الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence
En –Filière: Mathématiques

Calcul des intégrales multiples

Préparer par :

-Bouhbel Djouhra
-Bouabdellah Bouthaina
-Sahraoui Amel
-Labiod Ahlam

Directrice de Mémoire: Laib Hafida

Année universitaire : 2014/2015

Dedicaces

Je dédie ce modeste travail à :

*A ma très **chère mère** *Wazina *qui a beaucoup sacrifié à mon bonheur, qui a partagé mes malheurs et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.*

*A **mon père** *Ibrahim *qui m'a beaucoup conseillé de continuer mes études.*

*A les fleurs de ma vie, **mes sœurs : Hanan, Ibtissam, Khaoula** et **mes frères :Bilal, Mourad et sa femme Fahima et la petite Ritadj***

Et spécialement l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi mon cher frère Soufiane

Et mes autres amis :Amina, Ratiba, chahra, Nadjat, Loubna, Tounes, Meriém, et Imane

A mes amis de ce travaille : Ahlam, Amel, Bouthaina

Et tous mes cousines : Sara, Miryam, Rima, Hoda, Souma surtout Malika et Toufike

Et tous les personnes qui j'aime.

DJOUHRA

DJOUHRA

Dédicace

Voilà la page que je rêvais d'écrire un jour ...

Nous remercions tout d'abord et avant tout le tout puissant ALLAH qui nous a aidés à mener à terme ce travail.

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents, pour leurs soutiens :
Mon père « YAZID » qui s'est Sacrifié afin que rien n'entrave le déroulement de mes études,
Ma mère « FADILA » qui n'a pas cessé de prier pour moi et de m'encourager dans les moments difficiles.

A **mon très chère frère** « NASRO » .

A ma petite fleur, **ma sœur** « AHLAM ».

A ma **grand-mère** «SOLTANA».

A toute ma famille surtout **mes cousins** « WALID » et « SOUFIANE » et **mes tantes** Et **mon oncle** « AHMED ».

A **mes enseignants** des années passées: Mr : « BOUGHSIBA» et Mm : «GHEDJATI.F» , JE N'oublie pas ma Directrice de mémoire Mme « LAIB.H» .

A **mes amis** pendant ce travail : « BOUTHAINA », «AHLAM» et «DJOUHRA».

A **tous mes amis** qui m'ont soutenu et encouragé MERIEM , NADJIA ,ADILA HAYAT ,SOUMIA ,ABLA, NOURA et IMANE...

A tous les collègues de la promotion mathématiques

A tous ceux que j'aime, Je vous dédie ce travail en vous souhaitant un avenir radieux, plein de bonheur et de succès.

AMEL

Dédicace

Je dédie ce mémoire aux êtres les plus chères au monde:

A mon cher père Cherif

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.

Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.

Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

A ma très chère mère Djaida

Affable, honorable, aimable: tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études.

Que dieu vous donne langue vie et vous protège pour moi.

A mes frères

Zouhir, Badis, Salah, Yahya

A mes très chères sœurs

Linda , Hafida et leur enfants

A mes amies

Mes belles et aimables amies Manar et Hasna je ne peux trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées, vous êtres pour moi des sœurs et des amies sur qui je peux compter.

A toutes mes amies qui j'aime: Bouthaina,Iman et Amel

A toutes mes camarades de promotion: Mariem,Nadjwa,Souhila,Hana

A toutes les personnes qui j'aime.

Ahlam

بســـم الله الرحمـــــن الرحيـــــــــم

Au nom d'Allah le tout miséricordieux, le très miséricordieux.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail ……..

Je me sens particulièrement redevable envers deux personnes les plus chères dans l'existence, mes très chères « Parents », la source de ma joie et d'amour.

A ma mère

« BOURAS RAZIKA » : *symbole d'amour et des sacrifices, l'exemple du le dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi et être ce que je suis, et de m'avoir fait par de tes critiques toujours précieuses.*

A mon père

« Houcin » : *Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien-être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices …..Pour ta grande compréhension et ta confiance et pour ton aide inoubliable à ma vie.*

Je dois également exprimer toute ma gratitude envers mes frères et ma sœur

A ma seul sœur: « **Hayyyyyyyet** » et son mari.

A mes très charmants frères : **Sif, Aymen, Mahdi** et **Islam.**

Particulièrement monsieur » **Hadj Khlouf** »

A toutes mes camarades de promotion, mes belles sœurs et mes chères amies : **Amel, Ahlam, Djohra, Mariem, Rayen, Manar, Abla** et **Nora**

A ma encadreuse: «**Mme Laib .H**» *qui m'aide beaucoup*

A tout ma famille et toutes mes cousins et cousines et surtout: **Houda, Khawla** et **Souhila**

A tout les personnes qui j'aime.

Bouthaina

REMERCIEMENTS

ON REMERCIER TOUT D'ABORD NOTRE DIEU QUI NOUS A DONNE LA FORCE POUR TERMINER CE MODESTE TRAVAIL.

Nous tenons à remercier, en premier lieu, notre directrice de mémoire Mme Laib Hafida pour ses conseils et ses encouragements pendant tout le suivi de ce travail.

Nos chaleureux remerciements vont plus particulièrement à nos enseignants du Département de science et technologie (M I) et spécialement Mme Meskine Habiba , grâce au savoir qu'ils nous ont inculqué durant tout le long de notre cursus universitaire.

Et à tous ceux qu'on aura oubliés nous leur

adressons également un grand merci….

…..que Dieu vous bénisse tous.

…....MERCI……

Amel Ahlam Bouthaina Djouhra

Table des matières

Introduction

Conclusion

Liste des figures

Introduction

L'intégrale multiple est une forme d'intégrale qui s'applique aux fonctions de plusieurs variables réelles. A l'instar des intégrales simples, les intégrales multiples possèdent des interprétations géométriques significatives. Limitons-nous pour commencer aux fonctions à valeurs réelles positives. Tandis que l'intégrale définie de fonctions d'une variable représente la mesure de l'aire délimitée par leur courbe représentative, l'axe des abscisses et les deux droites à ses bornes d'intégration (d'équations respectives $x = a$ et $x = b$), l'intégrale de fonctions de deux variables (intégrale double) représente le volume délimité par leur surface représentative et le domaine d'intégration D.

