الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire
Abd elhafid boussouf Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence**

**En: Filière mathématiques**

# *Sur la Recherche Opérationnelle et applications*

**Préparé par**

- Belattar Housna
- Atamna Amina
- Boukarine Bouchra

**Encadré par**

**Mr. Bazeniar Abd Elghafour**

**Année universitaire :2014/2015**

# Remerciements

**Nous remercions dieu le tout puissant de nous avoir accordés la santé et le courage d'arriver au terme de ce travail.**

**Nos remerciements s'adressent tout particulièrement à nos parents pour toute les orientations et les conseils qu'ils nous ont prodigués tout au long de notre cursus et à nos amies.**

**Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à notre encadreur monsieur «Bazeniar Abd Elghafour» pour son accueil chaleureux pour l'attention particulière qu'il a apportée à ce modeste travail. Pour les efforts qu'il nous a assurés pendant toute la durée du travail et pour son sens de responsabilité.**

**Nos remerciements s'adressent également à la direction du département de science et de technologie d'avoir mis à notre disposition tous les moyens dans le cadre des mesures pour la réalisation de ce travail.**

**Nos propres remerciements à tous nos enseignants et enseignantes du département de mathématique de Centre Universitaire de Mila pour leurs soutiens de près ou de loin et pour toutes les informations scientifiques qu'on a acquises durant les trois années de formation .**

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à :*

*mes très chers parentsAbd Elaziz et Hassina*

*A :*

*Mes chères sœurs :Amina,Meryem,Witou*

*Mon cher frère :*

*Bibou*

*Et à toute ma famille*

*et tous mes amis spécialement :Amina et Bouchra*

*Et le diamant de ma famille :*

*Abd Elrahman*

*Housna*

# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à :*
*mes très chers parents :*
*Nora et Toufik*

*Qui grâce à eux et leur sacrifice pendant*
*toute la durée de mes études, je suis arrivé à mon but.*
*A ceux qui m'ont tout donné d'amour, affection,*
*tendresse, compréhension.*

*A :mes chers fréres :*

*Youcef,Yaakoub,Ayoub etYounes*

*mes chéres soeurs Khadidja et Halima*

*et toute ma famille*

*A tous mes amis spécialement :Housna et Bouchra*

*à tout ceux qui j'aime*
*En fin à tous qui m'ont aidé de prés ou de loin pour*
*réaliser ce travail*

*Amina*

# Dédicace

*Je dédie ce modeste  travail à :*
*mes trés chérs parentes:*
*Rahima etYoussef*

*ma grande mére Houriya et mon grand*
*pére Ammar*

*qui mon toujours encouragé on mes études qui sont*
*la source D'amour et d'affliction*
*A mes chéres soeurs :*

*Iman,Hind,Zeyneb,Amani,Rana*

*A mon frère :*
*AMINE*

*Et le diamant de ma famille :*
*Iyad*

*En fin à tous mes amis*
*Et ma toute famille*

*Bouchra*

# Table des matières

**Notations :**

$\mathbb{R}$ : corps des nombres rèels ou $]-\infty, +\infty[$ .

$\mathbb{R}^+$ : $[0, +\infty[$ .

$\mathbb{R}^*$ : $\mathbb{R} \diagup \{0\}$ .

$\mathbb{R}_+^*$ : $]0, +\infty[$ .

$\forall$ : quelque soit.

$max$ : le maximum.

$min$ : le minimum.

$\sum$ : la somme.

**lettres gereques utilisès :**

$\lambda$ : landa.

$\alpha$ : alpha.

# Introduction Générale

la recherche opérationnelle (RO) est la descipline des méthodes scientifiques utilisable pour élaborer des meilleurs décision. Cette téchnique apparait comme une descipline carrefour associant les mathématiques ,l'économie et l'informatique. Elle est née pendant la seconde guerre mondiale des efforts conjugués d'éminents mathématiques (dont Von neutman, Dantzig, Blackett) à qu'il avait été demandé de fournir des téchniques d'optimisation des ressources militaires.

Dans le premier chapitre, nous présenterons quelques définitions importantes et trés utiles pour les téchniques de la RO. Puis nous éxpliquerons l'environnement des champs d'applications de RO, ainsi leur mèthodologie, leur techniques principaux.

Dans le deuxième chapitre, nous citerons la démarche de la modélisation pour un problème de programmation linéaire, commençant par la formulation et passant par la construction du modéle mathématique et en fin l'utilisation de la méthode du Simplexe. nous enrichirons notre travail par plusieurs exemples, alors que l'implimentation sera fait par le solveur GAMS.

Une brève initiation à la programmation en nombre entier, sera expliqué dans le troi-sième chapitre.

# Chapitre 1

# Introduction à la recherche opératinnelle

## 1.1 Qu'est ce que la recherche opérationnelle

À première vue, la recherche opérationnelle est un ensemble de techniques récentes, datant tout au plus de la Seconde Guerre mondiale[4]. Et, en fait, c'est bien à son application aux opérations militaires qu'elle doit son nom.En réalité, elle est bien plus ancienne, car, dès le xviie siècle, Blaise Pascal et Pierre de Fermat, inventeurs de la notion d'espérance mathématique (1654), cherchaient, suivis de peu par Jacques Bernoulli puis Waldegrave, à résoudre des problèmes de décision dans l'incertain. Avant la fin de l'ancien régime, Gaspard Monge s'était proposé et avait résolu analytiquement un problème économique de nature combinatoire : celui des déblais et remblais (1776). Sous la monarchie de Juillet, Augustin Cournot s'était attaqué à la théorie mathématique des richesses (1838), devenant ainsi le précurseur de l'économétrie. Au début du xxe siècle, Emile Borel introduisait la théorie mathématique des jeux, sous sa forme moderne, à l'Académie des Sciences (1921-1925), tandis qu'Erlang fondait celle des files d'attente, qu'il utilisait à la conception des réseaux téléphoniques (1917). Enfin, à la veille de la guerre 1939-1945, Leonid Kantorovitch concevait et appliquait la programmation linéaire à la planification, peu après que Dénes König eut systématisé les graphes (1936). On peut donc dire que, lorsque le physicien anglais Patrick Blackett fut, en 1940, appelé à diriger la première équipe de chercheurs opérationnels, d'illustres devanciers l'avaient précédé. Cependant, Blackett eut l'immense mérite de trouver, notamment, l'organisation lui permettant de traiter rapidement et avec succès les difficiles questions telles que l'implantation optimale des radars de surveillance des côtes britanniques ou encore de la protection des convois de navires marchands reliant la Grande Bretagne et les États-Unis, qui devaient jouer un rôle déterminant dans la bataille d'Angleterre. L'efficacité de son entreprise était due aux trois faits suivants : l'équipe qu'il avait rassemblée était très hété rogène (autrement dit elle rassemblait des compétences variées, complémentaires ; ainsi, les points de vue qu'elle exprimait étaient plus pertinents) ; aucune information (même secrète) ne fut jugée trop noble pour échapper à sa compétence : les données, nécessaires à ses études, étaient complètes et fiables ; enfin il réservait la déci sion à l'état-major (il n'y eut pas de substitution de pouvoir : son équipe ne s'est pas arrogé le pouvoir de décision. L'amirauté britannique restait libre d'adopter les conclusions des travaux de Blackett et de son équipe, ou bien de les rejeter). Ces règles s'appliquent encore aujourd'hui, et font partie de la déontologie de la recherche opérationnelle d'entreprise.Dès la fin des hostilités, furent tentés de nombreux essais d'application à l'économie industrielle des méthodes jusqu'alors éprouvées seulement par les états majors alliés. Depuis les années cinquante, nombre de publications scientifiques et techniques témoignent de leur réussite et de leurs heureux développements. C'est pourquoi l'on peut légitimement se demander pourquoi l'apparition de la recherche opérationnelle d'entreprise a été si tardive. Il est bon de citer ici quelquesunes des principales raisons de cette naissance laborieuse :

a) les modèles mathématiques qui ont, de longue date, conquis la physique et, peu à peu, bien d'autres sciences expérimentales, n'ont pas été acceptés d'emblée par les spécialistes des sciences économiques, particulièrement de la micro-économie et surtout de l'économie d'entreprise. Il ne faut pas méconnaître que les économistes avaient quelques raisons de suspecter des modèles inertes, simplistes, rigides et abstraits, d'être peu propres à représenter le milieu vivant, complexe, flexible et terriblement concret de l'économie. Toutefois, dès que la connaissance économique fut suffisamment avancée et consentit à se parer du nom de science, il fallut bien se rendre à l'évidence : comme dans toutes les autres sciences expérimentales, parvenues à une certaine maturité, le recours à la mathématique était incontournable ;

b) c'est seulement à partir des années cinquante que les problèmes économiques sont devenus irrémédiablement complexes, en raison de la taille croissante des firmes et de l'intrication extraordinaire des liens qui les unissent entre elles.

c) enfin, les acquis théoriques de la recherche opérationnelle ne seraient rien sans la puissance de calcul : les ordinateurs sont indispensables pour résoudre les problèmes dans la pratique. Or, les premiers ordinateurs n'ont été commercialisés qu'en 1955-1956. À ce propos, il peut être utile de remarquer qu'il en va de la recherche opérationnelle comme des ordinateurs. Ces derniers ont suscité des espoirs démesurés ou des craintes infondées. Il faut répéter que la machine doit être considérée comme un instrument, un outil au service de son créateur : l'homme. Il faut se persuader que lorsque l'on confie à une machine l'exécution d'opérations qui, naguère encore étaient l'apanage de l'esprit humain, le caractère de cette besogne se transforme, du même coup, radicalement : le travail intellec tuel devient un simple travail d'exécution. Il n'y a donc aucune chance qu'une machine dépasse un jour son auteur, bien qu'il n'y ait pas d'impossibilité à ce qu'elle démontre une conjecture, voire découvre un théorème inconnu (par une combinaison logique inattendue...). De la même manière, la recherche opérationnelle est l'auxi liaire de la décision humaine : elle lui est, par essence, subordonnée et il n'existe pas plus de chance qu'elle la supplante un jour. C'est pourquoi on considère souvent que la recherche opérationnelle est une composante majeure de l'aide à la décision.

