الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالــي والبحـث العلمــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire

Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence

En: - Filière mathématiques.

Les Opérateurs Bornés Dans Un Espace De Hilbert

Préparé par :

-Boulemdaoud Sara.

-Feddane Soumia .

-Kolli Farida.

-Zentout Hiba.

Encadrer par :
Boudjerida Nadjet.

Année universitaire : 2014/2015

RMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet de fin d'études, au sein de l'institut des sciences et de Technologie de Mila.

*Avant tout, nous remercions **ALLAH** tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener ce travail.*

*D'une façon toute particulière, On tient à remercier notre encadreur Ms **Boudjerida Nadjet**, pour nous avoir fait travailler sur un projet aussi intéressant et riche.*

Nous lui sommes reconnaissants tout particulièrement pour la confiance qu'il nous A témoignée et la liberté qui nous a laissé.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude aux nombreuses personnes qui nous ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse.

Nous remercions aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadrés, observé, aidé, conseillé et même supporté.

On tient également à remercier ici toutes les personnes, les amis, dont on a croisé le chemin a l'institut des sciences et de technologie de Mila et ailleurs.

Enfin, on souhaite exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes, qui ont contribué largement à son aboutissement.

Table des matières

Introduction

Les espace de Hilbertiens sont les espace de Banach les plus réguliers, ils généralisent les espaces euclidiens étudiés en Algébre et géométrie sur deux points : tout d'abord, le corps de base peut étre aussi bien $\mathbb{C}$ que $\mathbb{R}$ se travaux améneront D.HILBERT à introduire les espaces qui portent son nom et dans lesquels pourra se dévlopper la théorie des opérateurs.

La théorie spectrale est un domaine des mathématiques dont les premiers résultats appartiennent à l'algèbre linéaire. Dans ce cadre, la théorie spectrale établit notamment l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres pour tout endomorphisme symétrique sur un espace vectoriel complexe de dimension finie.

Cette mémoire contient trois chapitre :

Le premier chapitre est consacré à l'étude des espaces de Hilbert. nous avans commencé à définir certains des concepts mathématique que nous avons besoin dans la démonstration de plusieurs théories et des proposition dans un espace de Hilbert comme le produit scalaire, espace préhilbertien théorème de projection, en plus et pour plus de précisions une petite application : Fonctionnelles linéaires continues.

Dans le deuxième chapitre, nous avous fourni une explication complète sur les opérateurs linéaires bornés dans un espase de Hilbert, afin de rendre plus facile à calsser comme suite : les opérateurs complet, Adjoint et auto-adjoint.

Enfin, nous allons présenter quelques définitons bien connues et les théorèmes importants et trés utiles qui sont des théorie de spectrale dans l'espace de Hilbert et quelque propriétés et ses application.

Notation.

H : En espace de Hilbert.

$\mathbb{N}$: L'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{N}^*$: L'ensemble des nombres naturels sauf 0.

$\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réelles.

$\mathbb{R}_+$: L'ensemble des nombres réelles positif.

$\mathbb{C}$: L'ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{R}^n$: Espace euclidienne réel de dimension n.

$\Bbbk$: L'ensemble des nombres rationnelles.

E : Espace vectoriel.

λ : Conjugué.

$\mathcal{L}^2$: L'ensemble des suites.

Re : Partie réel.

Im : Partie imaginaire.

$|\cdot|$: Module.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Produit scalaire.

$\|\cdot\|$: La norme.

$(E, \|\cdot\|)$: Espace vectoriel normé.

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: Espace de Hilbert ou préhilbertien.

$A^\perp$: L'ortogonale de A.

H^* : Le duale de l'espace de Hilbert H.

$\mathcal{L}(H, H')$: L'ensembles des opérateur borné H dans H'.

Id_H : L'identité de H.

$S_p(x)$: Spectre de l'opérateur x.

$\sigma(T)$: Le specter d'opérateur$T$.

$\rho(T)$: Ensemble résolvant d'opérateur$T$.

$B(H)$: Ensemble des opérateurs T.

Chapitre 1

Rappel sur l'espace de Hilberet

Ce chapitre introduit la structure euclidienne et plus généralement celle d'un espace de Hilbert qui correspond à ce cadre. Il définit les notions de produit scalaire, d'orthogonalité et de projection. Il ne saurait donner tous les éléments. Il sert de base Hilbertienne, unifie des notations et concepts et ne peut être correctement assimilé que par une utilisation systématique d'exemples et de schémas dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^n$.

1.1 Produit scalaire

Définition 1.1.1 *Soit E un espace de vectoriel, on appelle produit scalaire sur E, une application : $f : E \times E \to \Bbbk$ vériefié les proprietés suivante :*

$1 - \forall x,y,z \in E : f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$.

$2 - \forall x,y \in E : \forall \lambda \in \Bbbk$: $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$.

$3 - \forall x,y \in E$: $f(x,y) = f\overline{(y,x)}$

symétrie hermitienne dans le cas complexe, et dans le cas réel on a :$f(x,y) = f(y,x)$.

$4 - \forall x \in E : f(x,y) \geq 0$ *(positive)*.

$5 - f(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Remarque 1.1.2 *Un produit scalaire est en générale noté par $\langle .,. \rangle$ et on désigné par $\| \cdot \|$ la norme associé :*

$$\| x \| = \sqrt{\langle x,x \rangle}.$$

Définition 1.1.3 ***(Espace préhilbertien)***

On appellé espace préhilbertien le couple constitué par un espace vectoriel E et par un produit scalaire hermitien $\langle \cdot,\cdot \rangle$ on le notera $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$.

-Si $\Bbbk = \mathbb{R}$, $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ est appele espace préhilbertien réel.

-*Si* $\mathbb{k}=\mathbb{C}$, $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *est appelé espace préhilbertien complexe .*
Les espaces préhilbertiens de dimension finie sont c'est le beaucoup préférable appelé : ***espace eucludien.***

Exemple 1.1.4

•*Le produit scalaire sur* $\mathbb{R}^n$: $\langle x.y\rangle=\sum x_i y_j$.
•*Le produit scalaire sur* $\mathbb{C}^n$: $\langle x.y\rangle=\sum x_i \overline{y_j}$.
•*Le produit scalaire sur* $\mathbb{C}([a.b],\mathbb{C})$: $\langle f.g\rangle=\int f(t)\,g(t)\,dt$.

