الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
**République Algérienne Démocratique et Populaire**
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**N° Réf :……………**

**Centre Universitaire**
**Abd elhafid boussouf Mila**

**Institut des sciences et de la technologie** **Département de Mathématiques et Informatique**

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence**
**En: - Filière mathématiques**

# La fonction de Riemann


**Préparé par : Bahri Karima**
**Ben Abid Ahlem**
**Louifi Imen**
**Rwabeh Anissa**

**Encadrer par : Bouzrayeb Hayat**


**Année universitaire :2014/2015**

# Remerciements

Nous remercions dieu le tout puissant de nous avoir accordés la santé et le courage d'arriver au terme de ce travail.

Nos remerciements s'adressent tout particulièrement à nos parents pour toute les orientations et les conseils qu'ils nous ont prodigués tout au long de notre cursus et à nos amies.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à notre encadreur monsieur «Bouzrayeb Hayat» pour son accueil chaleureux pour l'attention particulière qu'il a apportée à ce modeste travail. Pour les efforts qu'il nous a assurés pendant toute la durée du travail et pour son sens de responsabilité.

Nos remerciements s'adressent également à la direction du département de science et de technologie d'avoir mis à notre disposition tous les moyens dans le cadre des mesures pour la réalisation de ce travail.

Nos propres remerciements à tous nos enseignants et enseignantes du département de mathématique de Centre Universitaire de Mila pour leurs soutiens de près ou de loin et pour toutes les informations scientifiques qu'on a acquises durant les trois années de formation.

# Table des matières

# Introduction Générale

Notre mémoire est consacré à la fonction de Riemann , le premier chapitre consiste une descriptions et des propositions de cette fonction et on étudier la suites et la série de la fonction de Riemann , le seconde chapitre est consacré à quelles théorème de fonction de riemann , dans le dernière chapitre on parle au intégrale de la fonction de Riemann .

Introduction

Notre mémoire est consacré à la fonction de Riemann , le premier chapitre consiste une descriptions et des propositions de cette fonction et on étudier la suites et la série de la fonction de Riemann , le seconde chapitre est consacré à quelles théorème de fonction de riemann , dans le dernière chapitre on parle au intégrale de la fonction de Riemann .

# Chapitre 1

# Etude de la fonction de Riemann

**Définition 1.1** *Soit $x$ un fonction réel, la Série de terme $(x \geq 1)$ la fonction Zéta de riemann défini sur* $]1, +\infty[$ *par :* $\forall x > 1\ \varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

**Remarque 1.2** *Soit $Z$ un fonction complexe.*

*La fonction de riemann défini par : $z \in$ et $n \in N \neq 0$ telle que :*
$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \left|\frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)} e^{\operatorname{Im}(z) \ln n}}\right|$ *converge absolument ssi $Re(Z) > 1$.*

**Proposition 1.3** *Soit $f$ une fonction définie par :si* $(x \geq 1)$

$x \to f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

*Si $x \in R$, $n \in N$ et $n \in Z$ et $n \neq 0$*

*Posons :* $V_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

**si* $x \leq 0\ U_{n \geq 1}(x)_{n \to +\infty} \neq 0 \Rightarrow U_n(x)$ *diverge.*

**si* $x > 0\ U_{n \geq 1}(x)_{n \to +\infty} = 0 \Rightarrow U_n(x)$*converge.*

*La série de terme générale :*$\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}, n \geq 1$ *converge ssi $x > 0$.*

**Définition 1.4** *La fonction $\varepsilon$ de Riemann est une fonction Analytique complexe méromorphe définie pour tout nombre complexe $S$ tel que : $Re(S) > 1$ par la série de Riemann :*

$\varepsilon(S) = \sum_{+\infty}^{n=1} \frac{1}{n^S} = 1 + \frac{1}{2^S} + \frac{1}{3^S} + \cdots$

*D'après la théorie des séries de Dirichlet on déduit que la fonction ainsi définie est Analytique sur sont domaine de convergence la série ne converge pas en S=1 car :*