### 1.1.1 Recherche Opérationnelle dans le monde

Discipline reconnue, enseignée et valorisée dans de nombreux pays
Production scientifique très importante dans des journaux de qualité :
• Revue Française de Recherche Opérationnelle 1956.
• Cahiers du BURO (Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle) 1957.
• Revue METRA 1962.
• Monographies de Recherche Opérationnelle 1964.
• RIRO (Revue d'Informatique et de Recherche Opérationnelle) 1967.
•Operations Research.
• Management Science.
• Discrete Optimization.
•INFORMS, EJOR, RAIRO, Journal of Optimization Theory and Applications ,. . . .

### 1.1.2 Les origines de la recherche opérationnelle

Si la recherche opérationnelle est aujourd'hui présente dans la plupart des domaines civils, ses racines sont habituellement attribués aux services militaires. La seconde guerre mondiale, de part son envergure,créa une besoin urgent d'allouer de manière efficace des ressources limitées aux différentes opérations militaires et aux activités au sein de chaque opération. En particulier, l'organisation militaire britannique, puis américaine,mis à contribution un grand nombre de scientifiques pour gérer ces allocations, et s'occuper d'autres problèmes stratégiques et tactiques. Ce faisant, ils furent appelés à poursuivre des recherches sur des opérations (militaires),et constituèrent les premières équipes de recherche opèrationnelle. Leurs efforts furent signifactifs dans la marche vers la victoire, par exemple en ce qui touche l'utilisation du radar, nouvellement développé. Ces succès encouragèrent la poursuite de l'utilisation de la recherche opèrationnelle dans d'autres domaines. La croissance importante de l'industrie d'après-guerre entraîna des problèmes, causés par la complexité croissante et la spécialisation dans les organisations, problèmes en fait proches de ceux présent lors du conflit. Au début des années 1950's, la recherche opèrationnelle avait pénétré une multitude d'organisations commerciales, industrielles, et gouvernementales. Et ce n'était que le début.Au moins deux autres facteurs ont joué un rôle clé dans la croissance rapide de la recherche opèrationnelle. Tout d'abord, des progrès substantiels ont été obtenus très tôt afin d'améliorer les techniques de recherche opèrationnelle. Ces techniques, dans leur mise en pratique, furent soutenues par l'essor des outils informatiques.

### 1.1.3 La nature de la recherche opérationnelle

"Rechercher sur des opérations" touche tous les problèmes reliés à la conduite et à la coordination des opérations (activítés) au sein d'une organisation. Cette organisation peut représenter des domaines très divers : l'industrie associée à la révolution informatique, pénètre pratiquement tous les secteurs d'activités de la vie courante, même si sa présence est souvent invisible.La première étape de la "recherche" est l'observation attentive du problème et sa formulation, ainsi que la collecte de données associées. Il convient par la suite de construire un modéle scientifique qui tente l'abstraire l'essence du problème réel. Tout modèle est une simplification de la réalité, mais cette représentation doit être sudffisamment précise pour capturer les caractéristiques essentielles de la situation, et de pouvoir tirer des conclusions valides pour le problème réelle. Il conviendra dès lors de tester ce modèle, et de le modifier au besoin.Une caractéristique additionnelle est que la recherche opèrationnelle essaye souvent de trouver une meilleure solution (dite solution optimale) pour le problème examiné. Cette solution peut ne pas être unique.Cette recherche d'optimalité est un thème important en recherche operationnelle, mais si son interprétation en terme managériels peut être délicate.Il est difficile pour un individu de pouvoir maîtrise tous les aspects du problèmes à l'étude, de sorte que la recherche opèrationnelle est généralement plus un travail d'équipe, avec des experts en mathématiques, statistiques et probabilités, ingénierie,économie, administration, informatique, physiques, sciences comportementales, et les techniques spécifiques de la recherche opèrationnelle

## 1.2 Quelques exemples de modèles mathématiques

**Définition 1.2.1** ***Un modèle :****Un modèle mathématique est une traduction de la réalité pour pouvoir lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques, puis généralement, en sens inverse, la traduction des résultats mathématiques obtenus en prédictions opérations dans le monde réel.*
*Il y a beaucoup de types différents de modèles mathématiques,mais nous nous focaliserons*

*dans un premier temps sur les modèles d'optimisation*[5].
*Il y a trois composantes principales dans un modèle d'optimisation :*
***Variables :*** *elles représentent les composantes du modèle qui peuvent être modifiées pour créer des configurations différentes.Ces variables peuvent être continues (réelles), entières, booléennes (0/1), . . .*
***Contraintes :*** *elles représentent les limitations sur les variables. ( linéaire / non-linéaire, concave / convexe, égalités / inégalités, . . .)*
***Fonction objection :*** *cette fonction assigne une valeur à chaque configuration différente. Le terme "objectif" vient du fait que l'objectif est d'optimiser cette fonction (maximiser ou minimiser).*
*linéaire / non-linéaire, concave / convexe, . . .*

**Définition 1.2.2** *(Solution admissible). Une solution admissible est un ensemble de valeurs données aux variables qui satisfait toutes les contraintes.*

**Définition 1.2.3** *(Solution optimale). Une solution optimale est une solution admissible qui optimise la fonction objectif.*

Dans le probléme du voyageur de commerce, ce dernier doit passer dans $n$ villes, sachant qu'il souhaite visiter chacune d'entre elles une fois et une seule.il connait les temps de transport entre chaque ville et les autres, temps que l'on suppose fixes. dans quel ordre doit-il effectuer ses visites de façon à ce que son temps de transport total soit minimal ? la réponse a priori facile. la ville de départ importe peu, on se rend compte rapidement. il se peut de toute façon qu'elle soit fixée . a partir de ce point de départ notre voyageur de commerce a $(n-1)$ possibilités pour la ville suivante ,puis $(n-2)$ pour la deuxiéme, puis $n-3$ pour la troisiéme etc. au total ,il y a $(n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$ solutions à ce probléme, soit$(n-1)!$ on peut alors avoir comme idée d'explorer systématiquement ces solutions, en calculant à chaque fois la somme des temps de parcours , donc le temps de parcours total, et retenir , parmis ces $(n-1)!$ temps totaux les six villes, le calcul reste possible, puisque l'on a 120 permutations à explorer et à chiffrer .pour $n = 20$, ce nombre est à peu prés égal à $1,2164 \times 10^{17}$.si par exemple on écrit un programme informatique permettant d'evaluer toutes les solutions (et un programme est facile à écrire) et si l'ordinateur dont on dispose néssicite un nanoseconde pour chaque solution on explorera l'ensmble des possibilités en 3,8ans environ !c'est à dire que les performances des ordinateurs actuels ne libérent pas de la nécessité de trouver des méthodes permettant de nous orienter dans la prolifération des solutions possibles liées à la présence de nombreux problémes de gestion combinatoire . cet exemple est intérissant car le probléme posé est tout à fait réaliste (dans les cas concrets il se complique souvent considérablement ce qui ajoute encore à la comlixité de sa résolution ).

**Exemple 1.2.4** ***(Achat de billets d'avion)*** *Un homme d'affaires doit effectuer 5 voyages entre oran et constantine , en partant le lundi de oran et revenant le mercredi de constantine à oran*

*– Billet aller-retour : 4000DA*

*– Réduction de* 20% *si un weekend est inclus.*

*– Aller simple :* 75% *du prix aller-retour.Comment acheter les billets pour les 5 semaines (à prix minimum) ?*

*ORAN-constantine le lundi et oran-constantine le mercredi de la même semaine*

***Problème d'aide à la décision***

*1. Quelles sont les alternatives possibles ?*

*2. Quelles sont les restrictions à cette décision ?*

*3. Quel est l'objectif utilisé pour évaluer les alternatives ?*

**Restrictions**

ORAN-CONSTANTINE le lundi et CONSTANTINE-ORAN le mercredi de la même semaine.

**Les alternatives possibles**

– Acheter 5 oran-constantine normaux

$$5 \times 4000DA = 20000DA$$

– Acheter un ORAN-CONSTANTINE, 4CONSTANTINE-ORAN-CONSTANTINE comprenant un weekend et un CONSTANTINE-ORAN CONSTANTINE-ORAN.

$$0.75 \times 4000DA + 4 \times 0.8 \times 4000DA + 0.75 \times 4000DA = 18800DA$$

– Acheter un ORAN-CONSTANTINE-ORAN pour le lundi de la première semaine et le mercredi de la dernière semaine, et 4 CONSTANTINE-ORAN-CONSTANTINE comprenant un weekend pour les autres voyages.

$$5 \times 0.8 \times 4000DA = 16000DA$$

La troisième est la meilleure.

