الجمهوريـــة الجزائـــريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــــم العالــي والبحــث العلمــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire

Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence

en:Filière mathématiques

Thème
Résolutions des problèmes d'évolutions

Préparé par :

BOUHROUD IBTISSAM
TAIBA FATIHA
DRAOUI SELMA

Encadrer par : LABED BOUDJEMA

Année universitaire : 2014/2015

REMERCIEMENT

Avant tous nous remerciant le bon dieu que nous a donné la force pour terminer ce travail.

Nous adressons nos remerciements à notre encadreur monsieur Labed Boudjema pour sa disponibilité son encouragement et ses précieux conseils tout au long de ce travail.

Nous adressons aussi nos remerciements à tous les enseignants de l'institut de la science de la technologie.

Enfin merci à tous ceux qui ont contribués de près de loin à l'élaboration de ce modeste travail.

FATIHA&IBTISSAM&SELMA

DEDICACE

JE DÉDIE CE MODESTE TRAVAIL :

A CELLE À QUI MON CŒUR DEPUIS SA NAISSANCE N'A PAS PU ÉPROUVER QU'AMOUR ET RECONNAISSANCE À CELLE QUI A DONNÉ UN SENS À MON EXISTENCE EN M'OFFRANT UNE ÉDUCATION DIGNE DE CONFIANCE

A MA CHÈRE MÈRE : DALILA.

A MON PÈRE, POUR SON AMOUR ET SON SOUTIEN MORAL DEPUIS MON ENFANCE.

A MON PÈRE : SAYEH, MERCI.

A TOUS LES MEMBRES DE MA FAMILLE ; MES FRÈRES (ZOHIR, HICHAM,YASSER), MES SŒURS (SAEDIA,ILHAM) .ET SURTOUT À MON MARI : MOHAMED.

ET À TOUS MES COUSINS. ET À MES MEILLEURS AMIS ; FATIHA,SELMA, BADIAA, NADJAH, HALIMA .

ET À TOUS QUI M'ONT CONNU ET À AIDÉ DE PRÈS ET DE LOIN DANS LA RÉALISATION DE CE TRAVAIL.

IBTISSAM

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail :

A celle à qui mon cœur depuis sa naissance n'a pas pu éprouver qu'amour et reconnaissance à celle qui a donné un sens à mon existence en m'offrant une éducation digne de confiance

A ma chère mère : SAADA.

A mon père, pour son amour et son soutien moral depuis mon enfance.

A mon père : MAKHLOUF,rahimak.allah ,

Merci ; papa et mama.

A tous les membres de ma famille ; mes frères (Imad, Ramdane, Taher,Ahmed), mes sœurs (Wafa , Dhebiya, et à mes petites babies ; Rimas Nour El imane, Djanette El Abrar) .

Et à tous mes cousins. Et à mes meilleurs amis ; Ibtissam,Selma, Badiaa, Nadjah, Safinaz,Zina , Lila, Noussaiba, et à mon amis Fateh.

Et à tous qui m'ont connu et à aidé de près et de loin dans la réalisation de ce travail.

FATIHA

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail :

A celle à qui mon cœur depuis sa naissance n'a pas pu éprouver qu'amour et reconnaissance à celle qui a donné un sens à mon existence en m'offrant une éducation digne de confiance

A ma chère mère : RABIHA.

A mon père, pour son amour et son soutien moral depuis mon enfance.

A mon père : ABD EL HAFID, merci.

A tous les membres de ma famille ; mes frères (ZIYAD,FARSE,AYMEN,AMAR ,ABD EL RAZAK,AHMED,RABEH)

Ma sœur (HANAN) .et à mes grands parents : ma grand mère LHAYNA, et ma grand père AISSA.

Et à tous mes cousins. Et à mes meilleurs amis ; IBTISSAM,FATIHA, BADIAA, NADJAH,HALIMA,ZINEB ,SEMEH .

Et à tous qui m'ont connu et à aidé de près et de loin dans la réalisation de ce travail.

SELMA

Table des matières

Introduction

Cette mémoire est consacrée à l'analyse mathématique et numérique des problèmes d'évolution en temps. Nous allons plus particulièrement analyser deux types différents d'équations aux dérivées partielles: celles de type parabolique, et celles de type hyperbolique. Ou problèmes bien des équation de la chaleur, et des équation paraboliques en général, sont des problémeles mixter. On donne un ouvert Ω de l'espace et on cherche une solution u sur $[0, \infty[\times \Omega$ d'autre parfois. la différence avec le cas hyperbolique est à chercher dans le comportement vris-à-vris de la variable temps. L'exemple typique d'équation parabolique est de la chaleur que nous étudierons en de détail (mais notre analyse s'étend à des modèles plus compliqués comme les équations de stokes instationnaires). Le prototype d'équation hyperbolique est l'équation des ondes sur laquelle nous nous concentrerons (mais encore une fois notre analyse s'étend à des modèles plus compliqués comme les équations de l'élastodynamique ou celles de l'électromagnétisme). Plus généralement, l'approche développée ici s'étend à beaucoup d'autres problèmes d'évolution en temps, pas nécessairement de type parabolique ou hyperbolique, comme, par exemple de Schrödinger de la mécanique quantique.

Au cours de cette mémoire, on va donnée deux chapitres principales qui sont: première chapitre est l'équation parabolique, deuxième chapitre est l'équation hyperbolique.

Chapitre 1

L'équation Parabolique

1.1 Modélisation et exemple d'équation parabolique

Présentons les principaux problèmes paraboliques que nous étudierons, en disant quelques mots de leur origine physique ou mécanique. L'archétype de ces modèles est l'équation de la chaleur dont l'origine physique. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$. Pour des conditions aux limites de Dirichlet ce modèle s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

Le problème aux limites (1) modélise l'évolution de la température $u(x,t)$ dans un corps thermiquement conducteur qui occupe le domaine Ω. La distribution de température initiale, à $T = 0$, est donnée par la fonction u_0 sur le bord $\partial\Omega$ du corps considéré, la température est maintenue à une valeur constante, utilisée comme valeur de référence(c'est la condition de Dirichlet homogène $u(x,t) = 0$ sur $\partial\Omega \times \mathbb{R}_+$). Les sources de chaleur son modélisées Par la fonction donnée $f = f(x,t)$. Notons que les variables $x \in \Omega$ et $t \in \mathbb{R}_+$ jouent des rôles très différents dans (1) puisqu'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre en t et du deuxième ordre en x (le laplacien ne porte que sur la variable spatiale) indiquons qu'il existe d'autres origines physiques du système (1). Par exemple, modélise aussi la diffusion d'une concentration U dans le domaine Ω ou bien l'évolution du champs de pression u d'un fluide s'écoulant dans un milieu poreux (système de darcy) ou encore la loi d'un mouvement brownien dans le domaine Ω, On peut bien sur associé d'autres conditions aux limites à l'équation de la chaleur une première généralisation évident l'équation de la chaleur s'obtient l'orsque l'on remplace le Laplacien par un opérateur elliptique du deuxième ordre plus général cette généralisation ce rencontre, par exemple, si on étudie la propagation de la chaleur dans un matériau non homogène ou en présence d'un effet convectif.