En général, les intégrales de fonctions de trois variables (intégrales triples) sont interprétables comme des mesures d'hypervolumes, soit de solides à 4 dimensions, donc non représentables graphiquement.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons de quelque propriétés et définitions sur les integrales doubles, la formule de fubini et le changement de variables en coordonnées polaires pour calculer ces intégrales.

Dans le second chapitre nous donnons la définition de l'integrales triple, la formule de fubini sur un parallélépipède puis sur un domaine quelconque borné et les changements de variables (sylindrique et sphérique).

Enfin,dans le dernier chapitre ,on étudions les géométrie affine des surfaces classique de $\mathbb{R}^3$,qui contient le plan tangent et le vecteur normale et comment caculer l'aire d'une surface.

Chapitre 1

Intégrales doubles

Dans ce chapitre, on se propose d'établir des formules avec lesquelles on sera en mesure de calculer l'aire d'un domaine plan ou le volume d'un domaine de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est limité par le graphe d'une fonction bornée $f(x, y)$. Les formules qu'on va établir seront appelées intégrales doubles.

1.1 Définition et propriétés

Dans une intégrale définie on intégre une fonction $f(x)$ dans un intervalle $[a, b]$ fermé borné de $\mathbb{R}$. De manière analogue ,dans une intégrale double on intègre une fonction $f(x, y)$ dans un domaine D fermé borné de $\mathbb{R}^2$, délimité par une courbe continue fermé Γ de classe C^1par morceaux.

Soit $f(x, y)$ une fonction numérique continue sur D. Subdivision D en n petits domaines $\triangle D_k$ (voir fégure 1) d'aires égales à $\triangle A_k$, $1 \leq k \leq n$. Considérons dans chaque $\triangle D_k$ un point (x_k, y_k) et formons la somme

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \triangle A_k$$

appeler somme intégrale de f dans D.

Si $f \geq 0$, V_n représente la somme des volumes des cylindres de bases $\triangle D_k$ et de hauteurs $f(x_k, y_k)$.

Puisque f est continuesur D, alors (on admet) la limite de la suite (V_n) existe et ne dépend ni de la manière de subdiviser D ni du choix des points (x_k, y_k) dans $\triangle D_k$.

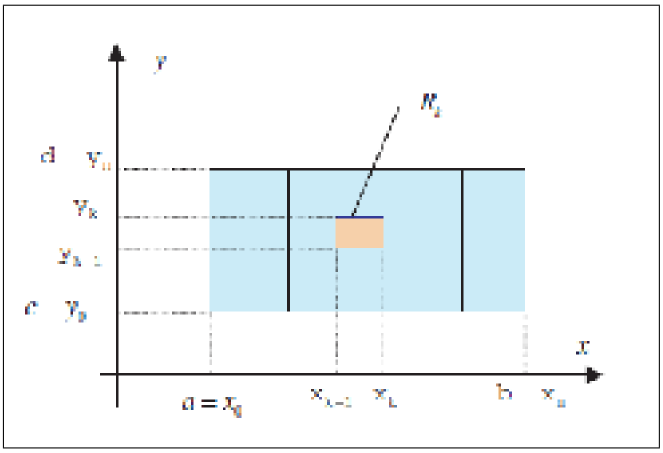


Figure 1.1: La subdivision de D en n domaines dans R^2.

Définition 1 .
La limite de la suite (V_n) *s'appelle intégrale double de la fonction* f *sur le domaine* D*,*

qu'on note

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

Par définition, on a donc

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{n \longrightarrow x} \sum_{k=1}^{n} f(x,y) \triangle A_k$$

Remarque 2 .
Si $f(x,y) = 1$ *alors:*
$\iint\limits_D dxdy =$ *Aire de* D *et* $ds = dxdy$ *est l'élément d'aire en coordonnées cartésiennes.*

Propriétés 3 .
Soient f *et* g *deux fonctions continues sur un domaine* D *fermé et borné, délimité par une courbe fermée de classe* C^1*. On a :*
1) Pour α *et* β *de* $\mathbb{R}$*, L'intégrale double sur un domaine* D *est linéaire :*

$$\iint\limits_D (\alpha f + \beta g)(x,y)\,dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$$

2) Si D et D′ sont deux domaines tels que $D \cap D' = \{\varnothing$ *ou une courbe ou* $\{$*points isolés*$\}$ $\}$ *alors*

$$\iint\limits_{D\cap D'} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D'} f(x,y)\,dxdy$$

3) Si $f(x,y) \geq 0$ *en tout piont de D , avec f non identiquement nulle , alors* $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$ *est strictement positive.*

4) Si $f(x,y) \leq g(x,y)\,, \forall (x,y) \in D$ *alors* $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy.$

5) $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy$

1.2 Méthodes de calcul d'un intégrale double

1.2.1 Formule de Fubini

Théorème 4 .

Soit f une fonction continue sur un rectangle $D = [a,b] \times [c,d]$ *.nous avons:*

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

Exemple 5 .

Dans cette exemple, on intégrant d'abord par rapport à x entre a et b (en laissant y constant). Le résultat est une fonction de y. En suite, on intégrant cette expression de y entre c et d. où

a/ $\int\int_D f(x,y)\,dydx = \int_1^2 (\int_0^1 xy + x\ dx)dy$

$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}yx^2 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 dy$

$= \int_1^2 \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right) dy$

$= 2\left[\frac{y^2}{4} + \frac{y}{2}\right]_1^2$

$= \frac{5}{4}$

Alternativement , on peut faire de même en intégrant d'abord en y puis en suite en x.

b/ $\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 (\int_1^2 xy + x\ dy)dx$

$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2 + x\right]_1^2 ydx$

$= \int_0^1 4x - (\frac{1}{2}x + x)dx$

$= \int_0^1 \frac{5}{2}xdx = \left[\frac{5}{4}x^2\right]_0^1$

$= \frac{5}{4}$

Exemple 6 .