*On a :* $\sum_{K=m}^{K=1} \frac{1}{K} \geq \int_1^{m+1} \frac{dU}{U} = ln(m+1)/m \to +\infty$

*La valeur$S = 1$ une Singularité de la fonction.*

**Proposition 1.5** *Soit $x \in R : x > 1\ \exists\ \varepsilon(x)$ et $f(x)$ alors :*

$\varepsilon(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{P=1}^{+\infty} 1 \frac{1 - (-1)^{2P-1}}{(2P)^x}$

$=\frac{2}{2^x}\sum_{+\infty}^{p=1}\frac{1}{P^x}=2^{1-x}\varepsilon(x)$

*Donc :* $f(x)=(1-2^{1-x})\varepsilon(x)$ *on :*

$\forall x>1,\ \varepsilon(x)=\dfrac{1}{1-2^{1-x}}f(x).$

## 1.1 suite et séries de fonction Riemann

**suites de fonctions**

soit $I$, pour out $n\in N$, on définit $f_n:[0,1]\ \to R$ en posant $f_n(x)=x^n$, pour tout $x\in[0,1]\,, n\to f_n(x)$est une suite numérique, l'application définie sur $N$ par $n\to f_n$ est une suites de fonction.

**Définition 1.6** *Une suite* $(f_n)_{n\in N}$ *de fonction définies sur un intervalle* $I$ *est une application de* $N$ *dans l'espace* $F(I,R)$ *des fonctions de* $I$ *dans* $R$.

**Définition 1.7** *Une suite* $(f_n)_{n\in N}$ *simplement convergente sur un intervalle* $I$ *si pour tout* $x\in I$ *la suite* $(f_n(x))_{n\in N}$ *est convergente.*

*on désigne alors la limite simple de* $(f_n)_{n\in N}$ *par*$f$ *i.e* $f(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)$ *pour* $x\in I$ *.*

*Si la suite* $(f_n(x))_{n\in N}$ *ne converge pas sur tout* $I$ *mais pour*$x\in A$*, ou est un sous_ ensemble de* $I$*, alors* $(f_n)_{n\in N}$ *converge simplement sur* $A$.

*dans notre exemple* $\lim_{n\to+\infty}x^n=0$ *pour tout* $x\in[0,1[$ *et la suite* $1^n$ *est constante. donc la suite* $(f_n)_{n\in N}$ *converge simplement vers* $f$ *définie par* $f(x)=0$

*pour*$x\in[0,1[$ *et*$f(1)=1$.

**Remarque 1.8** *Dans cet exemple les* $f_n$ *sont continues, mais pas la limite simple* $f$*.*

*le terme " simple " s'oppose à " uniforme" qu'on ne verra pas. autant l'oublier.*

## 1.2 Série de Rimann

**Définition 1.9** *Une série*$(\sum u_n)$ *est dit série à terme positifs si* $u_n\geq 0$ *pour tout* $n\in N$

***Remarque 1.10*** *1- les séries*$(\sum u_n)$ *vérifiant* $u_n\geq 0$ *pour* $n\geq n_0$ *sont aussi appelées séries à terme positifs car la nature d'ine série ne change pas si on lui retranche un nombre fini de termes.*

*2- si une série*$(\sum u_n)$ *est à terme positifs, la suites des sommes partielles* $(S_n)_n$ *est croissante,*

*en effet,* $S_n-S_{n-1}=u_n\geq 0$*, d'ou la proposition.*

**Proposition 1.11** *Soit* $(\sum u_n)$ *une série à termes positifs :*

$(\sum u_n)$ *converge* $\Rightarrow (S_n)_n$ *est majorée.*

**Preuve.** Il suffit d'appliquer la remarque et de se rappeler que les suites croissantes et majorées sont convergentes. ■

**Théorème 1.12** *Soit* $(\sum u_n)$ $(\sum v_n)$ *deux séries à termes positifs, on suppose que* $0 \leq u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in N$*. alors :*

*1-* $(\sum v_n)$ *converge* $\Rightarrow (\sum u_n)$ *converge.*

*2-* $(\sum u_n)$ *diverge* $\Rightarrow (\sum v_n)$ *diverge.*

**Preuve.** 1) $u_n \leq v_n \Rightarrow S_n = \sum_{K=0}^{n} u_n \leq \sum_{K=0}^{n} v_K = T_n$ puisque$(T_n)_n$ est une sériue convergente

Donc majorée alors $(S_n)_n$ est convergente comme étant une suite croissante et maorée,$(\sum u_n)$ converge.

