الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire de MILA

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila
Institut des sciences et de la technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence

En: Filière mathématiques

Thème
La fonction zêta de Riemann

Préparé par :

- Benchaoui Marwa
- Boukerra Linda
- Boulefrakh Marwa
- Djebli Dellal

Rapporteur : Khalfaoui Mohamed M.A.B Centre universitaire de Mila

Année universitaire: 2014/2015


بسم الله الرحمن الرحيم
إقرأ باسم ربك الذي خلق (1)
خلق الإنسان من علق (2)
إقرأ وربك الأكرم (3)
الذي علم بالقلم (4)
علم الإنسان ما لم يعلم (5)
صدق الله العظيم

Remerciements

Après avoir terminé ce travail de fin d'étude, nous réservons ces lignes pour exprimer nos remerciements les plus sincères à notre dieu tout puissant de nous avoir donné la santé et la patience pour terminer ce travail, nous remercions tout d'abord

ALLAH

*En premier lieu, nous exprimons toute notre gratitude pour notre encadreur **Ms Khalfaoui Mohamed** pour leurs précieux conseils, leurs disponibilité, la confiance qu'ils nous ont toujours témoigné et la sollicitude dont ils nous entouré, et ce tout au long de l'élaboration du présent travail.*

Nous n'oublions pas non plus Nos Enseignants, qui tout au long du cycle d'études au centre universitaire de MILA, nous ont transmis leur savoir.

Nous adressons une pensée particulièrement affective à Nos familles qui nous ont encouragé et Nos Amis de CUM qui ont rendu agréables nos longues années d'études

*Nous adressons une pensée particulièrement affective à **Monsieur KEROUR Kais** pour ces conseils d'or, ces encouragements ainsi que leurs patients avec nous.*

Nous tenons enfin à remercier tous ceux qui ont collaborés de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail, qu'ils acceptent nos humbles remerciements.

Merci a tous

Marwa & Linda & Dellal & Marwa

Table des matières

Introduction

En mathématiques, la fonction zêta de Riemann est une fonction analytique complexe définie sur $\{s \in \mathbb{C}, \mathrm{Re} > 1\}$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Elle définit une fonction holomorphe sur le demi-plan complexe $\{Re > 0\}$ et admet la factorisation suivante, dite produit Eulérien :

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$$

p parcours l'ensemble des nombres premiers, ζ apparue essentiellement dans la théorie des nombres premiers. Elle est aussi importante comme fonction modèle dans la théorie des séries de Dirichlet, et autour le temps la formule précédente a été améliorée plusieurs fois de façon méromorphe sur un voisinage de $\mathrm{Re}(s) < 1$.

Cette fonction a été la première fois étudié par Euler autour des années 1750 et qui a trouvé ainsi une forme particulière de ce qui sera la relation fonctionnelle de la fonction zêta.

Riemann est le précurseur de cette vision analytique dans son fameux article de 1859. Il met en évidence un lien entre la distribution des nombres premiers et les zéros de la fonction ζ. Pour la localisation de ces zéros, Riemann posé plusieurs hypothèses mais sans démonstrations [19].

Depuis, dans tous les centres de recherches scientifiques des équipes étudient cette fonction Zéta et ses applications. S'il est prouvé qu'il y a une infinité de zéros sur la ligne critique, il n'est pas prouvé qu'il n'y ait pas de zéros non triviaux ailleurs.

les chapitres de ce mémoire sont organisés comme suit :

D'abord, dans le premier chapitre nous avons rappelé.les fonction d'une variable complexe, de fonction gamme et des séries de Dirichlet .

En suite, dans le deuxième chapitre nous intéressons au développement de la fonction zêta de Riemann en série et forme d'Euler et relations avec quelques fonctions et nombres comme elle se prolonge analytiquement avec la fonction êta de Dirichlet.

puis, dans le troisième chapitre est réservé à la localisation des zéros(triviaux et non triviaux) et les conjectures de ces zéros dans l'hypothèse de Riemann, nous avons étudié les fonction $\frac{1}{\zeta(s)}$ et $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

Enfin, dans le quatrième chapitre la fonction zéta a plusieurs applications et nous avons étudié la fonction zéta d'Epstein comme un cas particulier .

Chapitre 1

Fonctions d'une variable complexe

1.1 Fonction holomorphe-Fonction méromorphe

Définition 1.1.1 *:*
Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est définie par :

$$z = x + iy \in \Omega \ , f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

où $u(x, y)$est dite la partie réelle de $f(z)$ et $v(x, y)$ est dite la partie imaginaire de $f(z)$.

Définition 1.1.2 *:*
Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe si en chaque point z_0 de Ω le taux d'accroissement

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Admet une limite lorsque z tend vers z_0. Dans ce cas, on note $f'(z_0)$ cette limite.Lorsque $\Omega = \mathbb{C}$, la fonction est dite entière.

Exemple 1.1.3 *:*
La fonction $f(z) = Re(z) = x$ est bien $\mathbb{R}$-différentiable (différentiable par rapport à $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$) mais n'est pas holomorphe. En effet,

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}$$

1. *D'une part si l'on prend $\Delta z = \Delta y$, on a*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

2. *D'autre par le choix $\Delta z = \Delta y$ donne*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = 0$$

Remarque 1.1.4 *:*
Une fonction holomorphe est nécessairement continue.