Calcul de $I = \int\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x + y\quad)dxdy$

D'aprés Fubini, on a:
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\, dx \right] dy$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\, dy \right] dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(y) + \sin(y)) dy$
$= [\sin y - \cos y]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= 2$
Dans cette exemple x et y jouent le même rôle.

Pour calculer donc une intégrale double sur un rectongle en calculant deux intégrales simple.

Remarque 7 .
Si $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, alors

$$\int_a^b (\int_c^d g(x)h(y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx \right) \left(\int_c^d h(y)dy \right)$$

Théorème 8 .
Soit f une fonction continue sur un domaine borné D de $\mathbb{R}^2$. L'intégrale double $I = \int\int_D f(x,y)\, dxdy$ se calcule par l'une ou l'autre des façons suivantes:
a/ Si le domaine D de la forme :$D = \{(x,y) \;\; a < x < b \;, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$ alors

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx$$

b/ Si le domaine D de la forme :$D = \{(x,y) \;\; c < y < d \;,\; \varphi_1(y) < x < \varphi_2(y)\}$ alors

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Exemple 9 .
Calculer $\int\int_D dxdy$ où D est le triangle de sommets $(0,0), (0,2)$ et $(2,0)$.
On fait la projection de D sur (ox). Pour cela on va définir D analytiquement par les inégalités
$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 2 \;\; et \;\; 0 < y < 1 - \frac{x}{2} \right\}$
Alors
$\int\int_D \; dxdy = \int_0^2 \int_0^{1-\frac{x}{2}} \; 1dydx$
$= \int_0^2 \; 1 - \frac{x}{2}dx$
$= \left[x - \frac{x^2}{4} \right]_0^2$
$= 1$

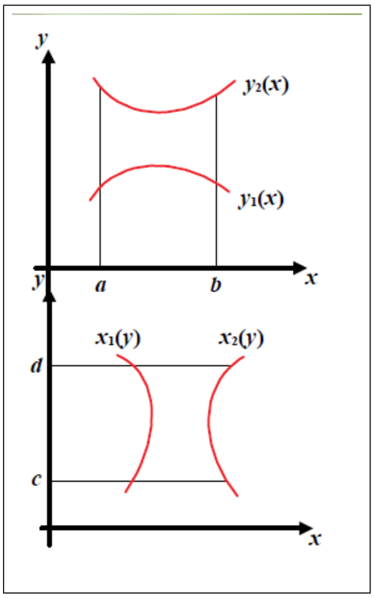


Figure 1.2: Les formes du domaine D dans l'intégrale double.

1.2.2 Changement de variables

Pour une intégrale double on peut faire un changement de variables de la forme

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

où φ et ψ sont deux fonctions numériques de classe C^1 sur un domaine $\triangle$ du plant uv , choisies de sorte que l'application

$$\begin{array}{rcl} T & : & \triangle \longrightarrow D \\ (u, v) & \longmapsto & (\varphi(u, v), \psi(u, v)) = (x, y) \end{array}$$

soit bijective et $T(\triangle) = D$.

Définition 10 .
On appelle Jacobien de la transformation T,*le déterminant*

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$$

Si le Jacobien J ne s'annule pas sur $\triangle$ alors

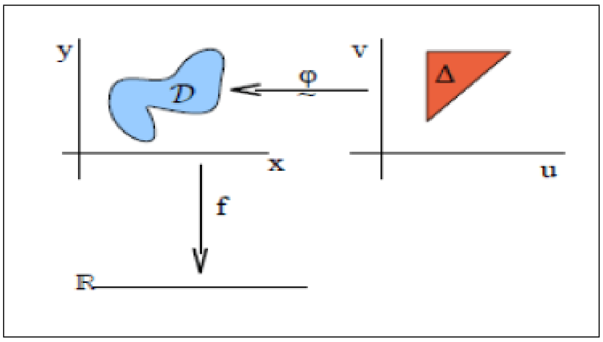


Figure 1.3: L'image du domaine Δ par le changement de variables dans R^2.

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int\int_\triangle f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|J|\,dudv$$

C'est la formule de changement de variables pour les intégrales doubles.

Remarque 11 .
1- Si $J_T \neq 0$ alors T est bijective .
2- $J_{T^{-1}} = \frac{1}{J_T}$

Exemple 12 ***(Changement de variables en coordonnées polaire)***

Calculer l'intégrale
$I = \int\int_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy, oú\ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq R^2\right\}, R \succ 0$

On utilise le changement de variables suivant , donné à l'aide des coordonnées polaires (ρ,θ) par

$$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

D est l'image du domaine $\Delta = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \rho \leq R \quad, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$ par cette transformation
Le jacobien J de T est

$$J(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \varphi'_\rho & \varphi'_\theta \\ \psi'_\rho & \psi'_\theta \end{vmatrix} = \varphi'_\rho \times \psi'_\theta - \psi'_\rho \times \varphi'_{\theta\theta}$$

$$\begin{aligned} J_{\rho,\theta} &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta - (-\rho\sin^2\theta) \\ &= \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= \rho \end{aligned}$$

J est non nul sur Δ, donc

$$\begin{aligned} I &= \int\int_{\Delta} e^{-r^2}\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2}(1-e^{-R^2})2\pi \\ &= \pi(1-e^{-R^2}) \end{aligned}$$

Chapitre 2

Intégrales triples

Dans ce chapitre, nous définirons l'intégrale triple d'une fonction $f(x, y, z)$ sur une région bornée de $\mathbb{R}^3$ et nous présenterons quelques-unes de ces propriétés. Ensuite nous verrons comment calculer ces intégrales au moyen d'intégrales itérées. Nous conclurons ce chapitre en discutant des coordonnées cylindriques et sphériques et du théorème de changement de variables pour l'intégrale triple dans ces cas particuliers.

