assertion est claire.

Porisme 10.1 Soient G un groupe topologique, H un sous-groupe, et $\pi\colon G \to G/H$ la projection canonique. Alors

-l'application π est continue et ouverte, et l'action de G sur G/H par translations à gauche est continue ;

-si H est distingué, alors le groupe quotient G/H est un groupe topologique ;

-l'espace topologique quotient G/H est séparé si et seulement si H est fermé.

Ce résultat est bien sûr encore valable en remplaçant G/H par $H\backslash G$ et translations à gauche par translations à droite.

Preuve

(1) Soit $\psi\colon\ G \times G/H \to G/H$ l'action de G sur G/H, définie par $(g,g'H) \mapsto gg'H$. Pour tout ouvert U de G/H, l'ensemble

$$V = \{(g,g') \in G \times\ G \in gg' \in \pi^{-1}(U)\}$$

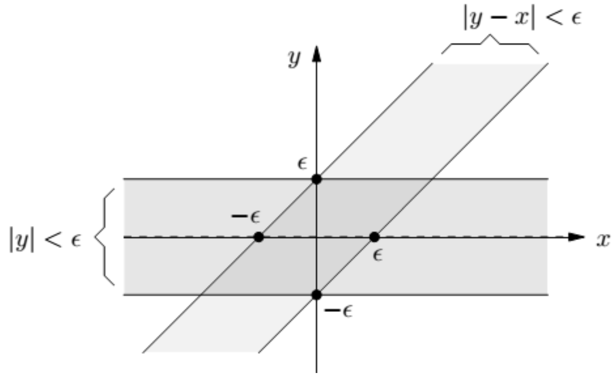
est ouvert, car la multiplication dans G et l'application π sont continues. l'application $\pi'\colon\ (G \times G) \to (G \times H\backslash G)$ définie par $(g,g') \ \mapsto\ (g,g'H)$ est ouverte, car $g' \ \mapsto\ g'H$ l'est . Donc $\psi^{-1}(U) = \pi'(V)$ est ouvert, et ψ est continue.

(2) L'application de $G \times G/H$ dans G/H définie par $(g,g'H) \mapsto g^{-1}\ g'H$ est continue, donc, par passage au quotient si H est distingué, l'application de $G/H \times G/H$ dans G/H définie par $(x,y) \mapsto x^{-1}\ y$ est continue.

(3) Soient $\mathfrak{R}$ la relation d'équivalence " être dans la même classe à droite par H " sur G, et ϕ: $G \times G \to G$ l'application continue $(x,y) \mapsto x^{-1}\ y$. Alors $\mathfrak{R} = \phi^{-1}(H)$. De plus, H est l'orbite de e pour l'action par translations à gauche de H sur G.

Exemples 10.1 Soient X un espace vectoriel, $\|\bullet\|$ une semi-norme sur X, et $Y = \{x \in X \|x\| = 0\}$. Il est immédiat de vérifier que Y est un sous-espace vectoriel fermé de X muni de la topologie définie par la semi-norme, et que la seminorme quotient est une norme.

(2) si I n'est pas un singleton, alors la topologie quotient ne coïncide pas forcément avec la topologie définie par la famille des semi-normes quotients.



Dans $X = \mathbb{R}^2$, la topologie définie par les deux semi-normes $(x,y) \mapsto |y - x|$ et $(x,y) \mapsto |y|$ est la topologie usuelle. Mais si Y est le sous-espace vectoriel $\{0\} \times \mathbb{R}$ de X, alors les deux semi-normes quotients sur X/Y sont les semi-normes nulles. Donc la topologie définie par la famille des semi-normes quotient est la topologie grossière. Elle est strictement moins fine que la topologie quotient, qui est la topologie usuelle sur $X/Y \simeq \mathbb{R}$.[12]

Bibléographie

[1] Frédéric paulin.Topologie, analyse et calcul différentiel. E'cole normale Supérieure.Version préliminaire. 2008-2009. p43 - p44.

[2] George skandaliz. topologie et analyse.édition . nouvelle preentation .2004. p 64.

[3] Par Ferkous kenza, Aiouaz meriem, Mezzi samia, Chekhbab assia, Topologie faible, mémoire fin d'études LMD, Centre univrsitaire de Mila, Mila-Algerie. 2013/2014- p 6 - p12.

[4] Frédéric paulin.Topologie, analyse et calcul différentiel. E'cole normale Supérieure.Version préliminaire. 2008-2009. p52 - p53.

[5] Frédéric paulin,Topologie, analyse et calcul différentiel, E'cole normale Supérieure,Version préliminaire, 2008-2009, p48-p74

[6] Leonard todjihounde, Topologie élémentaire, Edition 111, rue ncolas vouqulin 31100 Toulouse-France, 2013, p173

[7] Frédéric paulin.Topologie, analyse et calcul différentiel. E'cole normale Supérieure.Version préliminaire. 2008-2009. p74.

[8] Alexendre lukin, Tpoligie générale et éspaces normés, édition press de snell, ZI des hauts sesérts- zone 3- rue fond des fourches 21 b 4041 Votten (herstal), jeuille 2011, p 513.

[9] Frédéric paulin.Topologie, analyse et calcul différentiel. E'cole normale Supérieure.Version préliminaire. 2008-2009- p77- p79

[10] Par Ferkous kenza, Aiouaz meriem, Mezzi samia, Chekhbab assia, Topologie faible, mémoire fin d'études LMD, Centre univrsitaire de Mila, Mila-Algerie. 2013/2014- p15 - p21

[11] Noufel Elhadj hassan, Topologie générale et éspaces normés, Dunod imprimé en belgique, Dépot légal, aout 2011, p 244-p245

[12] Frédéric paulin.Topologie, analyse et calcul différentiel. E'cole normale Supérieure.Version préliminaire. 2008-2009. p89 - p96