الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليــم العالـي و البحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire

Abd Elhafid Boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Licence

en: - Filière mathématiques

Formulation variationnelle des problèmes elliptique

Préparé par :

- **BOUKEDJANI ROQIYA**
- **LEKNOUCHE SELMA**
- **NASRI SOULAF**
- **LEKNOUCHE SOUMIA**

Encadré par : ***LABED BOUDJEMA***

Année universitaire : 2014 / 2015

REMERCIEMENTS

ON REMERCIER TOUT D'ABORD NOTRE DIEU QUI NOUS A DONNE LA FORCE POUR TERMINER CE MODESTE TRAVAIL.

Nous tenons à remercier, en premier lieu, notre promoteur LABED pour ses conseils et ses encouragements pendant tout le suivi de ce travail.

Nos chaleureux remerciements vont plus particulièrement à nos enseignants du Département de science et technologie (M I), grâce au savoir qu'ils nous ont inculqué durant tout le long de notre cursus universitaire.

Tout particulièrement nous tenons à remercier les enseignant HA.BENCHIKH ,N.BOKHCHAM,

Et à tous ceux qu'on aura oubliés nous leur adressons également un grand merci….

…..que Dieu vous bénisse tous.

…….MERCI……

Dedicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- *A ma très **chère mère** HANIA qui a beaucoup sacrifié à mon bonheur, qui a partagé mes malheurs et qui n'a jamais cessé de prier pour moi.*

- *A l'âme de **mon père** ABDELGHANI qui m'a beaucoup conseillé de continuer mes études, que Dieu est pitié de son âme et l'accueil dans son vaste paradis.*

*A **ma sœur ASMA et mes frères TAKI EDDIN, BI LAL et sa fiancée MANAL.***

*A mes **grand père** ABDERAHMEN et HOUSSIN*

*A mes **grand-mères**, et mes très **chers oncles, tantes, cousins** et **Cousines** qui m'ont encouragé durant ma vie estudiantine*

*A tous **mes amis** : KALTOUM, SOUMIA, AICHA ,ROUKIA, HAYET, ASMA, SARRA, SOUAAD, LILA, NADJLA. SALIHA*

ROKIA BOUKEDJANI

Dedicaces

Il est agréable au moment de présenter

Ce travail d'adresser mes dédicace à :

- *Ma très **chère mère** ZAHIA, que je ne pourrai remercier assez, pour son soutien moral et matériel, sa compréhension, amour, tendresse, et ses sacrifices, que dieux lui offre la santé.*

-

*A l'âme de **mon père** ALI*

*A **ma sœur** ABIR **et mes frères** KHALED et SAMI*

*A mes **grand pères,** mes **grand-mères**, mes très **chers oncles,***

Tantes, cousins** et **cousines

*A tous **mes amis** : ROUKIA, SARRA, ASMA*

salma laknouch

Dedicaces

J'adresse mes dédicaces pour ce modeste

Travail à :

Mon exemple dans ma vie, mon très

Cher père *AMER*

La femme que son amour est creusé dans mes

Fons les plus profonds depuis ma naissance,

Ma très chère mère RAHIMA

*A mon **frères** OUSSAMA et mes **sœurs***

*HAJAR, **SOUHILA** **et** **IKRAM***

A tous ceux qui ont aidé de prés ou de loin à l'achèvement de ce travail

*A tous **mes amis** : SARRA, ASMA, AMINA*

SOULAF NASRI

Dedicaces

Il dédié ce modeste travail à :

*Mon très **cher père***

ABDALMOAMEN

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, le

Dévouement et le respect que fait toujours eu

*Pour toi, Ma très **chère mère***

RAHIMA

*A mon **frères** YOUSSEF et mes **sœurs** SOUAD ,*

*KARIMA, MONA, RIMA, BASMA **et** MANAR*

*A tous **mes amis** : SARRA, ASMA , SOUHILA*

SOUMIA LAKNOUCH

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles de types elliptiques et paraboliques ont été étudiées depuis. Longtemps et le cas de problèmes linéaires à données H^{-1} (elliptique) ou $L^2(0,T;H^{-1})$ (parabolique), cadre $\langle$*variationnel*$\rangle$, est bien connu. Il y a existence et unicité dans les $\langle$*bons espaces*$\rangle$ et les équations sont formulées de la façon suivante (où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$), pour une équation elliptique avec conditions aux limites de Dirichlet et $f \in H^{-1}(\Omega)$, on cherche (Lax-Milgram) u vérifiant

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int\limits_{\Omega} (A\nabla u)\,\nabla\varphi = \langle f, g\rangle \ \ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où A est une matrice bornée et coercitive, et pour une équation parabolique avec $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, on cherche (Lions-Magenes) u vérifiant

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \ \ u_1 \in L^2(0,T;H^{-1}) \\ \int\limits_0^T \langle u_t, \varphi\rangle \ + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} (A\nabla u)\,\nabla\varphi = \int\limits_0^T \langle f, g\rangle \ \ \forall\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Les hypothèses sur u entraînent que $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$, la condition initiale a donc bien un sens. Si l'on considère le problème elliptique dans le cas où les données ne sont plus H^{-1}, cette formulation n'est plus adaptée. Pour $f \in M(\bar{\Omega}) = \left(C(\bar{\Omega})\right)$, espace de mesures,(Stampacchia) a proposé en 1965 une méthode donnant dans le cas linéaire existence et unicité des solutions d'une équation elliptique (nous la précisons dans). Cette méthode utilise la dualité (et un résultat de régularité).

Dans ce muni mémoire de fin d'ètude nous nous intéressons à l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de type elliptique. Les EDP proviennent de la modélisation mathématique, c'est â dire de la transcription en équations, de problèmes intervenant dans tous les domaines des sciences: physique, chimie, biologie, finance... la méthode des éléments finis est une technique numérique de discrétisation qui est très naturelle si le problème mathématique posé peut s'écrire sous la forme d'un problème de minimisation ou sous une forme variationnelle. La difficulté essentielle pour comprendre les fondements de la méthode des éléments finis consiste à savoir écrire les équations aux dérivées partielles de type elliptique (équation de poisson, élasticité, problème de stokes). En règle générale ces équations elliptiques correspondent à des modèles physique stationnaires. L'approche que nous allons suivre est appelée approche variationnelle.