1.2 Existence et Unicité

1.2.1 Formulation variationelle

L'idée est décrire une formulation variationelle qui ressemble à une équation différentielle ordinaire du premier ordre, pour cela nous multipliant l'équation de la chaleur par une équation test $v(x)$ qui ne dépend pas à temps t a cause de la condition aux limites nous allons demander à ce que v s'annule sur le bord de l'ouvert Ω, ce qui va nous permettre d'effectuer une intégration par partie simple (sans terme de bord). Pour l'instant ce calcul est principalement formel. Nous obtenons donc

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla v(x)dx + \int_\Omega f(x,t)v(x)dx \tag{2}$$

Comme ni Ω ni $v(x)$ ne varient avec le temps t, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx$$

Exploitant le fait que les variables x et t jouent des rôles très différents, nous séparons ces variables on considérant désormais la solution $u(t,x)$ comme une fonction du temps t à valeur dans un espace de fonction définie sur Ω (même chose pour $f(t,x)$) plus précisément, si l'on se donne un temps final $T > 0$ (éventuellement égal à $+\infty$), on considère u définie par:

$$\begin{cases} u :]0,T[\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ \qquad\quad t \longrightarrow u(t) \end{cases}$$

Et nous continuerons à noter $u(x,t)$ la valeur de $u(t)(x)$. Le choix de l'espace $H_0^1(\Omega)$ est évidement dicté par la nature du problème est peut varier d'un modèle à un notre en générale il s'agit de l'espace qui convient pour la formulation variationnelle du problème stationnaire associé. De même, le terme source f est rédésormé comme une fonction de t à valeur dans $L^2(\Omega)$. on introduit alors le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et la forme bilinéaire $a(w,v)$ définie par:

$$\langle w, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega w(x)v(x)dx$$

et

$$a(w,v) = \int_\Omega \nabla w(x)\nabla v(x)dx$$

En choisissant la fonction test dans l'espace $H_0^1(\Omega)$, on peut alors mettre (2) sous la forme d'une sorte d'équation différentielle ordinaire en t. On obtient ainsi la formulation variationnelle suivante: trouver $u(t)$ fonction de $]0,T[$ à valeur dans $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left\langle u\left(t\right), v\right\rangle_{L^2(\Omega)} + a\left(u\left(t\right), v\right) = \left\langle w, v\right\rangle_{L^2(\Omega)}; & \forall v \in H_0^1(\Omega), 0 < t < T, \\ u\left(t=0\right) = u_0 \end{cases} \tag{3}$$

Il reste plusieurs points à préciser dans la formulation variationnelle (3) pour lui donner un sens mathématique précis: quelle est régularité en temps de f et de u, et quel sens donner à la dérivée au temps? En particulier, il faudra absolument que $u(t)$ soit continue en $t = 0$ pour donner un sens correct à la donnée initiale u_0. Pour nous avons besoin d'introduire une famille d'espace fonctionnelle de fonction de t à valeur dans des espaces de fonction de x.

Définition 1.2.1 *Soit X un espace de Hilbert, ou plus généralement, un espace de Banach défini sur Ω. soit un temps final $0 < t \leq +\infty$. Pour un entier $k \geq 0$, on note $C^k([0,T];X)$ l'espace des fonctions k fois continument dérivable de $[0;T]$ dans X. si on note $\|v\|_X$ la norme dans X, il est classique que $C^k([0;T];X)$ est un espace de Banach pour la norme*

$$\|v\|_{C^k([0,T];X)} = \sum_{n=0}^{k}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left\|\frac{d^m v}{dt^m}(t)\right\|_X\right)$$

On note $L^2(]0;T[;X)$ l'espace des fonctions de $]0;T[$ dans X telles que la fonction $t \longrightarrow \|v(t)\|_X$ soit mesurable et de carré intégrable, c'est-à-dire que

$$\|v\|_{L^2([0,T];X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

muni de cette norme $L^2(]0;T[;X)$ est aussi un espace de Banach. De plus, si X est un espace de Hilbert alors $L^2(]0;T[;X)$ est aussi un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{L^2(]0;T[;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_X \, dt$$

Remarque 1.2.1 *Si X est l'espace $L^2(\Omega)$, alors $L^2(]0;T[;L^2(\Omega))$ s'identifie à l'espace $L^2(]0;T[)$ puisque, par le théorème de Fubini, on a:*

$$\|v\|^2_{L^2(]0;T[;l^2(\Omega))} = \int_0^T (\int_\Omega |v(t)|^2 (x) \, dx) dt = \int_0^T \int_\Omega |v(x,t)|^2 \, dxdt = \|v\|^2_{L^2(]0;T[\times\Omega)} \, .$$

Pour $1 < p \leq +\infty$ on peut généralisé la définition1 en introduisent l'espace de Banach $L^p(]0;T[;X)$ des fonction de $]0;T[$ telle que la fonction $t \longrightarrow \|v(t)\|_X$ est soit mesurable et de puissance p-éme intégrable.

Dans la suite on prendra le terme source F dans l'espace $L^2(]0;T[;L^2(\Omega))$, et on cherchera la solution u dans l'espace d'énergie $L^2(]0;T[;H_0^1\Omega) \cap C([0,T]\,;L^2(\Omega))$. Ce choix peut paraitre arbitraire, mais il sera justifié, non seulement par la démonstration de l'exercice d'une solution pour la formulation variationnelle (3).

finalement, la dérivée en temps dans la formulation variationnelle (3) doit être prise au sens faible puisqu'a priori la fonction $t \longrightarrow \langle u(t), v\rangle_{L^2(\Omega)}$ n'appartient qu'à $L^2(0;T)$ fort heureusement, s'il existe une solution de (3), alors l'égalité de (3) nous dit que cette dérivée en temps est tous ce qu'il ya de plus classique puisqu'elle appartient à $L^2(]0;T[)$.