2) C'est le contraposée de la premiére proposition.

ce théoréme reste vrai si l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ est réaliser à partir d'une certain ordre

$p_0$ ( i.e $u_n \leq v_n$ si $n \geq p_0$ ). ■

**Exemple 1.13** *Soit la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2n}\right)$*, on a* $0 \leq \sin(\frac{1}{2^n}) \leq \frac{1}{2^n}$ *est une série géométrique convergente, alors la série*$(\sum \sin\left(\frac{1}{2n}\right))$ *est convergente.*

**Théorème 1.14** *Soit* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum u_n)$ *deux série à termes strictement positifs. on suppose que* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ *alors :*

*1-* $(\sum v_n)$ *converge* $\Rightarrow$ $(\sum u_n)$ *converge.*

*2-* $(\sum u_n)$ *diverge* $\Rightarrow (\sum v_n)$ *diverge.*

**Preuve.** 1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$

$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq ... \leq \frac{u_0}{v_0}$ ceci implique que $u_n \ \frac{u_0}{v_0} v_0$. sachant que $(\sum v_n)$ converge alors $(\sum \frac{u_0}{v_0} v_n)$ converge et d'aprés le théoreme de comparaison ci-dessus, $(\sum u_n)$ converge.

2) c'est la contraposée de la premiére proposition. ■

# Chapitre 2

# les théoremes et les applications de Riemann

**Définition 2.1** *Sur tout surface de Riemann, ( Compacte), il existe une fonction méromorphe non constante.*

**Preuve.** Il suffit de construire deux 1- formes méromorphes non prpotionnelles. soient $z_0, z_1$ et $z_2$ trois points. on construit :

- une 1- forme méromorphe $\omega_1$ avec résidu -1 en $z_1$ et résidu -1 en $z_0$ holomorphe partout ailleurs.

- une 1- forme méromorphes $\omega_2$ avec résidu-1 en $z_2$ résidu -1 en $z_0$ et holomorphe partout ailleurs.

le qiotient $\omega_1/\ \omega_2$ a un pole en $z_1$ ( peut -etr(e d'ordre $> 1$) ) et un zero en $z_2$ ( peut -etre d'ordre >1), il n'est donc pas constant. ■

**Définition 2.2** *Etant donné $m$ points distincts $P_1, ..., P_m$ de $X$, on note $\varepsilon(P_1, ..., P_m)$ l'ensemble des fonctions méromorphes ayant éventuellement des poles simples en les points $P_1, ..., P_m$*

*( et pas ailleurs). c'est naturellement un espace vectoriel complexe.*

*l'objet du théoreme de Riemann-Roche est d'estimer sa dimension.*

**Définition 2.3** *Intégalité de Riemann :*

*Soit $X$ une surface de Riemann compacte de genre $g$. alors :*

$\dim \varepsilon(P_1, ..., P_m) \geq m - g + 1$.

**Preuve.** Fixons un choix de coordonnée locale $z$ autour de chacun des points $P_K, K = 1, ..., m$, et $2g$ courbe simples fermées $\gamma_1, ...., \gamma_{2g}$ qui découpent $X$ en un domaine simplement connexe et ne passent pas par les $P_K$. Soit alors $\omega_K (K = 1, ..., m)$

l'unique 1-forme méromorphe de partie principale $dz/z^2$ en $P_K$, holomorphe partout ailleurs et dont les parties réelles de ses $2g$ périodes sont nulles.

considérons le sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^m$ constitué des m-uples $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ tels qu'il existe une 1-forme holomorphe $\eta$ telle que :

