

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Ref :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master
en : - Filière Mathématiques Fondamentales
- Spécialité Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Étude d'un problème mal posé

Préparé par : **BENAYECHE Nadia**
BOUTAGHANE Souad

Soutenue devant le jury :

- | | | |
|-------------|-------------------------------|-------------------------|
| - Président | Mr BOUEDENE Rabah | Grade : M. Assistant A. |
| - Examineur | Mme BENHABILES Hanane | Grade : M. Assistant B. |
| - Promoteur | Mme AHEMAD YAHIA Rakia | Grade : M. Assistant A. |

Année universitaire : 2013/2014

Remerciements

Nous remercions avant tout Dieu le tout puissant pour la volonté, la santé, et le courage qu'il nous a données afin de terminer ce mémoire.

Nous remercions vivement Mme AHMED YAHIA Rakia d'avoir proposer et assurer la direction de ce mémoire, sa disponibilité, son soutien, ses encouragements et ses précieux conseils tout au long de ce travail.

Nous remercions vivement Mr BOUEDENE Rabah et Mme BENHABILES Hanane membre de jury pour l'honneur qu'ils nous ont accordées en acceptant de juger notre travail.

Nous adressons, également, nos remerciements Chaleureux aux membres de l'institut des sciences et de la technologie et aussi à Mme TALAI Meriem et à tous ceux qui ont pris part de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

BENAYECHE Nadia & BOUAGHANE Souad

Étude d'un problème mal posé

BENAYECHE Nadia et BOUTAGHANE Souad

28 mai 2014

Table des matières

Notations	3
Introduction générale	4
1 RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE	6
1.1 Les espaces de Hilbert	6
1.1.1 Définitions	6
1.1.2 Définitions et propriétés des espaces de Hilbert	7
1.2 Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert	9
1.2.1 Opérateurs linéaires bornés	9
1.2.2 Les opérateurs compacts	10
1.2.3 Opérateurs linéaires non bornés	11
1.2.4 Opérateurs linéaires continus sur un espace de Hilbert	12
1.2.5 Spectre d'un opérateur compact	13
1.2.6 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts	14
1.3 Théorème de Hille-Yosida	14
1.3.1 Équations différentielles dans un espace de Banach	14
1.3.2 L'équation de la chaleur en dimension 1	15
1.3.3 Semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach	16
1.3.4 Le Théorème de Hille-Yosida	17
1.3.5 Opérateurs m -dissipatifs	18
1.3.6 Opérateurs m -dissipatifs dans un espace de Hilbert	19
2 QUELQUES MÉTHODES DE RÉGULARISATION DE PROBLÈMES MAL POSÉS	20
2.1 Problème bien et mal posé	20
2.2 Exemples de problèmes mal posés	22
2.3 Méthodes de régularisation de problèmes mal posés	27
2.3.1 Méthode de Tikhonov	27

2.3.2	Méthode de Lavrentiev	33
2.3.3	Le principe de Morozov	34
2.3.4	Méthode de quasi-réversibilité	36
2.3.5	Méthode des quasi-valeurs aux limites (quasi-boundary value method)	39
3	RÉGULARISATION D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES MAL POSÉS	
	NON HOMOGENÈNE	41
3.1	Introduction	41
3.2	Condition suffisante pour l'existence de la solution du problème mal posé non homogène	42
3.3	Le problème approché	43
3.4	Existence, unicité et stabilité de la solution du problème approché	44
3.5	Estimation de la solution approchée	46
3.6	Convergence de la solution approchée	47
3.7	Estimation de l'erreur de convergence de la solution du problème approché	52
	Application	56
	Conclusion générale	61
	Bibliographie	62

Notations

\mathbb{R} : ensemble des nombres réels.

A : opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert.

$D(A)$: le domaine de définition de l'opérateur A .

A^* : l'opérateur adjoint de l'opérateur A .

ImA : l'image de l'opérateur A .

H : espace de Hilbert.

$R(A)$: la rang de l'opérateur A .

$\delta(H)$: l'ensemble des opérateurs auto-adjoint définis sur l'espace de Hilbert.

$S(t)$: semi-groupe.

$\rho(A)$: l'ensemble résolvant de A .

$\sigma(A)$: spectre de A .

λ : valeur propre de l'opérateur A .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit scalaire.

$L(H)$: l'ensemble des opérateurs linéaire définis sur H .

u' : la dérivée de u par rapport à t .

Introduction générale

La notion d'un problème mathématique mal-posé est apparue dans les discussions du mathématicien français J. Hadamard dans son ouvrage "Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations" [33], après avoir introduit, une vingtaine d'années avant, la notion d'un problème bien-posé qui doit satisfaire, d'après lui, les trois propriétés suivantes :

- La solution existe.
- Elle est unique.
- La stabilité de la solution (Elle dépend continûment des données).

Le fait que la solution d'un problème puisse ne pas exister, n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématiques).

Si un problème a plusieurs solutions (non-unicité) c'est un problème plus sérieux. S'il y a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Disposer d'une information supplémentaire (information à priori).

La question la plus difficile est, sans aucun doute, celle de la stabilité : si l'on change légèrement les données (conditions initiales, conditions aux limites, coefficients, la géométrie du domaine, et les éventuelles variations en temps de ces derniers) la solution varie-t-elle peu ou beaucoup ? C'est-à-dire, varie-t-elle continûment en fonction des données ? Il y a des problèmes où, une petite différence dans les paramètres entraîne un comportement totalement différent de la solution (cas des phénomènes dits "chaotiques").

La perte d'une de ces trois propriétés aboutit à un problème dit mal-posé. C'était une étape pour la classification des modalités mathématiques de problèmes de physique associés à des équations différentielles.

Les méthodes générales de l'analyse mathématique ont bien été adaptées pour les solutions des problèmes mal-posés, cependant, il n'était pas clair dans quel sens les problèmes mal-posés pouvaient avoir solution. Plusieurs mathématiciens comme Tikhonov, John, Lavrentiev, Ivanov et d'autres ont travaillé sur la théorie et les méthodes de ces problèmes mal-posés. Ils ont pu donner une définition mathématique précise "des solutions

approchées" pour des classes générales de ces problèmes. Aujourd'hui, ces problèmes sont un cadre de recherche très riche.

Ce mémoire est un développement de l'étude d'une classe de problèmes non standards décrits par des équations différentielles. Il est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans le Chapitre 1, on rappelle quelques résultats connus d'analyse fonctionnelle (les espaces de Hilbert, éléments de la théorie des opérateurs, les semi-groupes et l'équation de la chaleur).

Le Chapitre 2, est consacré pour la définition d'un problème mal-posé et certaines méthodes de résolutions. On présente brièvement le principe de cinq méthodes : la méthode de Tikhonov, la méthode de Lavrentiev, Le principe de Morozov, la méthode de quasi-réversibilité et la méthode des quasi-valeurs aux limites (quasi-boundary value method).

Le Chapitre 3, est consacré à l'étude d'une classe de problèmes mal posés non homogènes. Plus exactement, on considère l'opérateur auto-adjoint positif A sur un espace de Hilbert H , et le problème non homogène de la valeur finale suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f & 0 < t < T \\ u(T) = g \end{cases} \quad (\text{F.V.B}) \quad (1)$$

avec $u \in C^1([0, T], H)$, $f \in C^1([0, T], H)$, $g \in H$ et $-A$ le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t) : (S(t) = e^{-At})$. Le problème est mal posé.