Corollaire 1.1.5 *Sur un espace préhilbertien* $(H,\langle .,.\rangle)$, *la quantité* $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ *définie une norme, pour laquelle le produit scalaire est continu.*

Proposition 1.1.6 ***(Continuité d'un produit scalaire)***

Soit H *un espace préhilbertien muni de sa norme alors :*

les applications : $x\rightarrow\langle x,y\rangle$ *et* $y\rightarrow\langle x,y\rangle$ *sont uniformémont continues sur* H *. L'application* $H\times H\rightarrow\mathbb{k}$ *est continue.*

Preuve. on a

$$|\langle(x_1,y)\rangle-\langle(x_2,y)\rangle|=|\langle(x_{1-}x_2),y\rangle\leq\|x_1-x_2\|\|y\|$$

a aussi

$$|\langle x_1,y_1\rangle-\langle x_2,y_2\rangle|=|\langle(x_1-x_2),y_1\rangle+\langle x_1,(y_1-y_2)\rangle-\langle(x_1-x_2),(y_1-y_2)\rangle|$$

$$\leq\|x_1-x_2\|\|y_1\|+\|x_1\|\|y_1-y_2\|+\|x_{1-}x_2\|\|y_1-y_2\|$$

■

1.2 Identites remarquables

Théorème 1.2.1 ***(L'inégalité de cauchy schwaz)***

Soit φ *un produit scalaire sur un espace vectoriel* E, *alors :*

$$\forall\ x,y\in E:\varphi(x,y)\leq\sqrt{\varphi(x,x)}.\sqrt{\varphi(y,y)}$$

Preuve.
Soit $x,y \in E$, on a :
$\varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \varphi(x, x+\lambda y)+\varphi(\lambda y, x+\lambda y) \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x)+\varphi(x,\lambda y)+\varphi(\lambda y,x)+\varphi(\lambda y,\lambda y) \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x)+\varphi(x,\lambda y)+\lambda\varphi(y,x)+\lambda\varphi(y,\lambda y) \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x)+\overline{\lambda}\varphi(x,y)+\lambda\varphi(y,x)+\lambda\overline{\lambda}\varphi(y,y) \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x)+\overline{\lambda\varphi(y,x)}+\lambda\varphi(y,x)+\left|\lambda^2\right|\varphi(y,y) \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x)+2\operatorname{Re}(\lambda\varphi(y,x))+\left|\lambda^2\right|\varphi(y,y) \geq 0 \cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

on a deux cas :
<u>1$^{\text{ére}}$cas</u> : si $\varphi(y,y)=0$
alors : $y=0$,donc
$\varphi(x,y)=\varphi(0,x)=\varphi(x-x,x)=\varphi(x,x)-\varphi(x,x)=0$
par conséquent l'inégalité de **Cauchy Schwarz** est vérifiée
<u>2$^{\text{éme}}$cas</u> : si $\varphi(y,y)\neq 0$
posons : $\lambda=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi(y,y)}$,$(\lambda \in \mathbb{k})$
en remlaçant dans $(*)$ obtient

$$\varphi(x,x)+2\operatorname{Re}\left(\frac{-\varphi(x,y)}{\varphi(y,y)}\varphi(y,x)+\frac{|\varphi(x,y)|^2}{|\varphi(y,y)|^2}\varphi(y,y)\right) \geq 0$$

d'ou :

$$\varphi(x,x)+2\operatorname{Re}\left(-\frac{|\varphi(x,y)|^2}{\varphi(y,y)}\right)+\frac{|\varphi(x,y)|^2}{\varphi(y,y)} \geq 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \varphi(x,x)-\frac{|\varphi(x,y)|^2}{\varphi(y,y)} \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x)\varphi(y,y)-|\varphi(x,y)|^2 \geq 0 \\
&\Longrightarrow |\varphi(x,y)| \leq \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.2.2 *Soit* $(H, \langle . \rangle)$ *un espace prehilbertiene sur* $\mathbb{k}$*, soit* $\|.\|$ *la norme associe, pour tout* $x,\ y \in H$ *on a :*

-***Identités du parallélogramme :*** $\forall\ x,\ y \in H$ *on a :*

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 .$$

-***Identité de la médiane :*** *Soit a,b,c troit point d'un espace préhilbertien et m le milieu du segment* $[b, c]$ *alors :*

$$\| a-b \|^2 + \| a-c \|^2 = 2 \| a-m \|^2 + \frac{1}{2} \| b-m \| .$$

-***Identité de polaristion :*** *Si* H *est complexe alors :*

$$\|(x,y)\| = \frac{1}{4} \sum_{k=n}^{3} i^k \left\|x + i^2 y\right\|^2$$

1.3 Espace de Hilbret

Définition 1.3.1 *Espace de Hilbert un espace préhilbertienne qui est complet pour la distance associe à produit scalaire :*

$$d(x,y) = \| x-y \| = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$$

1-Tout espace préhilbertienne de dimension finie est un espace de Hilbert.

2-Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

3-Un espace de Hilbert est un cas particulier de espace de Banach.