1.2.2 Résultat générale

Théorème 1.2.1 *Soient V et H deux espace de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection compacte et V est dense dans H. Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive dans V. soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in H$, et un terme* *source* $f \in L^2(]0;T[;H)$. *Alors problème:*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \langle u(t), v\rangle_{L^2(\Omega)} + a(u(t), v) = \langle w, v\rangle_{L^2(\Omega)}; \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), 0 < t < T, \\ u(t=0) = u_0 \end{cases} \tag{4}$$

(Ou l'équation de (4) a lieu au sens faible dans $]0,T[$ *) a une unique solution* $u \in L^2(]0,T[;V) \cap C([0,T];H)$. *De plus, il existe une constante* $C > 0$ *(qui ne dépend que de* Ω*) telle que*

$$\|u\|_{L^2(]0;T[;V)} + \|u\|_{C([0,T];H)} \leq C(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(]0;T[;V)}) \tag{5}$$

Remarque 1.2.2 *L'estimation d'énergie (5) prouve que la solution de (4) dépend continument des données, et donc que le problème parabolique (4) est bien posé au sens de Hadamard.*

1.2.3 Application

Nous appliquons maintenant le résultat abstrait du théorème (1.2.1) à l'équation de la chaleur. Et nous prouvons cette approche variatinnelle a bien permis le résoudre l'équation aux dérivées partielles d'origine.

Théorème 1.2.2 *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^N$. *Soit un temps une donnée initiale* $u_0 \in L^2(\Omega)$, *et un terme source* $f \in L^2([0,T]; L^2(\Omega))$. *Alors l'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & p.p. \text{ dans } \Omega \times]0,T[\\ u = 0 & p.p. \text{ sur } \partial\Omega \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) & p.p. \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Admet une unique solution $u \in L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$.

De plus, il existe une constant $C > 0$ telle que, pour tout $t \in [0,T]$ on a:

$$\int_\Omega u(x,t)^2 dx + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dxds \leq C\left(\int_\Omega u_0(x)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega f(x,s)^2 dxds\right) \tag{7}$$

Démonstration:

Nous appliquons le théorème 3 à la formulation variation de l'équation de la chaleur (6): ses hypothèses sont facilement vérifiées avec $H = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$.

Il reste à montrer que l'unique solution $u \in L^2(]0,T[\,; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]\,; L^2(\Omega))$ de cette formulation variationnelle est bien une solution (6). Tout d'abord, la condition aux limites de Dirichlet se retrouve de trace à $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ pour presque tout $t \in]0,T[$, et la condition initiale est justifiée par la continuité de $u(t)$ en $t = 0$ (comme fonction à valeurs dans $L^2(\Omega)$).

Théorème 1.2.3 *Si la solution u est suffisamment régulière (par exemple, Si $\frac{\partial u}{\partial t}$ et Δu appartiennent à $L^2(]0,T[\times\Omega)$, ce qui est vrai d'après la proposition (6) par intégration par partie, la formulation variationnelle 6 est équivalente à*

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f\right) v dx = 0 \tag{8}$$

Pour toute fonction $v(x) \in H_0^1(\Omega)$ et presque tout temps $t \in]0,T[$. Par conséquent, on déduit de (8) que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f = 0; \quad p.p. \;\; dans \;\;]0,T[\times\Omega.$$

Si la solution u n'est pas plus régulière que $u \in L^2(]0,T[\,; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]\,; L^2(\Omega))$, on obtient tout de même cette égalité mais la justification en est légèrement plus délicate. Conformément à la remarque 6 le sens précis de 6 est

$$-\int_0^T \int_\Omega uv\frac{d\Phi}{dt}dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u.\nabla v\Phi dxdt = \int_0^T \int_\Omega fv\Phi dxdt \tag{9}$$

Pour toute fonction $v(x) \in C_0^1(\Omega)$ et $\Phi(t) \in C_0^1(]0,T[)$. Un résultat classique d'analyse nous dit que l'ensemble des combinaisons linéaires de produit de telles fonctions $v(x)\Phi(t)$ est dense dans $C_0^1(]0,T[\,,\Omega)$. On note $\sigma = (u, -\nabla u)$ la fonction à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$dont la divergence en "espace-temps" est $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u$. L'identité (9) nous dit que cette divergence a bien un sens faible et est égale à la fonction f qui appartient à $L^2(]0,T[\,; L^2(\Omega))$, d'ou l'égalité presque partout dans $]0,T[\times\Omega$. Il faut cependant faire attention que nous avons montré que la différence $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u$ appartient à $L^2(]0,T[\,; L^2(\Omega))$, mais pas chaque terme individuellement.

1.3 Propriétés Qualitatives

Nous examinons les principales qualitatives de la solution de l'équation de la chaleur notamment les propriétés de régularité, comportement asymptotique pour les grandes valeurs de t et principe de maximum.

1.3.1 Comportement Asymptotique

Nous étudions le comportement de la solution de l'équation de la chaleur en temps long, c'est-à-dire t tend vers $+\infty$. Nous allons vérifier que conformément à l'intuition physique, si le second membre $f(x)$ est independent à temps t alors la solution de l'équation de la chaleur temp asymptotiquement vers la solution stationnaire du Laplacien. Nous commençons par examine le cas de l'équation de la chaleur homogène.

Proposition 1.3.1 *Soit Ω un ouvert borné régulière de R^N. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et u la solution du probléme:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 0 & dans \quad]0, +\infty[\times \Omega \\ u(x;t) = 0 & sur \quad]0, +\infty[\times \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) & dans \quad \Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Alors $u(t)$ converge vers zéro dans $L^2(\Omega)$ lorsque t tend vers $+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} u(t)_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{11}$$

Démonstration:

On reprend la démonstration du théorème (3) dans le cas $f = 0$ c'est-à-dire $\beta_k = 0$ on obtient facilement que la somme partielle vérifie:

$$\left\|w^h(t) - w^k(t)\right\|_H^2 = \sum_{j=k+1}^{h} a_j^{02} \exp\left(-2\lambda_j t\right)$$

Avec $H = L^2(\Omega)$, Ce qui conduit, en prenant $k = 0$ est $h = +\infty$, et en majorant, à

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \|u_0\|_H^2 \exp\left(-2\lambda_1 t\right)$$

Qui temps vers zéros lorsque t tend vers $+\infty$ puisque $\lambda_1 > 0$. Le cas d'un second membre non nul, indépendant de temps, est un simple exercice que nous laissons au lecteur.

