الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de licence
En : Filière mathématiques

Le système linéaire AX=B et ses applications

Préparé par :

- **BOUNAMOUS KHADIDJA**
- **BOUREDROUDA AMINA**
- **BOUZERAA HAKIMA**
- **DIAF HESNA**

Encadrer par :

Mr. BOUFELGHA IBRAHIM

Année universitaire : 2014/2015

REMERCIEMENTS

Au nom du Dieu le miséricordieux par essence et par excellence...

Nous adressons notre profond remerciement tout d'abord notre encadreur

Mr. BOUFELGHA IBRAHIM

Pour sa patience, et surtout pour sa confiance, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance.

Nous voudrions également remercier tout le personnel de l'institut de sciences et de la technologie.

Enfin, nous remercions toutes personnes qu'ont contribué de prés ou de lois à l'achèvement de ce travail surtout notre amis : SANA, BOUCHRA, DJAHIDA, IMEN, FOUZIA, AMINA, NASSIMA...

Sans oublier nos frères de la classe de Génie Mécanique chaqu'un son nom.

MERCI POUR TOUT

Dédicace

Avant tout, je remercier mon DIEU qui, grâce à sa miséricorde ma bénédiction dans ma vie...
Je tiens à Didier ce travail..
A mon père AHMED, qui je voie un père qui à consacré sa vie à sa famille, et vous êtes à coté de moi en toutes circonstances me rappelle à plusieurs la responsabilité...merci papa

A ma mère FATIHA, qui je voie la maman parfaite, toujours prête à se sacrifier pour le bonheur de ses enfants...merci maman

A mon cher frère MOHAMMED qui m'avoir toujours supporté dans mes décisions, je t'aime...merci moha

Sans oublier mon géminé KHIR EL DINNE... je t'aime.

A mes chères sœurs : SABRINA (et son enfant : ZINO (ZIN ELDINNE), la princesse MARWA et ma petite fifi AMIRA), NERDJES (et son enfants : la acrimonieuse RIMAS et le petit ange NIHALE), MERIEM et MADIHA...qui je le sais ma réussite est très importante pour vous, que dieu paye pour tous vos bienfaits.

A tous oncles, cousins, cousines, tantes et toute famille de BOUNAMOUS et CHABBEH

A amis de malheur avant la joie : HAKIMA, MONI (AMINA), HESNA et SOUMIA ...

MERCI A TOUS ET JE VOUS AIME BEAUCOUP

BOUNAMOUS KHADIDJA

Dédicace

Je remercie dieu tout puissant de m'avoir aidé, et Éclairer le chemin pour Achever mon travail et mes études.

A mon père MAHMOUDE qui a souhaité vivre pour longtemps juste pour nous voir qu'est –ce que nous allons devenir.

A celle qui m'a transmis la vie, l'amour, le courage, à toi Cher maman SAKINA toutes mes joies, mon amour et ma reconnaissance.

Je remercie mes sœurs, HANANE (et son enfants NOUHA, ANESSE et MAISSE), SOUMIA, AMEL, MERIEM, CHAHARA ZAD, surtout mon cher frère SOUFIEN que j'aime beaucoup, et tout famille de BOUREDROUDA LAKHDAR.

A mes cherres amíes, HASNA, HAKIMA, KHADIDJA et WAHIBA.

MERCI A TOUS

BOUREDROUDA AMINA

Dédicace

Au nom d'Allah le plus grand merci lui revient de nous avoir guidé vers le droit chemin, de nous avoir Aidées tout au long de nos années de l'étude.

A la plus belle créature que dieu a créée sur terre...

A cette source de tendresse, de patience et de générosité...

A ma mère OUM ELSSAAD

A qui toujours était à mes cotés

A mon père TOUFIK

A mes chères frères : SABER et NEWWR

A mes chères sœurs : BESMA et SAMIA

A mes grandes mères, mon grand père, mes oncles, cousins, cousines et tantes.

A tous mes amis : KHADIDJA, AMINA, HASNA, MANEAU, AMINA RAHALE...

A tous famille de BOUZERAA et BOUCENNA

MERCI A TOUS

BOUZERAA HAKIMA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A celle à qui mon cœur depuis sa naissance n'a pas pu éprouver qu'amour et reconnaissance à celle qui a donné un sens à mon existence en m'offrant une éducation digne de confiance...

A Ma Chère Mère FARIDA

A mon père, pour son amour et son soutien moral depuis mon enfance...

A Mon père TAHAR, merci

A tous les membres de ma famille : Mes frères (YOUSSEF, WALID, OUSSAMA), Ma sœur (MERIEM)

A tous mes cousins et a toutes familles de DIAF et AMIOUR, et a mes meilleurs amis : AMINA, KHADIDJA, HAKIMA...

MERCI A TOUS

DIAF HESNA

Table des matières

Introduction Générale **2**

1 Terminologies et notations : **5**

1.1 L'analyse numérique 5

1.2 Les matrices 5

1.2.1 Le rang d'une matrice 7

1.2.2 Opérations sur les matrices 7

1.2.3 La trace d'une matrice 8

1.2.4 La transposé d'une matrice 9

1.2.5 Déterminant d'une matrice 9

1.2.6 L'inverse d'une matrice carrée 10

1.3 Les équations 11

1.3.1 Equation linéaire à deux inconnues : 11

1.3.2 Résolution du problèmes du premier degré (probléme se ramenant à une équation) 12

1.3.3 Résolution des problèmes du second degré 13

1.3.4 Equation générale de degré n 14

1.4 Espace vectoriel 14

2 Résolution d'un système linéaire AX=B **16**

2.1 Le systéme d'équations linéaires 16

2.1.1 Les déffirentes formes du systéme linéaire 16

2.1.2 Les solutions possibles d'un systéme 17

2.2 Les méthodes de résolution d'un systéme linéaire $AX = B$ 19

2.2.1 Les méthodes classiques 19

2.2.2 Les méthodes numériques 19

2.2.3 Méthodes directes 20

2.2.4 Méthodes itératives 38

2.2.5 Comparaison entre les méthodes : 45

3 L'utilisation de l'outil informatique pour la résolution un système linéaire AX=B 47

3.1 Introduction sur MATLAB 47
3.2 Matrice et vecteur dans MATLAB 47
3.3 Equations et systèmes linéaires dans MATLAB 50
3.4 Méthode directe (Méthode du pivot) 51
3.5 Méthodes itératives 53
3.5.1 Méthode de Gauss-Seidel 53

Conclusion Générale 56

Bibliographie 56

Introduction Générale

Le développement des mathématiques en générale, et de l'analyse numérique en particulier, a été et sera toujours nécessaire pour la résolution des problémes de plus en plus complexes posés par la physique et les sciences de l'ingenieur. certaines méthodes numériques, pour la résolution de problèmes mathématiques , sont déja devenues classiques , et le développement de logiciels de calcul numérique, de plus en plus précision, pourraient amener certains utilisateurs à se poser la question " pourquoi étudier ces méthodes ?" la réponse à cette question est toute simple, l'utilisation optimale de toute technique ou procédé, ou leur amélioration, ne peut se faire sans la maitrise de ses outils de base .

Comme l'algèbre linéaire qui est un outil essentiel pour toutes les branches des mathématiques appliquées, en particulier lorsqu'il s'agit de modéliser puis résoudre numériqement des problèmes issus de divers domaines, des sciences physiques ou mécaniques, des sciences du vivant, de la chimie, de l'économie, des sciences de l'ingénieur,.....

Par exemple, la physique aborde des relations linéaires, les lois fondamentales du mouvement sont presque toutes linéaires, ou se déduisent de lois linéaires. les systémes électriques sont fondamentalement décrits par des lois linéaires ($V = RI$, etc.) c'est pourquoi, on commence par une étude des équations linéaires.

La résolution d'un systéme linéaire algèbrique est au coeur de la plupart des calculs en analyse numérique . Il parait donc naturel de débuter un cours de calcul scientifique par là.

Dans notre travail, nous nous interessons aussi aux algorithmes de résolution de ces systémes linéaires. Pour cela, nous considérons le probléme suivant :

Trouver le vecteur solution X, tellque :

$$AX = B$$

Où A est une matrice carrée et B un vecteur donné à coéfficients rééls ou complexe. La discretisation d'équation differontielle ordinaire ou d'équation aux dérivees partielles, la modelisation de problème en physique, chimie ou économie conduit a la résolution du système linéaire de grande taille avec plusieurs milliers d'inconnues et il devient partiquement imposible de résourdre ces systéme d'équations sans l'aide d'un ordinateur. Il s'agit alors de trouver des algorithmes de résolution efficace où le nombre d'opération et donc le temps de calcul, n'est pas prohibitif, c'est un problème classique mais difficile en analyse numérique.

Dans ce mémoire, nous étudions les systèmes linéaire. Pour cela, on comence par la description de ce systéme, ensuite nous intéressons aux méthodes de résolution de ces systèmes et nous finissons par l'application de ces systémes et l'intêret de l'utilisation de l'outil l'informatique.

Notre mémoire, se décompose en trois chapitre, Dans le premier chapitre, nous pré-

sentons les terminologies, notations, les définitions et diffirentes notion qui seront utils pour l'élaboration du mémoire, le deuxiéme chapitre sera consacré pour la position du problème et nous présentons quelques méthodes de résolution et comparaison entre les différentes méthodes.

Dans le troisiéme chapitre, on s'interesse à l'utilisation de l'outil informatique pour la résolution d'un systéme linéaire AX=B.

Chapitre 1

Terminologies et notations :

1.1 L'analyse numérique

L'**analyse numérique** est une discipline des mathématiques. Elle s'intéresse tant aux fondements théoriques qu'à la mise en pratique des méthodes permettant de résoudre, par des calculs purement numériques, des problèmes d'analyse mathématique.

Plus formellement, l'**analyse numérique** est l'étude des algorithmes permettant de résoudre les problémes de mathématiques continues (distinguées des mathématique discrétes). Cela signifie qu'elle s'occupe principalement de répondre numériquemant à des questions à variable réelle ou complexe comme l'algèbre linéaire numérique sur les champs réels ou complexes, la recherche de solution numérique des équations différentielles et d'autres problémes liés survenant dans les sciences physique et l'ingénierie.

1.2 Les matrices

Définition 1.2.1 *Nous applons matrice de type(m, n)(ou à m lignes et n colonnes) sur $\mathbb{R}$, une famille doublement indexée d'élément de $\mathbb{R}$.*

(a_{ij}), ($i=\overline{1,m}$ et $j=\overline{1,n}$) habituellement représentée sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

les a_{ij} sont appelés les éléments ou termes ou coefficients de la matrice.