Dans ce contexte, beaucoup d'approches ont été faites pour le cas homogène [23], [46], [47], [54], [53]. Pour l'étude du cas non homogène, on note Lattés et Lions [56], qui utilisent la méthode de quasi-réversibilité, puis de Hetrick et Hughes [11], ensuite de Dang Duc Trong et Nguyen Huy Tuan [16] utilisant la quasi-réversibilité stabilisée et S. Djeddar [58] avec la méthode des quasi-valeurs aux limites.

Dans ce travail, on utilise cette dernière méthode (quasi-boundary value method) pour le traitement de la classe de problèmes non homogènes sous considération.

On s'intéresse à l'existence de la solution du problème (F.V.P). On établie des résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème approché, ainsi que la dépendance continue par rapport aux données.

Enfin nous établissons des résultats de la convergence de la solution régularisée, ainsi que l'estimation de l'erreur obtenue.

Chapitre 1

RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Afin de simplifier la lecture de ce travail, cette partie de ce mémoire est consacré pour rappeler quelques définitions et résultats d'analyse fonctionnelle. Ces rappels concernent les espaces de Hilbert, les opérateurs et leurs propriétés définis sur les espaces de Hilbert, les semi-groupes ainsi que l'équation de la chaleur.

1.1 Les espaces de Hilbert

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 : On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel réel H (resp : complexe) une application ϕ de $H \times H$ dans \mathbb{R} (resp : \mathbb{C}) qui possède les propriétés suivantes :

1. $\phi(u + u', v) = \phi(u, v) + \phi(u', v)$.
2. $\phi(\lambda u, v) = \bar{\lambda}\phi(u, v)$.
3. $\phi(v, u) = \overline{\phi(u, v)}$.
4. $\phi(v, v) \geq 0$.
5. $\phi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. où u, u' et v sont des éléments quelconques de H et λ un élément quelconque de \mathbb{R} (resp : \mathbb{C}).

On déduit immédiatement de cette définition les propriétés suivantes :

1. $\phi(u, v + v') = \phi(u, v) + \phi(u, v')$
2. $\phi(u, \lambda v) = \lambda\phi(u, v)$

Remarque 1.1.2 : De nombreux auteurs adoptent la convention $\phi(\lambda u, v) = \lambda\phi(u, v)$. Le choix fait ici correspond à l'usage répandu parmi les physiciens.

Définition 1.1.3 : Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ et qui est complet pour la norme $(\langle u, u \rangle)^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 1.1.4 :

1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ avec $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ est un espace de Hilbert (espace euclidien).
2. $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ avec $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i$ est un espace de Hilbert (espace hermitien).
3. $L^2([0, 1], \mathbb{C}) = \left\{ \text{fonctions complexes } L^2 \text{ intégrables sur } [0, 1] \text{ et } \langle f, g \rangle = \int_0^1 \bar{f}(t) \cdot g(t) dt \right\}$.

Alors, $(L^2([0, 1], \mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert contenant les fonctions complexes continues sur $[0, 1]$.

1.1.2 Définitions et propriétés des espaces de Hilbert

a) propriétés élémentaires

Proposition 1.1.5 : Soit H un espace normé, dont la norme dérive d'un produit scalaire. On a :

1. Pour tous u, v , éléments de H , $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz).
2. Pour tous u, v , éléments de H , $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ (Identité du parallélogramme).

Réciproquement, on a :

Proposition 1.1.6 : Soit H un espace vectoriel normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La norme $\|\cdot\|$ dérive d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
2. La norme $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallélogramme.

b) Somme Hilbertienne

Définition 1.1.7 : Soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-espaces fermés de H . On dit que H est somme Hilbertienne des (E_n) et on note $H = \bigoplus_n E_n$ si :

- (i) Les E_n sont deux à deux orthogonaux i.e : $\langle u, v \rangle = 0, \forall v \in E_n, m \neq n$.
- (ii) L'espace vectoriel engendré par les (E_n) est dense dans H .

L'égalité dans l'inégalité de Bessel est caractérisée dans le théorème suivant :

Théorème 1.1.8 : On suppose que H est somme Hilbertienne des $(E_n)_{n \geq 1}$. Soit $u \in H$ et soit $u_n = p_{E_n} u$. Alors on a :

(a) $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ i.e. $u = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k u_n$.

(b) $|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2$ (égalité de Bessel-Parseval).

Réciproquement, étant donnée une suite (u_n) de H telle que

$$u_n \in E_n \quad \forall n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty,$$

alors la série $\sum_n u_n$ est convergente et $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ vérifie $u_n = p_{E_n} u$.

c) Base Hilbertienne

Définition 1.1.9 : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace Préhilbertien. Une famille orthonormale totale de H est appelée base hilbertienne de $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace Préhilbertien et $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de H .

1. On suppose que $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H . Soient $u, v \in E$. Si pour tout $i \in I$, on a $\langle v, e_i \rangle = \langle u, e_i \rangle$, alors $v = u$.
2. On suppose que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert. Si on a $\{e_i; i \in I\}^\perp = \{0\}$, alors $(e_i)_{i \in I}$ est une base Hilbertienne de H .

Théorème 1.1.10 (Bessel-Parseval) :

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de H . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1- La famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base Hilbertienne de H .

2- $\forall u, v \in E, \langle u, v \rangle = \sum_{i \in I} \langle u, e_i \rangle \langle e_i, v \rangle$.

Ainsi, si $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H , l'application de H dans $L^2(I)$ définie par $u \mapsto (\langle u, e_i \rangle)_{i \in I}$ est une isométrie linéaire. Cette isométrie est surjective si et seulement si H est un espace de Hilbert.

Théorème 1.1.11 : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de H . Alors, pour tout $u \in H, \sum_{i \in I} |\langle u, e_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2$.

Théorème 1.1.12 : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base Hilbertienne de H . Alors, pour tout élément u de $H, u = \sum_{i \in I} \langle u, e_i \rangle e_i$.

1.2 Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

1.2.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.2.1 : Soit H un espace vectoriel normé, on appelle opérateur linéaire borné toute application linéaire continue de H dans H .

Si A est un opérateur linéaire borné.

$$\forall u \in H, \|Au\| \leq \|A\| \|u\|,$$

La norme de A étant définie par :

$$\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\| = \sup_{u \in H} \frac{\|Au\|}{\|u\|}.$$

La norme de A est également donnée par

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|u\| \leq 1 \\ \|v\| \leq 1}} |\langle Au, v \rangle|,$$

En effet, en vertu de la relation de Cauchy-Schwartz, l'application $v \rightarrow |\langle Au, v \rangle|$ est majorée $\|Au\|$ si $\|v\| \leq 1$. Si $Au \neq 0$, $|\langle Au, v \rangle|$ atteint la valeur $\|Au\|$, pour $v = \frac{Au}{\|Au\|}$.

On en déduit donc :

$$\|Au\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle Au, v \rangle|,$$

ce qui entraîne le résultat énoncé, compte tenu de la définition de $\|A\|$.

A étant continu, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u , la suite $(Au_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Au . Il s'agit ici de convergence au sens de la norme.