Exemple 1.3.2 *L'espace* $((l^2 [0,1], \mathbb{C}), \langle f, g \rangle)$ *est un espace de Hilbert (cas un espace pré-hilbertien complet).*

1.4 L'orthogonalité

Définition 1.4.1 *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$un espace préhilbertien, on dit que les deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux :*

$$\langle x,y \rangle = 0 \text{ ce qu'on noté : } x \perp y$$

-On dit que deux partie $A \neq \Phi$ et $B \neq \Phi$ de H sont orthogonales si et seulement si :

$$\forall a \in A, \forall b \in B : a \perp b \text{ ie } \langle a,b \rangle = 0$$

et note

$$A \perp B.$$

Définition 1.4.2 *Soit H un espace préhilbertien soit $a \in H$,on appelle orthogonale de a, note $a^{\perp}$ l 'ensenble des vecteur de H orthogonale :*

$$a^{\perp} = \{y \in h, \langle a,y \rangle = 0\}$$

Proposition 1.4.3 *Pour toute partie $A \neq \emptyset$ d'un espace préhilbertien H on a :*

$$A^{\perp} = \bigcap_{a \in A} a^{\perp}.$$

Preuve. On a : $A^{\perp} = \{Y \in H : \langle y,a \rangle = 0, \forall a \in A\}$

$$y \in A^{\perp} \Longleftrightarrow \forall a \in A: \langle y,a \rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall a \in A: y \in a^{\perp}$$

$$\Longleftrightarrow y \in \bigcap_{a \in A} a^{\perp}$$

d'ou :

$$A^{\perp} = \bigcap_{a \in A} a^{\perp}.$$

$\blacksquare$

Proposition 1.4.4 *Soit A une partie de H alors on a :*

1) $H^{\perp} = \{0\}$.

2) $A \subset A^{\perp\perp}$.

Remarque 1.4.5 *A et $A^{\perp}$ sont des parties orthogonales.*

Proposition 1.4.6 *Soit A et B deux parties de H si et seulement si :*

1) $B \subset A \Longrightarrow A^{\perp} \subset B^{\perp}$.Et donc, en notant $A^{\perp\perp} = (A^{\perp})^{\perp}$:

$$A \subset B \Longrightarrow A^{\perp\perp} \subset B^{\perp\perp}.$$

2) $A^{\perp} = \left[A^{\perp}\right] = \left[\overline{A}\right]^{\perp} = [A]^{\perp}$.

Preuve. 1) Supposons que $B \subset A$.

Soit $x \in A^{\perp}$ alors: $\forall y \in A \ : x \perp y$

$$z \in B \Longrightarrow z \in A \Longrightarrow x \perp z$$

$$\Longrightarrow x \in B^{\perp}$$

d'ou

$$A^{\perp} \subset B^{\perp}$$

2) On a : $A \subset A^{\perp}$ donc $\overline{A}^{\perp} \subset A^{\perp}$

réciproquement ,soit $x \in A^{\perp}$ et (y_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $y \in \overline{A}$ tel que : $\langle x,y \rangle = 0$.

Par continuité de l'application $\langle \cdot,\cdot \rangle$ on a :

$$\langle x,y \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle x, y_n \rangle$$

donc :

$$x \in \overline{A}^{\perp} \Rightarrow A^{\perp} \subset \overline{A}^{\perp}$$

D'ou :

$$\overline{A}^{\perp} = A^{\perp}.$$

$\blacksquare$

Proposition 1.4.7 (***Théorème de pythagore***)

Les vectuers x et y sont orthogonaux dans H si et selment si :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

on montre facilement par récurrence sur $p \geq 2$ que si x_1,........,x_p sont deux à deux orthogonaux alors :

$$\|\sum_{k=1}^{p} x_k\| = \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|.$$

Preuve. On a

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$$

et comme :

$$x \perp y \Longrightarrow \langle x,y\rangle = 0$$

donc

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^{2+}\|y\|^2$$

le résultat s'en déduit le vecteur traitera cas de n vectuers. ■

1.5 Théoréme de projection

Définition 1.5.1 *Soit E un espace vectoriel, une partie A de E est dit* ***convexe*** *si elle est vide ,ou*

$$si : \forall x,y \in A : \forall \lambda \in [0,1] \text{ alors } \lambda x + (1-\lambda)y \in A.$$

Remarque 1.5.2 *Tout sous espace vectoriel d'un espace vectoriel E est une partie convexe si de plus E est normé, tout boule (ouverte ou fermeé) est convexe .*

Théorème 1.5.3 *Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien et soit $A \neq \varnothing$ est une partie* *convexe fermée de H , alors pour tout $x \in H$ il existe un vecteur unique $y \in A$ vérifiant :*

$$d(x,y) = \inf_{x \in H} \|x - a\| = \|x - y\|$$

tel que $a \in A$ ce vecteur appelé la projection de x sur A, et on note $y = p_A(x)$.

1.6 Systémes orthonormés

Définition 1.6.1 *Un systéme $\{x_i\}_{i \in I}$ des vecteurs d'un espace préhilbertien sur $\mathbb{k}$ est un système orthogonale si $\langle x_i,x_j \rangle = 0$ pour i , $j \in I$ telque $i \neq j$, en d'autre termes, le système est constitué de vecteurs de H orthogonaux à deux.*

Définition 1.6.2 *Un système orthogonal $\{x_i\}_{i \in I}$ de vecteur d'un préhilbertien H est un système orthonormé si $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.*

Exemple 1.6.3 *Sur $\mathbb{R}^n$ on a : $e_1 = (1,0,0\ldots),\ldots,e_n = (0,0\ldots,1)$ est une suite orthonormé.*

1.7 Bases Hilbertiennes

Définition 1.7.1 *Soit $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteur de H est dit :*

$1-$ ***Orthogonale*** *si : $\langle e_i,e_j \rangle = 0$ pour tout i, $j \in I$ tel que : $i \neq j$.*

$2-$ ***Orthonormée*** *si : $\langle e_i,e_j \rangle = 0$ pour tout i, $j \in I$ et $\langle e_i,e_j \rangle = 0$ pour tout $i \in I$.*

$3-$ ***Totale*** *si : vect (e_i) est dense dans H.*

On appelle base hilbertienne de H, une famille orthogonale normée totale de vecteur de H.