Une matrice de type (1,n) est applée vecteur ligne (de dimension n) et une matrice de type (m,1) est applée vecteur colonne (de dimension m).

Définition 1.2.2 *Soit* $M \subset M_{m,n}(\mathbb{R})$

1. *Si* $m = n$, *M est dite matrice* ***carrée***

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 14 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Si* $m = 1$, *M est dite matrice* ***ligne***

$$(1, 2) \ ; \quad (3,5,0,-6)$$

3. *Si* $n = 1$, *M est dite matrice* ***colonne***

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

4. *Si* $m = n$ *et* $a_{ij} = 0$ *pour* $i \neq j$, *M dite matrice* ***diagonale***

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

5. *Si M est une matrice diagonale et* $a_{ij} = 1$ *pour* $i = j$ *; M est dite* ***la matrice idontité*** *et note* I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. *Si* $m = n$ *et* $a_{ij} = 0$ *pour* $m < n$, *M est dite matrice* ***triangulaire superieur***

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ ; \ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Si $m = n$ et $a_{ij} = 0$ pour $m > n$, M est dite matrice ***triangulaire inferieur***

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

1.2.1 Le rang d'une matrice

Définition 1.2.3 *Soit* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

On appelle ***rang de la matrice*** *A, et on note rgA, la taille maximale d'une matrice carrée inversible.*

Exemple 1.2.4 *ona*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A étant de taille 3×4, son rang sera inferieur ou égal à 3.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *extraite de A ayant un déterminant non nul, elle est inversible :*

$$rg = 3$$

1.2.2 Opérations sur les matrices

La somme :

Soient $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$,la somme de A et B est une matrice apparaisser en $M_{m,n}$ tellque :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple 1.2.5 *on a*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A+B=\begin{pmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ *; mais* $A+C$ *impossible (les matrices* A *et* C *n'ont pas les même dimentions)*

Le produit d'une matrice par un scalaire

Définition 1.2.6 *soit* $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on appelle le produit de* M *par* λ *est une matrice* $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *tellque :* $b_{ij} = \lambda a_{ij}$

Exemple 1.2.7 *on a*

$$\lambda = 2;\ M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda M = 2\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Le produit de deux matrices

Définition 1.2.8 *: soient* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$,*on appelle produit de* A *et* B *la matrice* $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *tellque :*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \qquad ;\ \textit{remarque : (m,n) } \times \textit{ (n,p) = (m,p)}$$

Exemple 1.2.9 *on a*

$$A = \begin{pmatrix} le & a & le \\ un & a & un \\ le & avait & un \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} chat & rat & lion \\ mangé & dévoré & dégusté \\ pain & lait & chat \end{pmatrix}$$

$$A{\cdot}B = \begin{pmatrix} le\ chat\ a\ mangé\ le\ pain & le\ rat\ a\ dévoré\ le\ lait & le\ lion\ a\ dégusté\ le\ chat \\ un\ chat\ a\ mangé\ un\ pain & un\ rat\ a\ dévoré\ un\ lait & un\ lion\ a\ dégusté\ un\ chat \\ le\ chat\ avait\ mangé\ un\ pain & le\ rat\ avait\ dévoré\ un\ lait & le\ lion\ avait\ dégusté\ un\ chat \end{pmatrix}$$

1.2.3 La trace d'une matrice

Définition 1.2.10 *Soit* $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *on appelle la trace de* M *et on note :*

$$tr(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Exemple 1.2.11 *on a :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$;

tr(A)=2 + (-4) = -2

1.2.4 La transposé d'une matrice

Définition 1.2.12 *Soit* $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *on appelle transposé de* M_{ij} *et on note* ${}^tM$ *la matrice définie par :* ${}^tM = (M_{ij})$*; où* $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

on a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

donc :

$${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1.2.5 Déterminant d'une matrice

Définition 1.2.13 *étant donnés* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$*, on appelle* ***déterminant*** *de la matrice* $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ *le nombre, noté* $\det A$*, qui peut être calculé, par récurrence, de la façon suivante :*

1. *par un* ***développement suivant la ligne*** i, $i \in \left\{\overline{1,n}\right\}$ *:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A)$$

2. *par un* ***développement suivant la colonne*** j, $j \in \left\{\overline{1,n}\right\}$ *:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A)$$

où pour tout couple d'indices $(i,j) \in \left\{\overline{1,n}\right\}^2$, *appellé* ***mineur d'indice*** (i,j), *est le déterminant de la matrice obtenue en enlevant à* A *la ligne* i *et la colonne* j.*quel que soit le mode de calcul retenu, on obtient, bien sûr, le méme résultat.*

Exemple 1.2.14 *on a*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det A$ =*1((6×5)-2(-3))+(1(3*(-3)*-6(-2)) = 39*

1.2.6 L'inverse d'une matrice carrée

Définition 1.2.15 *On dit que* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *est inversible s'il existe une matrice* $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *tellque :*

$A \cdot B = B \cdot A = I_n$ *est dit l'inverse de* A *et noté* A^{-1}.

Exemple 1.2.16 *on a*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot A$, *donc* B *est l'inverse de* A.

Proposition 1.2.17 *1. soit* $A \in M_{m,n}(\mathbb{k})$ *est inversible* $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$

2. soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{k})$ *si* $\det A \neq 0$ *alors :* $A^{-1} = \dfrac{1}{(\det A)}\,{}^t(comA)$ *tellque*

$$comA = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix} \qquad où \quad \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Exemple 1.2.18 *on a :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$detA = 39, \quad comA = \begin{pmatrix} 36 & -3 & -6 \\ -19 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad {}^t(comA) = \begin{pmatrix} 36 & -19 & 3 \\ -3 & 7 & 3 \\ -6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$donc\ A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 36 & -19 & 3 \\ -3 & 7 & 3 \\ -6 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & \frac{-19}{39} & \frac{1}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{7}{39} & \frac{1}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{1}{39} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

1.3 Les équations

Définition 1.3.1 *De maniére générale, on appelle équation linéaire dans les variables* $x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n$ *toute relation de la forme :*

$$a_1x_1 + \ldots\ldots\ldots + a_nx_n = \ b \tag{1.1}$$

où $a_1, \ldots\ldots\ldots, a_n$ *et* b *sont des nombres réels.*

Il est important d'insister ici que ces équations sont implicites, c'est-à-dire qu'elles décrivent des relations entre les variables, mais ne donnent pas directement les valeurs que peuvent prendre les variables.

Résoudre une équation signifie donc la rendre explicite, c'est-à-dire rendre plus des rentes les valeurs que les variables peuvent prendre.

*Une solution de l'équation linéaire (*1.1*) est un n-uple* $s_1, \ldots\ldots\ldots, s_n$ *de valeurs des variables* $x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n$ *qui satisfont à l'équation (*1.1*). Autrement dit*

$$a_1s_1 + \ldots\ldots\ldots + a_ns_n = \ b$$

1.3.1 Equation linéaire à deux inconnues :

L'équation de la forme $ax + by + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ est une équation linéaire à deux inconnues.

L'ensemble des solutions d'une telle équation à deux inconnues réelles est une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,c'est-à-dire un ensemble de nombres réels. Le graphique de cet ensemble est donc une partie du plan cartésien.

Rechercher des solutions d'une équation linéaire à deux inconnues

Exemple 1.3.2 *Soit à résoudre l'équation linéaire* $2x - 3y + 6 = 0$.

1. *Donnons à x une valeur queleconque : 5.*
2. *On obtient alors $y = \frac{16}{3}$.*

   Le couple de réels $(5; \frac{16}{3})$ est une solution de l'équation
3. *Donnons à y une valeur quelconque : -2*

   On obtient alors $x = -6$

   Le couple de réels $(-6; -2)$ est une solution de l'équation.
4. *Il apparait ainsi que l'ensemble des solutions de cette équation est infini.*

1.3.2 Résolution du problèmes du premier degré (probléme se ramenant à une équation)

Les équations de premier degré sont celles qui peuvent se mettre sous la forme

$$ax + b = 0.$$

Il y a une unique solution (si $b \neq 0$) qui est $x = \frac{-b}{a}$.
La résolution d'un probléme du premier degré se fait en cinq étapes :

1. Choix de l'inconnue.
2. Mise en équation ou inéquation du probléme.
3. Résolution de l'équation ou de l'inéquation.
4. Vérification du résultat.
5. Interprétation du résultat et conclusion.

Exemple 1.3.3 *Une mére de quarante cinq ans a une fille de 13 ans.*
Dans combien d'année l'âge de la fille sera la moitié de l'âge de sa mére ?

Choix de l'inconnue :

On commence par nommer l'inconnue que l'on cherche :
soit x le nombre d'années cherché

Mise en équation du probléme :

L'âge de la mére après ces x années sera de $45+x$
L'âge de la fille après ces x années sera de $13+x$
et l'age de la fille sera la moitié de celui de sa mére on a donc :
$13 + x = \frac{45 + x}{2}$

$2 \times (13 + x) = 45 + x$
$26 + 2x = 45 + x$
$2x$ -$x = 45 - 26$
$x = 19$

Vérification du résultat :

$x = 19$
Dans 19 ans
$13 + 19 = 32$
L'âge de la fille sera de 64 ans,
$45 + 19 = 64$
L'âge de la mére sera de 64 ans
L'âge de la fille sera bien moitié de L'âge de la mére.

Conclusion 1.3.4 *interprétation du résultat :*
Dans 19 ans L'âge de la fille sera moitié de celui de sa mére.

1.3.3 Résolution des problèmes du second degré

Les équations du second degré sont des équations qui s'écrit sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{avec } a \text{ non nul})$$

Pour pouvoir résoudre une telle équation il faut tout d'abord calculer le **discriminant** Δ.

Il suffit d'appliquer cette formule :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

On le calcule, ensuite selon le résultat on pouvoir savoir le nombre de solution qu'il y a, et les trouver s'il y en a :

1. Si $\Delta < 0$, rien de plus simple : il n'a pas de solution.
2. Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution à l'équation c'est :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3. Si $\Delta > 0$, il y a deux solution qui sont :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \quad et \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

1.3.4 Equation générale de degré n

Définition 1.3.5 *On dira que les éléments $b_1, \ldots\ldots, b_s$ sont **algébriquement indépendants** sur $\Bbbk$ si, et seulement si, ces éléments ne satisfont aucune relation de la forme :*

$$\sum \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_s} b_1^{i_1} \ldots b_s^{is} = 0$$

à coefficients non nuls.

Autrement dit, $b_1, \ldots\ldots, b_s$ sont algébriquement indépendants si, et seulement si, ils n'annulent aucun polynôme non nul P($X_1, \ldots$,X_s) $\in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_s]$ à n indéterminées.