Au cour de cette mémoire, on donnée trois chapitres prencipeaux qui sont Problème elliptique, Théorie de lax milgram, Approche variationnelle.

Chapitre 1

Problème elliptique

1.1 Équation elliptique

1.1.1 Classification des équations

Soit l'équation:

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y,u,p,q) \tag{E}$$

Définition:

Si $b^2 - 4ac > 0$ l'équation est dite hyperbolique dans un domaine D, elle admet deux familles des courbes caractéristiques sur $\mathbb{R}$.

Si $b^2 = a.c$ l'équation (E) est dite parabolique dans D, elle admet sur D une famille des courbes caractéristiques.

Si $b^2 < a.c$ l'équation (E) est dite elliptique dans D, elle n'admet pas des courbes caractéristiques (réels), mais admet des courbes sur $\mathbb{C}$.

1.1.2 Les courbes caractéristiques des équations elliptiques

L'équation des courbes caractéristiques est:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = 0$$

Cette équation n'admet pas des solutions réelles, mais on les trouve dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm i\sqrt{\frac{a.c - b^2}{a^2}}$$

Peut-être sous la forme:

$$\eta_1(x, y) + i\ \psi_1(x, y) = k_1; \qquad k_1 \in \mathbb{C}$$

$$\eta_2(x, y) + i\ \psi_2(x, y) = k_2; \qquad k_2 \in \mathbb{C}$$

On peut pose:

$$x_1 = \eta_1(x, y) + i\ \psi(x, y)$$

$$x_2 = \eta_2(x, y) + i\ \psi(x, y)$$

On pose:

$$x_1 = y_1 + iy_2$$

$$x_2 = y_1 - iy_2$$

Alors le terme mixte coefficient de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ disparait.

Théorème:

Soit:

$$\varphi_1(x, y) = K_1 \quad , \quad \varphi_2(x, y) = K_2$$

Les solutions de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \pm i\sqrt{\frac{ab - b^2}{a^2}}$$

On pose:

$$y_1 + iy_2 = \varphi_1(x, y)$$

$$y_1 - iy_2 = \varphi_2(x, y)$$

Alors (E) devient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial y_2}, u, y_1, y_2\right)$$

Exemple: Soit (E):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

On a $b^2 < ac$ donc l'équation elliptique.

Les courbes caractéristiques sont:

$$\begin{cases} 2y - ix^2 = K_1 \\ 2y + ix^2 = K_2 \end{cases}$$

On pose:

$$2y - ix^2 = y_1 + iy_2 \quad \text{et} \quad 2y + ix^2 = y_1 - iy_2$$

C'est-à-dire:

$$y_1 = 2y \quad \text{et} \quad y_2 = -x^2$$

Comme aussi l'équation suivante est du type elliptique:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = \frac{1}{2y_2^2} - \frac{\partial u}{\partial y_2}$$

1.2 Une interprétation physique des EDP elliptiques

1.2.1 Notion de flux conservatif

Une interprétation physique des équations elliptiques provient de la notion de flux conservatif donné par un gradient. Cette notion fournit un modèle mathématique pour des lois de conservation à l'équilibre en comportement linéaire. Comme on le verra, cela peut être appliqué à de nombreux domaines des sciences pour l'ingénieur.

Considérons une grandeur scalaire $\mu(x)$ (Température, concentration chimique, ...). Comme pour les équations de transport, on associe un flux (Chaleur, matière, ...) et on considère que ce flux vers l'extérieur de cette quantité, $q(x)$ est nul à l'équilibre, soit:

$$\int_{\partial\omega} q(x).n_x ds = 0 \qquad (1.2.1)$$

quel que soit le volume d'intégration ω inclus dans Ω. En utilisant la formule divergence-flux, on obtient:

$$\int_{\omega} \operatorname{div}_x q(x) = 0; \quad \forall x \in \Omega \qquad (1.2.2)$$

En supposant une bonne régularité pour $q(x)$, on obtient une version locale de cette équation:

$$\operatorname{div}_x q(x) = 0; \quad \forall x \in \Omega \tag{1.2.3}$$

Du fait de l'indépendance du volume d'intégration.

Si l'on suppose de plus que ce flux et une fonction linéaire du gradient, $\nabla \mu$ et orienté dans la direction opposée (les flux se font souvent de façon opposée au gradient d'une grandeur), on peut alors écrire que $q(x) = -a(x) \nabla_x \mu$. On obtient une loi de conservation à l'équilibre du type:

$$\operatorname{div}_x (a(x) \nabla \mu(x)) = 0 \tag{1.2.4}$$

Pour $a(x) = 1$, on obtient la plus simple des équations elliptiques, l'équation de Laplace:

$$\operatorname{div} \nabla \mu(x) = \Delta \mu(x) = 0 \tag{1.2.5}$$

1.2.2 Équilibre des lois des conservations en comportement linéaire

D'une manière plus générale, le raisonnement précédent peut être mené en considérant les lois des conservations dans les milieux continus. Les ingrédients principaux qui vont nous conduire à une grande famille d'équations elliptiques sont les suivants:

– Conservation d'une grandeur.

– Milieu immobile et régime stationnaire.

– Loi de comportement linéaire entre le flux de cette grandeur et le gradient.

Les deux premières notions sont souvent associées à l'équilibre d'un système.