Proposition 1.1.5 *:*
Si f et g sont deux fonctions holomorphes sur Ω alors :$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

1. *La fonction $\lambda f + \mu g$ est holomorphe sur Ω, de dérivée $(\lambda f^{'} + \mu g^{'})$.*
2. *La fonction fg est aussi holomorphe, de dérivée $(f^{'}g + fg^{'})$.*
3. *Si de plus g ne s'annule pas sur Ω, alors la fonction f/g est holomorphe sur Ω, de dérivée $(f^{'}g - fg^{'})/g^2$.*
4. *Si $f(\Omega) \subset U$ et h est holomorphe sur U alors $h \circ f$ est holomorphe sur Ω, de dérivée $h^{'} \circ f\ f^{'}$.*

Proposition 1.1.6 (condition de Cauchy-Riemann) *:*
Soit f une fonction de $z = x + iy \in \Omega$. Pour tout (x, y) tel que $(x + iy) \in \Omega$, on note $u(x, y) = Ref(x + iy)$ et $v(x, y) = Imf(x + iy)$. Alors f est holomorphe si et seulement u et v sont différentiables comme fonctions de deux variables réelles, et vérifient de plus les relations suivantes, dites équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a

$$f^{'}(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Remarque 1.1.7 *:*
En coordonnées polaires, les conditions de Cauchy s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

Définition 1.1.8 *:*
Soit D un domaine du plan complexe. Toute fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe dans D sauf en un nombre fini de points qui sont des pôles de f est appelée fonction méromorphe dans D.

Définition 1.1.9 *:*
Il y a 2 types de développement en séries infinie de $f(z)$: un développement en série entière et un développement en série de Laurent.

- *Une fonction holomorphe en a est une fonction $f(z)$qui admet un développement en série entière de la forme :*

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots \quad , a_n \in \mathbb{C}$$

- *Une fonction méromorphe est une fonction $f(z)$ qui admet un développement en série de Laurent de la forme :*

$$f(z) = g(z)/(z-a)^n \ , n \geqslant 1; \quad g\,(z) = \textit{série entière}$$

a est un pôle de $f(z)$ d'ordre n.
Alors :

$$f(z) = \frac{g(a)}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{g^{(p)}(a)}{p!(z-a)^{n-p}} + \cdots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \cdots$$

$$f(z) = \sum_{k \geqslant -n} a_k(z-a)^k, a_k = \frac{g^{(n+k)}(a)}{(n+k)!}$$

Avec $g^{(d)}$ =dérivée d'ordre $d \geqslant 0$ de g et $k = -n, -n+1, \cdots$
Le coefficient a_{-1} est le résidu de la fonction $f(z)$au pôle $z = a$ de $f(z)$.

1.2 Fonction gamma analytique Γ

Définition 1.2.1 *:*
La fonction gamma (ou fonction eulérienne de seconde espèce) est la fonction $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par la relation :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Proposition 1.2.2 *:*
La fonction analytique $\Gamma(x)$ satisfait les propriétés :

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \Longleftrightarrow \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$
2. $\Gamma(1) = 1$
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *(L'intégrale de Gauss)*
4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x!}{\sqrt{x}(\frac{x}{e})^x} = \sqrt{2\pi}$ *(formule de Stirling)*

5. $\Gamma(x+1) = x!$
6. $\Gamma(x+\frac{3}{2}) = \sqrt{\pi}\frac{(2x+1)!}{2^{2x+1}x!}$
7. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$

1.3 Séries de Dirichlet

Définition 1.3.1 *:*
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs tendant vers l'infini. Une série de Dirichlet $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ d'exposants $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série de la forme :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-\lambda_n z} \ ; \qquad a_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$$

Exemple 1.3.2 *:*
Séries de Dirichlet proprement dites : Soit $\lambda_n = log(n)$, alors

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-\log(n)z} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n^z}$$

Proposition 1.3.3 *:*
La série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^z}$converge absolument pour $Re(z) > 1$, et sa somme dans ce domaine est égale au produit infini convergent

$$\prod_{p\in P}(1 + f(p)p^{-z} + \cdots + f(p^m)p^{-mz} + \cdots)$$

Propriété 1.3.4 *:*
Les deux lois internes sur les fonctions arithmétiques se traduisent agréablement en termes de séries de Dirichlet :

1. *Concernant l'addition $(+)$: étant donné deux fonctions f et g dont les séries de Dirichlet convergent absolument pour s, nous avons*

$$D(f+g;s) = D(f;s) + D(g;s)$$

2. *Concernant la multiplication $(\times)$: étant donné deux fonctions f et g dont les séries de Dirichlet convergent absolument pour s, alors celle de $f \times g$ est également absolument convergente, et nous avons*

$$D(f \times g;s) = D(f;s) \times D(g;s)$$

Définition 1.3.5 *:*
Soit N un entier non nul. Un caractère de Dirichlet modulo N est un morphisme de groupes

$$\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$$

Il est commode de voir également un tel χ comme une application $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ en posant $\chi(n) = 0$ si n n'est pas premier à N,$\chi(n) = \chi(n \bmod N)$ sinon. Dirichlet associe à χ la série :

$$L(s,\chi) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

1.4 Le théorème des nombres premiers

Définition 1.4.1 *:*
Un nombre entier est appelé un nombre premier s'il est plus grand que 2 et si ses seuls diviseurs sont 1et lui-même.

Exemple 1.4.2 *:*

1. $2, 3, 5, 7, 11$ *sont des nombres premiers.*
2. 4 *n'est pas un nombre premier car il est divisible par* 2.
3. *Par convention,* 1 *n'est pas un nombre premier.*

Propriété 1.4.3 *:*
Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de nombres premiers, d'une seule façon à l'ordre près des facteurs, comme :

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

Théorème 1.4.4 (Euclide, III^{eme} siècle av. J.C.) *Il existe une infinité de nombres premiers.*

Si l'on introduit la fonction de comptage :

$$\begin{aligned} \pi \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & x \longmapsto \pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 \end{aligned}$$

1. Le théorème d'Euclide affirme simplement que :

$$\lim_{x \to +\infty} \pi(x) = +\infty$$

2. Gauss observe que la proportion de nombres premiers plus petits qu'un entier N est environ inversement proportionnelle au nombre de chiffres de N.