Exemple 1.3.6 *Si a est transcendant sur $\mathbb{R}$ et b est transcendant sur $\mathbb{R}$(a). alors a,b sont algébriquement indépendants sur $\Bbbk$,car si nous avons :*

$$\sum_{i,j} \alpha_{i,j} a^i b^j = 0$$

alors

$$\sum_j \left(\sum_i \alpha_{i,j} a^i \right) b^j = 0$$

Mais b est transcendant sur $\mathbb{R}$(a). d'où

$$\sum_i \alpha_{i,j} a^i = 0 \quad pour\ tout\ j$$

a est aussi trancendant sur $\mathbb{R}$. Les relations précédentes impliquent $\alpha_{ij} = 0$ pour tout i et tout j ce qui prouve l'indépendance algébrique de a et b sur $\mathbb{R}$.

1.4 Espace vectoriel

En mathématiques, plus précisèment en algébre linéaire et en algébre générale, un espace vectoriel est un ensemble muni d'une structure permettant d'effectuer des combinaisons linéaire.

Etant donné un corps $\mathbb{k}$, un espace vectoriel E sur $\mathbb{k}$ est un groupe commutatif (dont la loi est notée +) muni d'une action ‹‹compatible›› de $\mathbb{k}$. Les éléments de E sont appelés des vecteurs, et les éléments de $\mathbb{k}$ des scalaires.

Définition 1.4.1 *Soit $\mathbb{k}$ un corps, un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, ou $\mathbb{k}$-espace vectoriel, est un ensemble E, dont les éléments sont appelés vecteurs, muni de deux loi :*

• *une* ***loi de composition interne*** *$\langle\langle + \rangle\rangle : E^2 \longrightarrow E$, appelée addition ou* ***somme vectoriel.***

• *une* ***loi de composition externe*** *à gauche $\langle\langle \cdot \rangle\rangle : \mathbb{k} \times E \longrightarrow E$, appelée* ***multiplication par un scalaire.***

telles que les propriétés suivantes soient vérifiées.

1.$(E, +)$ est un ***groupe abélien****, autrement dit :*

- *la loi « + » est* ***commutative*** *et* ***associative****,*
- *elle admet un* ***élément neutre****, pouvant être noté 0 ou 0_E, appelé* ***vecteur nul*** *et tout vecteur v a un* ***opposé****. noté $-v$.*

2. La loi « $\cdot$ » vérifie les propriétés suivantes :

- *elle est distributive à gauche par rapport à la loi « + » de E et à droite par rapport à l'addition du corps $\mathbb{k}$.*
- *elle vérifie une associativité mixte (par rapport à la multiplication dans $\mathbb{k}$).*
- *l'élément neutre multiplicatif du corps $\mathbb{k}$, noté 1, est neutre à gauche pour $(\cdot)$.*

Exemple 1.4.2 *Soit V l'ensemble des matrices de taille $n \times m$, muni de l'addition des matrices et produit d'un vecteur par un scalaire est un espace vectoriel.*

Chapitre 2

Résolution d'un système linéaire AX=B

2.1 Le systéme d'équations linéaires

On applle systéme linéaire d'ordre n (n entier positif), une expression de la forme

$$AX = B$$

où A est une matrice de coefficientes (a_{ij}) $1 \leq \mathrm{i,j} \leq n$, désigne une matrice de taille $n \times n$ de nombre réels ou complexes, B est vacteur colonne réel ou complexe obtienent les éléments $(\mathrm{b}_i), 1 \leq i \leq n$,et $X=(x_i)\,, 1 \leq i \leq n$, est vecteur des inconnues du systéme. La relation précédente équivant aux équations

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad \mathrm{i}=\overline{1,n}$$

la matrice A est dite régulière (ou non singulière) si $detA \neq 0$, on a existance et unicité de la solution X (pour n'importe quel vecteur B donné) si et seulement si la matrice associée au systéme linéaire est régulière.

2.1.1 Les déffirentes formes du systéme linéaire

Forme fonctionelle (général)

En général, un systéme de m équations linéaires à n inconnues peut étre écrit sous la forme suivantes :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les inconnues.

Forme matricielle

Un systéme linéaire peut être aussi écrit sous la forme matricielle :

$$AX = B$$

où A est une matice de taille $m \times n$, X est un vecteur de taille m.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

2.1.2 Les solutions possibles d'un systéme

Cas général

Si A est une **matrice carré inversible** d'ordre n, alors le systéme d'équation dont l'écriture matricielle est $AX = B$ admet une **unique solution** :$X = A^{-1}B$.

Exemple 2.1.1 *le systéme* $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$ *a pour écriture matricielle* $AX = B$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$. *le déterminant de* A *est non nul,* A *est donc inversible.*

A l'aide d'une calculatrice, on obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.4 \end{pmatrix}$. *Il y a donc une unique solution* $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Cas particuliers

Si A est une **matrice carré inversible** d'ordre n, alors le systéme d'équation dont l'écriture matricielle est $AX = B$ admet une **unique solution** :$X = A^{-1}B$.

Exemple 2.1.2 *: le systéme* $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - y = -1 \end{cases}$ *a pour écriture matricielle* $AX = B$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$. *le déterminant de* A *est non nul,* A *est donc inversible.*

A l'aide d'une calculatrice, on obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.4 \end{pmatrix}$. *Il y a donc une unique solution* $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Cas particuliers

Si la matrice A n'est pas inversible, le systéme admet soit **infinité de solution**, soit **aucune solution**.

Exemple 2.1.3 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ *a pour écriture matricielle* $AX = B$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de A *est nul donc* A *n'est pas inversible.*

Exemple 2.1.4 *On constate que la ligne 2 du systéme vaut 2 fois la premiére ligne, il y a donc une infinité des solutions.*

Exemple 2.1.5 $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$ *a pour écriture matricielle* $AX = B$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.*Le déterminant de* A *est nul donc* A *n'est pas inversible.*

Ici, la premiére et la seconde ligne du systéme ne sont pas proportionnelles, il n'y a donc pas des solutions.

2.2 Les méthodes de résolution d'un systéme linéaire

$$AX = B$$

En général, il y a deux méthodes qui permettant de résoudre le systéme linéaire $AX = B$.

2.2.1 Les méthodes classiques

Les méthodes classiques (Cramer) deviennent trés lentes en temps d'execution (de calcul) dés que n dépasse 4.

Théorème 2.2.1 *(Cramer)*
Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$ *une matrice carré d'ordre* n *et* $b = (b_i)$, $i = \overline{1,n}$ *, un vecteur colonne. Si* $det(A) \neq 0$. *alors le systéme :*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=\overline{1,n} \qquad (\text{ ou encore } AX=B)$$

admet l'unique solution $x = (x_i)$, $i = \overline{1,n}$ *telleque :*

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \qquad i = \overline{1,n}$$

où A_i *est la matrice obtenue en remplaçant dans* A *la* i^{eme} *colonne par la colonne* B.
Numériquement : on calcule :

1. $\det(A)$
2. $\det(A_i)$, $i = \overline{1,n}$
3. $\dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = \overline{1,n}$

Pour $n = 10$, *la méthode de Cramer exige 3* 10^9 *opérations.*

2.2.2 Les méthodes numériques

Les méthodes numériques ayant des temps de calcul acceptables et de nombre d'opérations de l'ordre de n^3 pour un systéme $AX = B$ où A est une matrice carré d'ordre n.

Ces méthodes peuvent étre **directes** ou **indirectes (itératives)**

1. **Les méthodes directes :**

Définition 2.2.2 *Une méthode est dite* ***directe****, si elle donne au bout d'un nombre* ***fini*** *d'opération une solution* ***exacte*** *du probléme*

Remarque 2.2.3 *utilisées généralement lorsque $n \leq 100$, et si A est une matrice pleine (pas beaucoup zéros).*

Les méthodes directes sont :

1. *Méthode de Gauss (méthodes du pivot)*
2. *Méthode de Gauss-Jordan*
3. *Méthode de décomposition de A en $L.U$*
4. *Méthode de Cholesky*

1. **Les méthodes itératives (indirectes) :**

Définition 2.2.4 *une méthode* ***itérative*** *de résolution du systéme $AX = B$ consiste d'abord à passer au systéme $X = \alpha X + \beta$ (que l'on déterminera) et sa solution est alors la limite de la suite définie par : $x_{k+1} = \alpha x_k + \beta$, x_0 étant une approximation initiale.*

Remarque 2.2.5 *utilisées généralement lorsque $n \geq 100$, et si A est une matrice contient beaucoup d'éléments nuls*

Les méthodes indirectes sont :

1. *Méthode de Jacobi*
2. *Méthode de Gauss-Seidel*

2.2.3 Méthodes directes

Méthode de Gauss :

Soit $AX = B$ où A est une matrice $(n \times n)$, régulière.e

Principe : Transformation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieure. Pour cela on construit $\left[A \vdots B\right]$ et :

$\left[A \vdots B\right]$ — transformation $\rightarrow$ $\left[A' \vdots B'\right]$ où A' est une matrice triangulaire supérieure.

$$ie : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{pmatrix}$$

$$\left[A\vdots B\right] \qquad \rightarrow \qquad \left[A'\vdots B'\right]$$

* Puis, résoud le systéme $A'X = B'$ (dont la solution est exactement la solution du systéme $AX = B$)

ETAPES : On pose $A = A^{(1)}$ et $B = B^{(1)}$

1^{ere} étape :

* Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$, on fait les affectations suivantes

- La ligne L_1 est maintenue ie : $L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)}$
- Pour $i = 2, \ldots, n$: $L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)} - \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \cdot L_1^{(1)}$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{(1)}\vdots B^{(1)}\right] \qquad \rightarrow \qquad \left[A^{(2)}\vdots B^{(2)}\right]$$

où :

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} & j = \overline{1,n} \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \cdot a_{1j}^{(1)} \ , & i = \overline{2,n} \ ; \ \ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_1^{(2)} = b_1^{(1)} \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \cdot b_1^{(1)} \ , & i = \overline{2,n} \end{cases}$$

* Si $a_{11}^{(1)} = 0$, on cherche une ligne $L_p^{(1)}$ avec $2 \leq p \leq n$ tellque $a_{p1}^{(1)} \neq 0$. puis on permute les lignes $L_1^{(1)}$ et $L_p^{(1)}$ pour obtenir

$$AX = B \Longleftrightarrow A^{(1)}X = B^{(1)} \Longleftrightarrow P^{(1)}A^{(1)}X = P^{(1)}B^{(1)}$$

où $P^{(1)}$ est la matrice de permutation des lignes $L_1^{(1)}$ et $L_p^{(1)}$. $P^{(1)}$ est elle même la

matrice identité dans laquelle on permute la premiére ligne et la P^{eme} ligne.