2.1 Définition et propriétés

D'une façon analogue à l'intégrale double , on définit l'intégrale triple sur un domaine G fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$, délimité par une surface fermée assez regulière .

Soit f une fonction numérique continue sur G .Subdivisons G en n petits domaines $\triangle G_k$ de volumes égales à $\triangle V_k$,$1 \leq k \leq n$.Considérons dans chaque $\triangle G_k$ un point (x_k, y_k, z_k) et formons la somme intégrale

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k, z_k\right) \triangle V_k$$

Puisque f est continue sur G, alors (on admet) la limite de la suite T_n existe et ne dépend ni de la maniére de subdiviser G ni du choix des points (x_k, y_k, z_k) dans $\triangle G_k$.

Définition 13 .
La limite de la suite (T_n) s'appelle intégrale triple de la fonction f sur le domaine G ,qu'on note $\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz$.
Ainsi, on a

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k, z_k\right) \triangle V_k$$

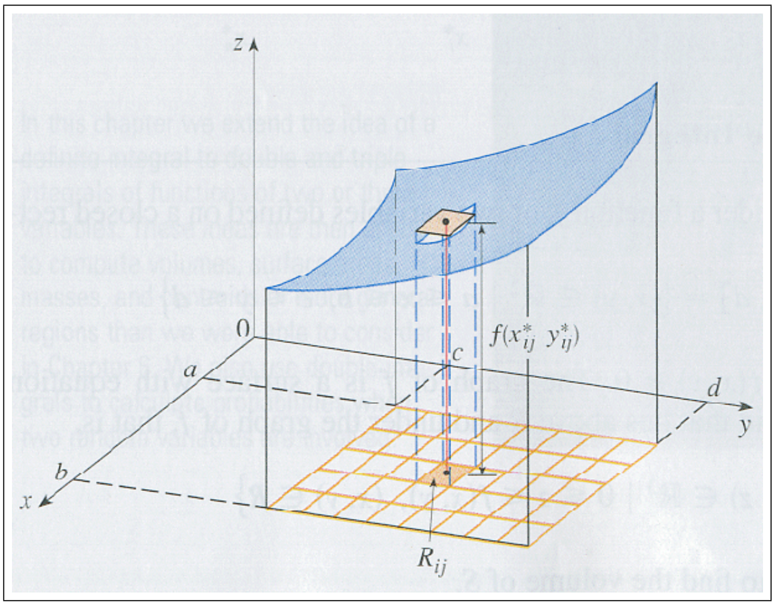


Figure 2.1: La subdivision de D en n domaines dans R^3.

Remarque 14 .

Si $f(x,y,z)=1$ sur G alors

$\iiint\limits_{G} dxdydz$ *=volume de G et $dv = dxdydz$ est l'élément de volume en coordonnées cartésiennes.*

Propriétés 15 .

Elles découlent de celles de l'intégrale simple et de l'intégrale double pour f et g intégrables sur G

Linéarité:

Pour tout couple de fonction continues f et g sur un domaine fermé et borné G,et pour tout couple de nombres réels a et b on a

$$\iiint\limits_{G} (af(x,y,z)+bg(x,y,z))\,dxdydz = a\iiint\limits_{G} f(x,y,z)\,dxdydz + b\iiint\limits_{G} g(x,y,z)\,dxdydz$$

Additivité:

Si G_1 et G_2sont deux domaines fermés et bornés de $\mathbb{R}^3$tels que $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ ou $G_1 \cap G_2 = G$ est une surface alors on a

$$\iiint\limits_{G_1 \cap G_2} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{G} f(x,y,z)\,dxdydz$$

Positivité:

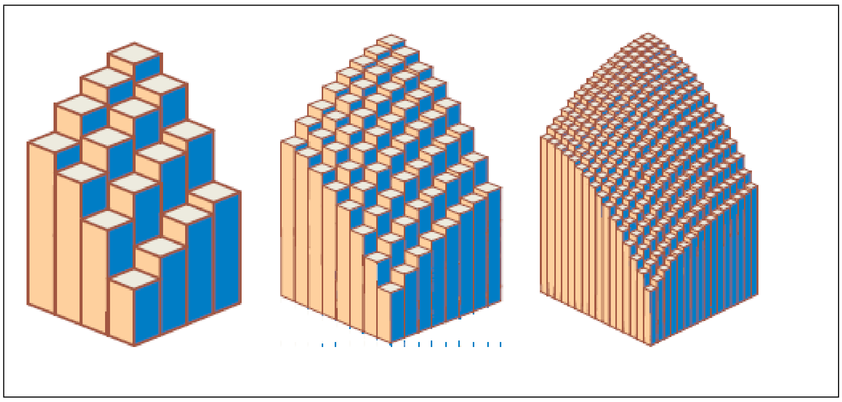


Figure 2.2: Les diagonales de tous les rectangles R_k se rétrécissent à zéro.