Proposition 1.7.2 *Toute famille orthonormée est libre*

Preuve. une famille est dite libre si tout combinaison linéare finie nulle est à coéfficiets tout nulls

Soit $J \subset D$ une partie finie et soit $\sum_{j \in J} \alpha_i e_j$.

une combinaison linéare nulle alors pour tout $j_0 \in J$,on a :

$$0 = \left\langle \sum_{j \in J} \alpha_j e_j, e_{j_0} \right\rangle = \sum_{j \in J} \alpha_j \langle e_j, e_{j_0} \rangle = \alpha_{j_0}$$

■

Corollaire 1.7.3 *Tout espace de Hilbert non réduit* $\{0\}$ *à posséde une base hilbertienne.*

Théorème 1.7.4 *Une famille orthonormale* $(x_k)_{k\, \in D}$ *et une base hilbertienne si et seulement si :*

$$\sum |\langle x_k, x\rangle|^2 = \|x\|^2 .$$

Proposition 1.7.5 *Deux bases hilbertiennes quelconque d'un méme espace de Hilbert ont meme cardinal.*

1.8 Fonctionnelles linéaires continues

Proposition 1.8.1 *Soit* H *un espace de Hilbert et* $A\colon H \to H$ *une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1-A *est continue.*

2-A *est continue en* 0.

3-Il éxiste $x \in H$ *tel que* A *est continue en* x.

4-Il éxiste une constante $c > 0$ *tel que* $\|Ax\| \leq c\,\|x\|$*pour tout* $x \in H$.

Théorème 1.8.2 ***(Théorème de représentation de Riesz)***

Soit $(H; <\cdot,\cdot>)$ *un espace de Hilbert* $\forall\varphi \in H'$,$\exists! f \in H$ *telle que :*

$$\langle\varphi, y\rangle = \langle f, y\rangle\, \forall y \in H$$

de plus $\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}$.

Preuve. Soit $M = \varphi^{-1}(0)\,, M$ est un sous espace fermé de H .

Si $M = H$ c'est-à-dire, $\varphi = 0$,on conclut en prenant $f = 0$.

Supposons que$M \neq H$, Montrons qu'il existe un élément $g \in H$ telle que :

$$g \notin M\, |g| = 1 \text{ et } (g; w) = 0 \forall y \in M$$

En effet, soit $g_0 \in H$ avec $g_0 \notin M$, et soit

$$g_1 = p_M g_0.$$

On prend en suite

$$g = \frac{g_0 - g_1}{g_0 - g_1}$$

Tout $y \in H$ admet une décomposition de la forme

$$y = \lambda g + w$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $w \in M$: il suffit de poser :

$$\lambda = \frac{\langle \varphi, y \rangle}{\langle \varphi, g \rangle}$$

et

$$w = y - \lambda g$$

il vient alors

$$\langle g; w \rangle = \langle g, y - \lambda g \rangle = 0$$

c'est-à-dir :

$$\langle g, y \rangle = \lambda = \frac{\langle \varphi, y \rangle}{\langle \varphi, g \rangle}$$

On conclut que

$$\forall y \in H \;\; \langle \varphi, y \rangle = \langle f, y \rangle$$

ou f est définie par :

$$f = \langle \varphi, g \rangle \, g.$$

■

Chapitre 2

Opérateurs lineaires bornés

Dans ce chapiter, nous introduisons la théorie des opérateur linéaires bornés défini sur un espace vectoriel E dans un autre espace de Hilbert H.

On s'intéresser à quelques exemples d'opérteurs inversible ,auto-adjoint et compacts.

2.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 2.1.1 *Soit H et H' deux espaces de Hilbert sur un corp $\mathbb{k}$.*

Un application linéaire de H dans H' est appelée un opérateur :

$T : H \longrightarrow H'$

$x \mapsto y = Tx$ *qui vérifier les conditions* :

$$\forall x_1,x_2 \in H \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{k} \colon T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2).$$

Définition 2.1.2 *Soit H et H' deux espace normé un application de H dans H' dite borné si elle tronsforme tout borné .*

Proposition 2.1.3 *Soient H et H' deux espace vectoriels normés et T un opérateur linéaire de H dans H', Les cinq propriétés suivantes sons équivalentes*:

1- T est continu .

2- T est continu ou point 0.

3- T est borné sur la boule unité fermé de H .

4- T existe une réel $c > 0$ tel que :

$$\|Tx\| \leq c\,\|x\|$$

5- T est lipschetzienne .

Preuve.

1⇒2

comme T est coninue ,donc T est continue ou point 0.

2⇒3

supposons que T sont continue ou point 0 . Soint $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$. tq :

$$\forall x \in E : \|x\| \leq \delta \Rightarrow \|T_x\| \leq 1$$

Donc :

$$\frac{1}{\delta}\|x\| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\delta}\|T_X\| \leq \frac{1}{\delta}$$

alors :

$$\forall y = \frac{1}{\delta}x, \|y\| \leq 1 \Rightarrow \|T_X\|$$

Donc :

$$T\left(\overline{B_E}(0{,}1)\right) \subset \overline{B_F}\left(0,\frac{1}{\delta}\right)$$

3⇒4

supposons que T est bornée sur la boule unité bornée de H.

Donc,il existe $c > 0$, tq :

$$\forall x \in E, \|x\| \leq 1 \Rightarrow \|T_x\| \leq c$$

$\forall x \in E$,on pose :

$$x = \frac{x}{\|x\|}$$

donc

$$\|x\| = 1$$

D'aprés ce qui précede :

$$\|T_X\| \leq C$$

Alors ,

$$\forall x \in E, \|T_X\| \leq c\|x\|.$$

4⇒5

supposons que 4 sont vraie pour $x,y \in H$

on a :

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\|$$

$$\leq c\|x-y\|.$$

5⇒1

supposons que T sont lipschizeinne .Toute application lipschizeinne est uniforme continue d'ou elle est continue. ■

Exemple 2.1.4

1-Soit H un espace normé l'opérateur T tel que: $\forall x \in H, Tx = x$ est un opérateur borné (car $\|Tx\| \leq \|x\|$).

2-Considérons, un ecpace de Hilbert H et sous espace fermé de H alors l'opérateur de projection orthogonale sur H', un opérateur linéaire continu (car $\forall x \in H, \|P_{H'}\| \leq \|x\|$).