Dans ce cas au lieu la matrice $A^{(1)}$ on considère la matrice : $\widetilde{A}^{(1)} = P^{(1)}A^{(1)}$ dont on notera encore les éléments par $a_{ij}^{(1)}$ et on lui applique des transformations analogue à celles correspondantesau cas $a_{11}^{(1)} \neq 0$, étudié plus haut.

k^{eme} étape :

* $a_{kk}^{(k)} = 0$: On permute les lignes $L_k^{(k)}$ et $L_p^{(k)}$ où $L_p^{(k)}$ est une ligne d'indice p avec $k+1 \leq p \leq n$, telle que : $a_{pk}^{(k)} \neq 0$. Et dela

$$A^{(k)}X = B^{(k)} \Longleftrightarrow P^{(k)}A^{(k)}X = P^{(k)}B^{(k)}$$

où $P^{(k)}$ est la matrice de permutation des lignes $L_k^{(k)}$ et $L_p^{(k)}.P^{(k)}$ est elle même la matrice identité où on permute la k^{eme} et la P^{eme} ligne.

On considére alors : $\widetilde{A}^{(k)} = P^{(k)}A^{(k)}$ et $\widetilde{B}^{(k)} = P^{(k)}B^{(k)}$. Aprés transformation on obtient $A^{(k+1)}$ et $B^{(k+1)}$ avec :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}, & i = \overline{1,k} \ ; \ \ j = \overline{1,n} \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)} \ , & i = \overline{k+1,n} \ ; \ \ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} & i = \overline{1,n} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot b_k^{(k)} \ , & i = \overline{k+1,n} \end{cases}$$

et ceci en faisant les affectations suivantes :

$$\begin{cases} L_1^{(k+1)} & \leftarrow & L_1^{(k)} \\ L_2^{(k+1)} & \leftarrow & L_2^{(k)} \\ \vdots & & \\ L_k^{(k+1)} & \leftarrow & L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} & \leftarrow & L_i^{(k)} - \dfrac{L_{ik}^{(k)}}{L_{kk}^{(k)}} \cdot L_k^{(k)} \ , \qquad i = \overline{k+1,n} \end{cases}$$

Résolution de $AX = B$:

On pose

$$\left[\acute{A}\vdots\acute{B}\right] = \left[A^{(n)}\vdots B^{(n)}\right] = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \dots & a_{1n}^{(n)} & b_1^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \dots & a_{2n}^{(n)} & b_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \dots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Et delà

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow A^{(1)}X = B^{(1)} \\ &\Leftrightarrow A^{(2)}X = B^{(2)} \\ &\vdots \\ &\Leftrightarrow A^{(n)}X = b^{(n)} \\ &\Leftrightarrow \acute{A}X = \acute{B} \end{aligned}$$

d'où : (**Résolution par retour arriére**)

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{1}{\acute{a}_{11}} \cdot (\acute{b}_1 - \acute{a}_{1,2}x_2 - \dots - \acute{a}_{1,n}x_n) \\ \vdots & \\ x_{n-1} &= \dfrac{1}{\acute{a}_{n-1,n-1}} \cdot (\acute{b}_{n-1} - \acute{a}_{n-1,n}x_n) \\ x_n &= \dfrac{1}{\acute{a}_{n,n}} \cdot \acute{b}_n \end{cases}$$

(On détermine x_n, puis x_{n-1},etc. jusqu'à obtention de $x_{1.}$)

Remarque 2.2.6 *1. La méthode de Gauss nècessite* $\frac{2}{3}n^3$ *opérations pour un sustéme d'ordre* n.

2. Elle permet de calculer $\det(A)$ *puisque* $\det(A) = (-1)^j \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}$ *où* j *est le nombre de permutations.*

Exemple 2.2.7 *Soit à résourdre le systéme*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -9 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 2 \\ -3x_2 - 12x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \tag{2.1}$$

Le systéme (2.1) s'écrit encore : $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad et \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

1^{ere} étape :

** Le pivot* $a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 3 & -7 & -9 \\ 4 & 1 & -2 & 8 & 2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{0} & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{(1)} \vdots B^{(1)} \right] \rightarrow \left[A^{(2)} \vdots B^{(2)} \right]$$

2eme étape :

Dans $\left[A^{(2)} \vdots B^{(2)} \right]$ *on constate que le pivot* $a_{22}^{(2)} = 0$. *D'où on fait une permutation des lignes 2 et 3 (par exemple). Ce qui revient à considerer* $\left[\widetilde{A}^{(2)} \vdots \widetilde{B}^{(2)} \right]$ *avec :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{A}^{(2)} = P^{(2)} A^{(2)} \\ \widetilde{B}^{(2)} = P^{(2)} B^{(2)} \end{array} \right\} \quad où \quad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors : Le pivot $a_{22}^{(2)} \neq 0 \qquad (a_{22}^{(2)} = \widetilde{a}_{22}^{(2)} = -1)$ *et*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left[\widetilde{A}^{(2)} \vdots \widetilde{B}^{(2)} \right] \rightarrow \left[A^{(3)} \vdots B^{(3)} \right]$$

3eme étape :

Solution 2.2.8 *Le pivot* $a_{33}^{(3)} = 3 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -12 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{(3)} \vdots B^{(3)}\right] \quad \rightarrow \quad \left[A^{(4)} \vdots B^{(4)}\right]$$

Résolution de $A'X = B'$:

Posons $\left[A' \vdots B'\right] = \left[A^{(4)} \vdots B^{(4)}\right]$ *.On a alors :*

$$A'X = B' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 2 \\ -x_2 - 2x_3 = -2 \\ 3x_3 + x_4 = -5 \\ x_4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

Méthode de Gauss-Jordan :

Soit le systéme linéaire $AX = B$ où A est une matrice $(n \times n)$, régulière.

Principe : * Transformation de la matrice A en la matrice identité

ie : $\left[A \vdots B\right]$ - transformation $\rightarrow \left[I \vdots B\right]$ où I est la matrice identité

* D'où : $AX = B \Leftrightarrow I \cdot X = B' \Leftrightarrow X = B'$

ETAPES : 1^{ere} étape :

* Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$, on fait les effectations suivantes

- $L_1^{(2)} \leftarrow \dfrac{1}{a_{11}^{(1)}} \cdot L_1^{(1)}$
- $L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} \cdot L_1^{(2)}$; $i = \overline{2,n}$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{(1)} \vdots\ B^{(1)}\right] \quad \rightarrow \quad \left[A^{(2)} \vdots\ B^{(2)}\right]$$

avec :

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = \dfrac{a_{1j}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} & j = \overline{1,n} \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i1}^{(1)} \cdot a_{1j}^{(2)} \ , & i = \overline{2,n}\,;\ \ j = \overline{1,n} \\ a_{ij}^{(2)} = 0 \ , \ i = \overline{2,n}\,;\ j = 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_1^{(2)} = \dfrac{b_1^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - a_{i1}^{(1)} \cdot b_1^{(2)} \ , & i = \overline{2,n} \end{cases}$$

2^{eme} étape :

* Si $a_{22}^{(2)} \neq 0$, on fait les affectations

- $L_2^{(3)} \leftarrow \dfrac{1}{a_{22}^{(2)}} \cdot L_2^{(2)}$
- $L_i^{(3)} \leftarrow L_i^{(2)} - a_{i2}^{(2)} \cdot L_2^{(3)} \quad ; \ i = \overline{1,n} \qquad \text{avec} \quad i \neq 2$

d'où :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13}^{(3)} & \dots & a_{1n}^{(3)} & b_1^{(3)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n}^{(3)} & b_2^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{(2)} \vdots\ B^{(2)}\right] \quad \rightarrow \quad \left[A^{(3)} \vdots\ B^{(3)}\right]$$

avec :

$$\begin{cases} a_{2j}^{(3)} = \dfrac{a_{2j}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & j = \overline{2,n} \\ a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i2}^{(2)} \cdot a_{2j}^{(3)} \ , & i = \overline{1,n} \ ; \ i \neq 2 \, ; \ j = \overline{3,n} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_{2}^{(3)} = \dfrac{b_{2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \\ b_{i}^{(3)} = b_{i}^{(2)} - a_{i2}^{(2)} \cdot b_{2}^{(3)} \ , & i = \overline{1,n} \ ; i \neq 0 \end{cases}$$

k^{eme} étape :

* $a_{kk}^{(k)} \neq 0$:

- $L_k^{(k+1)} \leftarrow \dfrac{1}{a_{kk}^{(k)}} \cdot L_k^{(k)}$
- $L_i^{(k+1)} \leftarrow L_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} \cdot L_k^{(k+1)} \quad ; \ i = \overline{1,n} \quad$ avec $\quad i \neq k$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & a_{1k}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} & b_1^{(k)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2k}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} & b_2^{(k)} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{k-1,k}^{(k)} & \dots & a_{k-1,n}^{(k)} & b_{k-1}^{(k)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & a_{1,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{1n}^{(k+1)} & b_1^{(k+1)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{2n}^{(k+1)} & b_2^{(k+1)} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{k,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{k,n}^{(k+1)} & b_k^{(k+1)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k+1)} & b_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{nn}^{(k+1)} & b_n^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{(k)} \vdots \ B^{(k)} \right] \quad \rightarrow \quad \left[A^{(k+1)} \vdots \ B^{(k+1)} \right]$$

avec :

$$\begin{cases} a_{kj}^{(k+1)} = \dfrac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & j = \overline{k,n} \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} \cdot a_{kj}^{(k)} \ , & i = \overline{1,n} \ ; \ i \neq k \, ; \ j = \overline{k+1,n} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_{k}^{(k+1)} = \dfrac{b_{k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ b_{i}^{(k+1)} = b_{i}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} \cdot b_{k}^{(k+1)} \ , & i = \overline{1,n} \, ; \ i \neq k \end{cases}$$

Remarque 2.2.9 *1. La méthode de Gauss-Jordan nécessaite n^3 opérations élémentaires*

(moins rapide que celle de Gauss et que celle Cholesky que l'on verra par la suite).

2. Elle est conseillée pour inverse une matrice, car elle évite la "remontée" (ie : la résolution par retour arrière) qu'en rencontre dans la méthode de Gauss.