   (a) Autrement dit, il prédit la formule :

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\log(N)}$$

   (b) En fait, il prédit une formule bien plus précise :

$$\pi(N) \sim Li(N) = \int_0^N \frac{dx}{\log(x)}$$

3. Gauss explique la derniére formule par la figure suivante

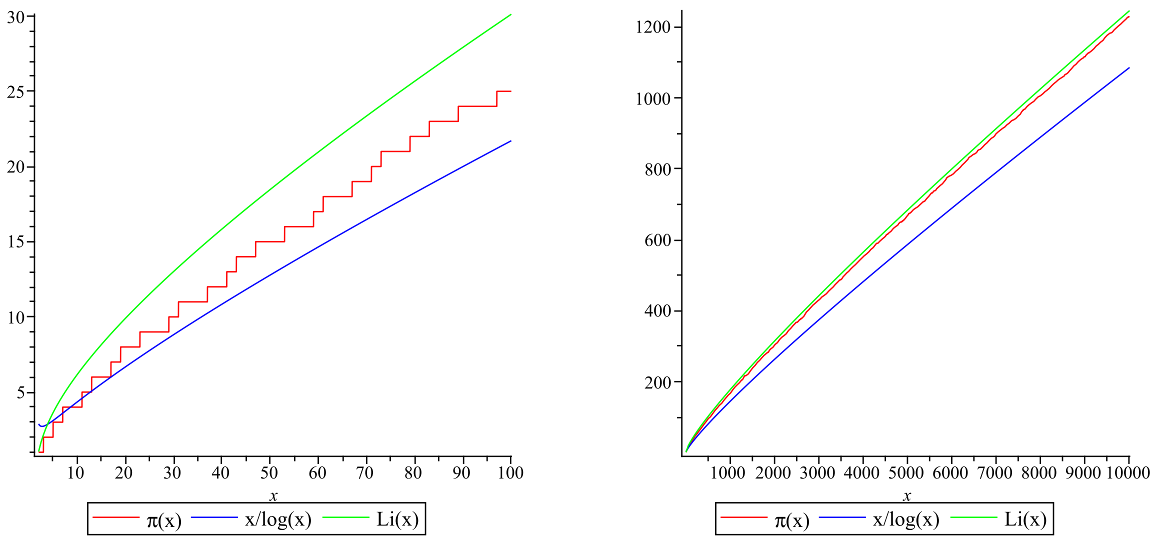

FIGURE 1-1 – Approximation de π par $x/\log x$ et Li

4. En 1896, La Vallée Poussin et Hadamard montrent indépendant que la fonction ζ ne s'annule pas sur la droite $R(s) = 1$. En intégrant la fonction précédente sur un contour bien choisi, ils en déduisent :

   Théorème 1.4.5 (de la Vallée Poussin, Hadamard, 1896 [16])

$$\pi(x) \sim Li(x) = \lim_{\sigma \to 0} \left(\int_0^{1-\sigma} \frac{dy}{\log(y)} + \int_{1+\sigma}^{x} \frac{dy}{\log(y)} \right) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

5. **Le crible d'Eratosthène (240 av J.C) :**est un procédé efficace pour énumérer les nombres premiers et il résume cet crible par les étapes suivantes :
   Étape 1 **:** On considère l'ensemble $A_1 = \{2, 3, 4, 5, \cdots\}$, et on note $p_1 = minA_1$.

Dans l'ensemble $A_1 - \{p_1\}$, on élimine tous les multiples de p_1. Statistiquement, on élimine donc un nombre sur p_1. On note A_2 le sous-ensemble de $A_1 - \{p_1\}$ obtenu.
Étape n **:** Soit $p_n = minA_n$. Dans l'ensemble $A_n - \{p_n\}$, on élimine tous les multiples de p_n.Statistiquement, on élimine donc un nombre sur p_n. On note A_{n+1} le sous-ensemble de $A_n - \{p_n\}$ obtenu.
Résultat : L'ensemble des nombre premiers est :
$P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$

Remarque 1.4.6 *:*
Le crible d'Eratosthène se déroule comme un algorithme qui permet de trouver tous les nombres inférieurs à un certain nombre donné.

Chapitre 2

Fonction zéta de Riemann

1. La fonction $\zeta(s)$ est définie sur le demi-plan $\Omega_1 = \{s \in \mathbb{C} \text{ tel que } Re(s) > 1\}$ par la série suivante :
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$
Cette fonction a été la première fois étudier par Euler autour des années 1750.
2. La fonction ζ définie dans Ω_1 se prolonge en une fonction méromorphe dans $\Omega_0 = \{s \in \mathbb{C} \text{ , } \mathrm{Re}\,(s) > 0\}$ qui a pour seule singularité un pôle simple en 1, le résidu en ce point est $Res\,(\zeta, 1) = 1$.
3. $\zeta\,(s)$ converge absolument et uniformément sur tout compact du domaine $\mathrm{Re}(s) > 1$ où elle définit une fonction holomorphe, et diverge pour $s = 1$.

2.1 Développement en série et forme d'Euler

La fonction $\zeta\,(s)$ admet une forme de produit d'Euler :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \sum_{k \geq 0} p^{-ks} = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Cette formule est valable pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, région sur laquelle ζ converge absolument.