1.3.2 Principe du maximum

Pour l'équation de la chaleur, le principe du maximum prend une forme voisine de celle que nous avons énoncée au théorème (1.2.3) pour le Laplacien.

Proposition 1.3.2 *Soit Ω un ouvert bornée régulière de $\mathbb{R}^N$, et un temps final $T > 0$ soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ $f \in L^2(]0;T[;l^2(\Omega))$ et $u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(]0,T[;H_1^0(\Omega)$ l'unique solution de (6) si $f \geqslant 0$ presque partout dans $]0,T[\times\Omega$ et $u_0 \geqslant 0$ presque partout dans Ω alors $u \geqslant 0$ presque partout dans $]0,T[\times\Omega$.*

Démonstration:

Soit $\overline{u}$ qui appartient bien à $L^2(]0,T[;H_1^0(\Omega)$ pour $0 < t < T$

$$\int_\Omega \nabla u(t).\nabla\overline{u}(t)dx = \int_\Omega |\nabla\overline{u}(t)|^2\,dx \tag{12}$$

Un raisonnement similaire à celui qui a permis de démontrer (12) montre que, si $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(]0;T[;L^2(\Omega))$, alors:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t)\overline{u}(t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_\Omega |\overline{u}(t)|^2\,dx) \tag{13}$$

Nous admettrons que l'identité (13) reste vrais même si $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ n'appartient pas à $L^2(]0;T[;L^2(\Omega))$ par conséquent en prenant $v = \overline{u}$ dans la formulation variationnelle (6) de l'équation de la chaleur on obtient:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_\Omega \overline{u}(t)^2dx) + \int_\Omega \nabla\overline{u}(t)^2dx = \int_\Omega f\overline{u}dx$$

Ce qui donne par intégration en temps

$$\frac{1}{2}(\int_\Omega |\overline{u}(t)|^2\,dx) + \int_0^t\int_\Omega |\nabla\overline{u}(t)|^2\,dxds = \int_0^t\int_\Omega f\overline{u}dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega |\overline{u}(0)|^2\,dx \tag{14}$$

Comme $\overline{u}\,(0) = \overline{u}_0 = 0$ on en déduit:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \overline{u}(t)^2dx + \int_0^t\int_\Omega \nabla\overline{u}^2dxds \leqslant 0, \tag{15}$$

C'est-à-dire que $\overline{u} = 0$ presque partout dans $]0,T[\times\Omega$.

1.3.3 Propagation à vitesse infinie

Nous avons déjà évoqué à la remarque cette propriété surprenante de l'équation de la chaleur: la chaleur se propage a vitesse infinie, ce résultat découle d'un principe du maximum fort que nous énonçons maintenant sans démonstration. Nous le vérifierons plus facilement lorsque le domaine Ω est l'espace $\mathbb{R}^N$ tout entier .

Proposition 1.3.3 *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathbb{C}^2$ de $\mathbb{R}^N$. Soit un temps final $\mathbf{T} > \mathbf{0}$. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et u la solution unique dans $C([0,T]\,;L^2(\Omega)) \cap L^2(]0,T[\,;H_1^0(\Omega))$ du problème*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 0 & \textit{dans} \quad]0,T[\times\Omega \\ u(x;t) = 0 & \textit{sur} \quad]0;T[\times\partial\Omega \\ u(x;0) = u_0(x) & \textit{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

On suppose de plus que $u_0(x) \geq 0$ presque partout dans Ω et que u_0 n'est pas identiquement nulle pour tout temps $\xi > 0$, on a

$$u(x,\xi) > 0; \quad \forall x \in \Omega \tag{16}$$

C'est l'égalité stricte de (16) qui est remarquable en effet si u_0 a un support compact dans Ω et si on se place en un point $x \in \Omega$ en dehors du support de u_0 on trouve que $u(x,\xi) > 0$ bien qu'initialement $u_0(x) = 0$ autrement dit dans le cadre de la modélisation de l'évolution de la température même si le point x est initialement froid $(u_0(x) = 0)$ est très loin de partie chaude puisque initiale il devient instantanément chaude puisque pour tout temps $t = \xi$ on a $u(x,\xi) > 0$ ainsi la chaleur se propage à vitesse infinie puisque on effet est immédiat même à grande distance il s'agit clairement d'un défaut du modèle mathématique puisque l'on sait que rien ne peut se propager plus vite que la vitesse de la lumière c'est un modèle qualitativement et quantitativement correct à bien des égards comme l'on démontré d'ailleurs plusieurs résultats précédents conformes à l'intuition physique mais ce n'est qu'un modèle idéalisé de la réalité.

Régularité et effet régularisant

Proposition 1.3.4 *Soit Ω un ouvert borné régulière de classe $\mathbb{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^N$. Soit un temps final $\mathbf{T} > \mathbf{0}$. Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$ et u la solution unique dans $C([0,T]\,;L^2(\Omega)) \cap$*

$L^2(]0,T[\,;H_0^1(\Omega)$ de:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 0 & \textit{dans} \quad]0,T[\times\Omega \\ u(x;t) = 0 & \textit{sur} \quad]0;T[\times\partial\Omega \\ u(x;0) = u_0(x) & \textit{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{17}$$

Alors pour tout $\xi > 0$; u est de classe C^∞en x et t dans $\Omega \times [\xi, T]$.

Idée de démonstration plutôt qu'une démonstration rigoureuse nous proposons un calcul formel qui montre bien l'idée essentielle derrière ce résultat de régularité pour $k \geq 1$ on note $v = \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}$ et on dérive k fois l'équation de chaleur par rapport au temps pour obtenir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans} \quad]0,T[\times\Omega \\ u(x;t) = 0 & \text{sur} \quad]0;T[\times\partial\Omega \\ u(x;0) = u_0(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{18}$$

Qui est encore une équation de la chaleur si $\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}(0,x)$ appartient à $L^2(\Omega)$ on applique d'existence et d'unicité (18) qui nous dit que v appartient à $L^2(]0,T[\,;H_0^1(\Omega) \cap C([0,T]\,;L^2(\Omega))$. En particulier u est régulier en temps, d'autre part par égalité $v = (\Delta)^k u$ appartient au même espace. Le point le plus délicat pour donner un sens à ce raisonnement formel est que la donnée initiale de (18) n'est pas assez régulière. C'est pour cette raison que la régularité de u n'est valable que pour les temps $t > \xi > 0$.