Exemple 2.2.10 *Soit à résoudre le systéme :*

$$(1) \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Le systéme (1) s'écrit encore : $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1^{ere} étape :

$* \ a_{11}^{(1)} = 2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{(1)} \vdots \ B^{(1)}\right] \quad \rightarrow \quad \left[A^{(2)} \vdots \ B^{(2)}\right]$$

2eme étape :

$* \ a_{22}^{(2)} = -2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 & -11/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{(2)} \vdots \ B^{(2)}\right] \quad \rightarrow \quad \left[A^{(3)} \vdots \ B^{(3)}\right]$$

3eme étape :

$* \ a_{33}^{(3)} = -5 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 & -11/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & -15 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{(3)} \vdots \ B^{(3)}\right] \quad \rightarrow \quad \left[A^{(4)} \vdots \ B^{(4)}\right]$$

Solution 2.2.11 *Solution de* $A'X = B'$

Posons $B = B^{(4)}$*.On a alors :* $X = B' = (1, 2, 3)$.

Stratégie du choix du pivot

Introduction :

Exemple 2.2.12 *Sachant que la solution exacte du susyéme ci-aprés est* $(x_1, x_2) = (1/3, 2/3)$*, retrouvons la par pa méthode de Gauss. Le systéme est*

$$\begin{cases} 0.0003x_1 + 3x_2 = 2.0001 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

** Posons*

$$A = \begin{pmatrix} 0.0003 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 2.0001 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons : $a_{11} = 0.0003 \neq 0$*,d'où :*

$$\begin{pmatrix} 0.0003 & 3 & 2.0001 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0.0003 & 3 & 2.0001 \\ 0 & -9999 & -6666 \end{pmatrix}$$

$$\left[A \vdots \ B\right] \quad \rightarrow \quad \left[A' \vdots \ B'\right]$$

et delà

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{6666}{9999} = \frac{2222}{3333} = \ ? \\ x_1 &= \frac{1}{0.0003} \cdot (2.0001 - 3x_2) = \ ? \end{aligned}$$

Question 1 : Effectuerles calculs avec quatre (04) c.s

Réponse 1 : $x_2 = 0.6667$ *et* $x_1 = -0.3333$

Question 2 : même question avec cinq (05) c.s

Réponse 2 : $x_2 = 0.66667$ et $x_1 = 0.3$

Question 3 : avec trois (03) c.s

Réponse 3 : $x_2 = 0.667$ et $x_1 = -3$

Exemple 2.2.13

1. Les chiffres de la valeur x_2 restent stables. Par contre ceux de x_1 mûtent à chaque nouvelle précision.

2. Les solutions auxqulles on aboutit sont, à des échelles différentes, éloignées de la solution exacte.

Commentaire : Cette perte dans la précision est dû au pivot $a_{11} = 0.0003$ qui est trés petit.

Cas général Soit la systéme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

avec $a_{11} \simeq 0$ et $a_{11} \neq 0$.

On soppose que les solutions exactes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient connues. Posons :

$$\begin{cases} x_1 = x_1^* \pm \Delta x_1 \\ x_2 = x_2^* \pm \Delta x_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = x_n^* \pm \Delta x_n \end{cases} \qquad \text{où } x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \text{ sont des valeurs approchées de } x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Déterminons $\Delta x_1 = ?$

Nous avons :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^* - \cdots - a_{1n}x_n^* \mp a_{12}\Delta x_2 \mp \cdots \mp a_{1n}\Delta x_n) \\ &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^* - \cdots - a_{1n}x_n^*) \mp a_{12}\Delta x_2 \mp \cdots \mp a_{1n}\Delta x_n \\ &= x_1^* \mp \frac{a_{12}}{a_{11}}\Delta x_2 \mp \cdots \mp \frac{a_{1n}}{a_{11}}\Delta x_n \end{aligned}$$

et delà : $\Delta x_1 = \mp\frac{a_{12}}{a_{11}}\Delta x_2 \mp \cdots \mp \frac{a_{1n}}{a_{11}}\Delta x_n$. Mais puisque $a_{11} \simeq 0$ alors $\frac{a_{12}}{a_{11}} > 0$. De même pour les autres $\frac{a_{1j}}{a_{11}}$, j=$\overline{3,n}$. Et donc l'erreur Δx_1 sera importante.

Stratégie du pivot partiel Supposons que l'on soit à la k^{eme} étape de la méthodes de Gauss :

$$\left[A^{(k)}\vdots\ B^{(k)}\right] = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \dots & & a_{1k}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} & b_1^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & \dots & & a_{2k}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} & b_2^{(k)} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & & & & & \\ 0 & & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{pmatrix} \qquad 1 \leq \text{k} \leq \text{n}$$

Parmi les coefficients $a_{kk}^{(k)}$, $a_{k+1,k}^{(k)}, \dots, a_{nk}^{(k)}$, on choisit celui dont le module est le plus grand $\left(ie : \underset{i=\overline{k,n}}{max}(\left|a_{ik}^{(k)}\right|)\right)$. Le pivot sera ce coefficient, et on permute alors la k^{eme} ligne et la ligne du pivot ainsi obtenu.

Exemple 2.2.14 *Soit à résoudre le systéme suivant par la méthode de Gauss (avec permutations) en utilisant la stratégie du pivot partiel.*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 11 \end{cases}$$

On construit :

$$\left[A\vdots\ B\right] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$\boxed{k=1}$ *: $max(1,1,3) = 3$ et donc on permute, par exemple, les lignes 1et 3 pour obtenir :*

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 6 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 11 \\ 0 & 1/3 & -2 & -8/3 \\ 0 & 7/3 & 1 & -11/3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{k=2}$ *: $max(1/3, 7/3) = 7/3$. On permute les lignes 2 et 3 :*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 11 \\ 0 & \boxed{7/3} & 1 & -11/3 \\ 0 & 1/3 & -2 & -8/3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 11 \\ 0 & 7/3 & 1 & -11/3 \\ 0 & 0 & -15/7 & -15/7 \end{pmatrix}$$

Et delà :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 &= & 1 \\ x_2 &= & \frac{3}{7}(\frac{-11}{3} - x_3) \\ x_1 &= & \frac{1}{3}(11 - 2x_2 - 6x_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 &= & 1 \\ x_2 &= & -2 \\ x_1 &= & 3 \end{cases}$$

Stratégie du pivot partiel composé Pour chaque ligne L_i de la matrice initiale on calcule :

$$d_i = \max(|a_{i1}|, |a_{i2}|, \ldots, |a_{in}|) = \max_{\mathrm{j=\overline{1,n}}}(|a_{ij}|)$$

Puis, à la k^{eme} étape, parmi les valeurs : $\frac{a_{kk}^{(k)}}{d_k}, \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{d_{k+1}}, \ldots, \frac{a_{nk}^{(k)}}{d_n}$,on choisit celle dont le module est le plus grand $\left(ie : \max_{i=\overline{k,n}} \left(\frac{a_{ik}^{(k)}}{d_i} \right) \right)$, puis on permute la ligne du pivot correspondant à cette valeur et la k^{eme} ligne.

Exemple 2.2.15 *Soit à résoudre le systéme suivant par la méthode de Gauss en utilisant la stratégie du pivot partiel composé :*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{cases}$$

Posons :

$$\left[A \vdots B \right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a : $d_1 = \max(2, 3, 1) = 3, d_2 = \max(4, 4, 3) = 4$ *et* $d_3 = \max(2, 3, 1) = 3$

$\boxed{k=1}$ *:* $\max\left(\frac{|a_{11}|}{d_1}, \frac{|a_{21}|}{d_2}, \frac{|a_{31}|}{d_3} \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{4}, \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{4} = 1$.*Et donc la ligne du pivot est*

L_2 (le pivot étant a_{21}). On permute les lignes 1 et 2 pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 5 & -5/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{k=2}$ *:* $\max\left(\frac{\left|a_{22}^{(2)}\right|}{d_2}, \frac{\left|a_{32}^{(2)}\right|}{d_3}\right) = \max\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}$. *La ligne du pivot est alors L_3.*

On permute les lignes 2 et 3 :

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{5} & -5/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -5/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Et delà :

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Stratégie du pivot total A la k^{eme} étape le pivot est choisit parmi les coefficients $a_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{k,n}$ $\quad j = \overline{k,n}$, tel que son module soit le plus grand $\left(ie : \max_{i=\overline{k,n}} \max_{j=\overline{k,n}} (\left|a_{ij}^{(k)}\right|)\right)$.

Attention ! : A chaque permutation de colonnes les inconnues changent de places.

Exemple 2.2.16

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 12 \end{cases}$$

Posons :

$$\left[A \vdots B\right] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$\boxed{k=1}$ *:* $\max(\left|a_{ij}^{(1)}\right|, i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3) = 6$ *La ligne du pivot total sera alors L_3.En permutant les lignes 1 et 3 on obtient :*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 12 \\ 2 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

La colonne du pivot total est Col_3, et on permute les colonnes 1 et 3 :

$$\begin{pmatrix} \boxed{6} & 2 & 3 & 12 \\ 5 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 1/3 & -1/2 & -3 \\ 0 & 2 & -1/2 & -8 \end{pmatrix}$$

$\boxed{k=2}$ *:* $\max(\left|a_{ij}^{(2)}\right|, i = 2,3 \quad j = 2,3) = 2$. *La ligne du pivot total est alors L_3.Et donc on permute les lignes 2 et 3 :*

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & \boxed{2} & -1/2 & -8 \\ 0 & 1/3 & -1/2 & -3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & -1/2 & -8 \\ 0 & 0 & -5/12 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Delà, du fait de la permutation des colonnes 1 et 3. On obtient le systéme équivalent suivant :

$$\begin{cases} 6x_3 + 2x_2 + 3x_1 = 12 \\ 2x_2 - \frac{1}{2}x_1 = -8 \\ -\frac{5}{12}x_1 = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

Décomposition de A en L.U

Soit le système linéaire $AX = B \qquad (1)$

Principe : Décomposition de la matrice A de façon à la mettre sous la forme $A = L.U$ où L est une matrice triangulaire unitaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure.

Résolution : Le systéme (1) devient :

$$AX = B \Leftrightarrow L\underbrace{UX}_{y} = B \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = B \\ UX = y \end{cases}$$

Donc la résolution du systéme $AX = B$ revient à la résolutions des deux systémes $Ly = B$ et $UX = y$, et la résolution de ces derniers est imméddiate, puisque les matrices L et U sont triangulaires.

