République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire

Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence

En Filière : Mathématiques

Etude des opérateurs non bornés dans l'espace de Hilbert

Préparé par :

- Laib Hayet
- Boukedjani Sarra
- Sifoune Asma

Encadré par :

- F.Slemnia

Année universitaire :2014/2015

Remerciements

Nous remercions Allah, le tout puissant de nous avoir donné la santé, la volonté et la patiente pour l'accomplissement de ce mémoire.

En premier lieu nous exprimons toute notre gratitude pour notre encadreur Madame Selamnia Fatiha pour ses précieux conseils, ses disponibilités, la confiance qu'il nous a toujours témoignée et la sollicitude dont elle nous a entouré, et ce tout au long de l'élaboration du présent travail.

Nous remercions aussi mes familles pour la soutient chaleureux apporté lors de la réalisation de ce travail.

Enfin, nous exprimons nos plus remerciements à toute Personne qui nous a aidé à élaborer ce travail de proche ou de loin.

Hayet – Sarra – Asma

Table des matières

Introduction générale

Les mathématiques c'est l'ensemble des connaissances abstraites résultant de raisonnements logiques appliqués à divers objets aussi c'est le domaine de recherche développant ces connaissances,elle possède plusieurs branches, dans le cas générale en mathématique un opérateur est une application entre deux espaces topologiques, elle fournit beaucoup de types et recouvrant à peu prés tous les domaines mathématiques comme l'algèbre la théorie des ensembles et les applications etc...

Elle ont comme principal intérêt de pouvoir traiter un nombre de données et leur utilisations sont obligatoires dans la compréhension. Dans cette mémoire on va travaille sur deux chapitres

Chapitre 1 : notion préliminaire et définitions qui contient quelques définitions et des propriétés des espaces comme l'espace topologique, vectoriel, normé et l'espace de Hilbert

Chapitre 2 : les opérateurs non borné sur un espace de Hilbert dans ce chapitre on étude trois points essentiels : premièrement opérateur non borné, deuxièmement l'adjoint d'un opérateur non borné et enfin les opérateurs symétriques et auto-adjoint, et l'objet total de cette mémoire est d'étudier les opérateurs non borné sur un espace de Hilbert.

Notations générales

$\mathbb{K}$: le corps tel que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

E, G : deux espaces vectoriels.

$\mathbb{R}$: corps des nombres réels.

F : sous-espace vectoriel.

$P(X)$: ensemble de partie de X.

$\| \, . \, \|$: norme.

$(E, \|.\|)$: espace vectoriel normé.

$\langle ., . \rangle$: produit scalaire.

$(E, \langle ., . \rangle)$: espace préhilbertien.

H : espace de Hilbert.

A : opérateur.

$D(A)$: domaine de définition de l'opérateur A.

$(D(A), A)$: L'opérateur $A : D(A) \longrightarrow H$.

$\Gamma(A)$: graphe d'un opérateur A.

$\mathrm{Im}(A)$: image de l'opérateur A.

$\ker(A)$: noyau de l'opérateur A.

$A^{\perp}$: l'orthogonale de A.

A^{*} : l'adjoint de l'opérateur A.

$D(A^{*})$: domaine de définition de l'opérateur A^{*}.

$\oplus$: la somme direct.

$L(E, \ G)$: l'ensemble des applications linéaires

$\overline{A}$: L'adhérence de A.

$L(H)$: espace des opérateur dans H.

Chapitre 1

Préliminaires et définitions

Dans ce chapitre nous expliquons comment nous allons introduire toutes les significations que nous avons utilisé tout au long de ce mémoire, c'-à-dire toutes les définitions et les théorèmes qui nous sont indisponible pour une bonne étude comme l'espace vectoriel, l'espace vectoriel normé, l'espace topologique et l'espace de Hilbert.