Si G un compact élémentaire et $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue positive alors on a*

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz \geq 0$$

Plus généralement,si deux fonctions continues f *et* $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifient l'inégalité* $f \geq g$ *alors on a*

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz \geq \iiint\limits_G g(x,y,z)\,dxdydz$$

2.2 Formule de Fubini dans l'intégrale triple

2.2.1 Sur un parallélépipède

Le théorème de Fubini s'applique de façon assez naturelle quand
$G = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$,on se ramène à calculer trois integrales simples:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz &= \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^f f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx \\ &= \int_e^f \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y,z)\,dx\right] dy\right] dz = \cdots\end{aligned}$$

Exemple 16 .
Calcul de l'intégrale $I = \iiint\limits_G (x+3yz)\,dxdydz$ *où* $G = [0,1] \times [1,2] \times [1,3]$
a/ $I = \int_0^1 \int_1^2 \int_1^3 (x+3yz)\,dxdydz$
$I = \int_0^1 \left[\int_1^2 \left[\int_1^3 (x+3yz)\,dz\right] dy\right] dx$
$I = \int_0^1 \int_1^2 \left(3x + \frac{27}{2}y - x - \frac{3}{2}y\right) dxdy$

$I = \int_0^1 \int_1^2 (2x + 12y)\, dxdy$
$I = \int_0^1 \left[2xy + 6y^2\right]_1^2 dx$
$I = \int_0^1 (4x + 24 - 2x - 6)\, dx$
$I = \int_0^1 (2x + 18)\, dx$
$I = \left[x^2 + 18\right]_0^1$
$I = 19$

$b/I = \int_0^1 \int_1^3 \int_1^2 (x + 3yz)\, dydzdx$
$I = \int_0^1 \int_1^3 \left(2x + 6z - x - \frac{3}{2}z\right) dxdz$
$I = \int_0^1 \int_1^3 \left(x + \frac{9}{2}\right) dxdz$
$I = \int_0^1 \left[xz + \frac{9}{4}z^2\right]_1^3 dx$
$I = \int_0^1 \left(3x + \frac{81}{4} - x - \frac{9}{4}\right) dx$
$I = \int_0^1 (2x + 18)\, dx$
$I = \left[x^2 + 18x\right]_0^1$
$I = 19$

2.2.2 Sur un domaine quelconque borné

Soit G domaine fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$, délimité par une surface S fermée .
On supose que G est régulier selon l'axe oz ,c-à-d que toute droite parallèle à oz passant par l'itérieure de R rencontre de S en deux points.
On suppose que G se projette sur le plan oxy en un domaine régulier D.
Dans ce cas, on peut supposer que G est défini par
$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,; (x, y) \in D \quad \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\right\}$
Où φ_1 ,φ_2 sont deux fonction numériques continues sur D.
Ainsi, la frontière S est formée par les surfaces d'équations $z = \varphi_1(x, y), z = \varphi_2(x, y)$.
Si $f : G \to \mathbb{R}$ est une fonction continue alors l'intégrale triple de $f(x, y, z)$ au-dessus du domaine V est donnée par la formule de Fubini,

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

Remarque 17 .
Notons que si le domaine d'intégration est défini par l'expression analytique

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \;\; (y,z) \in D, \;\; \varphi_1(y,z) \le x \le \varphi_2(y,z)\right\}$$

alors l'intégrale triple d'une fonction continue $f : G \to \mathbb{R}$ est donnée par la formule de Fubini :

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} f(x,y,z)dx \right) dydz$$

De meme, quand le domaine d'intégration est défini par l'expression analytique,

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;(x,z) \in D \ \ \varphi_1(x,z) \leq y \leq \varphi_2(x,z)\right\}$$

la formule de Fubini s'´ecrit sous la forme :

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int_{\varphi_1(x,z)}^{\varphi_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right) dxdz$$

Exemple 18 .
Calculer l'intégrale $I = \iiint\limits_G dxdydz$ *où* $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1.\right\}$
$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\right\}$
$I = \iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_D (\int_0^{1-x-y} dz)dxdy$
$= \iint\limits_D [z]_0^{1-x-y} dxdy$
$= \iint\limits_D 1-x-ydxdy$
$= \int_0^1 (\int_0^{1-x} (1-x-y)dy)dx$
$= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx$
$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx$
$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]_0^1$
$= \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

2.3 Changement de variables dans l'intégrale triple

Pour une intégrale triple, on peut utiliser un changement de variable de la forme

$$\left\{\begin{array}{c} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \phi(u,v,w) \end{array}\right\}$$

où φ, ψ et ϕ sont des difféomorphismes sur un domaine G de l'éspace *ouvw* , choisies de sorte que l'application $T : G' \longrightarrow G$

$$\begin{array}{ccc} T & : & G' \longrightarrow G \\ (u,v,w) & \mapsto & (\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \phi(u,v,w)) = (x,y,z) \end{array}$$

soit bijective de G' vers son image $T(G')$ et que $T(G') = R$.
Le Jacobien de la transformation T est le déterminant

$$J_{(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \\ \phi'_u & \phi'_v & \phi'_w \end{vmatrix}$$

Si le Jacobien de T ne s'annule pas sur G' alors la forme de changement de variables pour les intégrales triples est:

$$\iiint_{G} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{G'} f(\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \phi(u,v,w))\,|J|\ dudvdw$$

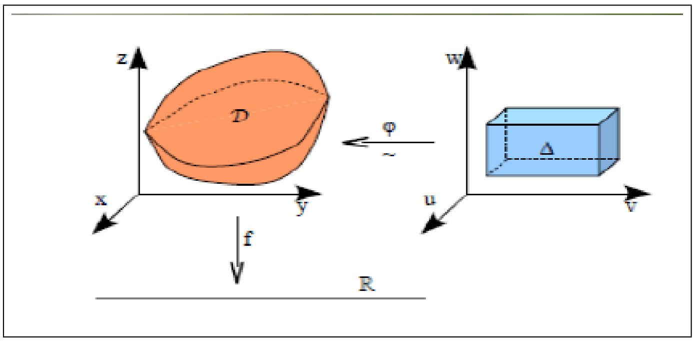


Figure 2.3: L'image du domaine Δ par le changement de variables dans R^3.