Définition 2.1.1 ***(Fonction de Von Mangoldt)***
La fonction de Von Mangoldt Λ est définie par rapport à la dérivée logarithmique de la fonction ζ, qui peut être considérée comme une série de Dirichlet :

$$-\frac{\zeta^{'}(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-s}$$

À l'aide de la formule du produit Eulérien, calculons maintenant $\Lambda(p^k)$:

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \prod_{p\in P}\frac{1}{1-p^{-s}}\\
\log\zeta(s) &= -\sum \log\left(1-p^{-s}\right)\\
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{p\in P}\frac{(1-p^{-s})'}{(1-p^{-s})}\\
&= \sum_{p\in P}\frac{\log(p)\,p^{-s}}{1-p^{-s}}\\
&= \sum_{p\in P}\log(p)\,p^{-s}\sum_{n\geq 0}p^{-ns}\\
&= \sum_{p\in P}\sum_{n\geq 0}\log(p)\,p^{-(n+1)s}\\
&= \sum_{k\geq 1}\sum_{p\in P}\log(p)\,p^{-ks}\\
&= \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)\,n^{-s}
\end{aligned}$$

Donc $\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si } n = p^k \quad \text{avec } k \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2.2 La fonction zéta et nombre de Bernoulli

On peut associer plusieurs séries génératrices a une suite des nombres $a_0; a_1; a_2; \cdots$ Par exemple, les deux séries

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ la série génératrice ordinaire

$g(x) = a_0 + \frac{a_1x}{1!} + \frac{a_2x^2}{2!} + \frac{a_3x^3}{3!} + \cdots$ la série génératrice exponentielle

Depuis Euler, les nombres de Bernoulli sont définit comme les coefficients de Taylor de la série génératrice exponentielle

$$B(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

La relation $(e^x - 1)B(x) = x$ entraine que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_k\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ 2B_1 + B_0 &= 0 \text{ donc } \quad B_1 = -\frac{1}{2} \\ 3B_2 + 2B_1 + B_0 &= 0 \text{ donc } \ B_2 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Remarquer que : $|B_{2n}| < 1$ pour $n \leq 6$ et que $B_{14} = \frac{7}{6} > 1$

Proposition 2.2.1 *:*
On a

$$B(x) + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{x}{2}\coth(\frac{x}{2})$$

De plus, $B_{2n+1} = 0$ *pour tout* $n > 0$*.*

Preuve. :
Observons d'abord que

$$\coth(\frac{x}{2}) = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{e^x+1}{e^x-1}$$

Si on substitue $a = e^x$ dans l'identité

$$\frac{a+1}{a-1} = \frac{2}{a-1} + 1$$

On obtient que

$$\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{2}{e^x-1} + 1$$

Par suite

$$\frac{x}{2}\coth(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = B(x) + \frac{x}{2}$$

La fonction $B(x) + \frac{x}{2}$ est paire puisque $\coth(x)$ est une fonction impaire. Cela montre que $B_{2n+1} = 0$ pour $n > 0$.
On définit les polynômes de Bernoulli $B_n(t)$par la série génératrice

$$B(x)e^{xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(t)\frac{x^n}{n!}$$

Cette définition implique que

$$B_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i t^{n-i}$$

On trouve

$$
\begin{aligned}
B_0(t) &= 1 \\
B_1(t) &= t - \frac{1}{2} \\
B_2(t) &= t^2 + t + \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Remarquer que $B_n(0) = B_n$. Les polynômes de Bernoulli satisfont plusieurs identités remarquables ■

Proposition 2.2.2 *:*
On a

$$x\coth(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad et \quad x\coth(x) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{2n} \left|B_{2n}\right| \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Proposition 2.2.3 ***(Euler)***
On a

$$\zeta(2n) = \frac{|B_{2n}|}{2} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

pour tout $n > 0$. *Les nombres* B_{2n} *sont alternativement de signe contraire à partir de* $B_2 > 0$.

Preuve. :
Si on remplace ensuite x par πx dans le développement de $x \coth x$ obtenue a la proposition, on obtient que :

$$\pi x \coth(\pi x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^{2n} B_{2n} \pi^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Une comparaison avec les coefficients du développement d'Euler de $\pi x \coth(\pi x)$ montre l'on a :

$$2\zeta(2n) = -(-1)^n B_{2n} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pour} \quad n > 0$$

Comme $\zeta(2n) > 0$, on obtient que

$$\zeta(2n) = \frac{|B_{2n}|}{2} \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

Cela montre aussi que $(-1)^{n-1} B_{2n} > 0$ pour tout $n > 0$.

Admirons quelques-unes des résultats d'Euler :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2.3}\pi^2 &= \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots \\
\frac{1}{2.3^2.5}\pi^4 &= \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots \\
\frac{1}{3^2.5.7}\pi^6 &= \frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots \\
&\cdots
\end{aligned}$$

La formule d'Euler

$$|B_{2n}| = 2\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$$

Permet d'estimer la grandeur de $|B_{2n}|$ lorsque $n \to +\infty$. En effet, on a $\zeta(2n) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$. Par suite

$$|B_{2n}| \sim 2\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$$

Si on utilise l'approximation de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

On trouve que

$$|B_{2n}| \sim 4\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}$$

On voit que $|B_{2n}|$ croit rapidement lorsque $n \to +\infty$. Par exemple

$$\begin{aligned}
B_{10} &= \frac{5}{66} \\
B_{20} &= -\frac{174611}{330} \\
B_{30} &= \frac{8615841276005}{14322} \\
B_{40} &= -\frac{261082718496449122051}{13530} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

■

2.3 Fonction zéta et fonction gamma

Lemme 2.3.1 *:*
Si $Re(s) > 1$ alors :

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t - 1} t^{s-1} dt$$

Preuve. :
Il suffit d'écrire $\sum_{n\geq 1} e^{-nt}$ sous la forme $\frac{1}{e^t-1}$ et d'utiliser la formule $\int_0^\infty e^{-nt} t^s \frac{dt}{t} = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} e^{-nt} &= \sum_{n\geq 0} \left(e^{-t}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-t}\right)^k \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t(n+1)}}{1 - e^{-t}} \\
&= \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \\
&= \frac{1}{e^t - 1}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{e^t - 1} t^s \frac{dt}{t} &= \int_0^\infty \left(\sum_{n\geq 1} e^{-nt}\right) t^s \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{n\geq 1} \int_0^\infty e^{-nt} t^s \frac{dt}{t} \\
&= \sum_{n\geq 1} \int_0^\infty e^{-nt} t^{s-1} dt
\end{aligned}$$