En présence de termes sources, le même raisonnement que celui de la démonstration de la proposition (1.3.3) permet de retrouver un résultat de régularité plus classique qui n'est pas sans rapport avec l'égalité d'énergie.

1.3.4 Équation de la chaleur dans tout l'espace

Pour terminer cette section, nous indiquons brièvement comme résoudre l'équation de la chaleur posée dans tout l'espace $\mathbb{R}^N$. Rappelons que l'approche spectrale suivie dans cet exposé est limitée au cas des ouverts bornés. Considérons l'équation de la chaleur homogène dans tout l'espace $\mathbb{R}^N$, munie d'une donnée initiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = 0 \qquad \text{dans} \quad]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \\ u(x;0) = u_0\,(x) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{19}$$

Le résultat classique suivant montre que la solution du problème (19) est donnée explicitement comme le produit de convolution de la donnée initiale u_0 avec une gaussienne dont l'écart-type croit comme $\sqrt{t}$.

Théorème 1.3.1 *On suppose que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors le problème (19) a une solution unique $u \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}^+_*, L^2(\mathbb{R}^N))$, difinie par*

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^N} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \exp\left(-\frac{x-y}{dt}\right) dy \tag{20}$$

Démonstration:

Pour $t \geq 0$ nous introduisons la transformée de Fourier de $u(t)$ c'est-à-dire de la fonction $x \longrightarrow u(x,t)$, définie par

$$u(k,t) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t) \exp\left(ikx\right) dx$$

Pour $k \in \mathbb{R}^N$, si $u \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}^+_*, L^2(\mathbb{R}^N))$ vérifie (20), on peut appliquer la transformation de Fourier aux deux équations (20) pour obtenir:

$$\begin{cases} \forall u \in C(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}^+_*, L^2(\mathbb{R}^N)); \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} + |k|^2 u = 0 \quad \text{pour} \quad k \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ \quad u\,(k,0) = u_0\,(k) \qquad \text{pour} \qquad k \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Où

$$u_0\,(k) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \exp\left(ikx\right) dx$$

Est la transformée de Fourrier de u_0 se résoudre de façon élémentaire puisqu'on a une équation différentielle pour chaque valeur de k.

On obtient

$$u(k,t) = u_0\,(k) \exp\left(-k^2 t\right) \quad \text{pour} \quad (k,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$$

Et il est facile par transformation de Fourier inverse (puisque cette transformation convertit un produit de convolution en produit simple).

Remarque 1.3.1 *L'utilisation de la transformation de Fourier a permis de "diagonaliser", l'équation de la chaleur (20) et de se ramener à la résolution d'une simple équation différentielle ordinaire. Cette méthode est donc très semblable, dans l'esprit, à l'approche spectrale précédemment utilisée et qui repose aussi sur un argument de diagonalisation. en d'autre terme,* k^2 *et* $\exp(ikx)$ *s'interprètent comme des sortes de valeurs et fonction propres du Laplacien dans* $\mathbb{R}^N$. *Remarquons que plus le mode de Fourier* k *est grand, plus de décroissance exponentielle en temps de* $u(k,t)$ *est rapide. Cet amortissement plus rapide pour les petites longueurs d'onde (*k *grand) est lié à l'effet régularisant de l'équation de la chaleur.*

Chapitre 2

L'équation hyperbolique

2.1 Modélisation et Exemple d'équation hyperbolique

Présentons les deux principaux modèles hyperboliques le premier modèle est l'équation des ondes dont l'origine physique soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$. Pour des conditions aux limites de Dirichlet ce modèle s'écrit:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x;0) = u_1(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{21}$$

Le problème aux limites (21) modélise par exemple la propagation au cours du temps du déplacement vertical d'une membrane élastique, ou bien de l'amplitude d'un champ électrique de direction constante. L'inconnue $u(t,x)$ est ici une fonction scalaire.

La deuxième modèle est l'élastodynamique qui est la version d'évolution en temps des équations de l'élasticité linéairisée. Par application du principe fondamental de la dynamique, l'accélération étant la dérivée seconde en temps du déplacement, on obtient un problème d'évolution d'ordre deux en temps comme (21). Néanmoins, une différence importante avec (21) est que l'inconnue $u(t,x)$ est désormais une fonction à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, si on note $f(t,x)$ la résultante (vectorielle) des forces extérieurs, le déplacement $u(t,x)$ est solution de

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(2\mu e(u) + tr(e(u))Id) = f & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{dans} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0) = u_0(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{22}$$

Ou u_0 est le déplacement initial, $u_1$la vitesse initial, et $e(u) = \dfrac{(\nabla u + (\nabla u)^t)}{2}$ le tenseur des déformation. Supposant homogène isotrope le matériau qui occupe Ω, sa densité est constante $\rho > 0$, de même que ses modules de lamé qui vérifient $\mu > 0$ et $2\mu + N\lambda > 0$.

Remarque 2.1.1 *Il existe d'autre modèles physique donnant lieu à des équations aux dérivées partielles hyperboliques. Cependant, tout modèle hyperbolique n'est pas nécessairement un problème d'évolution d'ordre deux.*

2.2 Existence et Unicité

2.2.1 Formulation variatonnelle

L'idée est d'écrire une formulation variationnelle qui ressemble à une d'équation différentielle ordinaire du premier ordre. Pour cela nous multiplions l'équation des ondes (22) par une fonction test $v(x)$ qui ne dépend par du temps t. A cause de la condition aux limites nous demandons à ce que v s'annule sur le bord de l'ouvert Ω un calcul formel conduit à

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_\Omega u(x,t)\, v(x)\, dx + \int_\Omega \nabla u(x,t) \, .\nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x,t)\, v(x)\, dx. \tag{23}$$

Il est clair que l'espace "naturel" pour la fonction test v est $H_0^1(\Omega)$. On introduit alors le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et la forme bilinéaire $a(w,v)$ définis par:

$$\langle w, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega w(x,t)\, v(x)\, dx$$

et

$$a(w,v)=\int_{\Omega}\nabla w(x,t).\nabla v(x)\,dx$$

Soit un temps final $T>0$ (éventuellement égal à $+\infty$), On se donne le terme source $f\in L^2(]0,T[\,;L^2(\Omega))$. On se donne aussi des condition initiale $u_0\in H_0^1(\Omega)$ et $u_1\in L^2(\Omega)$, la formulation variationnelle déduit de (23) est donc: trouver une solution u dans $C([0,T]\,;H_0^1(\Omega))\cap C^1(]0,T[\,;L^2(\Omega))$ telle que:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}\langle u(t),v\rangle_{L^2(\Omega)}+a\langle u(t),v\rangle=\langle f(t),v\rangle_{L^2(\Omega)}\,; & \forall v\in H_0^1(\Omega)\,,0<t<T\\ u(t=0)=u_0 \quad ; & \dfrac{du}{dt}(t=0)=u_1\end{cases}\tag{24}$$

Les données initiales ont bien un sens dans (24) grâce au choix de l'espace d'énergie $C([0,T]\,;H_0^1(\Omega))\cap C^1(]0,T[\,;L^2(\Omega))$ pour la solution u. Nous justifierons encore ce choix un peu plus loin en établissant son lien avec des égalités d'énergie.