1.1 Espace vectoriel

Un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un ensemble E muni de deux lois de composition notées $(+)$ et $(\cdot)$, tel que

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \forall x, y \in E: \; x + y = y + x \\ \forall x, \, y, \, z \in E: \; x + (y + z) = (x + y) + z \\ \forall x \in E, \exists \, 0_E \in E : x + 0_E = 0_E + x = x \\ \exists x' \in E : x + x' = x' + x = 0_E \end{array} \right\}$$

$$(2) \; \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, \; y \in E : \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

$$(3) \; \forall \lambda, \; u \in \mathbb{K}, \; \forall x \in E : (\lambda + u) \cdot x = \lambda \cdot x + u \cdot x$$

$$(4) \; \forall \lambda, \; u \in \mathbb{K}, \; \forall x \in E : \lambda \, (u \cdot x) = (\lambda \cdot u) \cdot x$$

$$(5) \; \exists 1 \in \mathbb{K}, \forall x \in E : 1 \cdot x = x$$

Définition 1.1.1 *Un sous-espace vectoriel est un sous-ensemble $F \subset E$ qui contient l'élément neutre 0_E, et qui est stable par les deux lois de composition c'est-a dire*

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \; x + y \in F (\textit{pour tout } x \in F \; \textit{ et } y \in F) \\ \bullet \; \; \lambda \cdot x \in F (\textit{pour tout } \lambda \in \mathbb{K} \; \textit{ et } x \in F) \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \forall x, y \in F, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha x + \beta y \in F$$

$F_1 + F_2 = \{x + y, x \in F_1, y \in F_2\}$

$E = F_1 \oplus F_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} 1) \;\; F_1 + F_2 = E \\ 2) \;\; F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$

Remarque 1.1.2 *L'intersection quelconque de sous–espaces vectoriels est un sous–espace vectoriel.*

1.2 Espace topologique

Définition 1.2.1 ***(Topologie)*** *Soit X un ensemble, $P(X)$ l'ensemble des parties de X et θ un sous–ensemble de $P(X)$, une topologie θ sur l'ensemble X est une partie de X vérifie les propriétés suivantes*

1) L'ensemble vide ϕ et X sont dans θ.$(\phi, X \in \theta)$.

2) θ est stable par réunions quelconques.$(\forall (O_j)_{j\in I} \subset \theta : \cup_{j\in I} O_j \in \theta)$.

3) θ est stable par intersections finies.$(\forall (O_i)_{i=1,\overline{n}} \subset \theta : \cap_{i=1}^{n} O_i \in \theta)$.

- *Un tel couple $(X,\ \theta)$ est appelé espace topologique.*
- *Les élément de θ sont appelé les ouverts de la topologie θ.*
- *Une partie de θ est dite fermée si son complémentaire est ouvert.*

Définition 1.2.2 ***(Comparaison des topologies)***

Soient X un ensemble θ_1 et θ_2 deux topologies sur X.

On dit que θ_1 est plus fine que θ_2 ou que θ_2 est moins fine que θ_1 si $\theta_2 \subset \theta_1$

Définition 1.2.3 ***(Voisinage)*** *Soit X un espace topologique, et soit $V \subset X$. On dit que V est un voisinage de $x \in X$ si V contient un ouvert contenant x.*

1.3 Espace vectoriel normé

Dans tout la suite, sauf mention du contraire, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, muni de la valeur absolue habituelle.

Définition 1.3.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, une norme sur E est une application*

$$\| \, . \, \| : E \longrightarrow [0, +\infty]$$

vérifie les propriétés suivantes

(i) $\|x\| \geq 0.et\ \|x\| = 0\ ssi\ x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| =| \lambda | \ \|x\|\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \forall x,\ y \in E$

le couple $(E,\ \|\cdot\|)$ *est un espace vectoriel normé.*

• *Une application* $x \longmapsto \|x\|$ *vérifiant (ii) et (iii) mais non nécessairement (i) est dit semi-norme sur* E.

• *L'application* $(x,\ y) \longmapsto \|x-y\|$ *est une distance sur* E*, appelée la distance canonique associée à la norme* $\|\cdot\|$.

Définition 1.3.2 *Soit* $(E,\ \|\cdot\|)$ *un espace normé.*

• *On dit que la suite* $(x_n)_{n\in\ \mathbb{N}}$ *d'élément de* E *est converge vers* x *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \| x_n - x \| < \varepsilon$$

• *la suite* $(x_n)_{n\in\ \mathbb{N}}$ *est de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q \geq n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow \| x_p - x_q \| < \varepsilon$$

Définition 1.3.3 ***(Espace complet)*** *On dit que l'espace vectoriel normé* $(E,\ \|\cdot\|)$ *est complet si et seulement si toute suite de Cauchy dans* E *est convergente.*