Par changement de variable :
On pose $T = nt \Rightarrow t = \frac{T}{n}$ alors $dT = ndt \Rightarrow dt = \frac{dT}{n}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \int_0^\infty e^{-nt} t^{s-1} dt &= \sum_{n\geq 1} \int_0^\infty e^{-T} \frac{T^{s-1}}{n^{s-1}} \frac{dT}{n} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \int_0^\infty e^{-T} T^{s-1} dT \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{\Gamma(s)}{n^s}
\end{aligned}$$

On multiplie $\frac{1}{\Gamma(s)}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{1}{e^t-1}t^s\frac{dt}{t} &= \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n\geq 1}\frac{\Gamma(s)}{n^s}\\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}\\ &= \zeta(s)\end{aligned}$$

■

Proposition 2.3.2 *:*
Si f est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ à décroissance rapide à l'infini, alors la fonction

$$L(f;s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty f(t)\,t^s\frac{dt}{t}$$

définie pour Re > 0 admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier et, si $n \in \mathbb{N}$, alors $L(f;-n) = (-1)^n f^{(n)}(0)$.

Théorème 2.3.3 *[25] :*

1. *La fonction ζ a un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}-\{1\}$tout entier, holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s=1$ de résidu 1.*
2. *Si $n \in \mathbb{N}$;alors $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$, en particulier $\zeta(-n) \in \mathbb{Q}$.*

Preuve. :
On sait que

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt \Longleftrightarrow \zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt$$

en décomposant :

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt + \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt$$

Où la seconde intégrale est une fonction holomorphe de s.On décompose en série de Taylor dans la première. Les B_n désignant les nombres de Bernoulli
Et $\forall t$ tel que : $|t| < 2\pi$

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{B_n t^n}{n!}$$

en remplaçant dans la première intégrale et en intégrant terme à terme, on obtient :

$$\zeta(s) = \frac{1}{(s-1)\,\Gamma(s)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!\,(n+s-1)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t-1} dt$$

la série est convergente et définie une fonction holomorphe sauf aux entiers négatifs ou nuls. En effet lorsque $s \neq -k$, le rayon de convergence de la série entière de coefficient $\frac{B_n}{n!}$ n'est pas modifié lorsque l'on divise ses coefficients par les $n+s-1$. Au voisinage d'un entier négatif, elle est la somme d'une fonction holomorphe et du terme

$$\frac{B_{k+1}}{(k+1)!\,(s+k)}$$

Quand $s \to k$, comme $\frac{1}{\Gamma(s)} \to 0, \zeta(s)$ est par conséquent la somme d'une fonction qui tend vers 0 et du terme :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!\,(s+k)} \sim_{s\to -k} \frac{s+k}{\operatorname{Re}(\Gamma - k)} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!\,(s+k)} = (-1)^k\, k! \frac{B_{k+1}}{(k+1)!}$$

Ainsi, on a le prolongement analytique de zêta en une fonction méromorphe sur tout $\mathbb{C}/\{1\}$, sauf au point $s=1$.et l'on obtient au passage la formule d'Euler :

$$\zeta(s) = (-1)^k\, k! \frac{B_{k+1}}{(k+1)!}$$

■

2.4 Fonction zéta et nombre premier

Euler découvre aussi un rapport entre ces séries ζ et les nombres premiers : la série infinie $\zeta(k)$ se calcule aussi comme un produit infini

$$\begin{aligned} \zeta(k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \\ &= \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-k}} \end{aligned}$$

Ce lien est donné par la formule d'Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

qui traduit la décomposition en facteurs premiers.Riemann la réécrit

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \text{ premier}} \log \frac{1}{1-p^{-s}}$$

En utilisant la formule

$$\log \frac{1}{1-u} = u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}u^n$$

On peut alors écrire

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \text{ premier}} \log \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p^s} + g(s)$$

où $g(s)$ est un « terme d'erreur » qui se comporte bien pour $\text{Re}(s) > 1/2$.

Proposition 2.4.1 *:*
Soit un nombre complexe $S \in \Omega_1$

1. *Le produit infini $\prod(1 - \frac{1}{p^s})$est convergent, et même converge au sens strict au sens où il est non nul.*
2. *Le lien entre ce produit et la fonction ζ est établit ainsi :*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{+\infty}(1 - \frac{1}{p_n^s})}$$

et la convergence est uniforme sur tout compact de Ω_1.

2.5 Équation fonctionnelle de la fonction zéta

Rappelons la fonction gamma (définie par Euler en 1730) :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$$

Cette intégrale converge pour $\text{Re}(s) > 0$; on a $\Gamma(1) = 1$ et l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

La fonction zêta de Riemann vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall s \in \mathbb{C}^*/\{1\} \qquad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma(\frac{(1-s)}{2})\zeta(1-s)$$

En effet, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} u^{s-1}e^{-u}du$$

En posant $u = \pi n^2 x$, on obtient

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\frac{1}{n^s} = \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 x}dx$$

Alors

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2 x}dx$$

Le premier membre est défini pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. Dans le second membre, on permute $\sum$ et $\int$ grâce à la convergence. On en déduit

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) &= \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x})dx \\ &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)\ dx + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\omega(x)dx\end{aligned}$$

où $\omega(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{2}(\theta(x) - 1)$ et $\theta(x)$ est la fonction thêta. la fonction thêta vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\theta(\frac{1}{x})$$

Par conséquent

$$\omega(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}(\theta(\frac{1}{x}) - 1) = \sqrt{x}\omega(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)$$

Avec le changement $x \to \frac{1}{x}$, la première intégrale devient

$$\int_1^{+\infty} x^{-\frac{s}{2}-1}\omega(\frac{1}{x})dx = \int_1^{+\infty} x^{-\frac{s+1}{2}}\omega(x)dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}$$

Par suite, on obtient

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_{1}^{+\infty}(x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1})\omega(x)dx$$

Grâce à l'estimation $\omega(x) \ll e^{-\pi x}$, l'intégrale dans le second membre de l'égalité précédente converge pour tout s et par suite l'égalité est vraie pour tout $s \in \mathbb{C}^{*}/\{1\}$. Ainsi la démonstration s'achève en remarquant que le second membre est invariant par l'application $s \to 1-s$.