$\eta + \alpha_1\omega_1 + ... + \alpha_m \omega m.$

Soit exacte. si$f \in \varepsilon(P_1, ..., P_m)$ , alors sa différentielle de $f$ est commbinaison linéaire de différentielles de formes méromorphes avec un pole en $P_i$ et de différentielles holomorphes :

$df = \eta + \alpha_1\omega_1 + ... + \alpha_m \omega m.$

puisqu'une forme holomorphe exacte est nulle, l'application $df \to (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ est inh*jective ( elle est surjective). on en déduit que :

$\dim \varepsilon(P_1, ..., P_m) = \dim V + 1.$

( en prenet des primitives (multiformes). il ne pas oublier de compter +1 dans les calculs de dimension, à cause de la constante d'intégration.)

Soit $\Gamma = (\mathrm{Im}(\int_{\gamma_l} \omega_K))_{l,K} \in M_{2g\times m}(\mathbb{R}).$ ■

**Lemme 2.4** *Un m-uplet* $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ *de nombres complexes appartient au sous -espace* $V$ *si :*

$\Gamma\binom{\mathrm{Re}(\alpha_1)}{\mathrm{Re}(\alpha_m)} = \binom{0}{0} et \quad \Gamma\binom{\mathrm{Im}(\alpha_1)}{\mathrm{Im}(\alpha_m)} = \binom{0}{0}.$

**Preuve.** Cela résulte du fait que $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in V$ si et seulement si

$\alpha_1\omega_1 + ... + \alpha_m \omega m$

à la meme périodes qu'une 1-forme holomorphe. Or la condition implique que toutes les parties réelles des périodes de $\alpha_1\omega_1 + ... + \alpha_m \omega m$ son tnulles, les parties réelles d'une 1- forme holomorphe sont toutes nulles si et selement si cette forme est nulle ( et donc ses périodes sont nulles).

Ainsi, $\alpha_1\omega_1 + ... + \alpha_m \omega m$ a ses périodes nulles, elle est exacte .

le théoréme du rang implique donc que la dimension réelle de $V$ est $\geq 2m - 2g$.

un corollaire immédiate, que l'on obtient en variant les ensembles de poles imposés, est le suivant : ■

**Corollaire 2.5** *Une surface de Riemann compacte posséde une infinité de fonctions méromorphes linéairement indépendantes sur* $\mathbb{C}$.

*par la suite , ce fut gusav Roche , un étudiant de Riemann , qui réussit à interpréter la difference entre la dimension recherchée et l'expression* $m - g + 1$.

*Développement en série entiére de* $\ln \Gamma(1 + t)$

**Définition 2.6** *Une formule due à Eulet donne pour* $|t| \langle 1$.

$\ln\Gamma(1+t) = -\gamma t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \xi(n)}{n} t^n$

*elle permet à Euler d'ecrire*

$\gamma = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n}$

*lengendre ecrit la formule d'Euler sous la forme plus commode numériquement*

$\ln\Gamma(1+t) = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi t}{\sin \pi t} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t} + (1-\gamma)t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\zeta(2n+1)}{2n+1} t^n$.

## 2.1 suite de Farey

Article detaillé : suite de Farey

ces suites peuvent etre utilisées pour obtenir des formules équivalentes à l'hypothése de Riemann.

## 2.2 Fonction de comptage de's nombres premiers et théoreme des nombres premiers

Article détaillé : fonction de compte des nombres premiers et théoreme des nombres premiers.

la fonction de comptage des nombres premiers est définie par

$\pi(x) = \sum_{p \in P, P \leq x} 1$

la non-annulation de la fonction $\zeta$ sur $\mathrm{Re}(s) = 1$ a pour conséquence la véracté de la conjecture de Legendre_Gauss :

$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{du}{\ln u}$

la région sans zero êrmet ensuite de majorer le reste :

$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + 0(x \exp(-c(\ln x)^{3/5}(\ln\ln x)^{-1/5}))$

ce qui est encore bien loin de ce qu'on sait démontrer si l'hypothése de Riemann est vraie.