1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.4.1 ***(Forme hermitienne)*** *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, et soit l'application* $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$*. On dit que* φ *est une forme hermitienne si et seulement si*

1) $\varphi(x + x',\ y) = \varphi(x,\ y) + \varphi(x',\ y)$

2) $\varphi(\lambda x,\ y) = \lambda \varphi(x,\ y)$

3) $\varphi(y,\ x) = \overline{\varphi(x,\ y)}$

On dit que φ *est définie positive si et seulement si*

1) $\varphi(x,\ x) \geq 0,\ \forall x \in E$

2) $\varphi(x,\ x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Définition 1.4.2 ***(Produit scalaire)*** *On appelle produit scalaire sur* E*, toute forme hermitienne définie positive* φ *telle que*

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,\ y) &\mapsto \varphi(x,\ y) \end{aligned}$$

et on note $\langle ., . \rangle$.

Proposition 1.4.3 *Soit* $\langle ., . \rangle$ *un produit scalaire sur* E *alors l'application*

$$\begin{aligned} \| \,.\, \| : E &\to [0; +\infty[\\ x &\mapsto \| x \| = \sqrt{\langle x,\ x \rangle} \end{aligned}$$

est une norme sur E.

Définition 1.4.4 ***(Espace préhilbertien)*** *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien* $(E,\ \langle .,. \rangle)$.

Remarque 1.4.5 *On sait bien que les espaces de dimension finit sont des espaces préhilbertiens.*

Définition 1.4.6 ***(Espace de Hilbert)*** *On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertienne complet. On le note* H

Définition 1.4.7 ***(Orthogonalité)*** *Soit* $(E, \langle ., . \rangle)$ *un espace préhilbertien et* $x \in E$. *On appelle orthogonale de* x *l'ensemble noté* $x^{\perp}$ *et définie par*

$$x^{\perp} = \{ y \in E,\ \ \langle x,\ y \rangle = 0\ \forall x \in E \}.$$

Soit $A \subset E$. *On appelle orthogonale de* A *qu'on note* $A^{\perp}$ *l'ensemble des points orthogonaux à tout les points de* A *c'est à dire*

$$A^{\perp} = \{ y \in E,\ \ \langle x,\ y \rangle = 0\ , \quad \forall x \in E \}.$$

- *Deux sous-espaces* F_1, F_2 *d'un espace préhilbertien* $(E, \langle ., . \rangle)$ *sont dits orthogonaux si*

$$\forall x \in F_1, \forall y \in F_2 : \langle x,\ y \rangle = 0$$

Théorème 1.4.8 ***(Projection orthogonal)*** *Soit* $(E, \langle ., . \rangle)$ *un espace préhilbertien et* F *un sous–espace vectoriel complet de* E *alors*

$$E = F + F^{\perp}.$$

Proposition 1.4.9 *Pour tout sous espace* F *de* H, *on a la décomposition* $H = F \oplus F^{\perp}$ *En particulier,* F *est dense dans* H *si et seulement si* $F^{\perp} = \{0\}$

Définition 1.4.10 ***(Application linéaire)*** *Soient E, G deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une application φ définie de E dans G est dit linéaire si elle satisfait à*

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$$

Définition 1.4.11 ***(Opérateur)*** *Soient E, G deux espaces vectoriels topologiques. Un opérateur $A : E \to G$ est une application linéaire de E dans G.*

Définition 1.4.12 ***(La densité)*** *Soit (E, θ) un espace topologique, soit A, $B \subset E$. On dit que A est dense dans B si et seulement si $A \subset B \subset \overline{A}$.*

On dit que A est dense dans E, (partout dense) si et seulement si $A \subset E \subset \overline{A}$.

Comme nous avons toujours $\overline{A} \subset E$, alors A est partout dense si et seulement si $\overline{A} = E$.

Définition 1.4.13 *Soit E un espace vectoriel. Pour tout sous espace vectoriel F de E, on a :*

$$F \oplus F^{\perp} = E \quad et \quad F^{\perp\perp} = F$$

Définition 1.4.14 ***(Noyau)*** *On appelle noyau d'une application φ de $L(E,\ G)$ le sous ensemble de E des éléments x vérifiant $\varphi(x) = 0$. On note $\ker(\varphi)$.*

$$\ker(\varphi) = \{x \in E,\ \varphi(x) = 0\} = \varphi^{-1}(\{0\})$$

En particulier $\ker(\varphi)$ est un sous espace vectoriel de E.