Méthode :

Par la méthode de Gauss on obtient

$$\left[A' \vdots B'\right] = \left[A^{(n)} \vdots B^{(n)}\right] = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & a_{13}^{(n)} & \dots & a_{1n}^{(n)} & b_1^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & a_{23}^{(n)} & \dots & a_{2n}^{(n)} & b_2^{(n)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n)} & \dots & a_{3n}^{(n)} & b_3^{(n)} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

avec : $AX = B \Leftrightarrow A'X = B'$
On pose alors $U = A'$

$$ie : U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

et on montre que : $A = L.U$ où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ l_{21} & 1 & & \dots & & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

Vérification : Pour $n = 4$

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(4)} \end{pmatrix} \quad ; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \qquad l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

d'où

$$l_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \qquad l_{31} = \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \quad l_{41} = \frac{a_{41}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{a_{41}}{a_{11}}$$
$$l_{32} = \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \qquad l_{42} = \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \qquad l_{43} = \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}}$$

Ainsi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & \frac{a_{43}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(4)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{21}\frac{a_{21}}{a_{11}} + a_{22}^{(2)} & a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} + a_{23}^{(2)} & a_{21}\frac{a_{14}}{a_{11}} + a_{24}^{(2)} \\ a_{31} & a_{31}\frac{a_{21}}{a_{11}} + a_{32}^{(2)} & a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} + a_{32}^{(2)}\frac{a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} + a_{33}^{(3)} & a_{31}\frac{a_{14}}{a_{11}} + a_{32}^{(2)}\frac{a_{24}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} + a_{34}^{(3)} \\ a_{41} & a_{41}\frac{a_{21}}{a_{11}} + a_{42}^{(2)} & a_{41}\frac{a_{13}}{a_{11}} + a_{42}^{(2)}\frac{a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} + a_{43}^{(3)} & a_{41}\frac{a_{14}}{a_{11}} + a_{42}^{(2)}\frac{a_{24}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} + a_{43}^{(3)}\frac{a_{34}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} + a_{44}^{(4)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = A \qquad \text{car} \quad a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + a_{ik}^{(k)}\frac{a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

Méthode de Cholesky

Soit A une matrice carrée d'ordre n; $\quad A = (a_{ij}) \;\; i, j = \overline{1, n}$

Définition 2.2.17

• *A est dite symétrique si elle coincide avec sa transposée ie : $A = A^T$ ou encore :* $a_{ij} = a_{ji}, \;\; i, j = \overline{1, n}$

• *A est dite définie positive si* $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $< AX, X >= X^T AX > 0$.

Théorème 2.2.18 *A est définie positive si et seulement si tous ses mineurs :*

$$\Delta_1 = a_{11} \;\; ; \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \;\; ; \;\; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \ldots, \Delta_n = \det(A)$$

sont strictement positifs.

Théorème 2.2.19 *(Cholesky) Soit A une matrice carrée d'ordre n, non singulière et symétrique. Pour qu'il existe une matrice triangulaire inférieure L, de même dimension que A, telle que : $A = LL^T$, il faut rt il suffit que A soit définie positive.*

Remarque 2.2.20

• *L n'est pas unique*

• *La décomposition devient unique si l'on fixe à l'avance les éléments diagonaux l_{ii} avec $l_{ii} > 0$.*

Algorithm 2.2.21 ***de décomposition :***

Afin d'obtenir les élément l_{ij} de la matrice L on multiple les matrices L et L^T, puis on identifie les coefficients respecrifs dans l'égalité : $A = LL^T$ pour obtenir les équations

$$\begin{cases} l_{11}^2 = a_{11} \\ l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + l_{i3}^2 + \ldots + l_{i,i-1}^2 + l_{ii}^2 = a_{ii} \\ l_{i1}l_{ji} + l_{i2}l_{j2} + l_{i3}l_{j3} + \ldots + l_{ij}l_{jj} = a_{ij} \;\; , \;\; i > j \\ l_{ij} = 0 \qquad i < j \end{cases}$$

d'où l'on déduit successivement (en choisissant systématiquement le signe +) :

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}\ , \qquad i = \overline{2,n} \\ l_{ij} = \dfrac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right)\ , \quad i > j \\ l_{ij} = 0, \qquad i < j \end{cases}$$

Résolution de $AX = B$

Résoudre le systéme $AX = B$ revient alirs à résoudre :

$$L\underbrace{L^T X}_{y} = B \Longleftrightarrow \begin{cases} Ly = B \\ L^T X = y \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \\ y_1 = \dfrac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} y_k \right) \qquad i = \overline{2,n} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{l_{nn}} \\ x_i = \dfrac{1}{l_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} l_{ik} x_k \right) \qquad i = \overline{1,n-1} \end{cases}$$

Remarque 2.2.22 *1. La méthode de Cholesky nécessite* $\dfrac{n^3}{3}$ *opérations élémentaires (meilleure que celle de Gauss).*

2. La méthode de Cholesky permet le calcul du déterminant de A.

En effet : $A = LL^T \Longrightarrow \det(A) = \det(LL^T) = \det(L)\det(L^T) = (\det(L))^2 = (\prod_{i=1}^{n} l_{ii})^2$.

2.2.4 Méthodes itératives

Lorsque n est trés grand, la résolution d'un système d'ordre n par les méthodes directes devient assez compliquée. Alors on fait appel aux méthodes dites itératives sous

réserve de convergente vers la solution (exacte) x du systéme :

$$AX = B \tag{2.2}$$

Méthode de Jacobi

On suppose que les $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = \overline{1,n}$ où $A = (a_{ii})$. Le systéme (2.2) s'écrit encore :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Le principe de la méthode consiste à résoudre la i^{eme} équation par rapport à l'inconnue x_i, On obtient alors le systéme équivalent, qu'on appelle systéme réduit :

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \alpha_{n3}x_3 \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases}$$

$$\text{où} \quad \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1,n} \qquad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad i \neq j \quad i,j = \overline{1,n} \\ \alpha_{ii} = 0 \quad i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Le systéme réduit ainsi obtenu s'écrit sous forme matricielle comme suit

$$X = \alpha X + \beta \quad \text{où} \quad \alpha = (\alpha_{ij}) \ \text{ et } \ \beta = (\beta_i) \tag{2.3}$$

avec

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \ldots & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \ldots & \alpha_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Conclusion 2.2.23 *Le systéme $AX = B$ devient équivalent au systéme réduit $X = \alpha X + \beta$ ie :*

$$(2.2) \qquad AX = B \Longleftrightarrow (2.3) \qquad X = \alpha X + \beta \qquad \textit{forme récursive}$$

Et delà, en partant d'une approximation initiale arbitraire $X^{(0)}$ (en général on prend $X^{(0)} = \beta$), on résoud le systéme :

$$X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta; \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Si la suite des approximations $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}, \ldots$, possède une limite $X = \lim_{k\to+\infty} X^{(k)}$,cette limite est solution du systéme (2.3), et donc du systéme (2.2).

En effet :

Il suffit de passé à la limite (2.4) pour obtenir :

$$\lim_{k\to+\infty} X^{(k+1)} = \alpha \lim_{k\to+\infty} X^{(k)} + \beta \Longleftrightarrow X = \alpha X + \beta \Longleftrightarrow AX = B$$

Algorithm 2.2.24 *Ecrivons le systéme (2.4) sous la forme développée :*

$$X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta \iff x_i^{(k+1)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} \alpha_{ij} x_i^{(k)} + \beta_i, \quad i = \overline{1,n} \text{ où } \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \text{ et } \beta_i = -\frac{b_i}{b_i}$$

$$\iff x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} \right] \quad i = \overline{1,n}$$

$$\iff x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j<i}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} - \sum_{j>1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} \right] \quad i = \overline{1,n}$$

D'où : ***Algorithme de Jacobi***

$$\begin{cases} X^{(0)} \text{ donné} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \displaystyle\sum_{j<i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j>1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Critère d'arrêt

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\| &\leq \left\|X^{(k+p)}-X^{(k+p-1)}\right\|+\left\|X^{(k+p-1)}-X^{(k+p-2)}\right\|+\ldots+\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\| \\
&\leq \left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|+\|\alpha\|\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|+\ldots+\|\alpha\|^{p-1}\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\| \\
&\leq \left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|\left(1+\|\alpha\|+\ldots+\|\alpha\|^{p-1}\right) \\
&\leq \left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|\frac{1-\|\alpha\|^{p}}{1-\|\alpha\|}
\end{aligned}$$

d'où, lorsque $p \longrightarrow +\infty, k$ fixé, et pour $\|\alpha\| < 1$, on aura :

$$\left\|X-X^{(k)}\right\| \leq \frac{\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|}{1-\|\alpha\|}$$

et pour obtenir une approximation $X^{(k)}$ de X avec la n^{eme} décimale qui est exacte, il suffit de poser :

$$\frac{\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|}{1-\|\alpha\|} \leq 0.5\ 10^{-n}$$

et donc aller dans les itérations jusqu'à ce que l'inégalité

$$\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\| \leq (1-\|\alpha\|)\ 0.5\ 10^{-n}$$

soit vérifiée

Remarque 2.2.25 *1. En pratique on va dans les itérations jusqu'à atteindre la précision ε donnée au préalable, ie : $\left\|x^{(k+1)}X^{(k)}\right\| \leq \varepsilon$.*

2. Si on prend $X^{(0)} = \beta$, on aura : $X^{(1)} = \alpha X^{(0)} + \beta \Longrightarrow X^{(1)} - X^{(0)} = \alpha\beta$ d'où :

$$\left\|X-X^{(k)}\right\| \leq \frac{\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|}{1-\|\alpha\|} \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}\|\beta\|}{1-\|\alpha\|}$$

et on posant :

$$\frac{\|\alpha\|^{k+1}\|\beta\|}{1-\|\alpha\|} \leq \varepsilon$$

on déduit le nombre suffisant d'itérations pour calculer une solution approchée avec la précision ε.

Convergence de la méthode de Jacobi

Théorème 2.2.26 *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algorithme de Jacobi converge, indépendemment de la condition initiale $X^{(0)}$, est que :*

$$\rho(\alpha) < 1 \qquad où \qquad \rho(\alpha) = \max_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i| \qquad \lambda_i : \text{ valeur propre de } \alpha$$

Remarque 2.2.27

1. *En pratique, le calcul de $\rho(\alpha)$ est trés compliqué, il suffit alors de vérifier si $\|\alpha\| < 1$ puisque $\rho(\alpha) \leq \|\alpha\|$.*
2. *La méthode de Jacobi converge si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

$$(i) \qquad \|\alpha\|_l = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$$

$$(ii) \qquad \|\alpha\|_m = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$$

$$(iii) \qquad \|\alpha\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2} < 1$$

3. *Si $|\alpha_{ij}| < \dfrac{1}{n}$; $\forall i, j$ où n est la dimension du systéme, alors algorithme de Jacobi converge.*
4. $$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} & |\alpha_{ii}| > \displaystyle\sum_{i \neq j} |\alpha_{ij}|, \ \forall i \\ ou & |\alpha_{jj}| > \displaystyle\sum_{i \neq j} |\alpha_{ij}|, \ \forall j \end{array}\right\} \quad \textit{alors le processus converge}$$

(Dans ce cas on dit que la matrice A est à diagonale dominante.)