$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + 0(\sqrt{x}\ln x)$

## 2.3 le nombre premier de rang

en 1992, Cipolla monta le dévelopement asymptotique

$P_n = n\left\{\ln n + \ln\ln n - 1 + \frac{\ln\ln n - 2}{\ln n} - \frac{(\ln\ln n)^2 - 6\ln n + 11}{(\ln n)^2} + 0\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)^3\right\}$

grace à une ér*tude numérique de la fonction $\zeta$ Rosser er Schoenfeld ont montré , pour n supérieur ou égale à 21 , que :

$n(\ln n + \ln\ln n - \frac{3}{2}) \langle\ P_n \langle n(\ln n + \ln\ln n - \frac{1}{2})$

la borne inférieure a été améliorée par Dusart en 1999 qui montra , pour $n \rangle 1$
$n(\ln n + \ln\ln n - 1) < p_n$.

# Chapitre 3

# Intégrale de Riemann

## 3.1 integrale des fonctions en escalier

**Définition 3.1** *une fonction* $f\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est dite en escalier s'il existe une subdivision* $(a_0,...,a_n)$ *de* $[a,b]$ *et des éléments* $\lambda_1,...,\lambda_n$ *de* $\mathbb{R}$ *tels que :*

$\forall i \in \{1,...,n\}, \forall x \in ]a_{i-1},a_i[, f(x) = \lambda_i.$

*on dit alors que la subdivision* $\sigma$ *est adaptée à* $f$.

**Exemple 3.2** *La fonction* $x \to E(x)$ *ou E(x) désigne la partie entiére de* $x$*, est en escalier sur tout intervalle complact de* $\mathbb{R}$.

**Remarque 3.3** *Une fonction en escalier n'est en fait pas spéciifiée aux points* $a_i$ *de la subdivision* $\sigma$ *considérée, et l'intégrale* $I(f,\sigma)$ *ne dépend donc pas de* $f$ *en ces points.*

**Définition 3.4** *Soient* $f \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R})$ *et* $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ *une subdivion adaptée à* $f$*. on note* $\lambda_i$ *la valeur de* $f$ *sur l'intervalle* $]a_{i-1},a_i[$ $(1 \leq i \leq n)$ *. alors le nombre réel* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a_i - a_{i-1})$

*ne dépend pas de la subdivision adaptée à* $f$ *considérée. on l'appelle l'integrale de* $f$ *sur* $[a,b]$ *et on le note* $\int_a^b f(x)dx$.

**Lemme 3.5** *Muni des lois usuelles , l' ensemble* $\varepsilon([a,b],\mathbb{R})$ *est un* $\mathbb{R}-$

*sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$*, et l'application* $f \to \int_a^b f(x)dx$ *de* $\varepsilon\ ([a,b],\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *est linéaire.*

**Proposition 3.6** *1- la forme linéaire*

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon([a,b],\mathbb{R}) \quad , \|.\|_\infty \\ f \to \int_a^b f(x)dx \end{array} \right\}$$

*est continue.*

*2- Si* $f,g \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R})$ *,alors :* $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

*3- si*$f \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R})$ *alors :*$|f| \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R}_+)$ *et*

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$

**Preuve.** 1) pour tout $f \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R})$ , on à

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a).\,\|f\|_\infty$

ce qui montre que la forme linéaire considérée est continue en 0, donc continue en tout point de $\varepsilon([a,b],\mathbb{R})$

2- par linéarité, il suffit de montrer que $\int_a^b(g(x)-f(x))dx \geq 0$ , ce qui découle immédiatement du point c) des remarque

3- Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq 1}$ une subdivision de$[a,b]$ adaptée à la fonction$f$ telle que $f$soit constante et égale à $\lambda_i$ sur chaque intervalle$]a_{i-1},a_i[$ $(1 \leq i \leq n)$ . alors $\sigma$ est également adaptée à $|f|$

et on a :

$\left|\sum_{i=1}^n \lambda_i(a_i - a_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|\,.\,|a_i - a_{i-1}|\,.$

d'ou le résultat annoncé. ■

**Définition 3.7** *Une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est dite intégrable au sens de Riemann ( ou Riemann -intégrable) sur* $[a,b]$ *si , quel que soit le nombre réel* $\varepsilon > 0$ *, il existe une couple* $(g,f)$ *de fonctions en escalier sur* $[a,b]$ *vérifiant :*