Définition 1.4.15 ***(Image)*** *On appelle image de φ de $L(E, G)$, le sous ensemble noté $\mathrm{Im}(\varphi)$ de G telle que*

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{y \in G,\ \exists\ x \in E,\ y = \varphi(x)\}$$

En particulier $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous espace vectoriel de G.

Théorème 1.4.16 ***(Inégalité de Cauchy-Schwartz)*** *Soit φ une forme hermitienne positive sur E. Alors, pour tous x, $y \in E$, on a :*

$$|\ \varphi(x,\ y)\ |^{\,2} \leq \varphi(x,\ x)\, \varphi(y,\ y)$$

Exemple 1.4.17

1\ L'espace $\mathbb{K}^n$ *, muni du produit Scalaire*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

est un espace de Hilbert.

2\ L'espace L^2*, muni du produit scalaire*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

est un espace de Hilbert.

3\ Plus généralement, soit X *un ensemble muni d'une tribu* B *et d'une mesure positive*

$$u : B \longrightarrow R_+ \cup \{+\infty\}.$$

alors : $L^2(X,\ B,\ U)$ *muni du produit scalaire*

$$\langle f,\ g\rangle = \int_X f(x)\,\overline{g(x)}du(x)$$

est un espace de Hilbert.

4 $C[0,\ 1]$*, muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}du(x)$$

est un espace de Hilbert.

Proposition 1.4.18 ***(Identité de polarisation)*** *Soit* $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ *hermitienne positive sur un espace vectoriel normé* E

- *dans le cas* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, on a pour tous* $x,\ y \in E$

$$\varphi(x,\ y) = \frac{1}{4}\left(\varphi(x+y,\ x+y) - \varphi(x-y,\ x-y)\right)$$

- *dans le cas* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, on a pour tout* $x,\ y \in E$

$$\varphi(x,\ y) = \frac{1}{4}\left(\varphi(x+y,\ x+y) - \varphi(x+y,\ x+y) + i\varphi(x+iy,\ x+iy) - i\varphi(x-iy,\ x-iy)\right)$$

Chapitre 2

Les opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert

On représente dans ce chapitre la base de notre étude, nous partageons cette titre en trois parties sont :

les opérateurs non bornés, l'adjoint d'un opérateur non borné er les opérateurs symétriques et auto-adjoint.

Chaque partie contient les notions et les explications nécessaires pour une bonne compréhension de tout le contenu.

2.1 Opérateur non borné

Définition 2.1.1 *Soit H un espace de Hilbert*

On appelle opérateur linéaire non borné de H dans H toute application linéaire $A : D(A) \subset H \to H$ définie sur un sous espace vectoriel $D(A) \subset E$ à valeurs dans H.

$D(A)$ est le domaine de définition de A. On note $(D(A), A)$.

On dit que A est borné s'il existe une constante $C \geq 0$ tel que

$$\| Ax \| \leq C \| x \|, \forall x \in D(A)$$

où

D est un sous-espace de H que l'on appelle le domaine de A, $D = Dom(A)$.

$A : D \to H$ une application linéaire.

Définition 2.1.2 *un opérateur A définit dans un espace de Hilbert H est dit fermé si pour toute suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $D(A)$ telle que la suite $A(x_n)$ soit convergente. On a :*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, x \in D(A) \quad et \quad \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax$$

Définition 2.1.3 *Le graphe d'un opérateur $A : D(A) \to H$ est le sous-espace de $H \times H$ donné par*

$$\Gamma(A) = \{(x,\ A\ x) : x \in D(A)\} \subset D(A) \times H$$

- *On dit que $(A, D(A))$ est fermé si on graphe $\Gamma(A)$ est fermé dans $D(H) \times H$.*
- *On dit qu'un opérateur $(A\ ,\ D(A))$ est de domaine dense si*

$$\overline{D(A)} = H$$

- *On dit qu'un opérateur A est fermable dans H s'il admet un prolongement fermé.*

Définition 2.1.4 ***(Extension)*** *Soit $A : D(A) \to H$ et $B : D(B) \to H$ deux opérateurs non bornés. B est appelé extension de A si $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$.*