Théorème 2.5.1 *[25] :*
Soit La fonction $\xi(s)$ définit par :

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}s\,(s-1)\,\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$$

admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, holomorphe en dehors de pôles simples de résidus respectifs -1 et 1 en $s=0$ et $s=1$, et vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

2.6 Prolongement analytique avec la fonction êta de Dirichlet

Soit la fonction η définie tel que :

$$\eta\,(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{s}}$$

convergente pour $s \in \mathbb{R}_{+}$, il en est de même pour Re(s)>0, que l'on peut démontrer par le lemme d'Abel.

si $Re\,(s) > 1$

$$\begin{aligned}\zeta\,(s) &= \sum_{n\geq 1}n^{-s} = \eta\,(s) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^{s}}\\ &= \eta\,(s) + \frac{2\zeta\,(s)}{2^{s}} \Leftrightarrow \left(1-2^{1-s}\right)\zeta\,(s) = \eta\,(s)\end{aligned}$$

On peut aussi écrire

$$\zeta\,(s) = \frac{\eta\,(s)}{1-2^{1-s}}$$

Ceci réalise le prolongement analytique de ζ sur $Re(s) > 0$, sauf aux points :

$$s = 1 + \frac{2ik\pi}{\ln(2)}$$

où $k \in \mathbb{Z}$ et $\eta(1) = \ln(2)$. Ces points sont en fait les zéros de $1 - 2^{1-s}$.

En appliquant la relation fonctionnelle avec le prolongement analytique pour $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 0$, on obtient le prolongement analytique partout sauf en ces points. Comme :

$$0 < \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n} = \frac{1}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

On déduit que :

$\zeta_3(s) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{(3n-2)^s} + \frac{1}{(3n-1)^s} - \frac{2}{(3n)^s}\right) = 1 + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{2}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} - \frac{2}{9^s}\cdots,$ convergente pour $\mathrm{Re}(s) = 1$, et on a :

$$\zeta(s) = \frac{\zeta_3(s)}{1 - 3^{1-s}}$$

Il suffit donc de calculer la série seulement pour ces points car $\frac{\ln 3}{\ln 2} \in \mathbb{Q}$ et $1 - 3^{1-s}$ ne peut s'annuler en même temps que $1 - 2^{1-s}$, sauf pour $s = 1$.

De même :

$$\eta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1}dx$$

On déduit pour $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1 - 2^{1-s})\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{|\ln u|^{s-1}}{1 + u}du$$

Chapitre 3

Localisation des zéros

3.1 Les zéros de la fonction zéta

Considérons le demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geq 1$.l'expression :

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right)$$

montre que $\zeta(s) \neq 0$ si $R(s) \geq 1$; il en résulte donc aussi que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\operatorname{Re}(s) < 0$.

Théorème 3.1.1 *[9] :*
Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$ on a :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}$$

où P désigne l'ensemble des nombres premiers. ζ ne s'annule pas sur $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Proposition 3.1.2 *:*
Les zéros non triviaux de ζ sont contenus dans la bande $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$.

Proposition 3.1.3 *:*
Les seules zéros de la fonction ζ dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) < 0$ sont situés en $-2; -4; \cdots; -2n. \cdots$ De plus ces zéros sont simples. On les appelle les zéros triviaux de ζ.

Propriété 3.1.4 *:*
La fonction Zéta de Riemann a des zéros à chaque entier pair négatif.

$$\zeta(-2n) = 0 \quad , \quad n = 1, 2, \cdots$$

Ceux-ci sont les zéros triviaux de la fonction Zêta. et que pour tous les autres $s = \sigma + it$ *pour les quels* $\zeta(\sigma + it) = 0$ *satisfont à la condition* $0 \leq \sigma \leq 1$.

Riemann a énoncé une conjecture remarquable (l'hypothèse de Riemann) :
si $\zeta(\sigma + it) = 0$ avec $0 \leq \sigma \leq 1$ alors $\sigma = \frac{1}{2}$
C'est à dire que les zéros non triviaux de ζ se trouvent sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ cela conduit à la définition des γ dans notre formule, ce sont les valeurs de γ pour lesquelles $\zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0$, et voici quelques valeurs pour γ :
$s_1 = \frac{1}{2} + i\ 14,1347\cdots$
$s_2 = \frac{1}{2} + i\ 21,0220\cdots$
$s_3 = \frac{1}{2} + i\ 25,0108\cdots$
$s_4 = \frac{1}{2} + i\ 30,4248\cdots$
$s_5 = \frac{1}{2} + i32,9350\cdots$

Définition 3.1.5 *:*

- *La bande critique désigne l'intervalle de valeur de* σ *pour lesquelles* $0 \leq \sigma \leq 1$.
- *La ligne critique est la droite d'équation* $\sigma = \frac{1}{2}$ *du plan complexe.*

Propriété 3.1.6 *:*

1. $\xi(s)$ *a seulement des zéros non triviaux se trouvent tous dans la bande critique* $0 \leq \sigma \leq 1$.
2. *La fonction* ζ *a les même zéros non triviaux de la fonction* ξ *dans la bande critique* $0 \leq \sigma \leq 1$.
3. *La symétrie par rapport à la ligne critique* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ *devient trivial.alors les zéros sont non seulement symétrique par rapport à l'axe réel il sont aussi symétrique par rapport à la ligne critique.*

Théorème 3.1.7 *[13] :*
La fonction $\zeta(s)$ *ne s'annule pas sur la droite* $\mathrm{Re}(s) = 1$ *et* $\mathrm{Re}(s) = 0$*; elle ne peut s'annuler que dans la bande critique définie par* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$.