**Exemple 1.2.5** *Un armateur doit construire un navire de guerre à partir de 50 tonnes d'acier contenant entre 0.5% et 1.25% de carbone (C), entre 0.3% and 0.5% de silicone (Si), pas plus de 0.05% de sulfure (Su), et pas plus de 0.04% de phosphore (Ph). Un fournisseur produit de l'acier à partir de sept matières premièress dont les qualités, les disponibilités en tonnes, et les coûts en \$/tonne sont donnés dans le tableau . Le fournisseur veut déterminer la combinaison la moins coûteuse de composants bruts qu'il peut utiliser pour produire l'acier répondant aux besoins de l'armateur.Puisque les fournisseur peut changer les quantités de maitéres premières utilisées dans la production de l'acier,nous pourrions assigner une variable différente pour représenter la quantitè de chaque matière première*

$$x_1 = tonnes\ de\ limonit$$

$$x_2 = tonnes\ de\ taconite$$

$$x_3 = tonnes\ d'hématite$$

$$x_4 = tonnes\ de\ magnétite$$

$$x_5 = tonnes\ de\ silicone\ 1$$

$$x_6 = tonnes\ de\ silicone\ 2$$

$$x_7 = tonnes\ de\ charbon$$

| *Matière première* | *% C* | *% Si* | *% Si* | *% Ph* | *Disponibilité* | *Coût* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *limonite* | *3.0* | *0* | *0.013* | *0.015* | *40* | *200* |
| *taconite* | *2.5* | *0* | *0.008* | *0.001* | *30* | *250* |
| *hématite* | *0* | *0* | *0.011* | *0.05* | *60* | *150* |
| *magnétite* | *1.2* | *0* | *0.002* | *0.008* | *50* | *220* |
| *silicone 1* | *0* | *90* | *0.004* | *0.002* | *20* | *300* |
| *silicone 2* | *0* | *96* | *0.012* | *0.003* | *30* | *310* |
| *carbone* | *90* | *0* | *0.002* | *0.01* | *25* | *165* |

*Table – Données pour le problème de production d'acier*

*Notons que les variables sont ici continues,Afin de modéliser les contraintes, observons tout d'abord que les variables dans ce cas sont naturellement bornées.inférieurement par 0 (puisque des quantités négatives ne feraient pas de sens), et bornées supérieurement par leur quantité disponible, aussi avons-nous :*

$$0 \leq x1 \leq 40$$

$$0 \leq x2 \leq 30$$

$$0 \leq x3 \leq 60$$

$$0 \leq x4 \leq 50$$

$$0 \leq x5 \leq 20$$

$$0 \leq x6 \leq 30$$

$$0 \leq x7 \leq 25$$

En supposant que n'importe quelle quantité d'une matière première contribue pour la même quantité d'acier, et en sachant que nous devons produire au moins 50 tonnes, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{7} x_i \geq 50$$

Notons que nous ne supposons pas que nous produirons exactement 50 tonnes, puisqu'il peut être nécessaire deproduire d'avantage afin de satisfaire les autres exigences du problème.L'autre caractéristique contraignante dans ce problème que que l'acier doit contenir un certain pourcentage de carbone, de silicone, de sulfure et de phosphore. Afin de voir comment ces exigences de composition se traduisent en contraintes par rapport à nos variables, nous nous concentrerons d'abord sur l'exigence d'avoir entre 0.5% et 1.25% de carbone, en espérant que les exigences sur le silicone, le sulfure et le phosphore se formulent de manière similaire.A partir des données, nous connaissons le pourcentage de contribution en carbone de chaque matière première, aussi nous pouvons facilement calculer la quantité de carbone pour n'importe quel choix de variables comme

$$0.03x_1 + 0.025x_2 + 0.012x_4 + 0.9x_7.$$

Cependant, comme nous avons une exigences de proportion de carbone dans l'acier, nous devons diviser cette quantité de carbone par la quantité d'acier

$$\%C = 100 \quad \left(\frac{\textbf{tonnes de carbone}}{\textbf{tonnes d/acier}}\right) \quad = \quad \frac{\mathbf{3.0x_1 + 2.5x_2 + 1.2x_4 + 90x_7}}{\mathbf{x_1{+}x_2{+}x_3{+}x_4{+}x_5{+}x_6{+}x_7}}$$

La contrainte que l'acier contienne entre 0.5% et 1.25% de carbone se traduit dans la paire de contraintes

$$0.5 \leq \frac{\mathbf{3.0x_1+2.5x_2+1.2x_4+90x_7}}{\mathbf{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7}} \leq 1.25$$

## 1.3 Tour d'horizon des techniques de recherche opérationnelle

### 1.3.1 Etapes pratiques

1. Définition du problème.
2. Construction d'un modèle.
3. Solution du modèle.
4. Validation du modèle.
5. Implémentation de la solution.

### 1.3.2 Méthodologie

Ce qui est demandé au chercheur opérationnel[1], c'est de proposer une meilleure utilisation des ressources, voire une utilisation optimale. Les bonnes questions à se poser, face à un problème du type recherche opérationnelle, sont les suivantes :

Quelles sont les variables de décision ? C'est-à-dire quels sont les éléments de mon modèle que j'ai le droit de faire varier p our proposer d'autres solutions ?

Quelles sont les contraintes ? Une fois identiées les variables de décision, quelles sont les valeurs autorisées pour ces variables ?

Quel est l'objectif ou le critère ? Quelle est la quantité que l'on veut maximiser ou minimiser ? Rappelons immédiatement que, en toute rigueur, on n'optimise qu'une seule quantité à la fois. On ne peut pas demander d'optimiser à la fois la longueur d'un tra jet et son temps de parcours :le trajet le plus court peut très bien passer par un chemin vicinal et le trajet le plus rapide être très long mais sur autoroute. L'optimum par rapport à un critère n'a pas de raison de coïncider avec l'optimum par rapport à l'autre critère. Il existe bien ce qu'on appelle l'optimisation multi-objectif ou multi-critère, mais ce n'est jamais directement une optimisation. C'est une méthode qui consiste à hiérarchiser les ob jectifs, ou leur donner une certaine pondération, ce qui revient à un vrai problème d'optimisation ; ou alors de prop oser toute une famille de solutions dite Pareto-optimale.

Une fois le modèle écrit, le chercheur opérationnel va proposer un algorithme de résolution qui tiendra compte de l'objectif qui lui a été fixé. pour un même modèle, un grand nombre d'algorithmes peut être proposé. Ces algorithmes se différencient par la qualité de la solution qu'ils fournissent, le temps d'exécution, la simplicité d'implémentation. Dans certains cas, il peut être cruciale de pouvoir fournir une solution en 1 ms, avec une certaine tolérance sur la qualité de la solution. Dans d'autres cas,1semaine de calcul peut être acceptable mais en revanche on souhaite trouver l'optimum. En général, on se situe entre ces deux extrêmes.

La recherche opérationnelle dispose d'outils théoriques qui permettent a priori d'apprécier ces points (rapidité de l'algorithme, qualité de la solution,...) sans avoir à exp érimenter. On parle de validation théorique. Ensuite, il faut réaliser un prototype de l'algorithme (on peut parle de code académique si ce prototype est développé en laboratoire) qui permet de démontrer sa réalisabilité pratique on parle de validation pratique. Enfin, si ces étapes sont validées, on passe au déploiement de la solution, qui consiste à produire un code robuste, programmer une interface, discuter les formats des chiers d'input, de discuter la question de la maintenance du code, etc. mais là on s'éloigne du coeur du métier du chercheur opérationnel.En résumé, la méthodologie de la recherche opérationnelle suit en général le schéma suivant :

1. Objectifs, contraintes, variables de décision.

2. Modélisation.

3. Proposition d'un algorithme, validité théorique de l'algorithme (temps d'exécution pour trouver la solution, qualité de la solution fournie).

4. Implémentation, validation pratique de la solution.

5. Déploiement de la solution.

### 1.3.3 Techniques principales

- Programmation linéaire.
- Programmation en nombres entiers.
- Optimisation dans les réseaux.
- Programmation non linéaire.
- "Optimisation" multi-critères.
- Programmation dynamique.
- Modèles stochastiques.
- Simulation.

# Chapitre 2

# Applications de la programmation linéaire

## 2.1 Définition, exemples et méthode de résolution

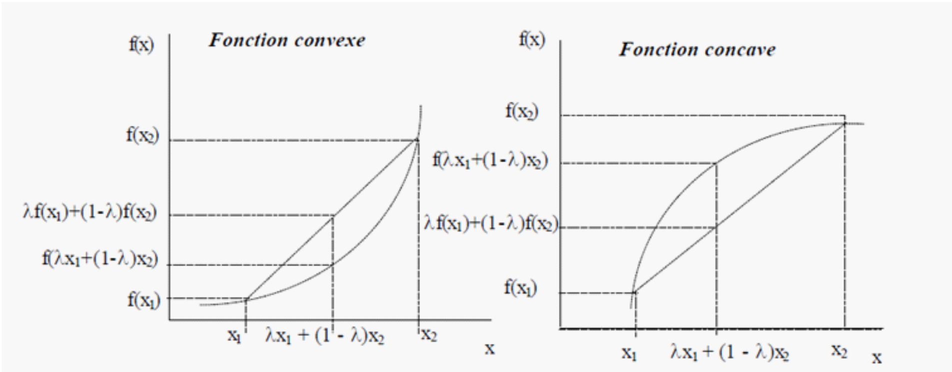
### 2.1.1 Notions de bases

**Définition 2.1.1** ***Programmation linéaire***
*Les problémes de programmation linéaire (PL) sont des problémes d'optimisation où la fonction objectif et les contraintes sont toutes linéaires sur un polyédre convexe*[3].
*On modélise le probléme réel qu'on a., si on constate que ce probléme s'éxprime comme un PL , on le résoudre.*

***Remarque 2.1.2*** *L'existence d'algorithmes très efficaces pour résoudre des problèmes de très grande taille (simplexe, points intérieurs)*

**Définition 2.1.3** *Une fonction $f : R \to R$ est dite convexe sur [a,b], si la corde prise entre $a$ et $b$ est au-dessus du graphe de $f$ sur tout l'intervalle $[a, b]$.*

**Proposition 2.1.4** *$f$ est convexe si et seulement si $\forall t \in [0, 1]$, $f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$, autrement dit, si et seulement si l'image du barycentre est plus petite que le barycentre des images. On dit qu'une fonction $f$ est concave sur un intervalle $I$ si et seulement si $-f$ est convexe.*




### 2.1.2 Exemples de modèles linéaires

**Exemple 2.1.5** ***(Production de peinture)*** *Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base $p_1$ et $p_2$.*

**Données**

| | Quantité utilisée par tonne | | |
|---|---|---|---|
| | Extérieure | Intérieure | Quantité disponible par jour |
| $P_1$ | 6 | 4 | 24 |
| $P_2$ | 1 | 2 | 6 |
| Profit par tonne | 5 | 4 | |

**Contraintes supplémentaires**

– Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes / jour.