Retour sur les lois des conservations on considère un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = \overline{1,3}$. Pour tout sous domaine $\omega \subset \Omega$, on définit une grandeur $U(t)$ à partir de sa densité spécifique (massique) $\mu(x,t)$, soit:

$$U(t) = \int_\omega \rho(x,t) \mu(x,t) \, dx \tag{1.2.6}$$

où ρ est la masse volumique du milieu. On suppose que la variation de cette grandeur $U(t)$ ne peut se faire que par un apport extérieur volumique:

$$\int_{\omega} \varphi\mu dx \tag{1.2.7}$$

et un apport surfacique sur la frontière de ω^3 :

$$-\int_{\partial\omega} J\mu ds \tag{1.2.8}$$

Le lemme de Cauchy affirme alors l'existence d'un tenseur $J\mu$ tel que $J\mu = ju.\ n$ et que l'on ait la loi de conservation locale:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mu) + \operatorname{div}_x(\rho\mu\upsilon) = \varphi\mu - \operatorname{div}_x(j\mu) \tag{1.2.9}$$

En utilisant la conservation de la masse, on obtient la seconde formulation de l'équation de conservation locale, soit:

$$\rho\frac{\partial\mu}{\partial t} = \varphi\mu - \operatorname{div}_x(j\mu) \tag{1.2.10}$$

1.2.3 Équilibre général

Pour résumé, les équations elliptiques sont beaucoup utilisées dans les sciences de l'ingénieur pour traduire des phénomènes stationnaires ou d'équilibre sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$. Ces modèles se mettent sous la forme suivante:

$$j = -A(x)\nabla_x \quad \textit{Équation de flux.}$$

$$\operatorname{div} j = f - c(x)\mu \quad \textit{Équation d'équilibre, ou de conservation.}$$

où

- La fonction inconnue scalaire $\mu : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée un potentiel.

- La fonction vectorielle $j : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est appelée un flux.

- La fonction scalaire $F : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ joue le rôle de termes sources de potentiel.

- Les fonctions scalaires $A(x)$ et $c(x)$ sont des données du problème.

Naturellement, ces notions peuvent être transportées au cas vectoriel $\mu \in \Omega \subset \mathbb{R}^x \rightarrow \mathbb{R}$. La première équation s'appelle plutôt une loi constitutive ou loi de comportement du milieu. Le flux j deviens un tenseur d'ordre 2 (une matrice), la fonction $A(x)$ une tenseur d'ordre 4 et $c(x)$ une fonction vectorielle.

Chapitre 2

Théorie de lax-milgram

2.1 Cadre abstrait

Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert. On note V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de norme $\|.\|$.

Trouver $u \in V$ tel que: $a(u,\nu) = L(\nu)$ pour toute fonction $\nu \in V$. Les hypothèses sur a et L sont:

1- $L(.)$ est une forme linéaire continue sur V, c'est-à-dire que $L: \ \nu \longrightarrow L(\nu)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe $c > 0$ tel que:

$$|L(\nu)| \leq c\,\|\nu\| \quad \text{pour tout} \quad \nu \in V.$$

2- $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur V, c'est-à-dire que $a: \ w \longrightarrow a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in V$, et $a: v \longrightarrow a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $w \in V$.

3- $a(.,.)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que:

$$|a(w,v)| \leq M\,\|w\|\,\|v\| \quad \text{pour tout} \ \ w, v \in V.$$

4- $a(.,.)$ est coercive (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $k > 0$ tel que:

$$a(v,u) \geqslant k\,\|v\|^2 \quad \text{pour tout} \ \ v \in V.$$

2.2 Application de Laplacien

2.2.1 Le Laplacien de Dirichlet

On considère le problème de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta \upsilon = f & \text{sur} \quad \Omega \\ \upsilon = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2.1}$$

On propose d'adopter une approche variationnelle pour construire une solution. Rappelons comment écrire une formulation variationnelle du problème (2.2.1)

Étape 1: Construction de la formulation variationnelle.

On multiplie par une fonction test, on intègre sur Ω et on intègre par parties, sans se soucier pour l'instant de la justification. On obtient

$$\int_\Omega \nabla\upsilon.\nabla\nu - \int_{\partial\Omega} \frac{\theta\upsilon}{\theta\eta}\nu = \int_\Omega f\nu \tag{2.2.2}$$

L'objectif est de faire jouer à υ et ν un rôle symétrique: on veut que la formulation variationnelle a un sens pour des υ et ν de même régularité. On voit ainsi que $\upsilon, \nu \in H^1(\Omega)$ est approprié pour donner un sens à (2.2.2). Pour tenir compte de la condition aux limites $\upsilon = 0$ sur $\partial\Omega$. La formulation variationnelle du problème est donc: $\upsilon \in H_0^1(\Omega)$, tel que:

$$\forall \upsilon \in H_0^1(\Omega)\,; \quad \int_\Omega \nabla\upsilon.\nabla\nu = \int_\Omega f\nu \tag{2.2.3}$$

Pour que le second membre a un sens, on suppose dans la suite que $f \in L^2(\Omega)$. Remarquer que le problème est également bien défini avec $f \in H^{-1}(\Omega)$, puisque $\nu \in H_0^1(\Omega)$

Étape 2: Résolution du problème sous forme variationnelle

Soit V un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire continue et coercive sur V, telle que (continuité):

$$\exists M > 0; \quad \forall \upsilon, \nu \in H; \quad |a(\upsilon,\nu)| \leq M\,\|\upsilon\|\,.\,\|\nu\|$$

et (coercivité):

$$\exists k > 0; \quad \forall \upsilon \in H; \quad a(\upsilon, \nu) \geq k \|\upsilon\|^2$$

Soit L une forme linéaire continue sur H telle que:

$$\exists c > 0; \quad \forall \nu \in H; \quad |L(\nu)| \leq c\nu$$

Alors le problème suivant: trouver $\upsilon \in V$, tel que:

$$\forall \nu \in V; \quad a(\upsilon, \nu) = L(\nu)$$

admet une solution unique . De plus on a: $\|\upsilon\| \leq \dfrac{c}{k}$.

Ce théorème permet de montrer que le problème (2.2.3) est bien posé.

Étape 3: Interprétation des résultats.

On a donc obtenu une solution au problème variationnel (2.2.3) . Une question naturelle est alors de savoir en quel sens on a résolu le problème initial (2.2.1) , Il est facile de voir que l'équation $-\Delta \upsilon = f$ est vérifiée au sens des distributions. Or $f \in L^2(\Omega)$ donc $-\Delta \upsilon \in L^2(\Omega)$, et l'égalité a donc lieu presque partout. On a de même $\upsilon = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$ (pour la mesure surfacique sur $\partial\Omega$).