2.3.1 Changement de variable en coordonnées cylindrique

En intégrale triple ,les coordonnées cylindriques sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{array} \right\}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne de

$$\begin{array}{rcl} T & : & G' \longrightarrow G \\ (\rho,\theta,z) & \mapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) = (x,y,z) \end{array}$$

sera

$$|J(\rho,\theta,z)| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

alors on a

$$\iiint_{G} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{G'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho d\rho d\theta dz$$

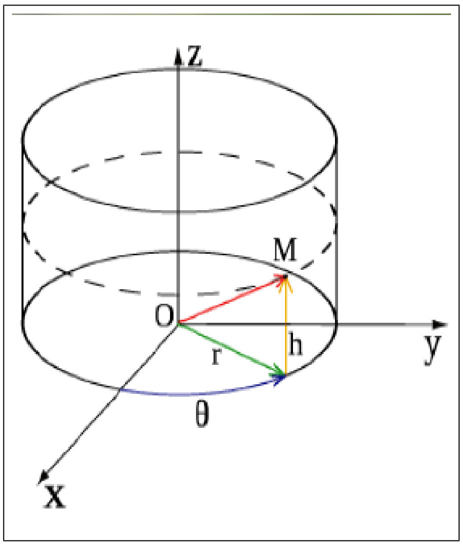


Figure 2.4: Changement de variable en coordonnées cylindrique

Exemple 19 .
Calculer le volume V *du cône* G *délimité par les surfaces* $z = 1$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
G *est régulier selon l'axe oz,sa projection sur le plan oxy et le disque unité*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Ainsi ,G est définie par

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\right\}$$

On utilise le changement de variable suivant,donnée à l'aide des coordonnées cylindriques (r, θ, z) *par*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z$$

G *est l'image du domaine*
$G' = \left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq 1\right\}$
Par la trasformation

$$T : G' \longrightarrow G$$
$$(r, \theta, z) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z) = (x, y, z)$$

LeJacobien J *deT est*

$$J=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r\neq 0$$

Donc
$V=\int\int\int_R dxdydz$
$=\int\int\int_{R'} rdrd\theta dz$
$=\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi} d\theta\int_r^1 dz$
$=2\pi\int_0^1\left(r-r^2\right)dr$
$=\frac{\pi}{3}.$

2.3.2 Changement de variables en coordonnées sphériques

En dimension trois, les coordonnées sphériques sont données par :

$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta\sin\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\varphi\end{array}\right\}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne de

$$\begin{array}{rcl} T & : & G'\longrightarrow G\\ (r,\theta,\varphi) & \mapsto & (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)=(x,y,z)\end{array}$$

sera

$$J=\begin{vmatrix}\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi\end{vmatrix}=r^2\sin\varphi$$

Exemple 20 .
Calculer le volume V de la sphère
$R=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2\leq e^2\right\}$.
On utilise le changement de variables suivant , donnée à l'aide des coordonées sphériques(r,φ,θ) *par*

$$x=r\sin\varphi\cos\theta\quad ,y=r\sin\varphi\sin\theta\ ,z=r\cos\varphi$$

R *est l'image du domaine*

$$R'=\left\{(r,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3; 0\leq r\leq \exp, 0\leq\varphi\leq\pi, 0\leq\theta\leq 2\pi\right\}$$

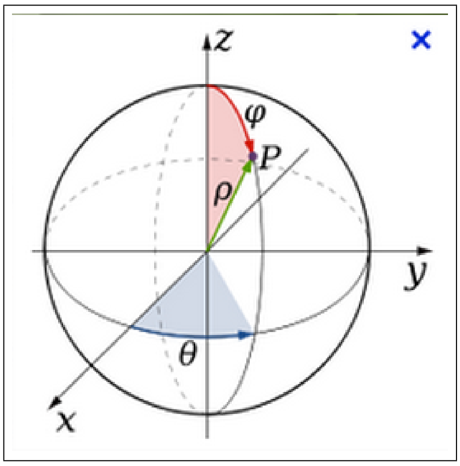


Figure 2.5: Changement de variables en coordonnées sphériques

par la transformation

$$T : R' \longrightarrow R$$
$$(r, \varphi, \theta) \longmapsto (r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\varphi) = (x, y, z)$$

Le Jacobien J *de* T *est* $J = r^2 \sin\varphi$.

Donc

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_R dxdydz \\ &= \int\int\int_{R'} r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 (r - r^2) dr \\ &= \frac{4\pi \exp(3)}{3}. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Intégrales de surfaces

3.1 Géométrie affine des surfaces classiques de $\mathbb{R}^3$

3.1.1 Surfaces

Définition 21 .
Une surface S est une partie de $\mathbb{R}^3$ définie par :
1/ Soit une représentation paramétrique

$$\begin{array}{l} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array} \quad \text{avec } (u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

2/ Soit par une équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$ telle que $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 22 .
Les sphère de $\mathbb{R}^3$ ont des équations cartésiennes de la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
et une représentation paramétrique

$$S = \left\{ \begin{array}{l} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\cos\theta\sin\varphi \\ z = R\sin\theta \end{array} \right\}$$

Avec $(\theta, \varphi) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$

Remarque 23 .
- Lorsqu'une surface S est donnée par sa représentation paramétrique, on l'appelle une nappe paramétrée.
- Si f est de classe C^k alors S sera dite de classe C^k.
- Toute surface donnée par équation cartésienne admet une représentation paramétrique et l'inverse est vraie .

3.1.2 Plan tangent et vecteur normale

Définition 24 .
Soit S une surface défini par $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = 0\right\}$.
*On dira que le point $(a, b, c) \in S$ est **régulier** si le vecteur gradient $\mathbf{grad}F(a, b, c) \neq \overrightarrow{0}$*
*Un point $(a, b, c) \in S$ non régulier (i.e. $\mathbf{grad}F(a, b, c) = \overrightarrow{0}$) est dit **singulier**. Quand la surface S ne possède aucun point singulier on dira qu'elle est régulière.*

Définition 25 .
Consédérons une surface S définie par

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned} \quad \text{avec } F \in C^1$$

$M(u, v)$ un point régulier de S.
On appelle plan tangent π en M à S le plan passant par M et dérigé par: $\left(\frac{\partial F}{\partial u}(u, v), \frac{\partial F}{\partial v}(u, v)\right)$

Exemple 26 .
Soit S la surface definie par : $S : F(u, v) = \left(u + v^2, u^2 + v, uv\right)$