Théorème 3.1.8 (Hardy1914 [12],[7]) $\zeta(s)$ *a une infinité de zéros sur la droite critique (la démonstration dans [12]).*

Théorème 3.1.9 (Selberg, Levinson, Conrey 1989 [14], [7]) *Au moins* $\frac{2}{5}$ *des zéros non triviaux sont sur la droite critique (pour plus de détaille voire [14]).*

Théorème 3.1.10 (Ford, 2002 [18], [7]) *Si $s = \sigma + it$ est un zéro non trivial de $\zeta(s)$ avec $|t| \geq 3$, alors :*

$$\sigma \leq 1 - \frac{1}{57.54 (\log |t|)^{\frac{2}{3}} (\log \log |t|)^{\frac{1}{3}}}$$

3.2 Fonction $\frac{1}{\zeta(s)}$ et $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$

Soit $\mu(1) = 1, \mu(n) = 0$ si n possède au moins un facteur carré > 1 et $\mu(p_1, p_2, \ldots, p_k) = (-1)^k$ sont des nombres premiers distincts (μ Fonction de Mobius).
(exemple $\mu(2) = \mu(7) = 1$; $\mu(4) = \mu(8) = 0$; $\mu(6) = \mu(10) = 1$)
Alors pour $s > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^4} = \frac{90}{\pi^4}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$ par exemple.
Beaucoup de résultats très impressionnants concernant cette fonction existent. Parmi eux, on peut citer aussi l'étonnante formule qui suit : en considérant Q l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$qui n'ont pas de facteur carré dans leur décomposition (c'est à dire tels que $|\mu(n)| = 1$) on obtient la formule suivante :

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}} \frac{1}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

Définition 3.2.1 ***(Fonction de Von Mangoldt)***
La fonction de Von Mangoldt Λ est définie par rapport à la dérivée logarithmique de la fonction ζ qui peut être considérée comme une série de Dirichlet :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-s}$$

Et on a (d'après chapitre 2) :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{k \geq 1} \sum_{p \in P} \log(p) p^{-ks}$$

3.3 Hypothèse de Riemann

Considérons la fonction complétée ξ de la fonction zéta de Riemann défini par :

$$\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

D'abord notons que les zéros triviaux de $\xi(s)$ sont tous des entiers pairs négatifs, qui sont annulés par les pôles simples correspondants de la fonction Γ ainsi $\xi(s)$ a seulement des zéos non-triviaux se trouvent tous dans la bande critique $0 \leq Re(s) \leq 1$ et admet un développement en produit de Weierstrass, connu sous le nom produit de Hadamard[19] :

$$\xi(s) = \xi(0)\prod_{p}\left(1-\frac{s}{p}\right)$$

où $\xi(0) = \frac{1}{2}$ et où p parcourt les zéros non triviaux de $\zeta(s)$.
De plus, la fonction ζ vérifie l'équation fonctionnelle simple :

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

Par conséquent, la symétrie par rapport à la ligne critique $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ devient triviale Alors, les zéros sont non seulement symétrique par rapport à l'axe réel, ils sont aussi symétrique par rapport à la ligne critique l'hypothèse de Riemann postule que tous les zéros sont en fait sur la ligne critique $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$

Conjecture 3.3.1 ***(Hypothèse de Riemann)***
Les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ sont situés sur la "droite critique" $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$
Pourquoi l'hypothèse de Riemann est-elle importante ? D'abord à cause de la "formule explicite" reliant les zéros de $\zeta(s)$ à la distribution des nombres premiers.
pour $x \in R^{+}$ posons

$$\pi(x) = |\{p \ / \ p \ premier \ , \quad p \leq x\}|$$

et

$$\Pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

de sorte que :

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\frac{1}{n}\Pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

Conjecture 3.3.2 ***(Hypothèse de Riemann généralisée)***
Toute fonction L d'un caractère de Dirichlet vérifie l'hypothèse de Riemann.

Conjecture 3.3.3 ***(Hypothèse de Riemann étendue)***
Toute fonction ζ d'un corps de nombre vérifie l'hypothèse de Riemann.

Chapitre 4

Application de la fonction zéta de Riemann

La fonction zêta (d'après la lettre grecque zêta, ou ζ) est le nom de nombreuses fonctions en mathématiques. La plus connue est la fonction zêta de Riemann. Parmi les autres fonctions zêta, on peut citer :la fonction zéta de Dedekind, la fonction zêta de Hasse-Weil, la fonction zêta de Selberg, la fonction zêta de Weierstrass et la fonction zêta de d'Epstein $\cdots$ etc
Beaucoup de ces fonctions zêta sont liées et impliquées dans des relations importantes.

Dans la suite on va définir la fonction zêta de d'Epstein et son approximation on utilisant la formule de Chowla-Selberg.