On comprend que quelques tâtonnements sont possibles dans la première étape. L'important est d'obtenir une formulation variationnelle à partir de laquelle on raisonne rigoureusement: existence et unicité du résultat, puis retour au problème initial

(En répondant à la question: en quel sens a-t-on construit une solution du problème initial?).

Remarque: Les problèmes symétriques peuvent s'interpréter en termes de minimisation. Ainsi, on peut vérifier que la solution du problème (1.2.1) est aussi la fonction qui réalise le minimum de:

$$\min_{\upsilon \in H_0^1(\Omega)} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla \upsilon|^2 - \int_\Omega f\upsilon$$

Exemple: En utilisant la surjectivité de l'application trace γ_0, étudier le problème suivant: pour $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, trouvé $\upsilon \in H^1(\Omega)$, tel que:

$$\begin{cases} -\Delta\upsilon = f & \text{sur} \quad \Omega \\ \upsilon = g & \text{sur} \quad \theta\Omega \end{cases} \tag{2.2.4}$$

Montrer que υ satisfait la formulation variationnelle (trouver $\upsilon \in \{\nu \in H^1(\Omega), \quad \nu = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}$), tel que:

$$\forall \nu \in H_0^1(\Omega); \quad \int_\Omega \nabla\upsilon.\nabla\nu = \int_\Omega f\nu \tag{2.2.5}$$

Considérer $\nu = \upsilon - \bar{\upsilon}$ où $\bar{\upsilon} \in H^1(\Omega)$ est un relèvement de la condition au bord, c'est-à-dire est tel que $\bar{\upsilon} = g$ sur Ω.

Précisons un point de terminologie: pour une solution d'une équation aux dérivées partielles, on parle de solution classique du problème (2.2.1) si les dérivées sont définies au sens classique, i.e. si $\upsilon \in C^2(\Omega)$.

On parle de solution forte du problème (2.2.1) si les dérivées sont des fonctions L^1_{LOC}, i.e. si $\upsilon \in H^2(\Omega)$. Si les dérivées ne sont définies qu'au sens des distributions, on parle de solution faible: c'est le cas pour (2.2.1) si υ est seulement une fonction de $H^1(\Omega)$. Par ailleurs, la formulation (2.2.1) est appelée formulation forte et la formulation (2.2.3) est appelée formulation faible.

2.2.2 Le Laplacien de Neumann

On considère maintenant le problème:

$$\begin{cases} -\Delta\upsilon = f & \text{sur} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial\upsilon}{\partial\eta} = g & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Étape 1: Construction de la formulation variationnelle

On obtient facilement la formulation variationnelle suivante: trouver $\upsilon \in H^1(\Omega)$, tel que:

$$\forall \nu \in H^1(\Omega); \quad \int_\Omega \nabla\upsilon \cdot \nabla\nu = \int_{\partial\Omega} g\nu + \int_\Omega f\nu \tag{2.2.7}$$

Il est important de remarquer que la condition aux limites s'insère ici de manière naturelle dans la formulation variationnelle et n'est pas incluse dans l'espace fonctionnel pour v (d'ailleurs demander à une fonction de $H^1(\Omega)$ d'avoir une dérivée normale égale à une fonction g au bord n'a pas de sens). La situation est donc différente du cas des conditions aux limites de Dirichlet pour les quelles on tient compte des conditions aux limites de manière essentielles dans l'espace fonctionnel.

On voit également que l'on demande typiquement $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$, pour que (2.2.7) a un sens.

Étape 2: Résolution du problème sous forme variationnelle.

A ce stade, il est important de remarquer que le problème ne peut avoir de solution que si f et g vérifient une condition de compatibilité (prendre $\nu = 1$ dans (2.2.7)) :

$$\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0 \tag{2.2.8}$$

Un deuxième point à noter est que si v est solution, v plus une constante est également solution. On ne peut donc pas espérer prouver qu'il existe une unique solution au problème sans restreindre l'espace fonctionnel pour v. Pour éliminer l'indétermination due à cette constante additive, on introduit (par exemple)

$$V = \{v \in H^1(\Omega)\,; \quad \int_\Omega v = 0\}$$

et on pose le problème sous la forme: trouver $v \in V$, tel que:

$$\forall v \in V; \quad \int_\Omega \nabla v . \nabla \nu = \int_{\partial\Omega} g\nu + \int_\Omega f$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on montre que le problème est bien coercif et donc qu'il admet une solution unique .

Étape 3: Interprétation des résultats.

Cette étape est un peu plus compliquée que dans le cas du Laplacien de Dirichlet.

En prenant $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, et on testant contre

$$\nu = \left(\varphi - \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \varphi\right) \in V$$

on vérifie facilement que le problème $-\Delta v = f$ est vérifié au sens des distributions, et donc dans $L^2(\Omega)$ (et en particulier presque partout). Par contre, donner un sens à la condition aux limites $\dfrac{\partial v}{\partial \eta} = g$ sur $\partial\Omega$ pose des difficultés car $\dfrac{\partial v}{\partial \eta}$ n'est pas défini pour $v \in V$. Pour pouvoir donner un sens à la condition aux limites, il faut supposer un peu plus de régularité sur v. Admettons pour le moment que $v \in H^2(\Omega)$ (ceci découle d'un résultat énoncé ci-dessous, et nécessite $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$), on peut alors intégrer par parties la formulation variationnelle pour obtenir:

$$\int_\Omega (-\Delta v - f)\,\nu = \int_{\partial\Omega} \left(g - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\nu.$$

Cette relation est valable pour toute fonction $\nu \in H^1(\Omega)$ (en utilisant la relation de compatibilité (2.2.8)). Comme

$$-\Delta v - f = 0$$

presque partout, on a en fait

$$\int_{\partial\Omega} \left(g - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\nu = 0$$

On peut prendre ici n'importe quelle fonction $\nu \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, et en particulier,

$$\nu = g - \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

On en déduit donc que

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = g$$

presque partout sur $\partial\Omega$.