Finalement, la dérivée en temps dans la formulation variationnelle (24) doit être prise au sens faible puisqu'a priori la fonction $t\longrightarrow\langle u(t),v\rangle_{L^2(\Omega)}$ n'est qu'une fois dérivable en temps puisqu'elle appartient à $C^1(0,T)$.

2.2.2 Résultat générale

Théorème 2.2.1 *Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V\subset H$ avec injection compact et V et dense dans H. Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive dans V .soit un temps final $T>0$, une donnée initiale $(u_0,u_1)\in V\times H$, et un terme source $f\in L^2(]0,T[\,;H)$.*

Alors le problème

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}\langle u(t),v\rangle_H+a\langle u(t),v\rangle=\langle f(t),v\rangle_H\,; & \forall v\in V,\quad 0<t<T\\ u(t=0)=u_0 \quad ; & \dfrac{du}{dt}(t=0)=u_1\end{cases}\tag{25}$$

où l'équation de (25) a lieu au sens faible dans $]0,T[$ a une unique solution $u\in C(]0,T[\,;v)\cap C^1([0,T]\,;H)$.De plus, il existe une constante $C>0$ telle que

$$\|u\|_{C([0,T];V)}+\|u\|_{C^2([0,T];H)}\leq C\left(\|u_0\|\,V+\|u_0\|_1\,H+\|f\|_{L^2(]0,T[;H)}\right).\tag{26}$$

Remarque 2.2.1 *l'estimation d'énergie (26) prouve que la solution de (26) dépend continument des données, et donc que le problème hyperbolique (26) est bien posé au sens de Hadamard. La proposition donnera une interprétation physique importante d'un cas particulier de cette estimation d'énergie.*

Démonstration:

La démonstration est très semblable à celle du théorème, aussi nous ne le détaillons pas autant. Dans une première étape, on montre que toute solution u est une série de fonction propres. Dans une deuxième étape, nous démontrons la convergence de cette série dans les espaces $C([0,T];v)$ et $C^1([0,T];H)$.

Etape 1: Supposons que $u \in C(]0,T[;v) \cap C^1([0,T];H)$ est solution de (26) introduisons la base hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1}$ de H composée des fonctions propres de la formulation variationnelle (11) qui vérifient

$$u_k \in V; \quad a(u_k, v) = \lambda_K \langle u_k, v\rangle_H; \quad \forall v \in V.$$

On écrit $u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k(t)} u_k$ avec $a_k(t) = \langle u(t), u_k\rangle_H$.

En choisissant $v = u_k$ dans (27), et on notant

$$\beta_k(t) = \langle f(t), u_k\rangle_H; \quad a_k^0 = \langle u_0, u_k\rangle_H \quad \text{et} \quad a_k^1 = \langle u_1, u_k\rangle_H,$$

on obtient:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 a_k}{dt^2} + \lambda_k a_k = \beta_k \quad \text{dans} \quad]0,T[\\ a_k(t=0) = a_k^0 \quad ; \quad \dfrac{d^2 a_k}{dt^2}(t=0) = a_k^1. \end{cases} \tag{28}$$

Posons $w_k = \sqrt{\lambda_k}$, l'unique solution de (28) est:

$$a_k(t) = a_k^0 \cos(w_k t) + \frac{a_k^1}{w_k}\sin(w_k t) + \int_0^k \boldsymbol{\beta}_k(s)\sin(w_k(t-s))ds \tag{29}$$

Ce qui donne une formule explicite pour la solution u (qui est donc unique).

Etape 2: Pour démontrer que la série

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left(a_j^0\cos(w_j t) + \frac{a_j^1}{w_j}\sin(w_j t) + \frac{1}{w_j}\int_0^k \boldsymbol{\beta}_j(s)\sin(w_j(t-s))ds\right)u_j \tag{30}$$

converge dans $C\left(]0,T[\,;v\right)\cap C^1\left([0,T]\,;H\right)$, on va montrer que la suite $w^k=\sum_{j=1}^{k}a_j(t)u_j$ des sommes partielles de cette série est de Cauchy. Dans V nous considérons le produit scalaire $a(u,v)$ pour lequel la famille (u_j), on obtient, pour $h>k$, et pour tout temps t.

$$a(w^h-w^k,w^h-w^k)+\left\|\frac{d}{dt}(w^h-w^k)\right\|_H^2=\sum_{j=k+1}^{h}\left(\lambda_j\left|\alpha_j(t)\right|^2+\left|\frac{d\alpha_j}{dt}(t)\right|^2\right) \tag{31}$$

Or, en multipliant (29) par $\dfrac{da_k}{dt}$ et en intégrant en temps, on obtiens

$$\left|\frac{d\alpha_j}{dt}(t)\right|^2+\lambda_j\left|\alpha_j(t)\right|^2=\left|\alpha_j^1\right|^2+\lambda_j\left|\alpha_j^0\right|^2+2\int_0^k\boldsymbol{\beta}_j(s)\frac{d\alpha_j}{dt}(s)ds$$

de la formule (30) on infère que

$$\left|\frac{d\alpha_j}{dt}(t)\right|\leq w_j\left|\alpha_j^0\right|^2+\left|\alpha_j^1\right|+\int_0^k\boldsymbol{\beta}_j(s)ds.$$

En combinant ces deux résultats on en déduit

$$\left|\frac{d\alpha_j}{dt}(t)\right|^2+\lambda_j\left|\alpha_j(t)\right|^2\leq 2\left|\alpha_j^1\right|^2+2\lambda_j\left|\alpha_j^0\right|^2+2t\int_0^t\left|\boldsymbol{\beta}_j(s)\right|^2ds.$$