– La production en peinture d'intérieur ne dépasser que d'une tonne celle d'extérieur.

**Formulation de probléme(Production de peinture)**

**Alternatives :** (variables, inconnues du problème)

$$\mathbf{x_1} = \text{tonnes de peinture d'extérieur produites par jour}$$

$$\mathbf{x_2} = \text{tonnes de peinture d'intérieur produites par jour}$$

**Fonction objectif à optimiser**

$$\mathbf{maxz = 5x_1 + 4x_2}$$

**contraintes**

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x_2 - x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Solutions et méthodes de résolution**

– **Solution admissible** : satisfait toutes les contraintes.

$$x_1 = 3, x_2 = 1 (\Rightarrow z = 19)$$

– Nous voulons trouver la solution (admissible) optimale.

– Infinité de solutions admissibles !

**Méthodes pour trouver l'optimum**

– Méthode graphique

– Simplexe

**Exemple 2.1.6** ***(Probléme du mélange)***

*La table ci-dessous donne la composition et le coùt de 9 alliages standards de plomb,zinc et étain.*

| *Alliage* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *plomb (%)* | *20* | *50* | *30* | *30* | *30* | *60* | *40* | *10* | *10* |
| *zinc (%)* | *30* | *40* | *20* | *40* | *30* | *30* | *50* | *30* | *10* |
| *étain (%)* | *50* | *10* | *50* | *30* | *40* | *10* | *10* | *60* | *80* |
| *coùt unitaire* | *7.3* | *6.9* | *7.3* | *7.5* | *7.6* | *6.0* | *5.8* | *4.3* | *4.1* |

Le but est de trouver un mélange des 9 alliages qui permet de fabriquer à coùt minimal un alliage contenant :

$$30\% \; de \; plomb;$$

$$30\% \; de \; zinc$$

$$40\% \; d\prime etain$$

Remarquons que l'alliage 5 a la bonne composition , son coùt unitaire est de 7.6
Le mélange, à parts égaux, des alliages 6, 7, 8 et 9 donne la composition souhaitée aussi :

$$plomb : \frac{1}{4}((60 + 40 + 10 + 10)) = 30\%$$

$$zinc : \frac{1}{4}((30 + 50 + 30 + 10)) = 30\%$$

$$\acute{e}tain : \frac{1}{4}((10 + 10 + 60 + 80)) = 40\%$$

$$co\grave{u}tunitaire : \frac{1}{4}((6.0 + 5.8 + 4.3 + 4.1)) = 5.05 < 7.6$$

Procédons de façon plus systématique pour obtenir le mélange de coùt minimal
$x_j$ partie de l'alliage $j$ dans le mélange recherché (j=1,... ,9)

$$x_j \geq 0,$$

Le coùt unitaire du mélange recherché est le minimum de la fonction $z$, définie par :

$$z(x_1, x_2, ..., x_9) = 7.3x_1 + 6.9x_2 + ... + 4.1x_9$$

sous les contraintes

$$30\% \; de \; plomb : 0.2x_1 + 0.5x_2 + ... + 0.1x_9 = 0.3$$

$$30\% \; de \; zinc : 0.3x_1 + 0.4x_2 + ... + 0.1x_9 = 0.3$$

$$40\% \; d\prime etain : 0.5x_1 + 0.1x_2 + ... + 0.8x_9 = 0.4$$

Le programme linéaire consiste à minimiser $z(x_1, x_2, ..., x_9)$sous les contraintes . La fonction $z$ est souvent appelée la fonction - objectif

### 2.1.3 Forme standard et forme canonique d'un programme linéaire

**Définition 2.1.7** ***Forme standard***
*Un programme linéaire est sous forme standard lorsque toutes ses contraintes sont des égalités et toutes ses variables sont non-négatives.*
***Représentation matricielle***

$$max \;\; c^t x$$

*sous contraintes*

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

*n variables, m contraintes,*$m < n, c, x \in R^n, b \in R^m, A \in R^{m \times n}$

**Définition 2.1.8** ***Forme canonique***
*un Forme canonique est Un programme linéaire sous forme canonique lorsque toutes ses contraintes sont des inégalités et toutes ses variables sont non-négatives.*
***Représentation matricielle***

$$max \;\; c^t x$$

*sous contraintes*

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

*n variables, m contraintes* $c, x \in R^n, b \in R^m, A \in R^{m \times n}$

**Théorème 2.1.9** *(Equivalence des formes standard et canonique)*

Tout programme linéaire peut s'écrire sous forme standard et sous forme canonique.

**Démonstration**

– Une contrainte d'inégalité $a^T \; x \leq b$ peut être transformée en égalité par l'introduction d'une variable d'écart :

$$a^t x + s = \;\; b$$

$$s \geq 0.$$

– Une contrainte d'égalité $a^t x = b$ peut être remplacée par deux inégalités :

$$a^T x \leq b$$

$$-a^T x \leq -b$$

$$-a^T x \geq b \Leftrightarrow -a^T x \leq -b.$$

$$-min\ c^T x = -max - c^T x.$$

– Variable $x$ non restreinte : substitution par deux variables (partie positive et négative)

$$x = x^+ - x^-$$

$$x^+, x^- \geq 0$$

Il existe toujours une solution optimale telle que $x^+ = 0$ ou $x^- = 0$

**Théorème 2.1.10** *Chaque programme linéaire en forme standard s'écrit en forme canonique et inversement*

**Preuve.**

1) $Ax \leq b, x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \quad \leq \quad b_i \qquad i = 1, ..M$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j + e_i = b_i \qquad ou \qquad e_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \geq 0$$

Tel que : $e_i$ : **variable d'écart.**

Soit :

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & . & \\ & & . \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ la matrice Didentité dordre m,}$$

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ . \\ . \\ . \\ e_m \end{pmatrix} \text{ levecteur d´ecart}$$

Alors $Ax \leq b, x \geq 0 \Leftrightarrow (A, I_m) \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} \geq 0$ (forme standard)

Posons $z(x, e) = c \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}, ou \quad c = (c, 0) = (c_1, ..., c_n, 0, ..., 0)$

2) $Ax = b \iff \begin{array}{c} a_x \geq b \\ a_x \leq b \end{array} \iff \begin{array}{c} a_x \leq b \\ (-a)_x \leq -b \end{array} \iff \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$ (forme canonique) $\blacksquare$

**Forme standard du problème de production de peinture**

$$max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

sous contraintes

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x_2 - x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Forme standard**

$$max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

sous contraintes

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\ x_1 + 2x_2 \quad + s_2 = 6 \\ x_2 \quad + s_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + s_4 = 1 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{cases}$$

**Forme matricielle :**

$$max c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Résolution de programmes linéaires

### 2.2.1 La méthode du simplexe

**Idées de base**

– Solution optimale : sommet (point extrême).

– Idée fondamentale du simplexe : déplacement de sommet en sommet adjacent de manière à améliorer la fonction objectif.

– Transformation des inégalités en égalités : forme standard du programme linéaire - système de $m$ équations à $n$ inconnues$(m < n)$.

– Identification algébrique des sommets : correspondance avec les bases d'un système d'équations.

**Solutions de base**

– Système de $m$ équations linéaires à $n$ inconnues $(m < n)$ : infinité de solutions.

– Si on fixe à zéro $n$ - $m$ variables : système de $m$ équations à $m$ inconnues possédant une solution unique (si la matrice est inversible). C'est une solution de base. (Solution de base est Une solution de base d'un programme linéaire est la solution unique du système

de $m$ équations à $m$ inconnues obtenu en fixant à zéro $n$ - $m$ variables (pourvu que la matrice du système soit inversible).

Les variables fixées à zéro sont appelées variables hors base et les autres variables en base.

**Algorithme du simplexe**

**initialisation**

$AX = b\ (forme\ standard)$

$c_j\ :\ le\ co\grave{u}t\ \grave{a}\ minimiser;\ \ cj = 0$

$z\ :\ la\ fonction\ objectif\ \grave{a}\ minimiser$

$x_i :\ les\ variables\ de\ d\acute{e}cision$

**Étape 1 :** choix de la variable entrante

$$x_E \longleftarrow \max(c_i - z_j)\ ; j$$ : nombre de variable de décision

**Étape 2 :** choix de la variable sortante

$$x_s \longleftarrow \min(\tfrac{b_i}{a_{ik}})\ (a_{ik} > 0)\ , k = 1, ..., i$$

**Étape 3 :** (pivot)

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{jk}\tfrac{a_{si}}{a_{sk}}$$
$$b_j \longleftarrow bj - a_{jk}\tfrac{b_s}{a_{sk}}$$

**Étape 4 :** (test d'arrét)

si $c_j - z_j \geq 0$ aller à l'étape 1

si non arrèter la solution est optimale.

**Théorème 2.2.1** *Soit $f$ une fonction linéaire définie sur un polyédre convexe $X$.Si $f$ admet un minimum (ou maximum) sur $X$, alors il est atteint au moins en un point extréme de $X$. S'il est atteint en plusieurs points, alors il est atteint en tout point combinaison convexe de ces points.Rappellons que si $X$est un polytope (donc borné), alors toute fonction linéaire admet un minimum et un maximum sur $X$ (car elle est continue). Ces deux optimums sont donc atteints, pour chacun, au moins en un sommet de $X$.Nous allons par la suite développer une méthode pratique pour résoudre les programmes linéaires ; il s'agit de la méthode du simplexe. Revenons au programme linéaire ci-dessus. Quitte a écrire chacune des contraintes d'égalité comme deux contraintes d'inégalités, tout programme linéaire peut s'écrire sous f*

$$(L)\begin{cases} Max\ C^tX, x \in \mathbb{R}^n \\ GX \leq B \end{cases}$$

*où $C$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $G$ une matrice rectangulaire et $B$ le vecteur des seconds membres constants dans les inégalités.Notons tout de suite que tout probléme de la forme $(L)$ peut se ramener a la forme dite canonique*

$$(L)\begin{cases} Max\ J(x) = C^tX, x \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0 \\ AX = B \end{cases}$$

Ici $C$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, A une matrice de taille $m*\ n$, et $B$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$dont toutes les composantes sont positives ou nuls($B \geq 0$).
Pour ramener un probléme linéaire à la forme canonique, on peut suivre les étapes suivantes :
(a) on raméne les contraintes de types( $\geq$) à des contraintes de types($\leq$) en multipliant par $(-1)$.
(b) on se raméne ensuite à des variables positives, par exemple en posant

$$x_i = t_i - w_i, i \geq 1, t_i \geq 0, w_i \geq 0,$$

(c) on raméne les contraintes d'inégalités a des contraintes d'égalités en rajoutant des variables d'écart positives

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{m} g_{ij}^m x_j \geq 0, i = 1, ....., m$$

(d) on multiplie les égalités où $b_i < 0$ par $-1$ pour avoir des seconds membres tous positifs ou nuls.