Chapitre 3

Approche variationnelle

3.1 Formule de Green

3.1.1 Théorème (formule de Green)

Soit Ω un ouvert et régulier de classe C^1, soit g une fonction de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ á support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$ alors elle vérifie la formule de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} g(x)\, n_i(x)\, ds \tag{3.1.1}$$

ou n_i est la *i éme* composante de la norme extérieure unité de Ω.

3.1.2 Remarque

Dire qu'une fonction régulière ω a son support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$ veut dire qu'elle s'annule á l'infini si le fermé n'est pas borné. On dit aussi que la fonction ω à un support compact dans $\overline{\Omega}$ (attention: cela n'implique pas que ω s'annule sur la borne $\partial\Omega$). En particulier, l'hypothèse du théorème (3.1.1) á propos du support borné de la fonction ω dans $\overline{\Omega}$ est inutile si l'ouvert Ω est borné. si Ω n'est pas borné, cette hypothèse assure que les intégrales dans (3.1.1) sont finies.

3.1.3 Corollaire (formule d'intégration par parties)

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1. Soit μ et υ deux fonctions de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ a support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$.

Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega}\mu\left(x\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial x_i}\left(x\right)dx=-\int_{\Omega}\upsilon\left(x\right)\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\left(x\right)dx+\int_{\partial\Omega}\mu\left(x\right)\upsilon\left(x\right)n_i\left(x\right)ds \tag{3.1.2}$$

Démonstration:

Il suffit de prendre $g=\mu\upsilon$ dans le théorème $(3.1.1)$.

3.1.4 Corollaire

Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1. Soit μ une fonction de $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ et υ une fonction de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, toutes deux à support borné dans le fermé $\overline{\Omega}$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties

$$\int_{\Omega}\Delta\mu\left(x\right)\upsilon\left(x\right)dx=-\int_{\Omega}\nabla\mu\left(x\right).\nabla\upsilon(x)dx+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\mu}{\partial n}\left(x\right)\upsilon\left(x\right)ds \tag{3.1.3}$$

où

$$\nabla\mu=\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq N}$$

est le vecteur gradient de μ, et

$$\frac{\partial\mu}{\partial n}=\nabla\mu.n$$

Démonstration:

On applique le corollaire (3.1.3) á υ et $\dfrac{\partial\mu}{\partial x_i}$ et on somme en i.

3.1.5 Définition

On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est régulier de classe C^k (avec un entier $k\geq 1$) s'il existe un nombre fini d'ouverts $(\omega_i)_{0\leq i\leq I}$ tels que:

$$\overline{\omega_0}\subset\Omega,\quad\overline{\Omega}\subset\cup_{i=0}^{I}\omega_i,\quad\partial\Omega\subset\cup_{i=1}^{I}\omega_i$$

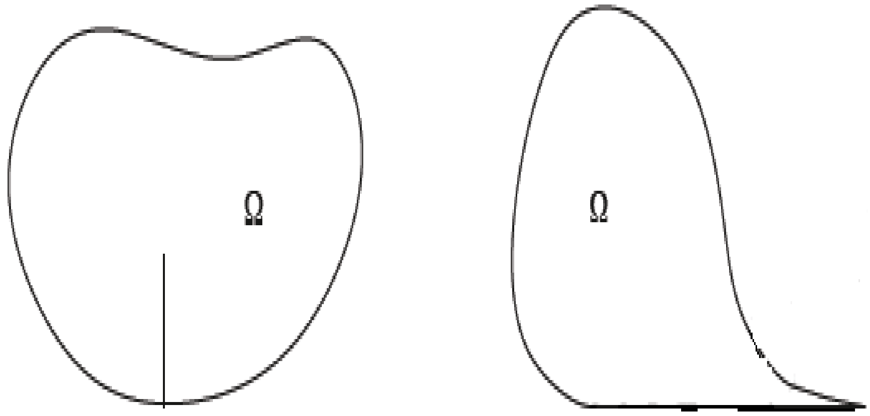
et que pour chaque $i \in \{\overline{1,I}\}$ (voir la figure $(FIG - G-)$), il existe une application bijective ϕ_i de classe C^K, de ω_i dans l'ensemble

$$Q = \{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}; \quad |y'| < 1, \quad |y_N| < 1\}$$

dont l'inverse est aussi de classe C^k, et telle que:

$$\phi_i (\omega_i \cap \Omega) = Q \cap \{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}, y_N > 0\} = Q^+$$

$$\phi_i (\omega_i \cap \partial\Omega) = Q \cap \{y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}, y_N > 0\}$$



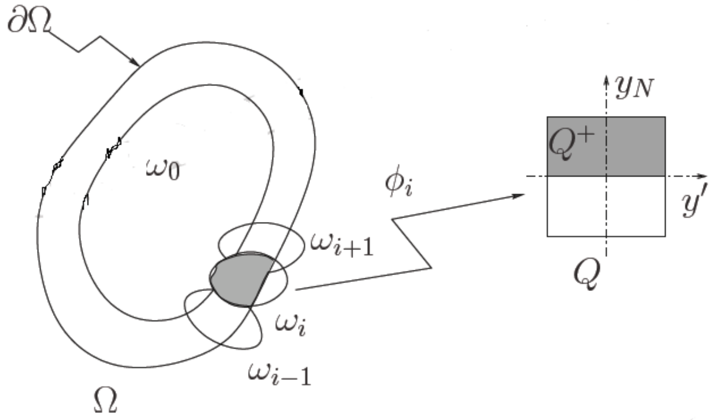


FIG. – Définition de la régularité d'un ouvert.

$(FIG\ -G-)$

deux exemples d'ouvert non régulier: ouvert fissuré á gauche, ouvert avec un point de rebroussement á droite.