Théorème 1.2.2 : Soient A et B deux opérateurs linéaires bornés et λ un scalaire, λA , $A + B$ et AB sont des opérateurs linéaires bornés et on a :

1. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
2. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
3. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Théorème 1.2.3 : Si A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Hilbert E ayant pour domaine H , il existe un opérateur linéaire borné \hat{A} dont le domaine est E tout entier et qui est tel que :

$$(\forall u \in H), \quad \hat{A}u = Au$$

et

$$\|\hat{A}\| = \|A\|$$

Définition 1.2.4 : Un opérateur linéaire A sur un espace de Hilbert H est dit hermitien ou symétrique si, quels que soient u et v appartenant à H ,

$$\langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle$$

Théorème 1.2.5 : Étant donné un opérateur linéaire borné A sur un espace de Hilbert H , il existe un opérateur linéaire borné A^* et un seul, appelé adjoint de A , tel que, quels que soient u et v appartenant à H on ait :

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^*v, u \rangle.$$

A et A^* ont même norme.

Définition 1.2.6 : Soit A un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert H .

- (1) On dit que A est unitaire s'il est l'inverse de son adjoint ($AA^* = A^*A = I$).
- (2) On dit que A est auto-adjoint s'il est identique à son adjoint ($A = A^*$).

Tout opérateur hermitien borné est auto-adjoint. Tout opérateur auto-adjoint est hermitien.

1.2.2 Les opérateurs compacts

Soit E et F deux espace de Banach.

Définition 1.2.7 : Un opérateur linéaire A , défini sur un espace de Hilbert H , est dit compact, ou complètement continu, si l'adhérence de l'image de toute partie bornée de H est compacte.

Tout opérateur linéaire compact A est bornée. En effet, si on désigne par $B(0, 1)$ la boule fermée de rayon unité :

$$B(0, 1) = \{u, \|u\| \leq 1\},$$

$\bar{A}(B(0, 1))$ est par définition compacte et, par conséquent,

$$\sup_{\|u\|=1} \|Au\| < \infty,$$

ce qui signifie que A est borné.

Théorème 1.2.8 : La limite A d'une suite convergente (A_n) d'opérateurs linéaires compacts, définis dans un espace de Hilbert H , est un opérateur linéaire compact dans H .

Théorème 1.2.9 : L'ensemble $K(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L(E, F)$ (pour la norme $\|\cdot\|_{L(E, F)}$).

Définition 1.2.10 : On dit qu'un opérateur $A \in L(E, F)$ est de rang fini si $\dim R(A) < \infty$. Il est clair qu'un opérateur continu de rang fini est compact.

Corollaire 1.2.11 : Soit (A_n) une suite d'opérateur continu de rang fini de E dans F et soit $A \in L(E, F)$ tels que $\|A_n - A\|_{L(E, F)} \rightarrow 0$, Alors $A \in K(E, F)$.

Proposition 1.2.12 : Soient E, F et G trois espace de Banach. Si $A \in L(E, F)$ et $B \in K(F, G)$ [resp : $A \in K(E, F)$ et $B \in L(F, G)$], Alors $B \circ A \in K(E, F)$.

Théorème 1.2.13 (Schauder) :

Si $A \in K(E, F)$, Alors $A^* \in K(F', E')$. Et réciproquement.

1.2.3 Opérateurs linéaires non bornés

On a vu que, dans le cas d'un opérateur borné, on pouvait toujours supposer que son domaine était l'espace de Hilbert tout entier. Dans le cas d'un opérateur non borné il n'en est pas de même ; le domaine de l'opérateur devra toujours être précisé et, lorsqu'on effectuera des opérateur algébriques sur des opérateurs non bornés, les questions de domaine devront être examinées avec soin.

Si A est un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert H , On peut associer à tant vecteur $v \in H$ on pouvait associer un vecteur $A^*v \in H$ défini par :

$$(\forall u \in H) \quad (\forall v \in H), \quad \langle v, Au \rangle = \langle A^*v, u \rangle.$$

Si A n'est pas borné, on peut définir l'adjoint A^* par :

$$(\forall u \in D_A) \quad (\forall v \in D_{A^*}), \quad \langle v, Au \rangle = \langle A^*v, u \rangle$$

Définition 1.2.14 : Un opérateur A défini dans un espace de Hilbert H est dit fermé si, pour toute suite convergente (u_n) d'éléments de D_A telle que la suite (Au_n) soit convergente, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in D_A$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Au_n = Au$$

Théorème 1.2.15 : Si A^* est l'adjoint de l'opérateur linéaire A , A^* est fermé.

Théorème 1.2.16 : Soit A un opérateur linéaire à domaine dense, si $A \subset B$ alors $B^* \subset A^*$

Théorème 1.2.17 : Si A est un opérateur linéaire possédant un adjoint A^* à domaine dense, alors A^{**} est une extension de A .

Définition 1.2.18 :

1. Un opérateur linéaire A défini dans un espace de Hilbert H est dit hermitien ou symétrique si, quels que soient u et v appartenant à D_A , on a :

$$\langle v, Au \rangle = \langle Av, u \rangle$$

2. Un opérateur linéaire A défini dans un espace de Hilbert H est dit auto-adjoint si :

$$A^* = A$$

1.2.4 Opérateurs linéaires continus sur un espace de Hilbert

Proposition 1.2.19 : Pour tout $A \in L(H)$ il existe un unique opérateur $A^* \in L(E)$ tel que :

$$\forall u, v \in E, \quad \langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle.$$

L'opérateur A^* est appelé l'adjoint de A . De plus, $\|A^*\| = \|A\|$.

Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement de la définition de l'adjoint.

Proposition 1.2.20 : L'application de $L(H)$ dans lui-même définie par $A \mapsto A^*$ est une application linéaire si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, antilinéaire si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. C'est en outre une isométrie involutive (i.e. pour tout $A \in L(H)$, $A^{**} = A$). De plus, $I^* = I$ et

$$\forall A, B \in L(H), \quad (AB)^* = B^*A^*.$$

Proposition 1.2.21 : Pour tout $A \in L(H)$, on a :

$$\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2.$$

Un opérateur $A \in L(H)$ est appelé auto-adjoint si $A = A^*$. On dit aussi symétrique si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou hermitien si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. D'après ce qui précède. On voit que si A est auto-adjoint, alors $\|A^2\| = \|A\|^2$.

Proposition 1.2.22 : On suppose que $H \neq 0$. Pour tout opérateur auto-adjoint $A \in L(H)$.

$$\|A\| = \sup \{ |\langle Au, u \rangle| \quad \text{avec } u \in H \text{ et } \|u\| = 1 \}.$$

1.2.5 Spectre d'un opérateur compact

Définition 1.2.23 : Soit $A \in L(H)$. L'ensemble résolvant est : $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (A - \lambda I)\}$ est bijectif de H sur H . Le spectre $\sigma(A)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant,

$$\sigma(A) = R \setminus \rho(A).$$

On dit que λ est valeur propre -et on note $\lambda \in VP(A)$ - si $N(A - \lambda I) \neq 0$. $N(A - \lambda I)$ est l'espace propre associé à λ .

Remarque 1.2.24 : Il est important de retenir que si $\lambda \in \rho(A)$ alors :

$$(A - \lambda I)^{-1} \in L(H).$$

Il est clair que $VP(A) \subset \sigma(A)$. En général, l'inclusion est stricte. Il peut exister λ tel que : $N(A - \lambda I) = \{0\}$ et $(A - \lambda I) \neq E$. (Un tel λ appartient au spectre mais n'est pas valeur propre).