On veut trouver l'équation cartésienne du plan tangent π en $A(u = 1, v = 1)$
On pose :$M(x, y, z) \in S$
On a $A(1, 1) = (2, 2, 1)$
$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = (1, 2u, v)$ *donc* $\frac{\partial F}{\partial u}(1, 1) = (1, 2, 1)$
$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = (2v, 1, u)$ *donc* $\frac{\partial F}{\partial v}(1, 1) = (2, 1, 1)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-2 & 2 & 1 \\ z-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-2)\,1 - 1\left[(y-2) + (z-1)\right] + 2\left[-2(z-1)\right] = x + y - 3z - 1 = 0$$

Donc $\pi : x + y - 3z - 1 = 0$

Corollary 27 .
Le plan tangent à une surface S défini par une équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$ au point régulier $M_0(x_0, y_0, z_0)$ admet pour équation:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M)(z - z_0) = 0$$

Définition 28 .
Le vecteur normale de la surface S au point $M(u, v)$ est par définition le vecteur normale au plan tangent en ce point et on note: $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial u}}(u, v) \wedge \overrightarrow{\frac{\partial F}{\partial v}}(u, v)$
Le vecteur unitaire de cette vecteur normale est $\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}$.

3.2 Calcul l'aire d'une surface

3.2.1 Cas d'une surface paramétrée

Considérons deux vecteurs non nuls et non colinéaires A et B de l'espace.ces deux vecteurs engendrent un parallélogramme dont la srface est égale à:

$$S = \|A\| \|B\| \left|\sin \theta\right|$$

θ étant l'angle des deux vecteurs.
Or

$$\|A \wedge B\| = \|A\| \|B\| \left|\sin \theta\right|$$

Soit la surface paramétrée suivante:

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

Si A et B sont les tangentes $\frac{\partial X}{\partial u}$ et $\frac{\partial X}{\partial v}$ à cette surface en un point (u,v),alors:
$\|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\|$ est égale à l'aire du parallélogrammme engendré par $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$

Ce parallélogramme apartient au plan tangent.Alors si les composantes $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$

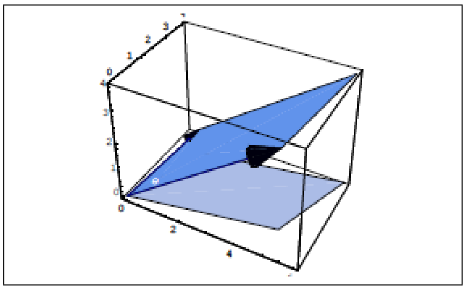


Figure 3.1: L'aire du parallélogrammme engendré par $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$

avec $(t,u) \in D$ sont de classe C^1 on définit l'aire de la surface S par:

$$Aire(S) = \int\int_D \|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\| dudv$$

On écrit symboliquement:

$$ds = \|\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}\| dudv$$

Exemple 29 *Calculons l'aire d'une sphère de rayon a . nous savons que :*
$0 \leq \varphi \leq \pi$ *et* $0 \leq \theta \leq 2\pi$
Alors:$\|\frac{\partial X}{\partial \varphi}\frac{\partial X}{\partial \theta}\| = a^2 \sin\varphi \Longrightarrow S = \int\int_S ds = \int\int_R a^2 \sin\varphi d\varphi d\theta = a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 4\pi a^2$

$$S = 4\pi a^2$$

3.2.2 Cas d'une surface en coordonnée cartésiennes

Soit la surface donnée en coordonnées cartésiennes par $z = f(x, y)$.une représentation paramétrique de cette surface peut s'écrire:

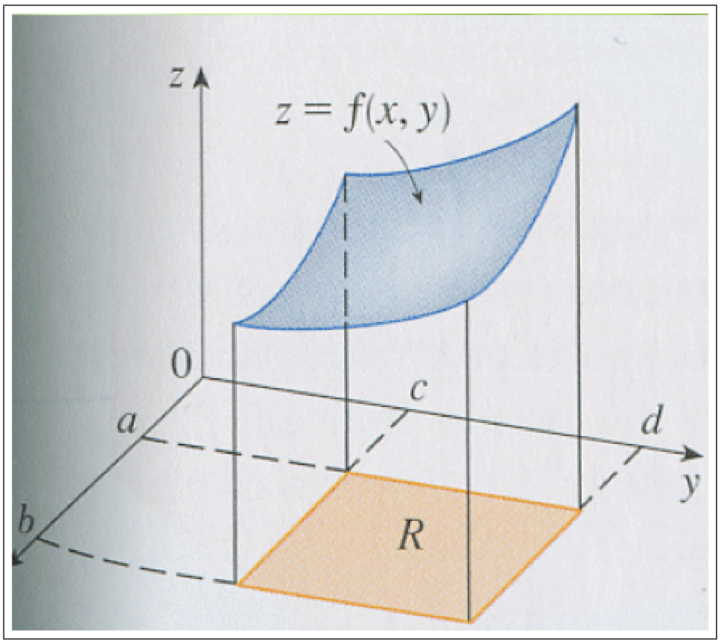


Figure 3.2: La projection de f sur (Oxy)

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

d'où
$\frac{\partial X}{\partial u} = (1, 0, f_x')$ et $\frac{\partial X}{\partial y} = (0, 10 f_y')$ donc $\frac{\partial X}{\partial x} \wedge \frac{\partial X}{\partial y} = (-f_x', -f_y', 1)$ et $\|\frac{\partial X}{\partial x} \wedge \frac{\partial X}{\partial y}\| = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}$
Alors

$$\int\int_S ds = \int\int_D \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 dxdy}$$

Exemple 30 *Calculer l'aire de la portion de paraboloïde définie par:*

$$z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2$$

En appliquant la formule précèdent, on obtient:
$S = \int\int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy$ *avec* $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 2\}$
En passant en coordonnées polaires ,on obtient:
$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1 + 4r^2} dr = \frac{13}{3}\pi$

Exemple 31 .