Notation 2.1.5 *On désigne par $£(H,H')$ l'ensemble des opérateur borné H dans H'.*

2.2 Opérateurs adjoint

Définition 2.2.1 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in £(H)$ alors il exist un unique opérateur $T^* \in £(H)$,appelé adjoint de H, qui verifier la relation suivante*

$$\forall x,y \in H, \langle Ty,x\rangle = \langle y,T^*x\rangle$$

De plus,on a :

$$\|T\| = \|T^*\|.$$

Propriété 2.2.2 *Soit T_1et T_2 deux opérateurs de H et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors on a :*

1- $(T_1+T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

2- $(\alpha T_1)^* = \alpha T_1^*$.

3-$(T^*)^* = T$.

4-$(I)^* = I$.

5-$(T_1T_2)^* = T_1^*T_2^*$.

Preuve. Soit $y \in H$ alors $l_v\colon x \longrightarrow \langle Tx,y\rangle$est une forme linéaire continue sur H . En effect, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et utilise le caractére borné de T .

Par le théorème de représentation de Riesz des formes linéaires continues, il existe un unique vecteur $w \in H$ tel que, Pour tout $x \in H$

$$l_y(x) = \langle x,z \rangle \tag{2.1}$$

posons

$$T^* \colon H \longrightarrow H$$

$$T^* y = z$$

T^* est linéaire. En effet, si $y_1,y_2 \in H$ et $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$ alors soit $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_1 y_2$ et $z_1 = T^*(y_1)$, $z_2 = T^*(y_2)$, $T^*(y) = z$.

alors , $\forall x \in H,\ \langle x,z \rangle = \langle Ty,x \rangle$

$$\begin{aligned} &= \langle Tx,\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle \\ &= \alpha_1 \langle Tx,y_1 \rangle + \alpha_2 \langle Tx,y_1 \rangle \\ &= \alpha_1 \langle x,z_1 \rangle + \alpha_2 \langle x,y_2 \rangle \\ &= \langle x,\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \rangle \end{aligned}$$

Donc ,

$$z - \alpha_1 z_1 - \alpha_2 z_2 \in H^{\perp} = \{0\} \text{ et } z = \alpha_1 z_1 - \alpha_2 z_2 \text{ et } T^* \text{ est linéaire.}$$

T^*est borné . En effet,

soient $x,y \in H$, $\| x \|_H \leq 1 et \|y\|_H \leq 1$.alors, $|\langle x,T^* y \rangle| = |\langle Tx,y \rangle| \leq \|Tx\|_H \|x\|_H \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$

Donc ,en prenant

$$x = \frac{T^* y}{\|T^* y\|_H} \text{ pour tout } y \in H \text{ , } \|y\|_H \leq 1 \ et\ T^* y \neq 0, \|T^* y\|_H \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)} \text{ si } y \in H$$

est tel que $T^* y = 0$ l'inégalité est encore vérifiée .On obtien donc

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)} \ et\ \ T^* \text{ est borné.}$$

Enfin, pour tout $x, y \in H$,

$$\langle x, (T_1^* - T_2^*)\, y \rangle = 0$$

donc

$$T_1^* - T_2^* = 0$$

Les deux premiers propriétés provienne de la semi-linéairité à droite du produit scalaire.

Pour la troisiéme propriétés, on écrit, pour tous $x, y \in H$,

$$\langle T_1 T_2 x, y\rangle = \langle T_2 x, T_1^* y\rangle = \langle x, T_2^* T_1^* y\rangle$$

Le quatriéme propriété on remarquant que les vecteurs et joint le mème role et

$\langle Tx; y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ pour tous $x, y \in H$ si et seulment si $\langle T^* x; y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pour tous $x, y \in H$

en passant aux conjugués.

Enfin ,pour le dernier propriétés ,de

$$TT^{-1} = I = T^{-1}T$$

on déduit par passage à l'àdjoint que

$$T^* \left(T^{-1}\right)^* = I^* = I = I^* = \left(T^{-1}\right)^* T^*$$

■

Exemple 2.2.3 *L'opérateur d'identité .$I \in \pounds(H)$ et égale à son adjoint i.e : $I = I^*$*

en effet : soit $x, y \in H$:

$$\begin{aligned} \langle x, I^* y\rangle &= \langle Ix, y\rangle \\ &= \langle x, y\rangle \\ &= \langle x, Iy\rangle . \end{aligned}$$

Donc :

$$I = I^*$$

2.3 Opérateurs auto-adjoint

Définition 2.3.1 *Un opérateur T est dit auto-adjoint (ou hermitien) si $T = T^*$*

$$i.e,\ \langle Tx,y\rangle = \langle x,Ty\rangle \ \forall x,y \in H.$$

Propriété 2.3.2 *Soient H un espace de Hilbert et $T \in \pounds(H, H')$.*

1- L'orthogonal de l'image de T est le noyau de son adjoint et le noyau de T est l'orthogonal de l'image de son adjoint :

$$(T(H))^{\perp} = \ker(T) \ \ et\ \ \ker(T) = (T^*(H))^{\perp}$$

En particulier, T est injectif si et seulement si T est d'image dense.

2- L'opérateur continu T est compact si et seulement si son adjoint T .

3- Si T est auto-adjoint et si H' est un sous-espace vectoriel de H invariant par T (c'est-à-dire tel que $T(T') \subset T'$), alors $T^{\perp}$est aussi invariant par T.

Exemple 2.3.3 *Considérons l'opérateur T défini sur $\pounds^2(\mathbb{R})$ par*

$$(Tx)(t) = \exp(\mid -t \mid) x(t)$$

T est un opérateur borné auto-adjoint .On effet :

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\mid -t \mid) x(t) y(t) dt \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [\exp(\mid -t \mid) y(t)] dt \\ &= \langle x, Ay \rangle \end{aligned}$$

Remarque 2.3.4

1-Tout opérateur borné T sur un espace de Hilbert a la repésentation

$$T = T' + iT''$$

ou T' et T"sont deux opérateurs auto-adjoint, de plus

$$T^* = T' - iT''$$

En effet,il suffit de prendre

$$T' = \frac{1}{2}(T^* + T) \;\; et \; T'' = \frac{i}{2}(T^* - T)$$

2-Un opérateur T' tel que $T' = (T')^*$ est dit anti-hermitien.