Dans ce cas, on écrit $A \subset B$. Il est claire que B est une extension de A si et seulement si

$$D(A) \subset D(B) \quad et \quad Ax = Bx, \ \ pour \ \ x \in D(A)$$

2.2 Adjoint d'un opérateur non-borné

Définition 2.2.1 *Soit H un espace de Hilbert. On appelle Adjoint de A l'opérateur A^* définie par*

$$D(A^*) = \{y \in H, \exists\ C > 0 \quad tel\ que \quad |\langle Ax, y\rangle| \leq C \parallel x \parallel, \forall x \in D(A)\}$$

et

$$\forall x \in D(A), \forall y \in D(A^*) : \langle Ax,\ y\rangle = \langle x,\ A^*y\rangle$$

A^* est une application linéaire de $D(A^*)$ dans A tel que

$$\langle Ax,\ y\rangle = \langle x,\ A^*y\rangle, \forall x \in D(A)$$

Proposition 2.2.2 *Si A est un opérateur linéaire possède un adjoint A^* à domaine dense alors A^{**} est une extension de A.*

Preuve.

Montrons que $D(A) \subset D(A^{**})$ et $A^{**}x = Ax$.

$\forall x \in D(A)$ et $y \in D(A^{*})$, on a $\langle y,\ Ax\rangle = \langle A^{*}y,\ x\rangle$.

d'où en prend les complexes conjugués

$\langle Ax,\ y\rangle = \langle x,\ A^{*}y\rangle$.

$D(A^{*})$ étant dense,A^{**} existe et $\langle A^{**}x,\ y\rangle = \langle x,\ A^{*}y\rangle$.

d'où $\langle A^{**}x,\ y\rangle = \langle Ax,\ y\rangle$.

par conséquent $x \in D(A) \Rightarrow x \in D(A^{**})$.

donc $D(A) = D(A^{**})$.

d'autre part, $\forall y \in D(A^{*})$ et $x \in D(A^{**})$, $\langle x,\ A^{*}y\rangle = \langle A^{**}x,\ y\rangle$.

donc $\forall x \in D(A) \subset D(A^{**})$, $A^{**}x = Ax$ c-à-d $A \subset A^{**}$,

i.e A^{**} est une extension de A.

Proposition 2.2.3 *Soit A un opérateur fermable a domaine dense. Alors*

1) $\mathrm{Im}(A^{*})^{\perp} = \ker\left(\overline{A}\right)$.

2) $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \ker(A^{*})$.

3) $\overline{\mathrm{Im}(A^{*})} = \ker\left(\overline{A}\right)^{\perp}$.

4) $\overline{\mathrm{Im}(A)} = \ker(A^{*})^{\perp}$.

Proposition 2.2.4 *Soient E et G deux espaces de Hilbert et $A \in L(E,G)$ alors il existe un unique $A^{*} \in L(E,\ G)$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in G$, on ait*

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, A^{*}(y)\rangle$$

On a de plus

$$\|A^{*}\| = \|A\|$$

Preuve.

Pour tout $y \in G$ l'application $x \to \langle A(x),\ y\rangle$ est linéaire et continue (de normé inférieure a $\|A\|\|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz) D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique élément noté $A^{*}(y)$ tel que

$$\langle A(x),\ y\rangle = \langle x,\ A^{*}(y)\rangle$$

On vérifie facilement que pour tous $y, z \in F$ et λ scalaire, $A^{*}(y) + \lambda A^{*}(z)$ vérifie la propriétéqui définit $A^{*}(y + \lambda z)$ par unicité

$$A^{*}(y) + \lambda A^{*}(z) = A^{*}(y + \lambda z)$$

ce qui preuve que A^* est linéaire.

Définition 2.2.5 *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non–borné sur un espace de Hilbert H de domaine dense dans H.*

A est dit hermitien ou bien symétrique si

$$\forall x,\ y \in D(A),\ \langle Ax,\ y\rangle = \langle x,\ Ay\rangle$$

cela signifie que A^* est une extension de A.

Définition 2.2.6 *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non–borné dans un espace de Hilbert H de domaine $D(A)$ dense dans H. Alors A^* existe et il est un opérateur fermé.*

Proposition 2.2.7 *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non–borné dans un espace de Hilbert H de domaine $D(A)$ dense dans H. Alors*

1) A est fermable si est seulement si $D(A^*)$ est dense dans H, dans ce cas on a $\overline{A} = A^{**}$.