Calculer l'aire d'une partie S du paraboloïde d'équation $z = xy$ se projectant le plane (xoy) suivante le disque D définie par $x^2 + y^2 \leq 1$

$S = \{(x, y, z), z = xy\}$

$D = \left\{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

$\int\int_S ds = \int\int_{D\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}} dxdy$

Où $f(x, y) = xy = z$

$f_x' = y,\ f_y' = x$

$\int\int_S ds = \int\int_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dxdy = \int\int_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy$

Changement de variables en coordonnées polaire

$(\rho, \theta) \longmapsto (x, y)$

$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$

$|J| = \rho$ *et* $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\int\int_S ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \rho^2} d\rho d\theta$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \times \frac{1}{2} \int_0^1 2\rho \left(1 + \rho^2\right)^{\frac{1}{2}} d\rho$

$= 2\pi \times \frac{1}{2}{}_0^1 \left[\frac{2}{3} \times \left(1 + \rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\right.$

$= \frac{2\pi}{3} \times (2 - 1)$

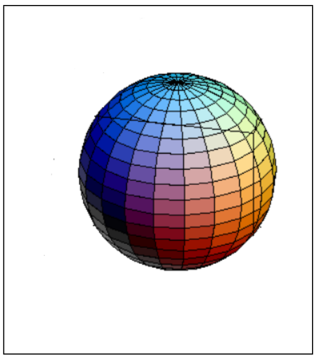
$= \frac{2\pi}{3} \left(2\sqrt{3} - 1\right)$

3.3 Quelque surfaces dans l'espace

3.3.1 Sphère:

L'équation cartésienne d'une sphère centrée en (x_0, y_0, z_0) et de rayon R est :

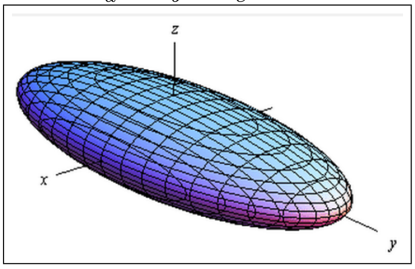
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$



3.3.2 Ellipsoïde:

est une surface d'équation de la forme:

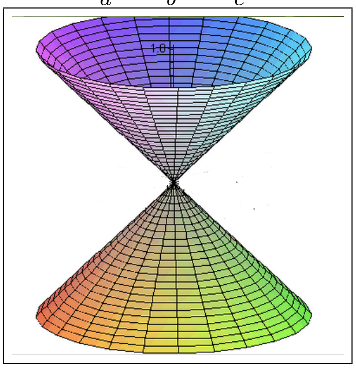
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



3.3.3 Cône:

C'est une surface de l'espace d'équation de la forme :

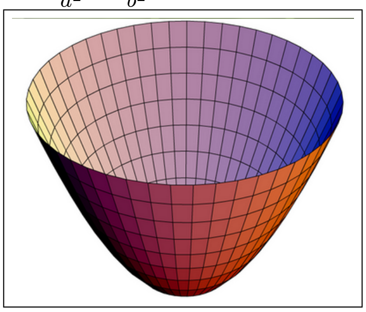
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$



3.3.4 Paraboloïde elliptique (bol):

Est d'équation de la forme :

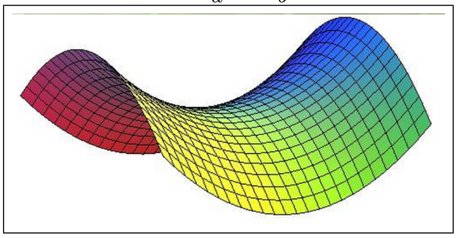
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



3.3.5 Paraboloïde hyperbolique:

Est d'équation de la forme:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

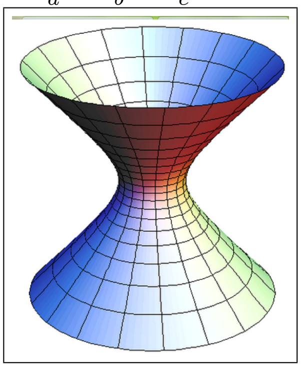


par un changement de variable l'équation se transforme en $z = xy$

3.3.6 Hyperboloïde à une nappe:

D'équation de la forme:

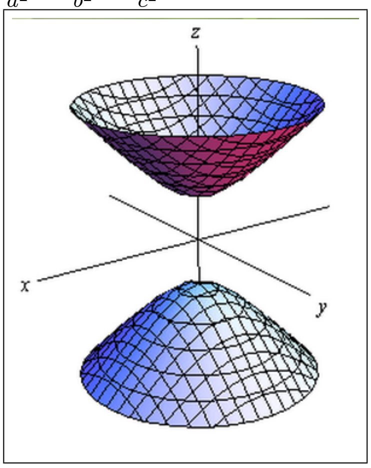
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



3.3.7 Hyperboloïde à deux nappes:

Est d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$



Conclusion

Nous sommes accomplir ce modeste travail que nous avons touché à travers les trois chapitre d'étude de calcul les intégrales multiples

Dont à partir de ce thème nous donnons les techniques des calculs des intégrales doubles et triples en utilisant la formule de Fubini ou en effectuant un changement de variables, savoir calculer la surface et le volume d'un domaine plonger dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Bibliographie

[1] A. Bouarich. Calcul différentiel dans R^n et Intégrales multiples – 1^{ere} version, Octobre 2009

[2] Multiple Integral, disponible online: http://people.virginia.edu/~mah7cd/Math132/Ch15.pdf.

[3] J.M. Monier. Géométrie –2^e Edition- DUNOD, Paris, 2000.

[4] H. Sadiky, Calcul intégral vectoriel - Université Cadi Ayyad, 2012/2013.

[5] Analyse03/EPST-Tlemcen, A.U 2014-2015, disponible online: http://www.epst-tlemcen.dz/docs/cours/math/S3/Chapitre_01integrales_multiples.pdf.