Proposition 1.2.25 : Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble compact et

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, +\|A\|].$$

Théorème 1.2.26 : Soit A opérateur linéaire défini dans un espace de Hilbert H .

1. Son ensemble résolvant $\rho(A)$ est ouvert.
2. La fonction $\lambda \rightarrow R_\lambda(A)$ est analytique pour tout λ appartenant à $\rho(A)$.
3. Son spectre $\sigma(A)$ est fermé et non vide.

Théorème 1.2.27 : Soit A opérateur linéaire auto-adjoint défini dans un espace de Hilbert H .

1. Ses valeurs propres sont réelles.
2. Les vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.
3. Son spectre résiduel est vide.
4. Son spectre continu est réel.

1.2.6 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts

On suppose dans la suite que H est un espace de Hilbert et que $A \in L(H)$. Identifiant A' et H on peut considérer que $A^* \in L(H)$.

Définition 1.2.28 : On dit qu'un opérateur $A \in L(H)$ est auto-adjoint si $A^* = A$, c'est-à-dire :

$$(Au, v) = (u, Av), \quad \forall u, v \in H.$$

Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose

$$m = \inf_{\substack{u \in H \\ |u|=1}} (Au, u) \quad \text{et} \quad M = \sup_{\substack{u \in H \\ |u|=1}} (Au, u)$$

Alors $\sigma(A) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(A)$ et $M \in \sigma(A)$.

Corollaire 1.2.29 : Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(A) = \{0\}$. Alors

$$A = 0.$$

Théorème 1.2.30 : On suppose que H est séparable. Soit A un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propre de A .

1.3 Théorème de Hille-Yosida

1.3.1 Équations différentielles dans un espace de Banach

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ converge dans $\mathcal{L}(X)$. L'opérateur limite est noté e^{tA} . On peut facilement vérifier les propriétés suivantes :

- (i) $e^{0A} = I$,
- (ii) $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} \|e^{tA} - I\| = 0$,
- (iv) $Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \|e^{tA}x - x\|$ pour tout $x \in X$,
- (v) l'équation différentielle

$$x' = Ax + f, \quad x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

avec $f \in L^1([0, T]; X)$ et $x_0 \in X$, admet pour solution

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T]$$

1.3.2 L'équation de la chaleur en dimension 1

Considérons l'équation

$$y \in L^2([0, T]; H_0^1[0, L]) \cap C([0, T]; L^2[0, L]),$$

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = 0 & \text{dans } [0, L] \times [0, T], \\ y(0, t) = y(L, t) = 0 & \text{dans } [0, T], \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{dans } [0, L]. \end{cases} \quad (1.2)$$

où $T > 0$, $L > 0$ et $y_0 \in L^2[0, L]$. Nous pouvons récrire l'équation sous la forme $y \in L^2([0, T]; H_0^1[0, L]) \cap C([0, T]; L^2[0, L])$ et $\frac{dy}{dt} \in L^2([0, T]; H^{-1}[0, L])$,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay & \text{dans } L^2([0, T]; H_0^1[0, L]), \\ y(0) = y_0 & \text{dans } L^2[0, L]. \end{cases} \quad (1.3)$$

où $A \in \mathcal{L}(H_0^1[0, L]; H^{-1}[0, L])$ est défini par

$$\langle Ay, z \rangle = - \int_{\Omega} \nabla_y \cdot \nabla_z dx.$$

On peut aussi définir A comme opérateur non borné dans $L^2[0, L]$, en posant

$$D(A) = H^2[0, L] \cap H_0^1[0, L], \quad Ay = y_{xx}.$$

L'équation (1.3) est bien de la forme (1.1). Nous souhaiterions donc écrire la solution de l'équation (1.3) sous la forme

$$y(t) = e^{tA} y_0.$$

Mais A étant un opérateur non borné dans $L^2[0, L]$, l'opérateur e^{tA} ne peut pas être défini comme dans la section 1. Essayons de trouver une autre définition pour e^{tA} . Pour cela remarquons que la famille $(\phi_k)_{k \geq 1}$ définie par

$$\phi_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right),$$

est une base hilbertienne de $L^2[0, L]$, formée de fonctions propres de l'opérateur $(A, D(A))$. Recherchons la solution de l'équation (1.2) sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \phi_k(x).$$

Si l'équation (1.2) est vérifiée au sens des distributions dans $[0, L] \times [0, T]$, alors g_k vérifie

$$g'_k + \frac{k^2\pi^2}{L^2}g_k = 0 \text{ dans } [0, T], \quad g_k(0) = y_{0k} = (y_0, \phi_k).$$

On a donc

$$g_k(t) = y_{0k}e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{L^2}}.$$

On pose

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_{0k}e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{L^2}}\phi_k(x). \quad (1.4)$$

On peut facilement vérifier que $(y \in L^2([0, T]; H_0^1[0, L]) \cap C([0, T]; L^2[0, L]))$ et que y est solution de l'équation (1.2).

Remarquons que la série de (1.4) n'est pas définie pour $t < 0$.

Posons

$$S(t)y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (y_0, \phi_k)e^{-\frac{k^2\pi^2 t}{L^2}}\phi_k(x).$$

Les conditions (i) et (ii) de la section 1 sont donc vérifiées par la famille d'opérateurs $(S(t))_{t \geq 0}$.

La condition (iii) est remplacée par

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)y_0 - y_0\|_{L^2[0, L]} = 0$$

Ce sont ces propriétés qui permettent d'étendre la notion d'exponentielle d'opérateurs au cas des opérateurs non bornés.

1.3.3 Semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach

Définition 1.3.1 : Une famille d'opérateurs $(S(t))_{t \geq 0}$ de $L(H)$ est un semi-groupe fortement continu sur H lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

- (i) $S(0) = I$.
- (ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ pour tout $t \geq 0$ et tout $s \geq 0$.
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)x - x\| = 0$ pour tout $x \in H$.

Théorème 1.3.2 : Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur H . Alors il existe des constantes $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que : $\|S(t)\| \leq Me^{(\omega t)}$ pour tout $t \geq 0$.

Corollaire 1.3.3 : Si $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur H alors, pour tout $x \in H$ l'application :

$$t \longrightarrow S(t)x \text{ est continue de } [0, \infty[\text{ dans } H.$$

Définition 1.3.4 : Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur H . On appelle *générateur infinitésimal* du semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur non borné $(A, D(A))$ défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in H : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe dans } X \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \text{pour } x \in H.$$

Théorème 1.3.5 : Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur H et $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $x \in H$, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s) ds = S(t)x.$$

(ii) Pour tout $x \in H$ et tout $t > 0$, $\int_0^t S(s)x ds$ appartient à $D(A)$ et

$$A \left(\int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x.$$

(iii) Si $x \in D(A)$ alors $S(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

(iv) Si $x \in D(A)$ alors

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AS(\tau)x d\tau.$$

Corollaire 1.3.6 : Si $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ fortement continu sur X alors $D(A)$ est dense dans X , et A est fermé.