Comme $u_0\in V$, $u_1\in H$ et $f\in L^2(]0,T[\,;H)$, on a

$$\begin{aligned}\|u_0\|_V^2&=a(u_0,u_0)=\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j\left|\alpha_j^0\right|^2<+\infty \qquad (32)\\ \|u_0\|_H^2&=\sum_{j=1}^{+\infty}\left|\alpha_j^1\right|^2<+\infty,\\ \|f\|_{L^2(]0,T[;H)}^2&=\sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^T\left|\boldsymbol{\beta}_j(s)\right|^2ds<+\infty,\end{aligned}$$

Ce qui implique que la sérié, dont le terme général est le membre de gauche de (32) est convergente, c'est-à-dire que la suite w^k vérifié

$$\lim_{k,l\to+\infty}\max_{0\leq t\leq T}\left(\left\|w^h(t)-w^k(t)\right\|_V^2+\left\|\frac{d}{dt}(w^h(t)-w^k(t))\right\|_H^2\right)=0, \tag{33}$$

Autrement dit, elle est de Cauchy dans $C^1(]0,T[\,;H)$ et dans $C([0,T]\,;V)$. Comme ces espaces sont complets, la suite de Cauchy w^k converge et on peut définir sa limite u. En particulier, comme $(w^k(0),\dfrac{dw^k}{dt}(0))$ converge vers $(u_{0,}u_1)$ dans $V\times H$, on obtient les conditions initiales. D'autre part, il est clair que $u(t)$, en tant que somme de la série (30) vérifie la formulation variationnelle (25) pour chaque fonction t est $v=u_k$. Comme $(\dfrac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}})$ est une base hilbertienne de V, $u(t)$ vérifie donc la formulation veriationnelle (25) pour tout $v\in V$, c'est-à-dire que $u(t)$ est bien la solution recherchée de (26). Par ailleurs, on a en fait montré que

$$a(w^h-w^k,w^h-w^k)+\left\|\frac{d}{dt}(w^h-w^k)\right\|_H^2\leq C\left(\|u_0\|_V^2+\|u_1\|_H^2+T\,\|f\|_{L^2(]0,T[;H)}\right)$$

Et l'estimation d'énergie (26) s'obtient alors facilement en prenant $k=0$ et en faisant tendre h vers l'infini.

Application

Nous appliquons maintenant le résultat abstrait du théorème à 'équation des ondes, et nous prouvons que cette approche variationnelle a bien permis de résoudre l'équation aux dérivées partielles d'origines.

Théorème 2.2.2 *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, et un temps final $T>0$. On considère une donné initial$(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ et un terme source $f\in L^2(]0,T[\,;L^2(\Omega))$.*

Alors l'équation des ondes

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=f & p.p.\ dans \quad \Omega\times]0,T[\\ u=0 & p.p.\ sur \quad \partial\Omega\times]0,T[\\ u(x,0)=u_0(x) & p.p.\ dans \quad \Omega\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x) & p.p.\ dans \quad \Omega\end{cases}\tag{34}$$

Admet une unique solution $u\in C([0,T]\,;H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T]\,;L^2(\Omega))$.

De plus, il existe une constant $C>0$ (qui ne dépend que de Ω et de T) tellr que, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2+|\nabla(x,t)|^2\right)dx\leq C\left(\int_\Omega\left(|u_1(x)|^2+|\nabla(x)|^2\right)dx+\int_0^t\int_\Omega|f(x,s)|^2\,dxds\right)\tag{35}$$

Démonstration:

Nous appliquons le thérème 2.2.1 à la formulation variationnelle (25) de l'équation des ondes obtenue à la sous-section (3.1) (ses hypothèses sont facilement vérifiées avec $H = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$). Il reste à montrer que l'unique solution $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$. De cette formulation variationnelle est bien une solution de (33). Tout d'abord, la condition aux limites de Dirichlet se retrouve par application du théorème 3.13 de trace à $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$, et la condition initial est justifiée par la continuité de $u(t)$; $t = 0$ comme fonction à valeur dans $H_0^1(\Omega)$ et de $\frac{\partial u}{\partial t}(t)$ en $t = 0$ comme fonction à valeur dans $L^2(\Omega)$.

Si la solution u est suffisamment régulier, par l'intégration par partie la la formulation variationnelle (25) est équivalent à

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - f \right) v dx = 0$$

pour tout $v(x) \in C_0^1(\Omega)$ et presque tout $t \in]0,T[$. On en déduit donc l'équation de (33). Si la solution u n'est pas plus régulière que ce qui est donné par le théorème 2.2.1, on obtient tout de même l'équation au sens "presque partout", en reprenant les arguments de la démonstration du théorème 1.2.2. On note $\sigma = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, -\nabla u \right)$ la fonction à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}^{N+1}$, et on peut montrer qu'elle admet une divergence faible en "espace-temps" qui est justement $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u$ qui appartient donc à $L^2(]0,T[; L^2(\Omega))$.

En l'absence de forces, $f = 0$, on peut améliorer l'estimation d'énergie (34) et obtenir une propriété de conservation de l'énergie totale qui est très importante du point de vue de l'application. l'énergie totale est ici la somme de deux termes: d'une part l'énergie cinétique $\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2$ et d'autre part l'énergie mécanique $|\nabla u|^2$.

Proposition 2.2.1 *On se place sous les hypothèses du théorème 2.2.2 avec $f = 0$, la solution de l'équation des ondes (33) vérifie, pour tout $t \in [0,T]$, l'égalité de conservation de l'énergie:*

$$\int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 + |\nabla u(x,t)|^2 \right) dx \leq C \int_{\Omega} \left(|u_1(x)|^2 + |\nabla u_0(x)|^2 \right) dx$$

2.3 Propriétés Qualitatives

2.3.1 Réversibilite en temps

Nous examinons maintenant les principales propriétés qualitatives de la solution de l'équation des ondes, qui sont très différentes de celles de la solution de l'équation de la chaleur. la propriété la plus frappante, est la réversibilité en temps de cette équation.