Considérons les contraintes suivantes ($n = 2$)

$$x + 2y \leq 6;$$

$$x - y \leq 2;$$

avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$. On peut les écrire en termes d'égalités sous la forme

$$x + 2y + t = 6$$

$$x - y + w = 2;$$

avec $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $t \geq 0$. La matrice de ce systéme est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

On voit clairement que le point $(x, y, t, w) = (0, 0, 6, 4)$ est un sommet (observez la 3éme et 4éme colonnes de $A$).

Il existe toutefois beaucoup des cas où la recherche du sommet nécessite quelques calculs sur le systéme linéaire $AX = B$

Considérons les contraintes suivantes dans $\mathbb{R}^6_+ \quad (n = 6)$

$$x_1 + x_2 = 10, \qquad (E1)$$

$$x_3 + x_4 = 20, \qquad (E2)$$

$$x_1 + x_3 + x_5 = 25, \qquad (E3)$$

$$x_2 + x_4 + x_6 = 27, \qquad (E4)$$

La matrice de ce systéme est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On ne voit donc ( à premiére vue) aucun sommet. En remplaçant (E2) par (E2)+(E1) - (E3), (E3) par (E3) - (E1) et (E4) par (E4) + (E3) - (E2) - (E1) onobtient (ces opérations reviennent a multiplier les deux cotés du systéme par une matrice inversible

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

et on voit clairement que $(x1, ......, x6) = (10, 0, 15, 5, 0, 22)$ est un sommet.

**Exemple 2.2.2** *On considére le programme linéaire*

$$Z = max 100x_1 + 200x_2 + 50x_3$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_3 \geq 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 1000 \\ 10x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 2000 \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 500 \end{cases}$$

En introduisant les variables d'écart $x_4, x_5, x_6 \geq 0$, les contraintes s'écrivent :

$$5x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 = 1000$$

$$10x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_5 = 2000$$

$$10x_1 + 5x_2 + x_6 = 500$$

On reconnait clairement le sommet $x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1000, x_5 = 2000$ $x_6 = 500$.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $b$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | 5 | 5 | 10 | 1 | 0 | 0 | 1000 | 200 |
| $x_5$ | **10** | 8 | 5 | 0 | 1 | 0 | 2000 | 250 |
| $x_6$ | 10 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 500 | 100 |
| $c$ | 100 | 200 | 50 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $b$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | -5 | 0 | 10 | 1 | 0 | -1 | 500 | 50 |
| $x_5$ | **-6** | 0 | 5 | 0 | 1 | -1.6 | 1200 | 240 |
| $x_2$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0.2 | 100 | |
| $c$ | -300 | 0 | 50 | 0 | 0 | -40 | -20000 | |

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $b$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | -0.5 | 0 | 1 | 0.1 | 0 | -0.1 | 50 | |
| $x_5$ | **-3.5** | 0 | 0 | -0.5 | 1 | -1.1 | 950 | |
| $x_2$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0.2 | 100 | |
| $c$ | -275 | 0 | 0 | -5 | 0 | -35 | -22500 | |

Le maximum vaut donc 22500. Il est atteint au point$(x_1, x_2, x_3) = (0, 100, 50)$(avec les variables d´écart $(x_4, x_5, x_6) = (0, 950, 0)$).

### 2.2.2 Le simplexe en deux phases sur un exemple

Faisons une étude complète sur l'exemple suivant :

$$maxz = 3x + y$$

sous contraintes

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 2 \\ y \leq 4 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

1. Commençons par écrire le problème sous forme standard en le mettant tout d'abord sous forme standard puis en ajoutant les variables d'écart.

$$maxz = 3x + y$$

sous contraintes

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x \leq -2 \\ y \leq 4 \\ -y \geq -2 \end{cases}$$

ce probléme devient :

$$maxz = 3x + y$$

sous contraintes

$$\begin{cases} x + e_1 = 4 \\ -x + e_2 = -2 \\ y \ + e_3 = 4 \\ -y \ + e_4 = -2 \end{cases}$$

2. On rend le second membre positif

$$\begin{cases} x + e_1 = 4 \\ x - e_2 = 2 \\ y + e_3 = 4 \\ y - e_4 = 2 \end{cases}$$

3. On ajoute des variables auxiliaires $(a_1, a_2)$ de manière à faire apparaitre une sous matrice identité. On crée ainsi un programme auxilaire, non équivalent au problème initial mais qui fournit une base réalisable de départ évidente grâce à l'ajout des variables auxiliaires. Cependant, l'ajout de ces variables étant purement artificiel, il faut pénaliser leur contribution dans la fonction objectif. On fait cette opération en ajoutant la valeur $-Ma_1$ $-Ma_2$ avec M assez grand à la fonction objectif de manière à ce que l'algorithme du simplexe les élimine. Le programme auxilaire s'écrit alors :

$$max \ z = 3x + y - Ma_1 - Ma_2$$

sous contraintes

$$\begin{cases} x \ + e_1 = 4 \\ x - e_2 + a_1 = 2 \\ y \ + e_3 = 4 \\ y - \ e_4 + a_2 = 2 \end{cases}$$

On peut montrer qu'il est équivalent de résoudre le programme auxilaire suivant :

$$max\ w = -a_1 - a_2$$

sous contraintes

$$\begin{cases} x + e_1 = 4 \\ x - e_2 + a_1 = 2 \\ y \ + e_3 = 4 \\ y - \ e_4 + a_2 = 2 \end{cases}$$

4. On résoud le problème auxiliaire précédent grâce à la méthode du simplexe en tableau.

(a) La base réalisable de départ est : $(e_1, a_1, e_3, a_2)$. Les variables hors base sont $(x, y, e_2, e_4)$.

(b) Pour démarrer le simplexe, il faut d'abord écrire w en fonction des variables hors base. Pour ce faire, on utilise les contraintes qui donnent les relations :

$$-a_1 = x - e_2 - 2$$

$$-a_2 = y - e_4 - 2$$

On peut donc écrire $w$ sous la forme suivante :

$$w = x + y - e_2 - e_4 - 4$$

soit :

$$w - x - y + e_2 + e_4 = -4$$

les tableaux successifs du simplexe sont les suivants :

| | $w$ | $x$ | $y$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $a_1$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| $a_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| $e_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| $a_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $w$ | 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -4 |

| | $w$ | $x$ | $y$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $a_1$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 4 |
| $a_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| $e_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| $a_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $w$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -2 |

| | $w$ | $x$ | $y$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $a_1$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 2 |
| $a_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| $e_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 2 |
| $a_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $w$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Le test d'arrêt est satisfait et le simplexe donne $max\ w = 0$.

5. Comme $max\ w = 0$, le problème initial admet une base réalisable. De plus, on peut lire la base réalisable de départ pour le problème initial sur le dernier tableau du probème auxiliaire : il s'agit de la base $(e_1, x, e_3, y)$. Les variables hors base sont $(e_2, e_4, a_1, a_2)$.Les variables auxiliares sont bien hors base comme on le souhaitais.

On retourne au problème initial, i.e $max\ z = 3x + y$ auquel on applique le simplexe à partir de la base réalisable de départ donnée par la phase 1. C'est la PHASE 2.

1. La base réalisable de départ est $(e_1, x, e_3, y)$. Les variables hors base sont $(e_2, e_4)$. On n'a plus besoin des variables auxiliaires.

2. Avant de commencer le simplexe, il faut d'abord écrire z en fonction des variables hors base. On peut le faire à l'aide des contraintes qu'on lit sur le dernier tableau de la phase1 :

$$x = 2 + e_2$$

$$y = 2 + e_4$$

Et donc $z = 3x + y = 3(2 + e_2) + (2 + e_4) = 8 + 3e_2 + e_4$, soit $z - 3e_2 - e_4 = 8$.

Les tableaux successifs sont les suivants :

| | $z$ | $x$ | $y$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $x$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 |
| $e_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 2 |
| $z$ | 1 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | -1 | 8 |

| | $z$ | $x$ | $y$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $x$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| $e_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 2 |
| $z$ | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | -1 | 14 |

| | $z$ | $x$ | $y$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $x$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| $e_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| $y$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| $z$ | 1 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 16 |

Le test d'arrêt est satisfait et le simplexe donne $max\ z = 16$ pour $x = 4$ et $y = 4$.

### 2.2.3 Cas particulier

**Solutions optimales multiples**

– Si la fonction objectif est parallèle à une contrainte active pour la solution optimale, la même valeur de l'objectif peut être prise par plusieurs solutions admissibles.

– Il y a une infinité de solutions optimales dans ce cas (toutes les combinaisons convexes de sommets optimaux).

– Cela se traduit par un profit marginal nul pour une ou plusieurs variables hors base.