Remarque:

Bien que la figure $(FIG\ -G-)$ représente un ouvert régulier qui est borné, la définition $(FIG -G-)$ s'applique aussi a des ouverts non bornés. La définition $(FIG\ -G-)$ n'exclut pas seulement les ouverts dont le bord n'est pas une surface régulière, mais elle exclut aussi les ouverts qui ne sont pas localement situés d'un seul côté de leur frontière. La figure $(FIG\ -G-)$ contient deux exemples typiques d'ouvert non régulier qui présente une singularité irrémédiable, soit en bout de fissure, soit en un point de rebroussement. Ces exemples ne sont pas des "inventions mathématiques": l'ouvert fissuré est typiquement utilisé pour étudier les problèmes de fissures en mécanique des structures. On peut réanimoins généraliser un peu la classe des ouverts réguliers "aux ouverts réguliers" par morceaux, a condition que ces morceaux de frontières "se recollent" en formant des angles différents de 0 (cas d'un point de rebroussement) ou de 2π (cas d'une fissure). Tous ces détails dépassent largement le cadre de ce cours, et nous renvoyons le lecteur à la remarque (3.1.2) pour une autre explication sur ces problèmes de régularité.

3.1.6 Exemple

Déduire de la formule de Green (3.1.1) la formule de Stokes:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(x)\, \phi(x)\, dx = -\int_{\Omega} \sigma(x) . \nabla \phi(x) + \int_{\partial \Omega} \sigma(x) . n(x)\, \phi(x)\, ds$$

où ϕ est une fonction scalaire de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ et σ une fonction á valeurs vectorielles de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, á supports bornés dans le fermé $\overline{\Omega}$.

3.1.7 Exemple

En dimension $N = 3$ on définit le rotationnel d'une fonction $\varphi = \left(\varphi_{1,}\varphi_2, \varphi_3\right)$ de Ω dans $\mathbb{R}^3$, comme la fonction de Ω dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$rot\varphi = \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial X_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_3}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_3} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_2}\right)$$

pour φ et ψ, fonction á valeurs vectorielles de $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, á supports bornés dans le fermé $\overline{\Omega}$, déduire de la formule de Green (3.1.1)

$$\int_{\Omega} rot\varphi.\psi dx - \int_{\Omega} \varphi.rot\psi dx = -\int_{\partial\Omega} (\varphi \times n) .\psi ds$$

3.2 Formulation variationnelle

Pour simplifier la présentation, nous supposons que l'ouvert Ω est borné et régulier, et que le second membre f de

$$\begin{cases} -\Delta\mu = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \mu = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

est continu sur $\overline{\Omega}$. Le résultat principal est la proposition suivante:

3.2.1 Proposition

Soit μ une fonction de $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Soit χ l'espace défini par:

$$\chi = \left\{\varphi \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) \quad \text{tel que} \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\right\} \tag{3.2.4}$$

Alors μ est une solution du problème aux limites (définition de la régularité d'une ouvert) si et seulement si μ appartient à χ et vérifie l'égalité:

$$\int_{\Omega} \nabla\mu(x) .\nabla\upsilon(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \upsilon(x) dx \tag{3.2.5}$$

pour toute fonction $\upsilon \in \chi$ l'égalité (3.2.5) est appelée la formulation variationnelle du problème aux limites (définition de la régularité d'un ouvert).

3.2.2 Une formulation variationnelle

Dans ce paragraphe, nous donnons une preuve d'existence au problème Dirichlet sur un domaine "général" $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \mu(x) = g(x) ; \quad \forall x \in \partial\Omega \\ \Delta\mu(x) = 0; \quad \forall x \in \Omega \end{cases} \tag{3.2.6}$$

outre l'aspect intéressant du résultat en lui-même, il montre en particulier l'importance des formulations dites variationnelles en comment on peut lier simplement, sur ce problème, le calcule des variations á la théorie de EDP.

Commençons par définir la fonctionnelle d'énergie suivante:

$$E(\mu) = \int_{\Omega} |\nabla \mu(x)|^2 \, dx \tag{3.2.7}$$

Et une classe de fonctions admissible:

$$A = \{\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \mu(x) = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad E(\mu) < +\infty\}. \tag{3.2.8}$$

Nous allons établir le théorème suivant:

Théorème:

Si A est non vide, et qu'il existe $\overline{u} \in A$ qui minimise $E(u)$ sur A; c'est-à-dire:

$$E(\overline{u}) \leq E(u), \quad \forall u \in A \tag{3.2.9}$$

alors $\overline{u}$ est une solution du problème de Dirichlet.

Avant de donner les grandes lignes de la démonstration de ce théorème, notons qu'il faut être capable de répondre aux questions suivantes:

1. L'ensemble A est il non vide? Plus précisément, quelles conditions doivent remplir la frontière $\partial\Omega$ et la fonction donnée f pour qu'une solution d'énergie finie prolonge f sur tout Ω.
2. Existe il un minimiser de E dans A?

Preuve:

Il ne s'agit pas ici de donner une preuve rigoureuse (difficile sans un cadre fonctionnel adéquat) mais plutôt le principe général de la démonstration.

Définissons:

$$A_0 = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \quad v(x) = 0. \quad \forall x \in \partial\Omega\} \tag{3.2.10}$$

On peut montrer facilement l'assertion suivante:

$$u \in A, v \in A_0 \Rightarrow (u + \varepsilon v) \in A, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Pour chaque $v \in A_0$, nous définissons la fonction réelle $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;

$$a(\varepsilon) = E(\overline{u} + \varepsilon v) \tag{3.2.11}$$

$$= \int_\Omega \left[|\nabla \overline{u}\,(x)|^2 + 2\varepsilon \nabla \overline{u} \nabla v + \varepsilon^2\, |\nabla v\,(x)|^2 \right] dx \tag{3.2.12}$$

$$= E\,(\overline{u}) + 2\varepsilon \int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla v + \varepsilon^2 E\,(v) \tag{3.2.13}$$

L'inégalité (3.2.9) et le calcul (3.2.11) nous montrent que la fonction a est quadratique et atteint son minimum en $\varepsilon = 0$. En prenant sa dérivée première en $\varepsilon = 0$, on obtient:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = 0, \quad \forall v \in A_0 \tag{3.2.14}$$

Pour terminer la preuve du théorème, il nous montrait que si $\overline{u}$ vérifie (3.2.14) alors elle vérifie l'équation de Laplace.