2.4 L'inverse d'un opérateur

Définition 2.4.1 *Soint H et H' des espaces de Hilbert et $T \in \pounds(H,H')$ un opérateur on dit que T est inversible s'il existe $T' \in \pounds(H,H')$ tel que*

$$T \circ T' = I_{H'} \;\; et \; T' \circ T = I_H$$

ou I_H $(resp.I_{H'})$est l'opérateur indentité de H $(resp.de\ H')$.

-Un tel opérateur T (lorsqu'il existe) est unique.

-On l'appelle opérateur inverse de$T$ *ou plus simplement inverse de* T *et on le note :*

$$T' = T^{-1}.$$

Propriété 2.4.2

1- Si T_1 *et* T_2^* *sont inversibles, alors* $T_1T_2^*$ *est inversible* $(T_1T_2^*)^{-1} = T_1^{-1}(T_2^*)^{-1}$.

2- Soit T *un opérateur borné sur un espace de Hilbert avec* $R(T) = H$ *si* T *un inverse borné , alors* T^* *est inversible et* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

3- Si un opérateur borné auto-adjoint T *inversible alors* T^{-1} *est auto-adjoint .*

4- Si $T \in B(H)$ *avec* $\| T \| < 1$ *, alors l'opérateur* $(I - T)$ *est inversible, de plus*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n \geq 1} T^n.$$

Théorème 2.4.3 *Si* $\dim H < +\infty$*,les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1)T *est inversible.*

2)T *est injectif.*

3)T *est surjectif.*

4)T *admet un inverse à droite (i.e. il existe* $X \in \pounds(H,H')$ *tel que* $T \circ X = I_H$*)*

5)T *admet un inverse à gauche (i.e. il existe* $Y \in \pounds(H,H')$ *tel que* $Y \circ T = I_H$*)*

si selment si $H = H'$ *et* $T \in \pounds(H,H')$ *et* H *est de dimension finie.*

Remarque 2.4.4 *Attention si* $\dim H = +\infty$ *les proprietés équivalentes du théorèsme précidente sont plus vrais .*

Exemple 2.4.5 *Soit* $H = l^2$ *, l'espace des suites de nombres complexes de carré sommable, muni de sa norme :*

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x|^2 \right)^{1/2}, \left(x = (x_n)_{n \geq 1}\right)$$

considerons l' application : $S : l^2 \longrightarrow l^2$ *définie pour tout* $x = (x_n)_{n \geq 1}$ *par*

$$Sx = y = (y_n)_{n \geq 1}$$

ou :

$$y_1 = 0, y_2 = x_1,\ y_3 = x_2, \ldots, y_n = x_{n+1}.\ (n \geq 1)$$

Autrement dit Sx *est les suite qui commencent pas* 0 *et qui en suite est compossée des mème, termes qui la suite* x *mais décales d'un rang.*

L'application S est linéaire de l^2 dans lui mème et c'est un isomètrie puisque

$$\|Sx\|^2 = \|x\|^2.$$

Donc $S \in \pounds\left(l^2,l^2\right)$ on appelle S l'opérateur de décalage dans l^2.

On voit alors facilement que :

1-S est injective (cas isométrique).

2-S n'est pas surjective.

3-S admet un inverse à gouche

$$T = x = (x_n)_{n\geq 1}, T = (x_{n+1})_{n\geq 1}.$$

(c'est l'opérateur que (efface) la priere coordonné donc on a clairement $T \circ S = I_{l^2}$).

4-L'opérateur T n' est pas inverse à droite de l'opérateur S.

2.5 Opérateur compact

Définition 2.5.1 *Soit H, H'deux espaces de Hilbert .*

On dit que T est un opérateur compact

$$B_H = \{x \in H, \|x\| \leq 1\}$$

-L'ensemble des opérateurs compacts de H dans H'est $K\left(H,H'\right)$.

Lorsque $H = H\prime$, on note simplement $K(H,H') = K\left(H\right)$.

-On rappalle que si (X,d) est un espace métrique, un sous-ensemble Y de X est dit relativement compact si son adhérence X est compacte .

-Alors, la définition est équivalente $T \in K\left(H,H'\right)$ si et seulement si $T\left(B_H\right)$ est relativement compact .

-En particulier, il est alors immédiat que $T \in K\left(H,H'\right)$ si et seulement si $T\left(B\right)$ est relativement compact pour toute partie bornée B de H'.

Proposition 2.5.2 *(Caractéristion des opérateurs compacts)*

Si $T \in \pounds(H,H')$, alors les proposition suivantes sont équivalentes :

1- $T \in K\left(H,H'\right)$.

2-Pour tout partie bornée B de H , $T\left(B\right)$ est relativement compact dans H'.

3-Pour tout suit bornée $(x_n) \in \mathbb{N}$ de H la suite $\left(Tx_n\right)_n \in \mathbb{N}$ admet une sous-suite qui converge dans H'.

Théorème 2.5.3 *$K(H,H')$ est un sous-espace vectoriel fermé $\pounds(H,H')$, en particulier $K(H,H')$ est un espace de Hilbert sur K.*

Proposition 2.5.4 *Tout opérateur compact est borné mais n'est pas néssairement tout opérateur borné est compact.*

Preuve. On défini la boule unité fermé par :

$$B(0{,}1) = \{x \,/\, \|x\| \leq 1\}.$$

$T(B)$ est pas définition compact et pas conséquent :

$$\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| < \infty$$

Ce qui signifie que T est borné. ∎

Exemple 2.5.5 *L'opérateur identité (Id) borné mais n'est pas compact dans un espace de dimension infini.*

Théorème 2.5.6 *H, H', H'' sont des espaces de Hilbert .*

Soient $T \in \pounds(H,H')$ est $S \in \pounds(H',H'')$, si S ou T est compacts alors $(S.T)$ est compact.

Preuve. Soit B un borné dans H .

<u>**1^{ere}cas :**</u>T compact :

B borné dans $H \Leftrightarrow T(B)$ perécompacte car T compact.

(L'image d'un borné par application compacte est précompacte).