Proposition 2.3.1 *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, et un temps final $T>0$. Soit $(v_0, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, et un terme source $f \in L^2(]0,T[\,; L^2(\Omega))$. Alors l'équation des ondes rétrograde en temps:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = f & p.p.\ dans \quad \Omega \times]0,T[\\ v = 0 & p.p.\ sur \quad \partial\Omega \times]0,T[\\ v(x,0) = v_0(x) & p.p.\ dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_1(x) & p.p.\ dans \quad \Omega \end{cases} \tag{37}$$

Admet une unique solution $v \in C([0,T]\,; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]\,; L^2(\Omega))$. De plus, si $u(t,x)$ est la solution de l'équation des ondes (3) et si $v_0(x) = u(x,T)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et $v_1(x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,T)$ dans $L^2(\Omega)$, alors on a $v(t,x) = u(t,x)$.

Démonstration:

On fait le changement d'inconnue $w(x,t) = v(x,T-t)$ et devient une équation des ondes "progressive" avec donnée initiale en $t=0$ comme l'équation "usuelle" (3) (comme la dérivée en temps est d'ordre 2, il n'y a pas de changement de signe dans l'équation après ce changement d'inconnue). Par application, du théorème admet donc bien une unique solution. Si $v_0(x) = u(x,T)$ et $v_1(x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,T)$, la solution $u(t,x)$ de (3) est aussi solution. Par unicité on en déduit $v(t,x) = u(t,x)$.

Le caractère réversible en temps de l'équation des ondes a de nombreuses conséquences. La plus importante est qu'il n'y a aucun effet régularisant pour l'équation des ondes au contraire de ce qui se passait pour l'équation des ondes a de ce qui se passait pour l'équation des ondes au contraire de ce qui se passait pour l'équation de la chaleur. En effet, si c'était le cas, en changeant le sens du temps comme dans la proposition, on obtiendrait un effet “dérégularisant” contradictoire (la solution serait moins régulière que la donnée finale en T, ce qui n’pas possible puisque l’effet régularisant doit aussi s’appliquer). Par conséquent, il n’y a ni gain ni perte de régularité pour au plus affirmer, comme dans le cas elliptique, que la régularité de la solution de l’équation des ondes est directement liée à celle des données.

Proposition 2.3.2 *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, un terme source $f \in L^2(]0,T[\,;L^2(\Omega))$, et $u \in C([0,T]\,;H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]\,;L^2(\Omega))$ la solution unique de l’équation des ondes (33).*

Alors, u appartient à $C([0,T]\,;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]\,;H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,T]\,;L^2(\Omega))$.

Nous admettons la proposition qui est similaire à la proposition que nous avons aussi admise. On peut bien sur "montre" en régularité à partir de se résultat et obtenir que la solution u de l’équation des ondes(33) est aussi régulière que l’on veut, pourvu que les données u_0, u_1 et f le soient aussi.

2.3.2 Comportement asymptotique et équipartition de l’énergie

Il n’ya pas de principe du maximum pour l’équation des ondes. En l’absence de terme source ($f = 0$), même si la vitesse initiale est nulle ($u_1 = 0$) et si la donnée initiale est positive ($u_0 \geq 0$), la solution u peut changer de signe au cours du temps. Cette absence de principe du maximum est conforme à l’intuition physique. Imaginons une corde ou une membrane élastique: si on la déforme initialement dans une position au dessus de son plan de repos, elle va vibrer et passer alternativement en dessus et au dessusons de ce plan (autrement dit u change de signe). Mathématiquement, ce contre-exemple peut s’écrire simplement sous la forme suivante. Soit $w(x)$ la première fonction propre du Laplacien dans un domaine borné connexe Ω avec condition aux limites de Dirichlet on peut normaliser w de telle manière que $w(x) \geq 0$ dans Ω. En notant $\lambda = w^2$la première valeur propre associée on à w, il est facile de vérifier que $u(t,x) = \cos(wt)w(x)$ change de signe au cours du temps tout en étant la solution unique dans $C([0,T]\,;H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]\,;L^2(\Omega))$ de l’équation des ondes sans terme source et avec les données initiales

$$w(x,t) = w(x) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Il n'y a donc pas non plus de comportement asymptotique en temps long pour l'équation des ondes en domaine borné. Autrement dit, même si le terme source f ne dépend pas du temps, la solution u ne converge pas vers une limite stationnaire lorsque le temps t tend vers l'infini, si $f = 0$, l'influence des conditions initiales est la même à tout temps puisque l'énergie est conservée et ne décroit pas. Le même contre-exemple $u(t,x) = \cos(wt)w(x)$ permet de voir qu'il n'y a pas de limite stationnaire mais des oscillations qui perdurent sans amortissement.

Lemme 2.3.1 *On suppose que u est une solution suffisamment régulière et que f est nul aprés un temps fini.*

2.3.3 Vitesse de propagation finie

Une dernière propriété importante de l'équation des ondes est celle, dite de propagation à vitesse finie. Qu'il existe un cône de lumière (ou domaine de dépendance) qui englobe toute l'information sur la solution de l'équation des ondes. Plus précisément, la solution u en (t,x) ne dépend que des valeurs des données initiales u_0 et u_1 sur le segment $[x-t, x+t]$. On en déduit que si les données initiales sont à support compact $K = [k_{\text{inf}}, k_{\text{sup}}] \subset \mathbb{R}$, alors la solution au temps t est à support compact dans $[k_{\text{inf}} - t, k_{\text{sup}} + t]$. En termes physique cela veut dire que des perturbations initiales se propagent à vitesse finie bornée par 1. Cette situation est encore une fois bien différente de ce qui se passe pour l'équation de la chaleur. L'exercice suivant permet de généraliser cette discussion aux dimensions $N = 2, 3$.

Conclusion

Par conclusion, dans la physique mathématique il y a plusieurs types différents des équations qui est a plusieurs méthodes des résolutions, comme les équations paraboliques et les équations hyperboliques, qui nous donnons à nous mémoire.

.

Bibliographie

[1] Baba-hamed.c.-Benhbib;*Algèbre1, Rappels des cours et des exercices*, (1999), éd.Dunod-paris2003.

[2] Dominiques prochasson;*Analyse 1èr année*,Paris(2003), éd.Dunod.

[3] E.Azoulay-J.Avignant-G.Auliac;*Les mathématiques en license*,(2007), éd.Dunod-paris2003

[4] J.C.Culliére; *Introduction à la méthode des éléments finis (2011)*, éd. Dunod.

[5] Jean-Marie Morvan; *Séries Numériques*,(1748)Toulouse-France, éd.Gépaduès.

[6] Mario.Lefebre;*Processus stochastiques appliqués*,(1978), éd.Dunod.

[7] R.H.Gallagher; *Introduction aux éléments finis*, Pluralis (1977)