$g \leq f \leq h$ *sur* $[a,b]$ *et* $\int_a^b [h(x)-g(x)]\,dx \leq \varepsilon$

**Théorème 3.8** *Achaque fonction numérique f définie et bornée sur un intervalle compact* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *, associons l'ensemble* $\varepsilon_+(f)(resp(\varepsilon\_(f))$ *constitué par les fonctions numérique en escalier*

*majorant ( resp. minoront)* $f$ *sur* $[a,b]$*, et posons :*

$I\_(f) = \sup_{g\in\varepsilon\_(f)} \int_a^b g(x)dx$ *et* $I_+(f) = \inf_{h\in\varepsilon_+(f)} \int_a^b h(x)dx$

*alors pour que* $f$ *soit intégrable sur* $[a,b]$ *il faut et il suffit que l'on ait*

$I\_(f) = I_+(f)$

**Remarque 3.9** *Si* $f$ *est en escalier, les ensemble* $\varepsilon_+(f)$ *et* $\varepsilon_-(f)$ *ont en commun l'élément* $f$*. on a alors*

$I\_(f) = I_+(f) = \int_a^b f(x)dx$

*La fonction* $f$ *est donc intégrable, et son intégrale est égale au nombre* $I\_(f) = I_+(f)$

*A chaque fonction intégrable* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *, associons le nombre* $I\_(f) = I_+(f)$*. D'aprés la remarque précédente, la fonction ainsi définie sur l'ensemble des fonctions en escalier sur* $[a,b]$ *. on peut donc poser la définition suivante.*

**Définition 3.10** *Une fonction* $f\ :\ [a.b] \rightarrow R$ *est dite réglées s'il existe une suite de fonctions en escalier de* $[a.b]$ *dans* $R$*. convergeant uniformément vers* $f$ *sur* $[a.b]$ *.*

**Définition 3.11** *Une fonction* $f\ :\ [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ *est dite ontinue par morceaux sur* $[a,b]$ *s'il existe une subdivision* $(a_0, a_1, ..., a_n)$ *de* $[a,b]$ *telle que , pour tout* $i \in \{0, ..., n-1\}$*,* $f$ *est continue sur* $]a_i, a_{i+1}[$ *et admet une limite finie à droite au point* $a_i$ *et une limite finie à gauche au point* $a_{i+1}$*.*

**Corollaire 3.12** *Si* $f\ :\ [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction bornée sur* $[a,b]$ *et continue sur l'intervalle ouvert* $]a,b[$ *, alors* $f$ *est intégrable sur* $[a,b]$ *.*

**Exemple 3.13** *fonction intégrable non réglée*

*Soit* $f$ *la fonction définie sur* $[-1,1]$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) si x \neq 0 \\ 0\ x = 0 \end{cases}$$

*Cette fonction est intégrale car elle set manifestement bornée et admet l'origine comme seule discontinuité. cependant, cette fonction n'est pas réglée puisque les limites à droite et à gauche de zero n'existent pas. en effet, la suite* $(a_n)_{n \in N}$ *de terme générale :*

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$$

*est à valeurs dans* $]0,1[$*est converge vers 0. comme* $f(a_n) = (-1)^n$ *pour tout n, la suite*$(f(a_n))_{\ n \in N}$ *diverge , donc* $f$ *n'admet pas de limite à droite en 0 . Donc* $f$ *n'est pas réglée sur*$[0,1]$.