Méthode de Gauss-Seidel

Introduction

Soit le systéme $AX = B$ où delà

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Soient D, E et S les matrices définies par

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ & & a_{33} & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \qquad E = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$S = - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On a $A = D-E-S$ d'où : $AX = B \Longleftrightarrow (D-E-S)X = B \Longleftrightarrow DX = (E+S)X+B$. Et delà $DX^{(k+1)} = (E+S)X^{(k)} + B$ ou encore

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(E+S)X^{(k)} + D^{-1}B$$

qui n'est autre que la formulede Jacobi.

En effet :

$$D^{-1} = \frac{1}{\prod_{i=\overline{1,n}} a_{ii}} \begin{pmatrix} \prod_{\substack{i=\overline{1,n}\\ i\neq 1}} a_{ii} & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \prod_{\substack{i=\overline{1,n}\\ i\neq 2}} a_{ii} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \prod_{\substack{i=\overline{1,n}\\ i\neq 3}} a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \dots & \prod_{\substack{i=\overline{1,n}\\ i\neq n}} a_{ii} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \frac{1}{a_{33}} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

et donc

$$D^{-1}(E+S) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{32}} & 0 & -\frac{a_{32}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on aboutit bel et bien à l'algorithme de Jacobi.

Algorithm 2.2.28 ***(Gauss-Seidel)***

Une autre décomposition de A (autre que celle évoquée dans l'introduction ci- dessus) permet d'aboutir à la méthode de Seidel, appelée encore méthode de Gauss-Seidel.

On a $AX = B \Longleftrightarrow (D-E-S)X = B \Longleftrightarrow (D-E)X = SX + B.$

D'où $(D-E)X^{(k+1)} = SX^{(k)} + B$ *ou encore*

$$X^{(k+1)} = (D-E)^{-1}SX^{(k)} + (D-E)^{-1}B \qquad \textit{(Formule de Gauss-Seidel)}$$

et en développant la formule récursive ci-dessus on aboutit à

Algorithme de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} X^{(0)} \text{ donné} \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>1} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad i = \overline{1,n} \end{cases}$$

2.2.5 Comparaison entre les méthodes :

1. Les méthodes itératives sont principalement utilisées pour des matrices de tailles et largement creuses. Les calculs croissent dans ce cas linéairement avec n.

   Pour toute méthode itérative, il convient de s'assurer que la convergence et suffisamment rapide pour que le temps de calcul ne soit pas consommé sans que la recherche d'une solution ne soit réellement effectuée.

   Cette comparaison des différentes méyhodes itératives met en évidence que l'algorithme de Gauss-Seidel apporte une émolioration par rapport à celui de Jacobi, en permettent l'utilisation des nouvelles valeurs des variables déjà calculées lors d'une itération.
2. La méthode de Gauss-Seidel présente l'avantage suivant par rapport à celle de Jacobi. On n'est pas obligé de connaitre toutes les composantes de $X^{(k)}$ pour pouvoir calculer $X^{(k+1)}$. La méthode de Jacobi nécessite le stokage des 2 vecteurs $X^{(k)}$ et $X^{(k+1)}$. par contre la méthode de Gauss-Seidel ne nécessite qu'un seul vecteur $(X_1^{(k+1)}, \ldots, X_{i-1}^{(k+1)}, X_{i+1}^{(k+1)}, \ldots, X_n^{(k)})$.
3. Pour pouvoir appliquer la méthode de Gauss-Seidel il faut (comme pour la méthode de Jacobi) que : $\forall i$, $a_{ii} \neq 0$.
4. tous les résultats de convergence pour la méthode de Jacobi restent valablent pour la méthode de Gauss-Seidel.
5. Les méthodes itératives contrastent avec les méthodes directes qui résolvent le problème en une seule étape (par exemple la solution d'un systéme linéaire AX=B obtenue en calculant la matrice inverse de A).
   (a) celles-ci sont inapplicables, coûteuses ou simplement inconnues ;
   (b) le problème est mal conditioné ou comprend un grand nombre de variables, car les solutions successives limitent la propagation des erreurs.

   Par contre, la question de la vitesse de convergence (ou encore d"une éventuelle divergence) reste cruciale : c'est l'objet d'unbvaste champ d'investigations de l'analyse numérique.

6. La méthode de Jacobi converge et la méthde de Gauss-Seidel diverge.
7. Méthode de Cholesky pour matrices symmétriques et définie positive.

Chapitre 3

L'utilisation de l'outil informatique pour la résolution un système linéaire AX=B

3.1 Introduction sur MATLAB

MATLAB est un logiciel commercial de calcul interactif. Il permet de réaliser des simulations numériques basées sur des algorithmes d'analyse numérique. Il peut donc être utilisé pour la résolution approchée d'équations différentielles, d'équations aux dérivées partielles ou de systèmes linéaires, etc... La connaissance de ce logiciel est pour les mathématiciens et les informaticiens indispensable parce qu'il est de plus en plus utilisé dans l'industrie et les banques pour développer des prototypes de logiciels et tester de nouveaux algorithmes. Tous les ans entre vingt et trente pour cent des étudiants du DESS utilisent Matlab pendant leur stage.

Ensuite son apprentissage va passer par la mise en pratique des algorithmes d'analyse numérique étudiés plus théoriquement dans le reste du module.

3.2 Matrice et vecteur dans MATLAB

En mathématique, une matrice est constituée de n lignes et de m colonnes. Les coefficients de la matrice sont situés entre 2 parenthèses. Dans MATLAB, les parenthèses n'y figurent pas.

Une matrice carrée est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes ($n = m$). Une matrice d'ordre 1 applée *vecteur colonne.* Une matrice d'ordre 0 est un scalaire.

Dans le cas général, une matrice de n lignes et de m colonnes a pour coefficients a_{ij}, où $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq m$. Si cette matrice est appelée A, ses coefficients sont les suivant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Si B est une autre matrice à p lignes et q colonnes, alors le produit $C = A * B$ n'est possible que si $m = p$. Dans ce cas, le coefficient c_{11}, par exemple de cette matrice C s'écrit :

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \ldots + a_{1m}b_{1p} \qquad (\text{avec } m = p).$$

Dans Matlab, la matrice produit C ($C = A*B$) a pour coefficients c_{ij}. Ces coefficients sont calculés en fonction de a_{ij} et de b_{ij} :

$$c_{ij} = \sum a_{ij}b_{ij}$$

Une matrice d'ordre zéro est une matrice à une ligne et une colonne : elle représente un scalaire.

Une matrice *nulle* est une matrice dont les coefficients sont tous nuls. En attribuant le nom 'A' à cette matrice, alors dans Matlab A s'écrit :

$$>> A = zeros(n, m)$$

où n et m sont respectivement le nombre de lignes et le nombre de colonnes.

La matrice *identité* est définie dans Matlab par la fonction : '*eye*'

Exemple 3.2.1

$$0B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = IId$$

C'est une matrice carrée d'ordre 5. Dans Matlab, on peut l'écrire :

$>> B = eye(5)$
$B =$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Si B^t une matrice transposée de B, cette dernière s'écrit dans Matlab :

$>> C = B' \rightarrow$ (l'appostrophe représente la transposée)

$C =$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Le déterminant d'une matrice carrée (C par exemple) est donné par :

$>> \det(C)$

ans =

1

soit A une matrice non nulle. La matrice inverse A^{-1} de A (si elle existe) est telle que :

$A * A^{-1} = IId$

Dans Matlab, cette matrice inverse est donnée par :

$A^{-1} = A\hat{}(-1) = inv(A) = pinv(A)$

Exemple 3.2.2 *:*

$>> A =$ [1 3 5 ;2 -1 0 ;5 4 3]

$A =$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{matrix}$$

La matrice inverse de A est :

$>> inv(A)$

$ans =$

$$\begin{matrix} -0.0682 & 0.2500 & 0.1136 \\ -0.1364 & -0.5000 & 0.2273 \\ 0.2955 & 0.2500 & -0.1591 \end{matrix}$$

ou encore :

$>> pinv(A)$

$ans =$

$$\begin{matrix} -0.0682 & 0.2500 & 0.1136 \\ -0.1364 & -0.5000 & 0.2273 \\ 0.2955 & 0.2500 & -0.1591 \end{matrix}$$

3.3 Equations et systèmes linéaires dans MATLAB

Considérons le systèmes suivants n équations à m inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2m}x_m = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nm}x_m = b_m \end{cases} \Longrightarrow AX = B$$

Dans ce systéme, on a $A = |a_{ij}|$ connue, $B = b_i$ connues et $X = x_i$ inconnues.

1. Si $n > m \Longrightarrow$ système sur-déterminé,
2. Si $n = m \Longrightarrow$ système de Cramer $\longrightarrow$ une solution unique (si $\det(A) \neq 0$),
3. Si $n < m \Longrightarrow$ système sous-déterminé

La solution numérique du systéme (pour $n = m$) donne les inconnues x_i :

$$X = A/B$$

pour un vecteur colonne B donné ($B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ par exemple), la solution par Matlab est :

$>> X = A\hat{}(-1) * B$

$X =$

-0.5227

-1.0455

1.9318

Notation :

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Dans Matlab, la matrice A peut être écrit sous les deux formes :

$>> A =$ [1,3,5 ;2,-1,0 ;5,4,3];

ou bien :

$>> A = [1\ 3\ 5\ ;2\ -1\ 0\ ;5\ 4\ 3];$

La séparation des lignes se fait par un point virgule et la séparation des colonnes se fait par un espace ou une virgule.