Théorème 1.3.7 : Si $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ fortement continu sur X . Pour tout $x_0 \in D(A)$, $x(t) = S(t)x_0$ est l'unique solution du problème

$$x \in C([0, \infty]; D(A)) \cap C^1([0, \infty]; X),$$

$$x'(t) = Ax(t) \text{ pour tout } t \geq 0, x(0) = x_0.$$

1.3.4 Le Théorème de Hille-Yosida

Théorème 1.3.8 (théorème de Hille-yosida 1) :

Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans X est le générateur infinitésimal

d'un semi-groupe de contractions sur X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) A est fermé.
- (ii) $D(A)$ est dense dans X .
- (iii) Pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ est une application bijective de $D(A)$ sur X , et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X vérifiant :

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 1.3.9 (Théorème de Hille-Yosida 2) :

Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans H est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur H si et seulement si A est m -dissipatif et de domaine dense dans H .

1.3.5 Opérateurs m -dissipatifs

Définition 1.3.10 : Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X , est dissipatif si

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|$$

Définition 1.3.11 : Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X , est m -dissipatif si

- A est dissipatif,
- $\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A)$ tel que $\lambda x - Ax = f$.

Théorème 1.3.12 : Si A est m -dissipatif alors, pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un inverse, $(\lambda I - A)^{-1}f$ appartient à $D(A)$ pour tout $f \in X$, et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X vérifiant

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Théorème 1.3.13 : Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné dans X . S'il existe $\lambda_0 > 0$ pour lequel l'opérateur $(\lambda_0 I - A)$ est une bijection de $D(A)$ sur X , et si $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X , alors A est fermé.

En particulier, si A est m -dissipatif alors A est fermé.

Corollaire 1.3.14 : Soit A un opérateur m -dissipatif. L'espace $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ est un espace de Banach et $A|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A), X)$.

Définition 1.3.15 : Soit A un opérateur m -dissipatif dans X . La famille d'opérateurs $R(\lambda, A)$, $\lambda > 0$, définie par $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelée résolvant de A . L'opérateur $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)$ est appelé « approximation de Yosida » de A .

Théorème 1.3.16 : Soit A un opérateur m -dissipatif de domaine dense dans X . Alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = 0, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

De plus

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|A_\lambda x - Ax\| = 0, \quad \text{pour tout } x \in D(A).$$

Théorème 1.3.17 : Soit $(A, D(A))$ un opérateur dissipatif et de domaine dense dans X . Si A est fermé et A^* est dissipatif alors A est m -dissipatif.

1.3.6 Opérateurs m -dissipatifs dans un espace de Hilbert

Dans cette section nous supposons que X est un espace de Hilbert.

Théorème 1.3.18 : Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans X , est dissipatif si et seulement si

$$\forall x \in D(A), \quad (Ax, x) \leq 0$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par

$$\forall x \in D(A), \quad \operatorname{Re}(Ax, x) \leq 0$$

Théorème 1.3.19 : Si A est m -dissipatif alors $D(A)$ est dense dans X .

Théorème 1.3.20 : Soit A un opérateur dissipatif et de domaine dense dans X . Alors A est m -dissipatif si et seulement si A est fermé et A^* est dissipatif.

Définition 1.3.21 : Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$, de domaine dense dans X est dit auto-adjoint si $A = A^*$. Il est dit anti-adjoint si $A = -A^*$.

Chapitre 2

QUELQUES MÉTHODES DE RÉGULARISATION DE PROBLÈMES MAL POSÉS

Dans ce chapitre on rappelle la notion de problème bien posé au sens de Hadamard, et on donne certains exemples de problèmes mal posés, nous terminerons par quelques méthodes connues de régularisation comme la méthode de Tikhonov, la méthode de Lavrentiev, Le principe de Morozov, la méthode de quasi-réversibilité et la méthode des quasi-valeurs aux limites (quasi-boundary value method).

2.1 Problème bien et mal posé

D'après Jacques Hadamard (voir [24],[25]) un problème est dit bien posé (correctement posé) si le problème admet une solution (Existence), si elle est unique (Unicité) et si elle est stable (Stabilité). Le problème est dit mal posé si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée. Illustrons cela sur l'exemple suivant :

Soient E, F deux espaces métriques et $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire :

$$Ax = b \tag{2.1}$$

Notons que plusieurs problèmes physiques, se ramènent à une telle équation, le problème (2.1) est dit bien posé si ces trois conditions sont vérifiées simultanément :

1. **Existence** : Pour tout second membre l'équation (2.1) admet une solution

$$\forall y \in F, \exists x \in E : Ax = y.$$

2. **Unicité** : La solution est unique $\forall x_1, x_2 \in E : Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

3. **Le problème est stable sur les espaces E et F** : c'est à dire qu'une petite perturbation du second membre y donne une petite perturbation de la solution x c'est à dire (La solution dépend continûment des données).

Plusieurs problèmes physiques ne vérifient pas forcément ces conditions simultanément. Alors si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiées, le problème du type (2.1) est dit mal posé.

Tikhonov A. a reformulé en 1943 (voir [7]) la définition d'un problème bien posé, élargissant ainsi la classe des problèmes mal posés. Selon Tikhonov, un problème vérifie les trois conditions suivantes :

1. La solution du problème (2.1) existe et appartient à un ensemble donné à priori M inclus dans E pour une classe de données dans F .

$$\forall y \in N \subset F, \exists x \in M \subset E : Ax = y$$

2. Cette solution est unique dans la classe M .

$$\forall x_1, x_2 \in M \subset E : Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

3. A une perturbation infiniment petite du second membre telle que la solution reste dans M correspond une variation infiniment petite de cette solution.

$$\lim_{\tilde{y} \rightarrow y} \tilde{x} = x, \text{ tel que } Ax = y, A\tilde{x} = \tilde{y} \text{ et } x, \tilde{x} \in M$$

On donne quelques exemples des problèmes bien posés :

Exemple 2.1.1 : Résoudre le système linéaire

$$Ax = b \text{ où } A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ avec } \det(A) \neq 0 \text{ et } b \in \mathbb{R}^n$$

sont donnés et où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'inconnue : c'est un système de Cramer. La solution x unique s'exprime à l'aide des formules de Cramer comme des fractions rationnelles en les coefficients de la matrice A et les composantes du vecteur b : c'est donc un problème bien posé.

Exemple 2.1.2 : Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) = y(x) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec la condition initiale } y(0) = \alpha.$$

La solution $y(x) = \alpha e^x$ est unique et dépend continûment de la donnée α : c'est donc un problème bien posé.

2.2 Exemples de problèmes mal posés

On donne quelques exemples des problèmes mal posés :

Exemple 2.2.1 : La différentiation est l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse.

En fait, l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à la considérer comme le problème direct. Et la différentiation est le « prototype » du problème mal posé, comme nous allons le voir. Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, et l'opérateur intégral A défini par :

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Il est facile de voir directement que $A \in \mathcal{L}(L^2([0, 1]))$. Cet opérateur est injectif, par contre son image est le sous espace vectoriel :

$$ImA = \{f \in H^1([0, 1]); f(0) = 0\}$$

où $H^1([0, 1])$ est l'espace de Sobolev. En effet, l'équation :

$$Af = g$$

est équivalente à :

$$f(x) = g'(x) \quad \text{et} \quad g(0) = 0$$

L'image de A n'est pas fermée dans $L^2([0, 1])$ (bien entendu, elle l'est dans $H^1[0, 1]$).