4.1 Aux forme quadratique : La fonction zéta d'Epstein

une forme quadratique en n variables est un polynôme homogène de degré 2 en les variables $x_1, \ldots, x_n$. On peut donc l'écrire sous la forme :

$$Q\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 1} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

On peut également distinguer la partie carrée de la partie rectangle :

$$\begin{aligned} Q\left(x\right) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Exemple 4.1.1 *:*
$Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2 + x_1x_4 + x_1x_3 + x_2x_4$

Définition 4.1.2 *:*
soit $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ avec $a > 0,\ \ b,c \in \mathbb{R}$ une forme quadratique définie positive, c'est-à-dire avec $\Delta = 4ac - b^2 > 0$, La fonction zêta d'Epstein associée à $Q(x,y)$ est donnée par :

$$Z_Q(s) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} Q\left(m,n\right)^{-s}$$

pour $\sigma > 1$. Cette fonction peut être prolongée analytiquement dans le plan complexe, sauf en $s = 1$, où elle a un pôle simple, et elle satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\right)^{s} \Gamma\left(s\right) Z_Q\left(s\right) = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\right)^{1-s} \Gamma\left(1-s\right) Z_Q\left(1-s\right)$$

On prend la formule de Chowla-Selberg :

$$\begin{aligned} Z_Q\left(s\right) &= 2\zeta\left(2s\right)a^{-s} + \frac{2^{2s}a^{s-1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(s\right)\Delta^{s-\frac{1}{2}}}\zeta\left(2s-1\right)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) + \frac{4\pi^s 2^{s-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}\Gamma\left(s\right)\Delta^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}} \\ &\sum_{n=1}^{\infty} n^{s-\frac{1}{2}} \sum_{d//n} d^{1-2s} \cos\frac{n\pi b}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\pi n\sqrt{\Delta}}{a}\right)\cosh\tau} e^{\left(s-\frac{1}{2}\right)\tau} d\tau \end{aligned}$$

tel que : $0 < \tau < T$

$$d = \begin{cases} \frac{\Delta}{4} & \text{si} \quad \frac{\Delta}{4} \text{ est entier} \\ \quad \Delta & \text{sinon} \end{cases}$$

et on obtient des approximations de la fonction zêta d'Epstein en prenant les sommes partielles des termes dans cette formule.Pour $n \geq 1$ entier, on définit $Z_{Q,n}\left(s\right)$ par :

$$\begin{aligned} Z_{Q,n}\left(s\right) &= 2\zeta\left(2s\right)a^{-s} + \frac{2^{2s}a^{s-1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(s\right)\Delta^{s-\frac{1}{2}}}\zeta\left(2s-1\right)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) + \frac{4\pi^s 2^{s-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}\Gamma\left(s\right)\Delta^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}} \\ &\sum_{k=1}^{\infty} k^{s-\frac{1}{2}} \sum_{d/n} d^{1-2s} \cos\frac{k\pi b}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\pi k\sqrt{\Delta}}{a}\right)\cosh\tau} e^{\left(s-\frac{1}{2}\right)\tau} d\tau \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] A.JOYAL, *Les Nombres de Bernoulli.* Juillet 2003.

[2] André GIROUX, *Analyse 02*, Université de Montréal Département de Mathématiques et Statistique, Avril 2004.

[3] Andrew GRANVILLE, *Nombres Premiers et Chaos Quantique.*

[4] Antoine CHAMBERT-LOIR, *Les Mystères de la Fonction Zêta de Riemann.* Université de Rennes 1, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, 23 Mars 2011.

[5] Arnaud DHALLEWYN, *La Fonction Zéta de Riemann*, 2013.

[6] Auguste HOANGDUC, *Sur la Fonction zéta de Riemann*, 2012.

[7] Bruno KAHN, *Fonctions Zéta et L de Variétés et de Motifs*, Notes de Cous 14 Mai 2013.

[8] Disereus SYLVAIN, *Séries de Dirichlet et Fonction Zêta*, 14 Décembre 2012.

[9] Elimane BA et Michel RAIBAUT, *Le Théorème des Nombres Premiers vu par Khane.*

[10] Emilie KAUFMANN, *De L'analyse Complexe à la Répartition des Nombres Premiers*, Mémoire de Première Année de Magistère de Mathématiques, 17 Septembre 2008.

[11] Francis FILBET et Sylvie BENZONI, *Cours de Mathématiques pour la Licence Analyse Complexe*, 7 mai 2007.

[12] G. H. Hardy *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann,* C. R. Acad. Sci. Paris **158** (1914) 1012-1014.

[13] Gilles LACHAUD, *"L'hypothèse de Riemann" Le Graal des Mathématicien*, les Dossiers de la Recherche n^{20} : Aout 2005.

[14] J. B. Conrey *More than tow fifth of the zeros of the Riemann Zeta function are on the critical line* J. Reine angew. Math **399** (1989), 1-16.

[15] J. P. LAFON et P. EYMARD, *Autour du Nombre Pi.*

[16] Jûrgen ANGST, *Probabilités élémentaires et Nombres Premiers*, Université Louis Pasteur Strasbourg, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Séminaire des Doctorants, 8 Novembre 2007.

[17] ISA-BTP, *Coniques Quadriques et Formes Quadratiques.*

[18] K. Ford *Vinogradov's integral an bounds for the Riemann zeta function,* Prc. London Math. Soc. **85** (3) (2002), 565-633.

[19] Kamel MAZHOUDA, *Critère de Positivité de Li et l"hypothèse de Riemann*, thèse de Doctorat. Faculté des Sciences de Monatir, Tunisie, 17 Décembre 2009.

[20] Louis-Philippe THIBAULT, *Universalité de la Fonction Zéta de Riemann.* Université de Montréal, Département de Mathématiques et Statistique , 13 Juin 2011.

[21] M.DON ZAGIER, *Théorie des Nombres.*

[22] M.Zwily, *Une Démonstration du Théorème Fondamental des Nombres Premiers*, 2006-2007.

[23] Oliver RAMARE, *Moyenne de Fonctions Arithmétiques*, Cours Donnée à L'université de Nouakcholtt, 20 Novembre.

[24] Oswaldo JOSE VELASQUEZ CASTAÑON, *Sur la Répartition des Zéros de Certaines Fonctions Méromorphes Liées á la Fonction Zéta de Riemann*, Université Bordeaux 1, 19 Septembre 2008.

[25] Pierre COLMEZ, *Arithmétique de la Fonction Zéta.*