$T(B)$ perécompacte $\Rightarrow S(T(B))$ est perécompacte donc: $(S.T)(B)$ est perécompacte, d'ou $(S.T)$ est compact.

<u>**2^{éme}cas**</u> :S compact :

B borné dans $H \Rightarrow T \in \pounds(H',H'')$ $T(B)$ borné dans H' .

S compact $\Rightarrow S(T(B))$ est perécompacte H'' donc est compact. ∎

Chapitre 3

Théorié spectrale

Ce chapitre introduit la structure euclidienne et plus généralement celle d'un thérie Spectrale qui correspond a ce cadre. Il définit notions de Spectre d'un opérateur, la résolvante d'un opérateur, le rayon Spectrale et quelque proprietés Spectrales des opérateurs auto-adjoint et compacts.

3.1 Spectre d'un opérateur

Définition 3.1.1 *Soit* $T \in \pounds(H)$.

Le Spectre de T *est la partie de* $\mathbb{C}$ *définie par:*

$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (T - \lambda I)\}$ *n'est pas inversible dans* $\pounds(H)$.

Les élements $\sigma(T)$ *sont appelés valeurs Spectrale.*

Définition 3.1.2 *L'ensemble des valeurs propres de* $T \in \pounds(H)$ *est l'ensemble de* $\lambda \in \mathbb{C}$ *telle que* $(T - \lambda I)$ *n'est pas injectif.*

3.2 La résolvante d'un opérateur

Définition 3.2.1 *Soit* $T \in \pounds(H)$. $\rho(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ *qui dépend du paramètre* λ *est appelle résolvante de l'opérateur* T*, elle est définie pour tout* λ *pour lequel* $(T - \lambda I)^{-1}$ *existe, borné et son domaine* $\mathrm{Im}(T - \lambda I)$ *est dense dans* H.

Définition 3.2.2 ***(point régulier)***

Le point λ *du plan complexe* $\mathbb{C}$ *est appelé point régulier de* T*, si la résolvante*

$$\rho(T) = (T - \lambda I)^{-1}$$

existe, définie sur tout H *est borné.*

- *L'ensemble des points réguliers de l'opérateur s'appelle l'ensemble résolvante, et noté par* $\rho(T)$.

-Le Spectere de T *est le complément de* $\rho\ (T)$ *i.e.*

$$\sigma(T) = \mathbb{C}/\rho(T).$$

3.3 Rayon Spectral

Définition 3.3.1 *Soit* $\in \pounds\ (E)$ *.On définit le rayon Spectral* $r\ (T)$ *de* T *par :*

$$r\ (T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$$

Remarquons que, d'aprés les résultats précédents, on a toujours

$$r\ (T) \leqslant \|T\|\ .$$

Exemple 3.3.2 *Lorsque* $E = C\ ([0{,}1])$ *et*

$$(Tf)\ (x) = \int_0^x f\ (t)\ dt.$$

on a: $\sigma\ (T) = \{0\}$ *et donc* $r\ (T) = 0$.

3.4 Propriétés Spectrales des opérateurs auto-adjoint et compacts

3.4.1 Spectre d'un opérateur auto-adjoint

Définition 3.4.1 *Soit* λ *l'ensemble des valeurs propres de* T*. Alors :*

1- λ *est une partie infinie, dénombrable et bornée de* $\mathbb{R}$ *dont le seul point d'accumulation est* 0.

2- Les sous-espaces propres correspondant à des valeurs propres non nulles sont de dimension finie.

3-Les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Proposition 3.4.2 *-Le spectre de l'adjoint d'un opérateur* T *est donné par :*

$$\sigma(T^*) = \left\{\overline{\lambda},\ \lambda \in \sigma(T)\right\}.$$

Le spectre d'un opérateur hermitien est inclus dans un intervalle $[m,M]$ *où*

$$m = \inf_{\|x\|=1} \{(Tx,x)\} \text{ et } M = \sup_{\|x\|=1} \{(Tx;x)\}.$$

Théorème 3.4.3 *(Théorème Spectral des opérateurs auto-adjoints)*

Soit $T = \pounds(H)$ *un opérateur auto-adjoint compact .*

Notons $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n\}$ *les valeurs propres de* T *non nulles et pn la projection de* H *sur* $\ker\ (T-\lambda_n)$ *. alors, pour* $n \neq m$, $p_n p_m = p_m p_n = 0$, p_n *est de rang fini,* $\lambda_n \to 0$ *lorsque* n *tend vers* ∞.

Et

$$T = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i P_i = 1$$

ou la série converge au sens de la norme d'opérateur .

Preuve. Il existe un nombre réel $\lambda_1 \in \sigma_p(T)$ telle que $|\lambda| = \|T\|$.

Soient :

$$F_1 = \ker(T - \lambda_1)$$

et P_1 la projection de H sur F_1.

On pose $H_2 = F_1^{\perp}$. Comme T laisse stable F_1 est auto-adjoint , il laisse aussi stable H_2.

Soit $T_2 = T\ |_{H_2}$la restriction de T à H_2. Alors T_2 est un opérateur compact auto-adjoint . Soient un nombre réel $\lambda_2 \in \sigma_p(T_2)$ telle que

$$|\lambda_2| = \|T_2\|.$$

Soient $F_2 = \ker(T_2 - \lambda_2)$. Alors

$$F_2 = \ker(T - \lambda_2)$$

et, comme $F_2 \subset F_1^{\perp}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Soient alors P_2 la projection de H sur F_2 , posons

$$H_3 = (F_1 \oplus F_2)^{\perp}.$$

Alors, comme $\|T_2\| \leq \|T\|$ on a $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$.

Par recurrence , on construit une suite des valeurs propres de$T$ telle que

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots\ldots \text{de plus, pour tout } n \geq 1.$$

On pose $F_n = \ker(T - \lambda_n)$, alors $|\lambda_{n+1}| = |T| \left(F_1 \oplus F_n\right)$

on noté aussi pour tout $n \geq 1$, P_n est la projection de H sur F_n , la relation

$$p_n p_m = p_m p_n = 0$$

pour $n \neq m$ vient du fait que les F_n sont deux à deux orthogonaux .