En conséquence, l'inverse de A n'est pas continu sur $L^2([0, 1])$, comme le montre l'exemple suivant : Considérons une fonction $f \in C^1([0, 1])$, et $n \in \mathbb{N}$. Soit :

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$$

Alors :

$$f'_n(x) = f'(x) + n \cos(n^2 x)$$

De simples calculs montrent que :

$$\|f - f_n\|_2 = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = O(n)$$

alors que :

$$\|f' - f'_n\|_2 = n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi, la différence entre f' et f'_n peut-être arbitrairement grande, alors même que la différence entre f et f_n est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de A) n'est donc pas continu, au moins avec ce choix des normes.

Exemple 2.2.2 : Soit le problème suivant :

$$Au = f$$

$A \in \mathcal{L}(H, F)$, H, F des espaces de Hilbert.

Si A est compact et $R(A)$ non fermé alors, le problème est mal posé.

$R(A)$ est non fermé $\Rightarrow A^{-1}$ est non borné \Rightarrow la troisième condition n'est donc pas vérifiée.

Le problème reste mal posé.

Exemple 2.2.3 Considérons l'équation différentielle :

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) - 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Cette équation admet comme solution :

$$u(x) = e^x - 1$$

Si la condition initiale est donnée par $u(0) = \varepsilon$, la solution est alors :

$$v(x) = (1 + \varepsilon)e^x - 1$$

De sorte que la différence s'écrit :

$$v(x) - u(x) = \varepsilon e^x$$

Si x varie dans l'intervalle $[0, 30]$, on a :

$$v(30) - u(30) = e^{30}\varepsilon \simeq 10^{13}\varepsilon$$

Si la précision des calculs est de 10^{-10} , le problème est numériquement mal posé, bien que mathématiquement bien posé.

Exemple 2.2.4 : Considérons l'espace de Hilbert l^2 de dimension infinie tel que :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2 \Rightarrow \left(\sum_{i \geq 1}^{+\infty} x_i^2 \right) < +\infty, \text{ et } \|x\|_{l^2} = \left(\sum_{i \geq 1}^{+\infty} x_i^2 \right)$$

Soit $A : l^2 \rightarrow l^2$ un opérateur diagonal dans l^2 tel que :

$$Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots \right).$$

Considérons le problème :

$$Ax = y$$

l'inverse A^{-1} de A est donné par :

$$A^{-1}y = (y_1, 2y_2, \dots, ny_n, \dots)$$

Donc on a l'existence de la solution de ce problème pour un certain $y \in l^2$, et on peut encore montrer facilement l'unicité de la solution. Prenons maintenant :

$$y_n = \left(0, 0, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots \right),$$

donc

$$A^{-1}y_n = (0, 0, \dots, \sqrt{n}, 0, \dots),$$

$\|y_n\|_{l^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ lorsque n tend vers $+\infty$, mais $\|A^{-1}y_n\|_{l^2} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc on a pas la stabilité de la solution d'où le problème est mal posé.

Exemple 2.2.5 (Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur) :

un corps Ω de conductivité thermique k est chauffé (peu importe comment). Nous connaissons les conditions aux limites à tout instant. De plus, à un certain instant $T > 0$, on mesure le champ de température $\theta(x, T)$ qui règne dans Ω . Peut-on retrouver le champ de température initial $\theta(x, t = 0)$?

Ce problème revient à résoudre l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla \theta) = 0 \quad + \text{ (condition aux limites)} \quad (2.2)$$

dans le sens rétrograde (en donnant, outre les conditions aux limites, des conditions finales). Or, si le problème d'évolution direct ((2.2) + conditions aux limites + conditions initiales) est stable, sa contrepartie rétrograde est instable : une petite erreur sur la mesure de $\theta(x, T)$ peut entraîner une grande erreur sur la reconstruction de $\theta(x, 0)$.

Pour s'en convaincre, plaçons-nous dans le cas le plus simple : $\Omega = \mathbb{R}$ et $k(x) = (\text{constante})$ et considérons le problème d'évolution associé :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \begin{cases} \theta(x, 0) = \theta_0(x) & (\text{condition initiale}) \\ \theta(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 & (\text{conditions à l'infini}) \end{cases} \quad (2.3)$$

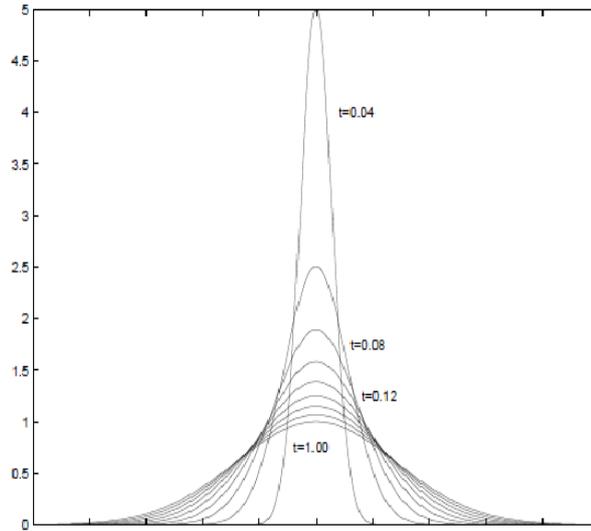


Figure 2.2.1 : Evolution, directe et rétrograde, à partir d'une singularité initiale.

Prenant la transformée de Fourier en espace de (2.3), on obtient sans difficulté l'expression générale de θ solution de (2.3) sous réserve que la transformée de Fourier en espace $\hat{\theta}_0(\omega)$ de $\theta_0(x)$ ait un sens :

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\omega^2 kt} e^{i\omega t} \hat{\theta}_0(\omega) d\omega \quad (2.4)$$

L'intégrale ci-dessus n'a de sens que pour t positif et diverge pour t négatif, d'où l'impossibilité de résoudre (2.3) « en remontant le temps ». Cet exemple se généralise à (2.2).

D'une manière plus qualitative, on peut aussi considérer la solution élémentaire bien connue de l'équation de la chaleur, où une singularité initiale ($\theta_0(x) = \delta(x)$) se diffuse au fil du temps, le champ de température à l'instant t étant une gaussienne (figure (2.2.1)). Réciproquement, connaissant la solution élémentaire à un instant T , il est impossible de « remonter » à un instant négatif, en-deçà de la singularité initiale : on ne sait pas donner de sens aux événements antérieurs à cette singularité. Si, se trompant sur la date de la condition initiale, on la cherche à un instant $t_0 < 0$, on ne peut aboutir.

Remarquons que ce phénomène de « dilution » d'une singularité initiale est lié au

caractère parabolique de l'équation d'évolution thermique. Dans le cas des équations d'évolution hyperboliques (équation des ondes, ...), les singularités se propagent et leur nature se conserve au cours du temps.