La question de régularité est plus technique et demande de se placer dans un cadre fonctionnel rigoureux.

3.2.3 L'écriture variationnelle d'un problème aux limites

L'écriture variationnelle d'un problème aux limites elliptiques prend toujours une forme du type:

$$u \in V \tag{3.2.15}$$

$$a\,(u, v) = L\,(v)\,, \quad \forall v \in V \tag{3.2.16}$$

Nous notons que la formulation variationnelle est composée á la fois de (3.2.15) et de (3.2.16) écrire un problème EDP sous forme variationnelle, c'est suivre le programme de travail suivant:

(i) Trouve l'espace V ou l'on cherche la solution.

(ii) Trouve une forme bilinéaire $a\,(\mu, v)$:

$$a : V \times V \longrightarrow R$$

$$(u,v) \longrightarrow a\,(u,v)$$

$$\begin{cases} a\,(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda a\,(u_1, v) + \mu a\,(u_2, v) \\ a\,(u, \lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda a\,(u, v_1) + \mu a\,(u, v_2) \end{cases} \qquad (3.2.17)$$

(iii) Trouve une forme linéaire $L(v)$:

$$L : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longrightarrow L(v)$$

$$L(\lambda v + \mu w) = \lambda L(v) + \mu L(w) \qquad (3.2.18)$$

On notera aussi que c'est le même espace V qui figure aux relations $(3.2.15)\,,(3.2.16)\,;$ V est un espace vectoriel:

$$u, v \in V \Longrightarrow \lambda u + \mu v \in V; \qquad \forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2. \qquad (3.2.19)$$

Pour écrire le problème de poisson sous fourme variationnelle, on choisit d'introduire la condition de Dirichlet homogène u dans l'espace V, c'est-à-dire de poser:

$$V = \{u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}\,. \qquad (3.2.20)$$

La condition $(3.2.15)$, jointe au choix $(3.2.20)$, exprimant alors exactement la condition Dirichlet (problème de poisson ($u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$)) on trouve alors la forme bilinéaire $a\,(.,.)$ et la forme linéaire $L\,(.)$ a l'aide de manipulations algébriques fondées sur la formule de green, et plus précisément dans le cas qui nous intéresse ici, la formule

$$\left(\int_\Omega (\Delta u)\,v dx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dy\right)$$

On multiple l'équation (problème de poisson ($-\Delta u = f \quad \text{sur} \quad \Omega$)) par une fonction teste v et ont intégré sur le domaine d'étude Ω nous avons:

$$\int_\Omega (-\Delta u)\,v dx = \int_\Omega f v dx; \quad \forall v \in V \qquad (3.2.21)$$

Nous venons ainsi se trouve une formulation variationnelle pour le problème EDP, mais poser

$$a\,(u,v) = -\int_\Omega (\Delta u)\,v dx$$

n'est pas mathématiquement satisfaisant on cherche (pour des raisons théoriques qui assurant ensuite facilement que le problème a une solution unique) une forme bilinéaire elliptique, c'est-à-dire il existe $\alpha > 0$ de sorte que:

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 ; \quad \forall v \in V \tag{3.2.22}$$

En pratique, le nombre $a(v,v)$ doit être clairement positif (cela doit sauter aux yeux: ont intégré une fonction positive par exemple), ce qui n'est pas le cas si on reste á la relation $(3.2.21)$. Nous transformons l'intégrale du membre de gauche de (3.2.21) á l'aide de la relation

$$\int_\Omega (\Delta u)\, vdx = -\int_\Omega \nabla u.vdx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} vdx$$

$$\int_\Omega (-\Delta u)\, vdx = \int_\Omega \nabla u.\nabla vdx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} vdx \tag{3.2.23}$$

Le terme de bord dans le membre de droite de la relation (3.2.23) est toujours nul dès que v appartient á l'espace V proposé á la relation (3.2.20) (souvenez vous que c'est le même espace V aux relations (3.2.15) et (3.2.16)) on peut donc réécrire la relation (3.2.21) sous la fourme:

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla vdx = \int_\Omega fvdx; \quad \forall v \in V \tag{3.2.24}$$

Et cette fois; on a clairement:

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx \geqslant 0 \tag{3.2.25}$$

Ce qui ne montre pas que la relation (3.2.22) est satisfaite (on n'a même pas défini de norme sur l'espace V, et la relation (3.2.20) ne définit même pas V de façon mathématique précise) mais indique qu'elle peut l'être.

La formulation variationnelle du problème de poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

est donc donnée par les deux relations $(3.2.15)$ et $(3.2.16)$, le choix de l'espace de fonction proposé à la relation (3.2.20), la forme bilinéaire a :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla vdx \tag{3.2.26}$$

et la forme linéaire L :

$$L(v) = \int_{\Omega} fvdx \qquad (3.2.27)$$

Nous venons donc de démontrer là:

Proposition:

Si u est solution du problème EDP (problème de poisson ($u = 0$ sur $\partial\Omega$ et $-\Delta u = f$ sur Ω), il est aussi solution du probleme sous forme variationnelle FV (3.2.15) , (3.2.16) , (3.2.20) , (3.2.26) et (3.2.27) , .

Nous avons aussi la proposition réciproque, qui menue que la formulation variationnelle et l'écriture sous forme d'équation aux dérivées partielles sont équivalentes

Proposition:

Si u est une solution de la formulation variationnelle (3.2.15) , (3.2.16) , (3.2.20) , (3.2.26) et (3.2.27) , alors u est solution de l'équation aux dérivées partielles (problème de poisson $-\Delta u = f$ sur Ω) associée a la condition a la limite (problème de poisson $u = 0$ sur $\partial\Omega$).