**Exemple 3.14** *(fonction non intégrable)*

*Soit* $f$ *le fonction définie sur* $[a,b]$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 si x \neq 0 \\ 1\ x = 0 \end{cases}$$

*désignons par* $(g,h)$ *un couple quelconque de fonctions en escalier sur* $[a,b]$*, vérifiant* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$*. pour tout* $x \in [a,b]$ *; et soit* $\sigma$ *une subdivision de* $[a,b]$ *adaptée à la fois à* $g$ *et à*$h$*. Chaque intervalle de* $\sigma$ *contient à son intérieur des valeurs rationnelles et des valeurs irrationnelles. A l'intérieur de tout intervalle de* $\sigma$ *on a a donc* $g(x) \leq 0$ *et* $h(x) \geq 1$ *, d'ou :*

$$\int_a^b [h(x) - g(x)]\, dx \geq b - a.$$

## 3.2 propriétés générales de l'intégrale de Riemann

**Définition 3.15** *Si* $f$ *est une fonction intégrable sur* $[a,b]$ *et si* $c$ *est un point dans* $]a,b[$*, alors* $f$ *est intégrable sur* $[a,c]$ *et sur* $[c,b]$*, et on a :*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

***Proposition 3.16*** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques intégrables sur un meme intervalle compact $[a,b]$. Alors, quels que soient les scalaires $\alpha,\beta$ la fonction $\alpha f+\beta g$ est intégrable sur $[a,b]$*

*et on a :*

$\int_a^b [\alpha f(x)-\beta g(x)]\,dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$

**Proposition 3.17** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques intégrables sur$[a,b]$, v"rifiant $f(x)\leq g(x)$ pour tout $x\in[a,b]$.*
*Alors on a :*

$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ .

**Théorème 3.18** *si $f$ est une fonction numérique intégrable sur$[a,b]$, alors la fonction $x\mapsto |f(x)|$ est intégrable sur$[a,b]$ et on a :*

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$

**Théorème 3.19** *(inégalité de Schawarz et de Minkowski)*

*sont des fonctions némuriques intégrables sur $[a,b]$, alors*

*on a :*

** l'inégalité de Schwarz :*

$\left|\ \int_a^b f(x)g(x)dx\ \right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)^{1/2}$

** l'inégalité de Minkowski :*

$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx\right]^{1/2} \leq \left[\int_a^b (f(x))^2\,dx\right]^{1/2} + \left[\int_a^b (g(x))^2\,dx\right]^{1/2}.$

**Remarque 3.20** *On peut montrer que si $f$ et $g$ sont continues sur$[a,b]$, l'inégalité de Schwarz ne se transforme en égalité que si $f=0$ ou s'il existe une constante $\alpha$ telle que l'on ait $g(x)=\alpha f(x)$ pour tout $x\in[a,b]$, de mem que l'inégalité de Minkowski ne se trasforme en égalité que si $f=0$ ou s'il existe une constante positive $\alpha$ vérifiant $g(x)=\alpha f(x)$ pour tout $x\in[a,b]$.*

# Bibliographie

[1] ARNAUDIES J.-M. ; cours de mathématique ( tome 2 : Analyse ,Dunod , 1996.

[2] ARDAUDIESJ.-M. ; LELONG-FRRRAND j. : - cours de mathématique ( tome 4 : Equation différentielles , intégrale multiples ; DUONS ; 1977.

[3] AULIAC G. ; CABY J.-Y : - Analyse pour le CAPES et l'agrégation Interne, ELLIPSES ; 2002.

[4] BOSCHT F. : - Séries de fonctions. Intégrale de Riemann, MASSON.1995.

[5] RIANE M. : - PAGES G . Téorie de l'intégration , VUIBERT, 4éme édition ; 2006.

[6] DEHEUVELS P. :- l'intégrale, PUF ; 1980.

[7] DIEUDONNe J. : - Calcul infinitésimal, HERMANN.1980.

[8] DOUCHET J. :- Analyse, PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES ; 2005.

[9] GOSTIAUX B. :- Cous de mathématiques spéciales (volume2) , PUF, 1993.

[10] GOURDON X . :- Maths en tête Analyse. ; ELLIPSES, 2 éme 2dition ; 2008.

[11] MONIER J .-M ; : - Analyse . MP, DUNOD, 5 éme édition , 2007.

[12] RAMIS E., DESCHAMPS C., ODOUX J. : - Topologie et éléments d'analyse, MASSON, 2 éme édition, 1995.