Exemple 2.2.6 :

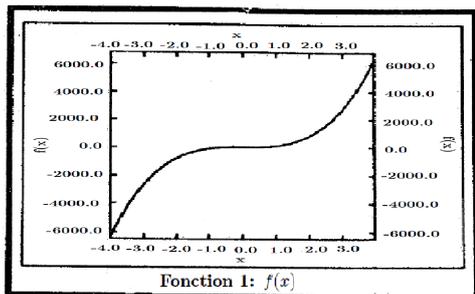


Figure 2.2.2

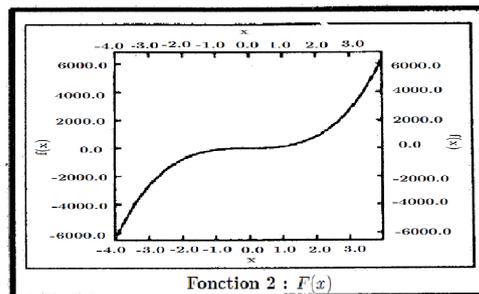


Figure 2.2.3

Si $A : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ est défini par $Af = f$, alors ce problème est mal posé parce que

$$\text{si } f(x) = g(x) + a \cos(\omega x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) - a\omega \sin(\omega x)$$

et pour a petit $\|f - g\| = \sup_x |f(x) - g(x)|$ est petit, mais pour ω suffisamment grand, $\|f' - g'\|$ peut être aussi grand qu'on veut. Par exemple, aux figures (2.2.2) et (2.2.3) on voit deux courbes qui sont presque identiques. Les dérivées d'ordre trois sont présentées aux figures (2.2.4) et (2.2.5) sur la même échelle. La différence importante entre les deux courbes, malgré une différence très petite des courbes de départ est caractéristique d'un problème mal posé.

Notons que ce problème peut être stabilisé par un choix de norme de type Sobolev sur l'espace de départ.

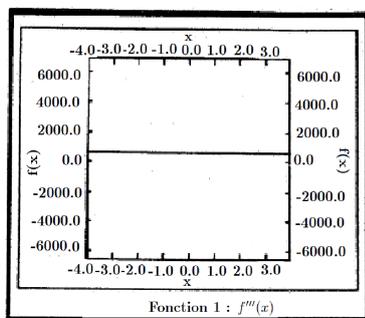


Figure 2.2.4

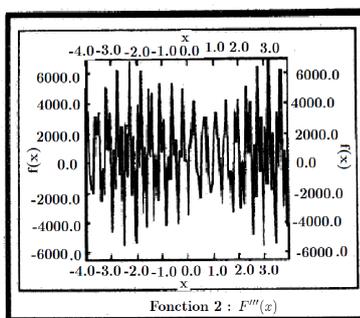


Figure 2.2.5

Exemple 2.2.7 : Soit

$$Af = \int K(x, y)f(y)dy$$

avec $K \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Il est bien connu que A est complètement continue et que ses valeurs propres n'ont de point limite qu'éventuellement à 0.

Si 0 est un point limite mais n'est pas lui-même une valeur propre-ce qui sera le cas s'il n'existe pas de $f \neq 0$ tel que $Af = 0$, alors A a un inverse. Mais puisque 0 est dans le spectre, ce n'est pas un point régulier et par conséquent A^{-1} n'est pas borné. Comme cas particulier de l'exemple précédent, on considère la convolution dans L^2 .

$$g = Af = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y)f(y)dy.$$

la transformée de Fourier $\tilde{g} = \mathcal{F}(g)$, on obtient $\tilde{g} = \tilde{K}f$, d'où

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f}) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\tilde{g}}{\tilde{K}} \right]$$

Si l'inverse existe. Supposons maintenant que l'on observe une perturbation de g , soit $g' = g + \epsilon$.

Alors notre estimateur de f , f' , sera

$$f' = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\tilde{g}'}{\tilde{K}} \right] = f + \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{K}} \right)$$

mais si ϵ est un bruit blanc et si $\tilde{K}(\omega) \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow \infty$, l'estimateur n'existera pas.

Dans un calcul numérique nous appliquons un seuillage du spectre et une solution existe, mais elle est instable par rapports aux petits changements de seuillage.

2.3 Méthodes de régularisation de problèmes mal posés

2.3.1 Méthode de Tikhonov

Pour présenter le principe de la régularisation on va considérer un problème inverse $Kx = y$ où $K : X \rightarrow Y$ est un opérateur compact injectif. Le fait de choisir K injectif n'est pas très contraignant car on peut toujours restreindre l'espace X au complément orthogonal de $N(K)$, où N désigne le noyau. Les espaces X et Y sont des espaces de

Hilbert. On supposera de plus que $y \in K(X)$, i.e. le problème inverse possède une solution unique.

Ce qui rend le problème mal-posé est la non continuité de l'opérateur inverse. Soit $\mu > 0$.

Définition 2.3.1 : Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\mu : Y \rightarrow X$ est une stratégie de régularisation si

$$\forall x \in X, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} R_\mu Kx = x$$

i.e. l'opérateur $R_\mu K$ converge simplement vers l'identité.

Soit R_μ une stratégie de régularisation pour l'opérateur $K : X \rightarrow Y$, où X est un espace de dimension infinie. Alors :

1. Les opérateurs R_μ ne sont pas uniformément bornés : il existe une suite

$$\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+ \text{ telle que}$$

$$\lim_j \|R_{\mu_j}\|_{L(Y,X)} = \infty.$$

2. Il n'y a pas de convergence de $R_\mu K$ vers l'identité au sens de la norme d'opérateur.

Pour la démonstration de ce théorème voir [1] (pp 24-25).

La donnée initiale $y \in Y$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons y^δ la donnée perturbée où le nombre $\delta > 0$ est le niveau de bruit, i.e.

$$\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$$

Notons $x^{\mu,\delta} = R_\mu y^\delta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kx = y$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $\|x^{\mu,\delta} - x\|_X$ on obtient :

$$\|x^{\mu,\delta} - x\|_X \leq \delta \|R_\mu\|_{L(Y,X)} + \|R_\mu Kx - x\|_X$$

Le premier terme de droite de (2.3.1) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Par le Théorème (2.3.2), nous avons vu que $\|R_\mu\| \rightarrow \infty$ quand $\mu \rightarrow 0$. Il ne faut donc pas choisir μ trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de l'équation tend vers 0 quand μ tend vers 0 par définition de R_μ .

Nous allons faire tendre le niveau de bruit δ vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution x .

Une stratégie de régularisation $\delta \mapsto \mu(\delta)$ est admissible si pour tout

$$x \in X \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{y^\delta \in Y} \left\{ \|R_{\mu(\delta)} y^\delta - x\|_X ; \text{ tel que } \|Kx - y^\delta\|_Y \leq \delta \right\} = 0.$$

Plusieurs exemples de stratégies de régularisation admissibles se trouvent dans [1].

Nous allons présenter dans la section suivante la méthode de Tikhonov pour approcher les problèmes inverses.

Le principe de cette méthode pour résoudre le problème inverse mal posé $Kx = y$ est de choisir comme solution l'élément $x_\mu \in X$ qui minimise la quantité

$$\|Kx - y\|_Y^2 + \mu \|x\|_X^2$$

L'existence et l'unicité du minimum est immédiate par coercivité et stricte convexité de $x \mapsto \|x\|_X^2$. Le paramètre μ est appelé le paramètre de régularisation. Pour que l'élément x^μ qui réalise le minimum ait une faible erreur avec la donnée y , ce paramètre doit être choisi assez petit. Il doit également être choisi assez grand pour que la stricte convexité du terme $\|x\|_X$ corrige l'instabilité du problème posé. On appelle $x \mapsto \|x\|_X^2$ la fonctionnelle régularisante. On a le résultat suivant [1], [2], [3].