**Exemple 2.2.3** *(Solutions optimales multiples)*

$$maxz = 2x_1 + 4x_2$$

***sous contraintes***

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

| *var.en base* | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | *solution* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-1$ | $2$ | $4$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $s_1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $1$ | $0$ | $5$ |
| $s_2$ | $0$ | $1$ | $1$ | $0$ | $1$ | $4$ |
| $z$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-2$ | $0$ | $-10$ |
| $x_2$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{5}{2}$ |
| $s_2$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ |
| $z$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-2$ | $0$ | $-10$ |
| $x_2$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1$ | $-1$ | $1$ |
| $x_1$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $2$ | $3$ |

***Solution optimale***

$$x_1 = 0\alpha + 3(1-\alpha) = 3 - 3\alpha$$

$$x_2 = \frac{5}{2}\alpha + 1(1-\alpha) = 1 + \frac{3}{2}\alpha \qquad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

**Problèmes non bornés**

– Certains problèmes sont non bornés dans une direction donnée.

– Si cette direction est une direction d'amélioration de la fonction objectif, celle-ci peut prendre une valeur arbitrairement grande !

**Exemple 2.2.4** *(Problèmes non bornés)*

$$maxz = 2x_1 + x_2$$

*sous contraintes*

$$\begin{cases} x_1 \ - x_2 \ \leq 1 \\ 2x_1 \qquad\ \ \leq 4 \\ x_1 \ , x_2 \ \geq 0 \end{cases}$$

| *var.en base* | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | *solution* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-1$ | $2$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $s1$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $0$ | $1$ |
| $s2$ | $0$ | $2$ | $0$ | $0$ | $1$ | $4$ |

– *Tous les coefficients dans la colonne de $x_2$ sont négatifs ou nuls.*

– *Cela signifie que toutes les contraintes de non-négativité sont satisfaites quelle que soit la valeur de $x_2$.*

– *L'objectif peut donc augmenter indéfiniment.*

**Problèmes impossibles**

– Le système de contraintes peut n'avoir aucune solution.

– Généralement, provient d'une mauvaise formulation du problème.

**Exemple 2.2.5** *(Problèmes impossibles)*

$$max z = 3x_1 + 2x_2$$

sous contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 & + x_2 & \leq 2 \\ 3x_1 & + 4x_2 & \geq 12 \\ x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

# 2.3 Dualité

## 2.3.1 Le problème dual

### Problème primal et problème dual

**Problème primal**

$$max \qquad c^t x$$

sous contraintes

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$n$ variables,$m$ contraintes,$m < n$, $c$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

**Problème dual**

$$min \qquad b^T y$$

sous contraintes

$$\begin{cases} A^T y \geq c \\ (y \text{ non restreint}) \end{cases}$$

$n$ variables,$m$ contraintes,$m < n$ , $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b, y \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

**Exemple 2.3.1** *(Problème primal et dual - forme standard)*

**Problème primal**

$$\mathbf{max\ z = x_1+x_2}$$

sous contraintes

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 & (y_1) \\ 3x_1 - x_2 = 6 & (y_2) \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Problème dual**

$$\mathbf{min\ w = 5y_1+6y_2}$$

sous contraintes

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \geq 1 & (x_1) \\ y_1 - y_2 \geq 1 & (x_2) \end{cases}$$

### 2.3.2 Propriétés et règles de construction du dual

**Théorème 2.3.2** ***Le problème dual du problème dual est le problème primal***

**Règles de construction**

| **Problème max** | **Problème min** |
|---|---|
| Contrainte | Variable |
| $\leq$ | $\geq 0$ |
| $=$ | non restreinte |
| Variable | Contrainte |
| $\geq 0$ | $\geq$ |
| non restreinte | $=$ |

**Exemple 2.3.3** *(Problème primal et dual - forme générale)*

**Problème primal**

$$\mathbf{max} \quad z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sous contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 & (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 & (y2) \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**Problème dual**

$$min \quad w = 10y_1 + 8y_2$$

sous contraintes

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 5 & (x_1) \\ 2y_1 - y_2 \geq 12 & (x_2) \\ y_1 + 3y_2 \geq 4 & (x_3) \\ y_1 \geq 0 & \end{cases}$$

### 2.3.3 Relations primal/dual

**Théorème 2.3.4** ***(Dualité faible)***

Considérons la paire primale-duale :

$$max\ c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$min\ b^T y$$

sous contraintes

$$\{\ A^T y \geq c$$

– Si $x$ est une solution admissible du primal et $y$ une solution admissible du dual, alors

$$c^T x \leq b^T y$$

– S'il $y$ a égalité, alors $x$ est une solution optimale du primal et $y$ une solution optimale du dual.

**Théorème 2.3.5** *(Dualité forte)*

Considérons la paire primale-duale

$$max\ c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$min\ b^T y$$

sous contraintes

$$\{A^T y \geq c$$

– Si le primal et le dual admettent tous les deux une solution admissible, ils ont tous deux une solution optimalfinie et la même valeur objectif optimale.

– Si le primal (dual) est non borné, le dual (primal) n'admet pas de solution admissible.

**Théorème 2.3.6** *(Complémentarité)*

Considérons la paire primale-duale

$$max\ c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$min\ b^T y$$

sous contraintes

$$\{A^T y \geq c$$

Si $x$ est une solution optimale du primal et $y$ une solution optimale du dual, alors

$$x_i \ \ (a_i^T y - c_i) = 0$$

où $a_i$ est la i-ème colonne de $A$.

En d'autres termes :

$$x_i > 0 \qquad \Rightarrow \ a_y^T i = c_i$$

$$a_y^T i > c_i \ \ \Rightarrow x_i = 0$$

**Exemple 2.3.7** ***(Résolution du dual par les règles de complémentarité)***

Primal (P)

$$max\ z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sous contraintes

$$\begin{cases} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \qquad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \qquad (y_2) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Dual (D)

$$min\ w = 10y_1 + 8y_2$$

sous contraintes

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 5 \qquad (x_1) \\ 2y_1 - y_2 \geq 12 \qquad (x_2) \\ y_1 + 3y_2 \geq 4 \qquad (x_3) \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale de (P)

$$(x1, x2, x3) = (\frac{26}{5}, \frac{12}{5}, 0)$$

$$z = \frac{274}{5}$$

$$x_1 > 0 \Rightarrow y_1 + 2y_2 = 5$$

$$x_2 > 0 \Rightarrow 2y_1 - y_2 = 12$$

Solution optimale de (D)

$$(y1, y2) = (\frac{29}{5}, \frac{2}{5})$$

$$w = \frac{274}{5}$$

### 2.3.4 Interprétation économique de la dualité

– La forme canonique d'un programme linéaire peut être interprétée comme un problème d'allocation de ressources.

– Paire primale-duale

$$max \quad c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$min \quad b^T y$$

sous contraintes

$$\begin{cases} A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

– **Données**

$c_j$ : profit par unité d'activité $j$.

$b_i$ : disponibilité de la ressource$i$.

$a_{ij}$ : consommation de la ressource i par unité d'activité$j$.

– **Variables**

$x_j$ : niveau de l'activité$j$.

$y_i$ : valeur d'une unité de la ressource$i$.

**Interprétation de la dualité faible**

$z \leq w$ : profit $\leq$ valeur des ressources

**Interprétation de la dualité forte**

Le profit maximal est atteint si les ressources ont été exploitées complètement, i.e. jusqu'à épuisement de leur valeur.

## 2.4 Solveurs et langages de modélisation

Cette section donne un aperçu de la partie implémentation de la solution, a fin de bien gérer et maitriser la phase de résolution d'un PL. Pour cela on va utiliser le langage GAMS « Generalized Algebraic Modeling System ».

GAMS est un exécutable. L'écriture du modèle se fait par l'intermédiaire d'un fichier d'entrée avec l'extension «.gms » et transcrit les résultats dans un fichier sortie avecl'extension «.lst ». Le modèle porte le même nom en fichier d'entrée et de sortie.

Le fichier GAMS décrivant se problème est constitué des parties suivantes :

1. spécification des variables .
2. spécification des équations :
   – déclaration .
   – spécification de la structure algébrique .
3. définition du modèle .
4. définition de la méthode de résolution.

**Exemple 2.4.1** *Soit l'exemple précédent*

$$max\ z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sous contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 & (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 & (y_2) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Le code source avec GAMS s'écrit comme suit :

VARIABLES

Z Variable Z ;

POSITIVE VARIABLES

$X_1$ Variable $X_1$

$X_2$ Variable $X_2$

$X_3$ Variable$X_3$ ;

EQUATIONS

Equation1 Equation 1

Equation2 Equation 2

Equation3 Equation 3 ;

Equation1..

```
Z =E= 5*X1 + 12*X2+4*X3;
Equation2..
X1 +2*X2 + X3 =L= 10;
Equation3..
2*X1 -X2 + 3*X3 =L= 8;
MODEL Example1 /ALL/;
SOLVE Example1 USING LP MAXIMIZING Z;
```

**Rapport de solution**

A la fin de l'exécution, GAMS produit un rapport indiquant la solution trouvée, la valeur de la fonction objectif en cette solution, ainsi que différentes informations permettant d'analyser le comportement de l'algorithme d'optimisation, et diverses propriétés du problème en cours d'étude. En particulier, le résumé de rapport donne le nombre total de cas non optimaux, non réalisables et non bornés rencontrés.

La sortie standard de GAMS présente la solution sous forme d'un tableau, qui dans le cas de l'exemple est :

*Optimal solution found.*

*Objective : 60.000*

| | **LOWER** | **LEVEL** | **UPPER** | **MARGINAL** |
|---|---|---|---|---|
| ... **EQU Equation1** | . | . | . | 1.000 |
| ... **EQU Equation2** | −INF | 10.000 | 10.000 | 6.000 |
| ... **EQU Equation3** | −INF | -5.000 | 8.000 | . |
| **Equation1 Equation 1** | | | | |
| **Equation2 Equation 2** | | | | |
| **Equation3 Equation 3** | | | | |
| | **LOWER** | **LEVEL** | **UPPER** | **MARGINAL** |
| ... **VAR Z** | −INF | 60.000 | +INF | . |
| ... **VAR X1** | . | . | +INF | -1.000 |
| ... **VAR X2** | . | 5.000 | +INF | . |
| ... **VAR X3** | . | . | +INF | -2.000 |
| **Z Variable Z** | | | | |
| **X1 Variable X1** | | | | |
| **X2 Variable X2** | | | | |
| **X3 Variable X3** | | | | |

# Chapitre 3

# Programmation en nombres entiers et optimisation combinatoire

## 3.1 Définitions et exemples

**Définition 3.1.1** *Programmation en nombres entiers*

La définition est immédiate[2]. Un problème de programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) est un problème de programmation linéaire (PL) avec tout ou partie des variables qui doivent être entières, voire restreintes à 0 et 1 comme valeur.