Exemple 3.3.1 *:*

$>> A = [1\ 3\ 5\ ;2\ -1\ 0\ ;5\ 4\ 3]$

$A =$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{matrix}$$

3.4 Méthode directe (Méthode du pivot)

Soit à résoudre le systéme suivant de 3 équations à 3 inconnues par la méthode du pivot (dans Matlab) :

$$\begin{pmatrix} -0.04 & 0.04 & 0.12 \\ 0.56 & -1.56 & 0.32 \\ -0.24 & 1.24 & -0.28 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

déterminer x_1, x_2, x_3

1. On définit tout d'abord la matrice argument dans Matlab par :
   $>> A = [\text{-}0.04\ 0.04\ 0.12\ 3\ ;0.56\ \text{-}1.56\ 0.32\ 1\ ;\text{-}0.24\ 1.24\ \text{-}0.28\ 0]$
2. On choisit la ligne 1 comme ligne pivot : $a(1,1) = -0.04$,
   on divise la ligne 1 par $a(1,1) \longrightarrow b(1,:) = a(1,:)/a(1,1) \longrightarrow$ nouvelle ligne,
   on annule le 1^{er} terme de la ligne 2 et le 1^{er} terme de la ligne 3 :
   $\cdots \longrightarrow b(2,:) = a(2,:) - b(1,:) * a(2,1)$,
   $\cdots \longrightarrow b(3,:) = a(3,:) - b(1,:) * a(3,1)$.
   On obtient après calculs :
   $b =$
   $$\begin{matrix} 1 & -1 & -3 & -75 \\ 0 & -1 & 2 & 43 \\ 0 & 1 & -1 & -18 \end{matrix}$$
3. On choisit la ligne 2 comme ligne pivot.
   On divise cette ligne par $b(2,2) = -1$,on obtient :
   $\cdots \longrightarrow c(2,:) = b(2,:)/b(2,2) \longrightarrow$ nouvelle ligne $= 0 \quad 1 \quad -2 \quad -43$

on annule le terme $b(1,2)$ de la ligne 1 et le terme $b(3,2)$ de la ligne 3 :

$\cdots \longrightarrow c(1,:) = b(1,:) - c(2,:) * b(1,2) \longrightarrow \ 1 \quad 0 \quad -5 \quad 118$,

$\cdots \longrightarrow c(3,:) = b(3,:) - c(2,:) * a(3,2) \longrightarrow \ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 25$.

4. On choisit la ligne 3 comme ligne pivot $c(3,:)$.

   On divise cette ligne par $c(3,3) = 1$,on obtient :

   $\cdots \longrightarrow d(3,:) = c(3,:) \longrightarrow$ nouvelle ligne $= 0 \quad 0 \quad 1 \quad 25$

   on annule dans la ligne 1 $c(1,3)$ et dans la ligne 2 $c(2,3)$:

   $\cdots \longrightarrow d(1,:) = c(1,:) - d(3,:) * c(1,3) \longrightarrow \ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 7$,

   $\cdots \longrightarrow d(2,:) = d(2,:) - d(2,:) * c(2,3) \longrightarrow \ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1$.

   D'où la matrice d s'écrit :

   $d =$

   $1 \quad 0 \quad 0 \quad 7$

   $0 \quad 1 \quad 0 \quad 7$

   $0 \quad 0 \quad 1 \quad 25$

   et la solution est :

   $$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 25 \end{cases}$$

   L'algorithme suivant (dans Matlab) permet de résoudre le système précédent :

   clear $\%effacer\ toutes\ les\ variables\ en\ mémoire\ dans\ Matlab$

   $a = [-0.04\ 0.04\ 0.12\ 3\ ;0.56\ -1\ 0.32\ 1\ ;-0.24\ 1.24\ -0.28\ 0]; a$

   $x = [0\ 0\ 0]'$; $\%x\ est\ le\ vecteur\ colonne\ de\ composantes\ x_i\ qui\ est\ initialisé\ ici$

   $\%\ 1er\ point\ pivot\ ligne\ 1\ -calculs\ sur\ les\ lignes\ 2\ et\ 3$

   $b(1,:) = a(1,:)\ /\ a(1,1);$

   $b(2,:) = a(2,:) - b(1,:) * a(2,1);$

1. $b(3,:) = a(3,:) - b(1,:) * a(3,1); b$

   $\%\ 2éme\ pivot\ ligne\ 2\ -calculs\ sur\ les\ lignes\ 1\ et\ 3$

   $c(2,:) = b(2,:)\ /\ b(2,2);$

   $c(1,:) = b(1,:) - c(2,:) * a(1,2);$

1. $c(3,:) = b(3,:) - c(2,:) * a(3,2); c$

   $\%\ 3éme\ pivot\ ligne\ 3\ -calculs\ sur\ les\ lignes\ 1\ et\ 2$

   $d(3,:) = c(3,:)\ /\ b(3,3);$

   $d(1,:) = c(1,:) - d(3,:) * c(1,3);$

1. $d(2,:) = c(2,:) - d(3,:) * c(2,3); d$

$\%Solutions\ \ recherchées$

$x(1) = d(1,4);$

$x(2) = d(2,4);$

$x(3) = d(3,4); x$

après l'exécution de ce programma, on obtient :

$a =$

$$\begin{matrix} -0.0400 & 0.0400 & 0.1200 & 3.0000 \\ 0.5600 & -1.5600 & 0.3200 & 1.0000 \\ -0.2400 & 1.2400 & -0.2800 & 0 \end{matrix}$$

$b =$

$$\begin{matrix} 1.0000 & -1.0000 & -3.0000 & -75.0000 \\ 0 & -1.0000 & 2.0000 & 43.0000 \\ 0 & 1.0000 & -1.0000 & -18.0000 \end{matrix}$$

$c =$

$$\begin{matrix} 1.0000 & 0 & -5.0000 & -118.0000 \\ 0 & 1.0000 & -2.0000 & -43.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 25.0000 \end{matrix}$$

$d =$

$$\begin{matrix} 1.0000 & 0 & 0 & 7.0000 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 7.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 25.0000 \end{matrix}$$

$x =$

$$\begin{matrix} 7.0000 \\ 7.0000 \\ 25.0000 \end{matrix}$$

3.5 Méthodes itératives

3.5.1 Méthode de Gauss-Seidel

Résolution le système suivant par la méthode de Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

Écrire un algorithme (Matlab) permettant de calculer x_1, x_2 et x_3 par itérations. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une erreur :

$\theta(i) = |x_{n+1}(i) - x_n(i)| = 10^{10}$

Solution 3.5.1 *:*

* **Méthode itérative générale :**

Appelons l'algorithme permettant de calculer la solution $\{x_i\}$ 'G-seid.m'

On se donne des naleurs arbitraires x_i^0 : par exemple $x_i^0 = 0$. Le système à résoudre est :

$$A * X = B;\ \text{où}\ A = |a_{ij}|\,,\ X = x_i\ \text{et}\ B = b_i$$

La matrice A et le vecteur colonne B sont connues, le vecteur colonne X reste inconnu. Ainsi, la méthode itérative générale consiste à écrire :

$$x(i) = \frac{b(i) - a(i,j).x(j)}{a(i,i)} \quad \text{pour } i \neq j \text{ et } a(i,i) \neq 0$$

En particulier, pour un système de 3 équations à inconnues, on a :

$$i = 1 \longrightarrow j = 2 \text{ et } 3 \Longrightarrow x(1) = \frac{b(1) - a(1,2).x(2) - a(1,3).x(3)}{a(1,1)}$$

$$i = 2 \longrightarrow j = 1 \text{ et } 3 \Longrightarrow x(2) = \frac{b(2) - a(2,1).x(1) - a(2,3).x(3)}{a(2,2)}$$

$$i = 3 \longrightarrow j = 1 \text{ et } 2 \Longrightarrow x(3) = \frac{b(3) - a(3,1).x(1) - a(3,2).x(2)}{a(3,3)}$$

et ceci pour chaque itération.

Programme *itmg.m :*

```
%**************************
%Résolution d'un système linéaire    *
%par la méthode itérative générale   *
%**************************

clear all;
clc;
fprintf('Méthode itérative générale\n');
n = 30000;
a = [1 1 1,2 -1 3,3 2 -2];
b = [1 4 -2];
x = zeros(1,3);
w = 0.2;   %facteur de relaxation : 0 < w < 1
epsilon = 1e - 10;
for k = 1 : n
 erreur = 0;
  for i = 1 : 3
      s = 0;
      xb = x(i);
       for j = 1 : 3
```

```
        if i ~= j
          s = s + a(i,j) * x(j);
        end
      end
      x(i) = w * (y(i) - s)/a(i,i) + (1,w) * x(i);
      erreur = erreur + abs(x(i) - xb);
  end
      if (erreur/3 < epsilon)
       fprintf('Itération no. : %d\t Erreur = %7.2e\n', k, erreur);
      break;
 end
end
x
```

Conclusion Générale

Dans ce mèmoire, nous avons étudié les systèmes d'équations linéaires, Nous avons commencé par des définitions et des notions qui servent à la compréhension de notre travail dans le premier chapitre. Ensuite nous avons présenté les différentes méthodes pour la résolution d'un système linéaire AX=B, nous avons donné une simple comparaison entre les différentes méthodes. Cette comparaison, nous a révelé qu'il y a une divergence entre ces méthodes en terme de temps et de précision, et qu'il y a des méthodes qui restent à moins efficacité quand le nombre des inconnues est trés élevé.

Nous avons finalisé avec l'utilisation de l'outil informatique pour la résolution du système linéaire AX=B, où nous avons constaté, d'après les études qui ont été faites précédemment que le MATLAB est le meilleur environnement pour la programmation des méthodes de résolution du système linéaire AX=B.

Bibliographie

[1] **CAIROLI** R.Cairoli, Algébre Linéaire, Presse Polythechnique et Univeritaire Ramardes, Lausanne,2004.

[2] **ETIENNE** Damien Etienne, Exercices corrigés d'Algèbre Linéaire, Tome 1, Bibliothèque Nationale, Paris : Avril 2006.

[3] **EVA BAYER, PHILIPPE** Eva Bayer Fluckiger Philippe Chabloz, Algébre linéaire, Ecole Polythechnique Bachelor 1 ère année 2008-2009.

[4] **GOBLOT** Rémi Goblot, Algèbre linéaire, Mathématique à l'Université, Aout 2005.

[5] **GOYIN** Paola GOTIN,Analyse Numérique, Université Sud Toulon-Var ISITV, 1^{er} année.

[6] **LAKRIB** M.Lakrib, Cours d'Analyse Numérique, Universite Djallali Liabes Sidi Bel Abbés.

[7] **POSTEL** Marie Postel, Introduction au logiciel MATLAB, Version révisée janvier 2005.

Le résumé

Le système d'équations linéaires AX=B est s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+....+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+....+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+....+a_{pn}x_n=b_p \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des réels donnés.
Les x_i sont les inconnues du système et résoudre le système revient à déterminer les inconnues, s'il y en a, qui vérifient toutes les équations.
Dans notre travail, nous avons présenté une étude de ces systèmes, nous avons commencé par des définitions des notations sont indispensable pour la compréhension de ce mémoire. En suite nous avons présenté les différentes méthodes de résolution, et une comparaison entre ces méthodes.
Nous avons fini par l'utilisation de l'outil informatique pour la résolution du système d'équation AX=B.