Enfin , le spectre de T est dénombrable, et la construction faite ici nous montrons que

$$\{\lambda_1 \ldots\ldots\} = \sigma(T) / \{0\} .$$

Prouvons que $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ ainsi définie converge vers 0. Tout d'abord , comme

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots\ldots$$

la suite $(|\lambda_n|)_{n\geq 1}$ est convergente, mettons vers α . Puis , pour tout $n \geq 1$, on choisi

$$x_n \in F_n, \|x_n\|_H = 1$$

Comme T est compact , $\exists x \in H$ est une sous-suite$(x_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $\|x_{n_k} - x\|_H \to 0$ lorsque k tend vers ∞.

Pour $n \neq m$, $x_n \perp x_m$, et pour tout $k \geq 1$,

$$T x_{n_k} = \lambda_{n_k} x_{n_k}$$

donc pour $k, l \geq 1$ on a

$$\|T x_{n_k} - T x_{n_l}\| = \lambda_{n_k} + \lambda_{n_l} \geq 2\alpha^2.$$

Mais comme $(T x_{n_k})_{k\geq 1}$ est une suite de cauchy , on doit avoir $\alpha = 0$. Soient $k \in \{1, \ldots\ldots ,n\}$ et $x \in F_K$. Alors

$$\left(T \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j\right) x = Tx - \lambda_k x = 0.$$

Donc

$$F_1 \oplus \ldots\ldots \oplus F_n \subset \ker\left(T - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j\right)$$

si maintenant $x \in (F_1 \oplus \ldots\ldots \oplus F_n)^{\perp}$, alors $P_j x = 0$, pour tout $j \in \{1, \ldots\ldots, n\}$ et

$$\left(T \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j \right) x = Tx.$$

Comme de plus T laisse stable $(F_1 \oplus \ldots\ldots \oplus F_n)^{\perp}$ on obtient :

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j \right\| = \left\| T \left(F_1 \oplus \ldots\ldots \oplus F_n \right)^{\perp} \right\| \lambda_{n+1} \to 0$$

Lorsque n tend vers 1 . Donc la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j \text{ converge en normé opérateur vers } T.$$

■

3.4.2 Spectre d'un opérateur compact

Les opérateurs compacts possédent des propriétés analogues aux opérateurs en dimension finie. C'est le cas pour la résolution en systémes linéaires en étudiant l'alternative de Fredholm. nous allons maintenant explorer les propriétés spectrales des opérateurs compacts .

En particulier, nous allons voir que tant le Spectre des opérateurs compacts que les propriétés de diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints sont des "Passage à limite" des résultats correspondant en dimention finie .

Nous allons commencer en donnant un résultat géneral de structure du Spectre des opérateurs compacts.

Proposition 3.4.4 *Soit $T \in \pounds(E)$.*

1-Toute valeur Spectrale non nulle de T est une valeur propre de T et son sous-espace propre associé est de dimension finie.

2-Le Spectre de T est dénombrable. S'il est infini, on peut ordonner ses éléments non nuls en une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$$

Théorème 3.4.5 ***(Riesz - Schauder)***

Soient H un espace de Hilbert et $T \in B_\infty(H)$. alors, $\{\sigma(T)/\{0\}\}$est un ensemble discret de C formé de valeurs propres de T de multiplicités finies. de plus, si H est de dimension infinie, $0 \in \sigma(T)$.

Preuve. Posons, $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = zT$ .alors f est une application holomorphe sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $B_\infty(H)$.

Soit$\{\rho = z \neq 0/zTx = x$ admet une solutionu $x \neq 0\}$. Alors si $z \in \rho, \frac{1}{z}$ est valeur propre de T. puis, comme $z = 0 \notin \rho$, telle que ρ est un ensemble discret, et si $\frac{1}{z} \notin \rho$, alors

$$(T - z)^{-1} = \frac{1}{z}(\frac{1}{z}T - Id_E)^{-1}.$$

Donc,

$$\rho(T)/\{0\} = \left\{\frac{1}{z}/z \in \rho\right\} \text{ et } \sigma(T)/\{0\}$$

est ensemble discret formé de valeurs propres de T par définition de ρ .

Si $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, posons $F = \ker(T - \lambda)$. alors, si $B_{H'}$ désigné la boule unité de H' et B_H celle de H, on a

$$B_{H'} = \frac{1}{\lambda}\lambda B_{H'} = \frac{1}{\lambda}T(B_{H'}) \subset \frac{1}{\lambda}T(B_H).$$

Or, comme T compact, $T(B_H)$est relativement compact et $B_{H'}$ l'est aussi . donc,par le théoreme de Riesz , H 'est de dimension finie , donc chaque valeur propre non nulle de T est de multiplicité finie .

Suppossons que H est de dimension infinie. si $0 \notin \sigma(T)$, alors T est bejective et T^{-1} est continue.

Donc $B_H = T^{-1}(T(B_H))$ est relativement compact car $(T(B_H))$ l'est par compacité de T . Donc, là encore, par le méme théoreme de Riesz, H est de dimension finie .

Cela contredit notre premiére hypothése, donc $0 \in \sigma(T)$. ■

Bibliographie

[1] J.B.Conway .A course in operateur théorie, GSM 21A, merican mathematical society providence, RI, 200.

[2] M.H.Mortard,on the normality of the sum of tow normal operateurs , complexe analysis and operateur theory(à paraitre).

[3] walter - rudin "Analyse fonctionnelle " E dixienne international , paris 1995.

[4] Livre Mathématiques analyse L3 de "Jean -Pierre Marco".paris 2009

[5] Compléments de théorie spectrale et d'analyse harmonique ,Frédéric Paulin, Cours de deuxième année de magistère, Année 2013-2014 ,Version préliminaire.

[6]"Jean sait raymand" topologie calcule diffirentiel et variable complexe..

[7]"Geores skandalis" topolgie et analyse 3^e année.

[8] "Brezis.H analyse fonctiennelle,thérie et application,masson ,paris,1993.

[9] "boccara. N" analyse fonctionnelle , paris, 1998