2) Si A est fermable alors $\left(\overline{A}\right)^* = A^*$.

2.3 Opérateur symétrique et auto-adjoint

Définition 2.3.1 *Un opérateur A définie dans un espace de Hilbert H est dit symétrique si*

$$\forall x, y \in D(A), \langle y,\ Ax\rangle = \langle Ay,\ x\rangle$$

Remarque 2.3.2

1) Un opérateur linéaire A définie dans un espace de Hilbert est dit auto-adjoint si $A^* = A*$.

2) Soit A un opérateur symétrique. On dit que A est essentiellement auto-adjoint si la fermeture est auto-adjoint.

3) Si A est symétrique alors A est fermable et $A \subset A^{**} \subset A^*$.

4) Si A est fermé et symétrique alors $A = A^{**} \subset A^*$.

5) Si A est auto-adjoint alors $A = A^{**} A^*$.

Proposition 2.3.3 *Si A est symétrique alors $A \subset A^*$ c'est à-dire*

$$D(A) \subset D(A^*), \ A^*x = Ax, \ \forall x \in D(A)$$

Preuve.

Supposons que $D(A) \subset D(A^*)$ et montrons que $A^*x = Ax$.

A est symétrique $\Leftrightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ et

$$\begin{aligned} \forall x, y \in D(A) &\implies y \in D(A^*) \\ &\implies \langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \forall x \in D(A) \\ &\implies A^*x = Ax \end{aligned}$$

Théorème 2.3.4 *Si A est un opérateur symétrique alors $< Ax, x >$ est réel pour tout $x \in D(A)$.*

Preuve.

Soit A un opérateur symétrique. Soit $x \in D(A)$. On a $\langle Ax, \ x\rangle = \langle x, \ Ax\rangle = \overline{\langle Ax, \ x\rangle}$, donc $\langle Ax, \ x\rangle$ est réel.

Remarque 2.3.5 *un opérateur auto-adjoint est nécessairement un opérateur symétrique, mais la réciproque est fausse sauf le cas particulier des opérateurs bornés.*

Lemme 2.3.6 *Soit $A : D(A) \to H$ un opérateur auto-adjoint, alors A est fermé et on a*

1) $\ker(A) = \operatorname{Im}(A)^\perp$.

2) $\overline{\operatorname{Im}(A)} = \ker(A)^\perp$.

3) $H = \ker(A) \oplus \overline{\operatorname{Im}(A)}$.

Théorème 2.3.7 *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur symétrique tel que*

$$\operatorname{Im}(A + I) = H$$

Alors le domaine de A est dense dans H et A est auto-adjoint.

Proposition 2.3.8 *Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur symétrique. Alors*

$$A \subset A^{**} \subset A^*$$

Proposition 2.3.9

a) Soit $A : D(A) \longrightarrow H$ un opérateur auto-adjoint qui est une bijection sur son image dense dans H. Alors l'opérateur inverse A^{-1} est aussi auto-adjoint.

b) Soit A un opérateur symétrique tel que $D(A) = H$. Alors $A = A^*$.

c) Soit A un opérateur tel que $(AU,\ Z) = (UA,\ Z)$ pour tout $U, Z \in D(A)$ et $\mathrm{Im}\, A$ est dense et $A = A^*$.

Définition 2.3.10 *Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur A dit normal si $A^*A = AA^*$. Donc A est auto-adjoint (ou symétrique dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire $A^* = A$).*

Proposition 2.3.11 *Si A un opérateur auto-adjoint alors*

$$\| A \| = \sup \{ | \langle Ax, x \rangle | : \| x \| = 1 \}$$

Preuve.

Soit

$$C = \sup \{ | \langle Ax, x \rangle | : \| x \| = 1 \}$$

On a clairement $C \leq \| A \|$ et il s'agit de montrer que $\| A \| \leq C$.

Comme $A = A^*$, la forme sesquilinéaire $\varphi : (x,\ y) \longrightarrow \langle Ax, y \rangle$ sur H est hermitien (ou symétrique quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) on a donc

$$\varphi(x + y,\ x + y) - \varphi(x - y,\ x - y) = 4 \operatorname{Re}(\varphi(x,\ y))$$

pour tout x, $y \in H$.