On dit que les variables sont soumises à des contraintes d'intégrité.

Un problème de programmation linéaire classique (PL) sera, a contrario, dit "en variables continues".

Dans certains problèmes, les variables de décision sont, par nature, entières, mais nous allons voir que, dans de nombreux cas la modélisation nécessite l'introduction de variables booléennes, c'est-à-dire qui ne peuvent prendre que la valeur 0 ou 1.

**Remarque 3.1.2**

Les problèmes de PLNE font partie des problèmes que nous avons déjà rencontrés, ceux pour lesquels on ne dispose pas d'algorithmes dont le temps de calcul croit de manière polynomiale avec la taille du problème.

On pourrait, par exemple, modéliser le problème du voyageur de commerce, le problème de coloration, voire certains problèmes d'ordonnancement, par un problème de PLNE.

Lorsque la taille du problème le permet, on peut le résoudre avec des méthodes de résolution basées sur une exploration intelligente du domaine des solutions.

Il arrive aussi que, dans certains (rares) cas, la solution obtenue sans tenir compte des contraintes d'intégrité, par exemple avec l'algorithme du simplexe, soit a posteriori entière ; le problème est alors résolu.

Comme on l'a vu, on dispose de bons algorithmes pour résoudre les problèmes de programmation linéaire classiques, on peut se demander s'il ne serait pas possible de résoudre, sans tenir compte des contraintes d'intégrité, puis arrondir la solution trouvée à l'entier le plus proche, ceci n'ayant évidemment pas de sens pour une variable booléenne.

En mathématique, l'optimisation combinatoire recouvre toutes les méthodes qui permettent de déterminer l'optimum d'une fonction avec ou sans contraintes. Soit $X$ un ensemble de solutions à un problème d'optimisation et $F$ une fonction objective qui mesure la valeur $F(x)$ avec $x \in X$ .

Pour un problème de minimisation on cherche à déterminer une solution $x$ qui minimise la fonction objective. Un minimum est une solution qui fait partie des solutions réalisable.

on note le problème d'optimisation combinatoire comme suit :

$$min\ F(x)$$

sous contraintes

$$\{x \in X$$

**Exemple 3.1.3** *(Sélection de projets). 5 projets doivent être évalués sur 3 ans. Etant donné le coût de chaque projet pour chaque année et le profit obtenu par l'éxécution d'un projet, décider quels projets éxécuter sans dépasser le budget disponible pour chaque année.*

| | Coût par année | | | Profit |
|---|---|---|---|---|
| Projet | 1 | 2 | 3 | |
| 1 | 5 | 1 | 8 | 20 |
| 2 | 4 | 7 | 10 | 40 |
| 3 | 3 | 9 | 2 | 20 |
| 4 | 7 | 4 | 1 | 15 |
| 5 | 8 | 6 | 10 | 30 |
| Budget | 25 | 25 | 25 | |

**Variables**

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si le projet } j \text{ est sélectionné,} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

**Formulation**

$$maxz = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

sous contraintes

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25 \\ 8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25 \\ x1, x2, x3, x4, x5 \in [0; 1] \end{cases}$$

**Exemple 3.1.4** *(Problème avec coûts fixes)*
*3 compagnies de téléphone offrent des tarifs différents pour les communications longue distance.*

| Compagnie | Abonnement | Prix/minute |
|---|---|---|
| 1 | 16 | 0.25 |
| 2 | 25 | 0.21 |
| 3 | 18 | 0.22 |

– Trouver le plan d'abonnement optimal pour 200 minutes de communication / mois.

**Variables**

$x_i$ : minutes de communication avec la compagnie $i$

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ si un abonnement est pris auprès de la compagnie } i \\ 0 \qquad \text{si non.} \end{cases}$$

**Formulation**

$$minz = 0,25x_1 + 0,21x_2 + 0,22x_3 + 16y_1 + 25y_2 + 18y_3$$

sous contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 200 \\ x_1 \leq 200y_1 \\ x_2 \leq 200y_2 \\ x_3 \leq 200y_3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 \in [0, 1] \end{cases}$$

**Exemple 3.1.5** *(Voyageur de commerce)*

– Un représentant doit visiter n villes une et une seule fois, et revenir à sa ville de départ, en minimisant le coût total du trajet.
– Le problème revient à trouver un tour de coût minimum passant une et une seule fois par chacun des noeuds d'un graphe. Le coût d'utilisation de l'arc $(i, j)$ est $c_{ij}$

**Variables**

$$x_{ij} = \begin{cases} \quad 1 \text{ si l'arc}(i, j) \text{ appartient autour optimal} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si non} \end{cases}$$

**Contraintes**

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad\qquad i = 1, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad\qquad j = 1, ..., n$$

**Formulation**

$$min\ z = \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sous contraintes

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1, ..., n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, ..., n \\ \sum_{i,j \in s} x_{ij} \leq |s| - 1 & \phi \neq s \neq \{1, ..., n\} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, ..., n\ , & j = 1, ..., n \end{cases}$$

**Le problème d'affectation**

**Exemple 3.1.6** *(Problème d'affectation)*

Une grande compagnie aérienne a centralisé ses correspondances dans un hub . Elle souhaite coupler les vols arrivant et partant de ce hub, afin qu'un maximum de passagers puisse continuer leur voyage sans changer d'avion.

On considère $n$ vols arrivant au hub et $n$ vols quittant le hub.

$n_{ij}$ est le nombre de passagers arrivant par le vol numéro$i(i = 1, \ldots, n)$ et poursuivant sur le vol numéro $j(j = 1, \ldots, n)$.

Dans ce problème, le but est de déterminer, pour chaque vol arrivant, le vol partant avec lequel il sera couplé.

Etant donné le vol arrivant numéro i, il s'agit de savoir si le vol partant numéro j lui est ou non affecté, d'où l'introduction des variables de décision $x_{ij}$.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si le vol arrivant } i \text{ est couplé au vol partant } j \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si non} \end{cases}$$

Il faut que chaque vol arrivant soit couplé avec un seul vol partant.

Pour le vol arrivant numéro $i$ , il suffit de compter le nombre de variables $x_{ij}$ qui valent 1.

Cette contrainte peut donc s'écrire :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, ..., n$$

Ceci ne suffit pas car plusieurs vols arrivant pourraient être couplés au même vol quittant le hub ; on ajoute donc les contraintes qui expriment que chaque vol quittant est couplé avec un seul vol

arrivant :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, ..., n$$

L'objectif est de maximiser le nombre de passagers qui ne changeront pas d'avion.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} n_{ij} x_{ij}$$

Ce problème est un problème d'affectation dont la forme générale est :

$$\begin{cases} \min\ (ou\ \ \max)\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} n_{ij} x_{ij} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, ..., n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, ..., n \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad\qquad \forall\ i, j \end{cases}$$

Le modèle d'affectation sert à représenter des problèmes dans lesquels on dispose de deux ensembles de n éléments, tout élément de l'ensemble 1 devant être affecté à un et seul élément de l'ensemble 2 et réciproquement, l'affectation d'un élément à un autre induisant un coût. L'objectif est de réaliser cette affectation en minimisant le coût total.

Les deux ensembles peuvent, par exemple, correspondrent à des tâches et des personnes susceptibles de les réaliser ou, comme vous avez pu le voir dans la leçon 1, à des jetons et des récipients !

Le problème d'affectation est un des rares problèmes de PLNE qui soit facile à résoudre.

Il existe de très bons algorithmes pour cela.

On peut aussi le résoudre comme un problème de programmation linéaire standard, sans tenir compte des contraintes d'intégrité, on constatera a posteriori que les variables à l'optimum valent 0 ou 1.

## 3.2 Méthodes de Branch-and-Bound

**Branch-and-Bound pour les problèmes en nombres entiers**

– Les méthodes de branch-and-bound sont des méthodes basées sur une énumération "intelligente" des solutions admissibles d'un problème d'optimisation combinatoire.

– Idée : prouver l'optimalité d'une solution en partitionant l'espace des solutions.

– "Diviser pour régner"

– Application à la programmation linéaire en nombres entiers : utilise toute la puissance de la programmation

linéaire pour déterminer de bonnes bornes.

– On appelle relaxation linéaire d'un programme linéaire en nombres entiers le programme linéaire obtenu en

supprimant les contraintes d'intégralité sur les variables.

**Programme en nombres entiers**

$$(p) \;\; max \; c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0, entier \end{cases}$$

**Relation linéaire**

$$(Lp) \ \ max \ c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

**Propriétés de la relaxation linéaire**

– La valeur de la solution optimale de LP est une borne supérieure sur la valeur de la solution optimale de P.

– La valeur d'une solution admissible de P fournit une borne inférieure sur la valeur de la solution optimale de P.

– Si la solution optimale de LP est entière (donc admissible pour P), elle est également la solution optimale de P.

**Branchement**

– Si la solution de $(LP)$ n'est pas entière, soit $x_i$ une variable prenant une valeur fractionnaire $x_i$ dans la solution optimale de $LP$.