Preuve:

Le chois (3.2.20) pour espace des fonctions tests V montré que la solution du problème variationnel est une fonction nulle sur le bord du domaine Ω, donc que la condition à la limite (problème de poisson ($u = 0$ sur $\partial\Omega$)) Dirichlet homogène est automatiquement satisfaite la fonction u solution de vérifie (3.2.24) on intégrale par parties le terme bilinéaire

$$\int_{\Omega} \nabla u . \nabla v dx$$

à l'aide de la relation (3.2.25) , en tenant compte du fait que l'intégrale de bord est nulle puisque la fonction teste v est nulle sur le bord $\partial\Omega$ il vient alors:

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f) \, vdx = 0; \quad \forall v \in V. \qquad (3.2.28)$$

Cette relation est vraie pour toute fonction v, donc le coefficient $-\Delta u - f$ est nécessairement nul.

3.2.4 Formulation variationnelle du problème

Soit μ, une solution du problème:

$$\begin{cases} -\Delta\mu + C\mu = f & \text{sur} \quad \Omega \\ \quad \mu = 0 \quad \text{sur} & \partial\Omega \end{cases}$$

Ayant la régularité: $\mu \in H^2(\Omega)$. Soit $v \in H^1(\Omega)$ quelconque. On multipliait l'équation par v et on intégré. On vérifie compte tenu de nos hypothèses que cette intégration est possible.

On a alors

$$\int_\Omega -\Delta\mu v dx + \int_\Omega C\mu v dx = \int_\Omega f v dx.$$

En utilisant la formule de green, on en déduit que:

$$\int_\Omega \nabla\mu\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_\Omega C\mu v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Supposons que $v = 0 \;\; P.P \;\; \text{sur} \;\; \partial\Omega$ (ce qui est le cas si $v \in H_0^1(\Omega)$) alors on obtient le problème suivant:

$$\forall v \in V, \quad a(\mu, v) = L(v) \tag{3.2.29}$$

Où l'on a posé:

$$V = H_0^1(\Omega) \tag{3.2.30}$$

$$a(\mu, v) = \int_\Omega \nabla\mu\nabla v dx + \int_\Omega C\mu v dx. \tag{3.2.31}$$

$$L(v) = \int_\Omega f v dx. \tag{3.2.32}$$

Déterminer une fonction $\mu \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifie les équations $(3.2.31)$, $(3.2.32)$ est la formulation variationnelle du problème

$$\begin{cases} -\Delta\mu + C\mu = f & \text{sur} \quad \Omega \\ \quad \mu = 0 \quad \text{sur} & \partial\Omega \end{cases}$$

Supposons que l'on ait résolu ce problème A-t-on résolu problème du départ?

3.2.5 Interprétation de la formulation variationnelle

On a le résultat suivant:

Proposition 1:

Soit $\mu \in H^2(\Omega)$. Alors μ est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta\mu + C\mu = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \mu = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

si et seulement si elle est solution du problème variationnelle (3.2.30), (3.2.31).

Démonstration:

Nous avons déjà montré que μ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta\mu + C\mu = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \mu = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

implique μ solution de (3.2.30), (3.2.31).

Comme l'équation (3.2.31) est vérifiée pour toute fonction $\upsilon \in H_0^1(\Omega)$. Elle est en particulier vrai pour toute fonction $\upsilon \in D(\Omega)$ (espace des fonctions C^∞ á support compact).

Ce qui permet d'interpréter (3.2.31) au su des distributions.

Ainsi pour toute fonction υ de $D(\Omega)$, on a:

$$\int_\Omega \nabla\mu\nabla\upsilon dx + \int_\Omega C\mu\upsilon dx = \int_\Omega f\upsilon dx$$

Chaque élément apparaissant dans l'équation est une distribution, on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \frac{\partial\mu}{\partial x_i}, \frac{\partial\upsilon}{\partial xi} \rangle + \langle C\mu, \upsilon \rangle = \langle f, \upsilon \rangle$$

Par définition de la dérivée au sens des distributions, on a:

$$-\sum_{i=1}^{n} \langle \frac{\partial^2\mu}{\partial x_i^2}, \upsilon \rangle + \langle C\mu, \upsilon \rangle = \langle f, \upsilon \rangle.$$

On a au sens des distributions:

$$-\Delta\mu + C\mu = f$$

On retrouve donc l'équation

$$\begin{cases} -\Delta\mu + C\mu = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \mu = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

mais en un sens faible. Mais de l'égalité précédente, on déduit que $\Delta\mu \in L^2(\Omega)$ et que l'égalité a donc lieu dans $L^2(\Omega)$ et donc presque partout.

quand la condition aux limites, elle est naturellement satisfaite puisque $\mu \in H_0^1$ entraire que $\mu = 0$ presque partout sur $\partial\mu$.

Conclusion

Dans la physique mathématique il y a plusieurs types des équations qui donnent aussi de plusieurs méthodes des résolutions, comme les équations elliptiques, qui sont nous donnons à nous mémoire des quelques formes des équations elliptiques et spécialement aux formulations variationnelle des problèmes elliptiques, avec des quelques théorèmes qui étudier ce type des problèmes.

.

Bibliographie

[1] A. Ern & J.L. Guermond, *Eléments finis : théorie, applications, mise en œuvre,* Springer, 2002.

[2] G. Dhatt & G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis,* Les presses de l'Université Laval Québec, 1981.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications,* Masson, 1983.

[4] J.C. Nedelec, *Notion sur les techniques d'éléments finis,* Ellipses, 1991.

[5] J.L. Lions & E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* au volume 1, 2 et 3. Dunod, 1968.

[6] M.H. Vignal, *Cours équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques en Master 1 "Mathématiques fondamentales",* 2003-2008, notes de cours manuscrites disponibles sur http://www.math.univ-toulouse.fr/ mhvignal/ENSEIGNEMENT/Enseignement.html.

[7] Nourddine Igbida; *Analyse de quelques problèmes elliptiques et paraboliques* (9 décembre 2005), lamfa, cnrs-umr 6140.

[8] P.A. Raviart & J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles,* Masson, 1988.

[9] philippe cuillaume; *Résolution numérique d'un problème elliptique fortement anisotrope en deux dimension par une méthode de paramétrisation,* valadimir latocha (2001).

[10] R. Dautray et J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques,* Tomes 1,2 et 7. Masson, 1987.