D'autre part, on a

$$\varphi(x,\ x) \leq C \| x \|^2$$

pour tout $x \in H$.

D'où

$$4 \operatorname{Re}(\varphi(x,\ y)) \leq C \left(\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 \right)$$

pour tout x, $y \in H$.

Soit $x, y \in H$ avec $\| x \| = \| y \| = 1$, on a donc par le lemme de la médiane

$$4 \operatorname{Re}(\varphi(x,\ y)) \leq 2C \left(\| x \|^2 + \| y \|^2 \right) = 4C$$

Soit $U \in \mathbb{K}$ avec $\mid U \mid = 1$ et tel que

$$\varphi(x,y) = U \mid \varphi(x,y) \mid$$

On a alors, en remplaçant dans ce qui précède y par Uy (en remarquons que $\| Uy \| = 1$) :

$$\mid \varphi(x,y) \mid = \mathrm{Re} \mid \varphi(x,y) \mid = \mathrm{Re}(\varphi(x,\ y)) \quad avec \quad \mathrm{Re}(\varphi(x,y)) \leq C$$

$(D(A), A)$ un opérateur non-borné symétrique sur H alors A^* est une extension fermée de A, et puisque $D(A) \subset D(A^*)$ et $D(A)$ dense dans H, alors $D(A^*)$ est aussi dense dans H et on a par conséquant A fermable.

$\overline{A} = A^{**}$ or A est la plus petite extension fermée de A. En particulier si A est symétrique fermé alors

$$A = A^{**} \subset A^* \quad et \quad A = A^{**} \subset A^{***}$$

Si A est auto-adjoint $A^* = A$ alors

$$A = A^* = A^{**} = A^{***}$$

Remarque 2.3.12

1) *Si A est auto-adjoint alors A est fermé, en déduit alors qu'un opérateur non-borné symétrique fermé est auto-adjoint si seulement si son adjoint est symétrique.*
2) *Si A est symétrique et fermé, alors A est auto-adjoint.*
3) *Si A^* est symétrique fermé alors $\overline{A} = A^{**}$ est une extension de A^*.*

Définition 2.3.13 *Soit $(D(A), A)$ un opérateur non-borné, symétrique de domaine $D(A)$ dense.*

On dit que A est essentiellement auto-adjoint si $\overline{A}$ est auto-adjoint ou bien $\left(\overline{A}\right)^* = \overline{A}$.

Remarque 2.3.14

1) *Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint mais la réciproque est fausse.*
2) *Si A est essentiellement auto-adjoint alors A^* est la petite extension fermée de A.*
3) *Si A est essentiellement auto-adjoint alors A^* est auto-adjoint.*

Proposition 2.3.15 *Si A est essentiellement auto-adjoint, A a une unique extension auto-adjoint $\overline{A}$.*

Preuve.

Par définition, $\overline{A}$ est une extension auto-adjoint de A. Soit S une deuxième extension auto-adjoint de T. Alors

$$A \subset S \Longrightarrow \overline{A} \subset S \quad et \quad S^* \subset \left(\overline{A}\right)^* \Longrightarrow S \subset \overline{A^*} = \overline{A}$$

donc $S = \overline{A}$.

Proposition 2.3.16 *Soit A et S deux opérateurs non-bornés auto-adjoints. Si $A \subset S$ alors $A = S$*

Preuve.

On a

$$A \subset S \Longrightarrow S^* \subset A^* \Longrightarrow S \subset A$$

d'où $A = S$.

Bibliographie

[1] F. Bayen, christian margaria. Tome 2. Espace de Hilbert et opérateur. 1986.

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle. théorie et Applications. Masson. paris. 1983.

[3] N. Boccara, analyse Fonctionnelle une introduction pour physiciens. août 1984.

[4] B. Bekka, Espace vectoriel normé cour L3 Rennes. 08-04-2010

[5] F. Bayen christan Margarira, Tome 2 espace de Hilbert et opérateurs 1986.

[6] A. Intissar, Analyse fonctionnelle et théorie spectrale pour les opérateurs compacts non auto-adjonts. 1997.

[7] V. Kotliar, Analyse fonctionnelle. Éditions Mir, 1985.

[8] H. Mohamed, introduction aux Espaces Normés. Office des publication universitaire. 1994.