– Le problème peut être divisé en deux sous-problèmes en imposant

$x_i \leq \lfloor x_i^* \rceil \quad ou \quad x_i \geq \lfloor x_i^* \rceil \ + \ 1$

où $\lfloor x_i^* \rceil$ est le plus grand entier inférieur à $x_i$

– La solution optimale de $P$ est la meilleure des solutions optimales des deux problèmes

$$(P_1) \quad max \ c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x_i \geq \lfloor x_i^* \rceil \\ x \geq 0 \ \ entier \end{cases}$$

$$(P_2) \quad max \ c^T x$$

sous contraintes

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x_i \leq \lfloor x_i^* \rceil + 1 \\ x \geq 0 \ \ entier \end{cases}$$

**Branch-and-bound pour le voyageur de commerce**

$$min\ z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

sous contraintes

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, ..., n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, ..., n \\ \displaystyle\sum_{i,j \in s} x_{ij} \leq |s| - 1 \qquad \phi \neq s \neq \{1, ..., n\} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, ..., n\ ,\ \ j = 1, ..., n \end{cases}$$

– Si on retire les contraintes d'élimination de sous-tours, on obtient le problème d'affectation.

– Cette relaxation a une solution entière qui peut être obtenue par exemple avec la méthode hongroise.

– Le branchement est effectué de manière à éliminer les sous-tours.

– La valeur de la solution optimale du problème d'affectation AP est une borne inférieure sur la valeur de la solution optimale du TSP.

– Le coût d'un tour fournit une borne supérieure sur la valeur de la solution optimale.

– Si la solution optimale AP est un tour (i.e. sans sous-tour), elle est également la solution optimale du TSP.

– Si un sous-tour apparaît :

$$x_{i_1 i_2} = x_{i_2 i_3} = x_{i_3 i_4} = ..... = x_{i_{k-1} i_k} = x_{i_k i_1} = 1$$

– Dans une solution admissible, un de ces arcs doit être absent, donc

$$x_{i_1 i_2} = 0 \quad ou \quad x_{i_2 i_3} = 0 \quad ou \quad x_{i_3 i_4} = 0\ ou\ .......\ x_{i_{k-1} i_k} = 0 \ \ ou \quad x_{i_k i_1} = 0$$

– Chacune de ces conditions va correspondre à une branche de l'arbre de branch-and-bound.

## 3.3 Méthodes heuristiques

Les métaheuristiques forment un ensemble de méthodes utilisées en recherche opérationnelle et en intelligence artificielle pour résoudre des problèmes d'optimisation réputés difficiles. Résoudre un problème d'optimisation combinatoire, c'est trouver l'optimum d'une fonction, parmi un nombre fini de choix, souvent très grand. Les applications concrètes sont nombreuses, que ce soit dans le domaine de la production industrielle, des transports ou de l'économie – partout où se fait sentir le besoin de minimiser des fonctions numériques, dans des systèmes où interviennent simultanément un grand nombre de paramètres.

**Définition 3.3.1** *une métaheuristique est une méthode algorithmique capable de guider et d'orienter le processus de recherche dans un espace de solution, souvent très grand à des régions riches en solutions optimales. Le fait de rendre cette méthode abstraite et plus générique conduite à un vaste utilisation pour des champs d'applications différents. A ces applications, les métaheuristiques permettent, de trouver des solutions, peut- être pas toujours optimales, en tout cas très proches de l'optimum et en un temps raisonnable .*

### 3.3.1 Algorithmes génétiques

– Conçus par Holland (1975) comme un modèle de système adaptatif complexe capable de simuler, notamment, l'évolution des espèces.

– Présque immédiatement après, appliqués à l'optimisation de fonctions de variables réelles. Par la suite, de très nombreux problèmes d'optimisation combinatoire ont été traités.

– Se distinguent du recuit et de la recherche tabou par le fait qu'ils traitent et font évoluer une population de solutions.

– Au cours d'une itération, les solutions de la population courante interagissent pour fournir la génération suivante (métaphore de la reproduction sexuée).

#### Principe d'Algorithme Génétique

Codage des Variables L'étape clef dans un algorithme génétique est de définir et coder convenablement les variables d'un problème donnée. On retrouve différents techniques de codages. Le codage est un processus de représentation des gènes. Le processus peut être effectué par utilisation des : bits, nombres, arbres, tableaux, listes ou tous autres objets. La littérature définit deux types de codage : binaire et réel.

– Les solutions sont codées de manière appropriée. Un codage élémentaire pour un problème de programmation mathématique en variables binaires est un vecteur x de 0 et de 1, où chaque composante $x_j$ , $j = 1, ...n$ représente la valeur prise par une variable.

– Pour le problème du voyageur de commerce, un codage plus usuel sera une liste ordonnée des noms (ou labels) des $n$ villes.

– Un vecteur codant une solution est souvent appelé chromosome et ses coordonnées ou sites sont appelés gènes.

– Le choix d'un codage approprié est très important pour l'efficacité des opérateurs qui seront appliqués pour faire évoluer les solutions.

– Population initiale de solutions $X^{(0)}$ (taille constante au cours de l'évolution).

– Fonction d'évaluation des solutions : en général, croissante avec la qualité de la solution (fitness function, mesurant la "santé" de l'individu solution).

– Dans un problème de maximisation (respectivement, de minimisation), ce peut être la fonction objectif (respectivement, l'opposé de la fonction objectif).

– Pour des raisons d'efficacité de l'algorithme, on peut être amené à choisir la fonction d'évaluation de manière plus sophistiquée, mais elle sera toujours croissante (respectivement, décroissante) en la valeur de l'objectif dans un problème de maximisation (respectivement, de minimisation).

*Algorithme génétique*

**Initialisation** : $X^{(0)} \subset X$, population initiale.

**Étape** $n$ :$X^{(n)} \subset X$, population courante ;

– sélectionner dans $X^{(n)}$ un ensemble de paires de solutions de haute qualité ;

– appliquer à chacune des paires de solutions sélectionnées un opérateur de croisement qui produit une ou plusieurs solutions enfants ;

– remplacer une partie de X(n) formée de solutions de basse qualité par des solutions "enfants" de haute qualité ;

– appliquer un opérateur de mutation aux solutions ainsi obtenues ; les solutions éventuellement mutées constituent la population $X^{(n+1)}$ ;

si la règle d'arrêt n'est pas satisfaite,

passer à l'étape $n + 1$ ;

sinon, stop.

**Sélection**

– La sélection - aussi bien celle des individus de "haute qualité" que celle des individus de "basse qualité" -comporte généralement un aspect aléatoire.

– Chaque individu $x_i$ se voit attribuer une probabilité pi d'être choisi d'autant plus grande que son évaluation est haute (basse, dans le cas d'une sélection de "mauvais" individus).

– On tire un nombre $r$ au hasard (uniformément) entre 0 et . L'individu k est choisi tel que :

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i < r \leq \sum_{i=1}^{k}$$

– La procédure est itérée jusqu'à ce que l'on ait choisi un nombre fixé d'individus.

**Croisement**

Soit deux solutions x et y sélectionnées parmi les solutions de haute qualité. Un opérateur de croisement (crossover) fabrique une ou deux nouvelles solutions $x\'$, $y\'$en combinant $x$ et $y$

**Exemple 3.3.2** *(Two-point crossover)*

– $x$ et $y$ vecteurs $0-1$ ;

– sélectionner aléatoirement deux positions dans les vecteurs et permuter les séquences de 0 et de $l$ figurant entre ces deux positions dans les deux vecteurs.

– Pour les vecteurs :

$$\begin{array}{ccccccccccc} x & = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ y & = & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

si les positions "après 2" et "après 5" sont choisies, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccccccc} x\' & = & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ y\' & = & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

– Une mutation est une perturbation introduite pour modifier une solution individuelle, par exemple la transformation d'un 0 en un 1 ou inversément dans un vecteur binaire.

– En général, l'opérateur de mutation est appliqué parcimonieusement : on décide de "muter" une solution avec une probabilité assez faible (de l'ordre de quelques centièmes, tout au plus).

– Un but possible de la mutation est d'introduire un élément de diversification, d'innovation comme dans la théorie darwinienne de l'évolution des espèces.

**Remarques finales**

– La recherche tabou peut être très efficace, mais implémentation et ajustement des paramètres difficiles, forts dépendants de la structure du problème.

– Les algorithmes génétiques sont efficaces si la structure du problème est bien exploitée.

– Méthodes hybrides très efficaces (exemple : recherche locale utilisée comme opérateur de mutation).

# Conclusion Générale

Dans ce travail, nous avons présentés un aperçu sur les problèmes reliés à la conduite et à la coordination des opérations (activités) au sein d'une organisation. La RO, associée à la révolution informatique, pénètre pratiquement dans tous les secteurs d'activités de la vie courante, même si sa présence est souvent invisible. En premier lieu, nous avons cité que la première étape de RO est l'observation attentive du problème et sa formulation, ainsi que la collecte de données associées. Ensuite la construction du modéle mathématique qui simpli...e la réalité c-à-d un modèle ...dèle au problème réel. Il faut souligner que la RO essaye souvent de trouver une meilleure solution (dite solution optimale) pour le problème examiné.

L'étape la plus importante dans la construction d'un modèle est le choix des variables qui vont entrer en jeu. Une fois les variables choisies, nous pouvons essayer de formuler le problème. Ce processus est en fait souvent une manière utile pour guider le choix des variables. A ...n de modéliser les contraintes et qui sont bornées inférieurement par zéro, le modèle mathématique est mise en place. L'algorithme du Simplexe a été utilisé pour résoudre le système linéaire construit. En ...n nous avons utilisé le solveur GAMS pour traiter différents exemples et trouver le résultat optimal de chaque problème examiné.

A ce stade et comme perspective, il est intéressant d'accomplirai ce travail, en utilisant le solveur GAMS pour résoudre les problèmes de Programmation en nombre entier et non-linéaire.

# Bibliographie

[1] Hamdy A.Taha, operations research Prentice Hall.

[2] Marc Pirlot, métaheuristique pou l'optimisation combinatoire.

[3] C.Guéret, C.Prins, M.Sevaux , programmation linéaire eyrolles,2000.

[4] R.favre, B.Lemaire, C.picouleau, Précis de la recherche opérationnelle, 7éme ED, Dunod, 2000.

[5] J.F.Phélizon, méthodes et modéles de la recherche opérationnelle Economica 1998.