Soit $\mu > 0$ et $K : X \mapsto Y$ un opérateur linéaire borné de l'espace de Hilbert X vers l'espace de Hilbert Y . Alors la fonctionnelle de Tikhonov admet un unique minimum en $x_\mu \in X$. L'élément x_μ est la solution de l'équation normale

$$\mu x^\mu + K^* K x^\mu = K^* y$$

Grâce à cette équation nous pouvons définir l'opérateur de régularisation de Tikhonov par :

$$R_\mu = (\mu I + K^* K)^{-1} K : Y \rightarrow X \tag{2.5}$$

Il reste à démontrer que cet opérateur est bien un opérateur de régularisation et sous quelles conditions le choix de μ en fonction du niveau de bruit δ est admissible. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 2.3.2 : Soient $K : X \mapsto Y$ un opérateur linéaire compact et $\mu > 0$. L'opérateur $\mu I + K^* K$ est inversible et l'opérateur R_μ défini par (2.5) est une stratégie de régularisation avec

$$\|R\|_{L(Y,X)} \leq \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \tag{2.6}$$

Tout choix de $\mu(\delta) \rightarrow 0$ avec $\delta^2 \mu(\delta) \rightarrow 0$ est admissible, [3], [41].

La méthode de régularisation de Tikhonov, i.e. la minimisation globale de la fonctionnelle, est en fait équivalente à un autre problème de minimisation avec contraintes.

Ce résultat important permet de comprendre la méthode sous deux angles différents.

Soit x la solution de problème

$$\min_{x \in X} \|kx - y\|_Y^2 + \mu \|x\|_X^2 \quad (2.7)$$

Posons $\varepsilon = \|kx^\mu - y\|_Y$ et $D_\varepsilon = \{x \in X \mid \|kx - y\|_Y \leq \varepsilon\}$. Alors x^μ est aussi solution du problème

$$\min_{x \in D_\varepsilon} \|x\|_X^2 \quad (2.8)$$

Réciproquement si x_ε est la solution de (2.8) et si $0 \neq D_\varepsilon$; alors il existe $\mu_\varepsilon > 0$ tel que x_ε , soit la solution de (2.7).

La méthode de régularisation de Tikhonov est une des méthodes les plus employées pour résoudre les problèmes mal posés. Par exemple elle est utilisée avec succès pour inverser les matrices mal conditionnées [2], [62]. Cependant le choix de la norme au carré comme opérateur de régularisation n'est pas toujours efficace car, il faut sélectionner l'opérateur de régularisation en fonction de ce que l'on cherche à obtenir. Dans les exemples numériques qui vont suivre on verra que le choix de l'opérateur de régularisation conduit à des solutions radicalement différentes.

Le problème du calcul numérique de la dérivée d'une fonction que l'on mesure est un problème mal posé. Pour voir cela on considère l'espace de Banach X des fonctions C^∞ définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} muni de la norme de la convergence uniforme.

On définit l'opérateur linéaire $I : X \rightarrow X$ par :

$$If(t) = \int_0^t f(s)ds, \forall f \in X$$

Le problème direct consiste donc à calculer la primitive de $f \in X$ qui vaut 0 en 0, ce problème est clairement bien posé. Pour résoudre le problème inverse il faut, connaissant $F \in X$ calculer sa dérivée $f \in X$. Le problème inverse est mal posé. En effet, nous savons qu'il existe une dérivée unique de $F \in X$ mais, l'opérateur de dérivation n'est pas continu de X dans lui même. La figure (2.3.1) permet d'observer cette instabilité, nous avons calculé la dérivée de la fonction $t \mapsto \sin(3t) + p(t)$ où la fonction p est une petite perturbation. On observe une grande déviation entre la dérivée de la fonction F et celle de la fonction perturbée.

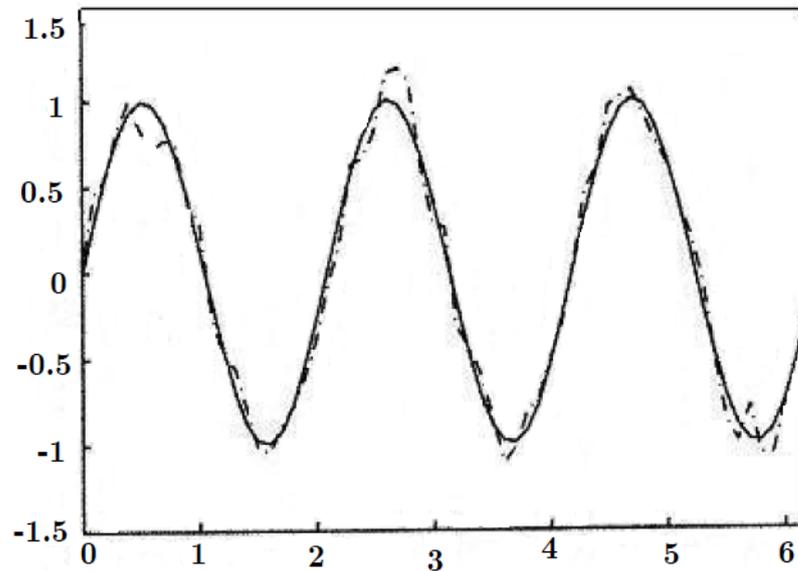


Figure 2.3.1 : $t \longrightarrow F(t)$

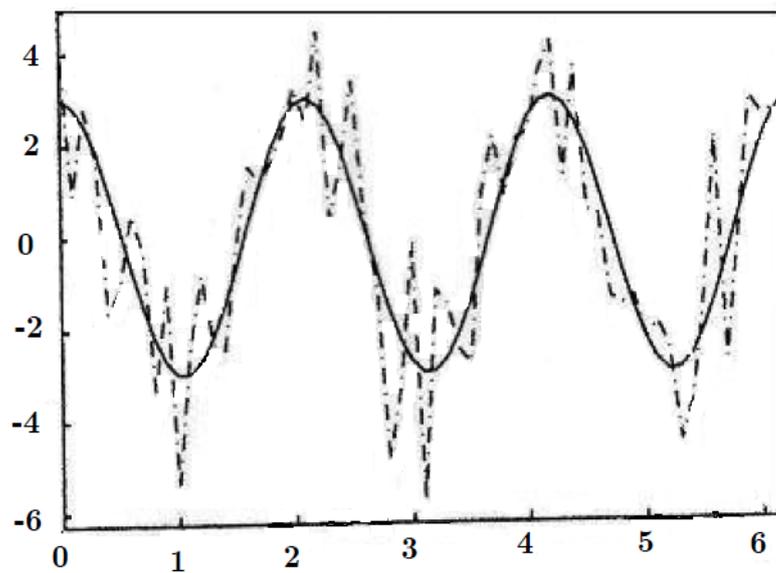


Figure 2.3.2 : $t \longrightarrow F'(t)$

La figure(2.3.1) représente la fonction $F : t \rightarrow \sin(3t)$ et la même fonction perturbée par un bruit blanc. Sur la figure (2.3.2), la dérivée de F et son évaluation numérique.

Nous allons appliquer la méthode de Tikhonov pour résoudre ce problème de la dérivation numérique. Pour cette résolution nous allons nous placer dans l'espace $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ et nous calculons la dérivée en résolvant le problème

$$\min_{f \in L^2([0, 2\pi])} \|F_b - If\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 + \mu \|f\|_{L^2([0, 2\pi])}^2$$

où $F_b : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction dont nous voulons calculer la dérivée. On suppose que cette fonction est une version perturbée de la fonction F et que l'erreur (le niveau de bruit) est $\|F - F_b\| = \delta$. On distingue sur la figure (2.3.1), la fonction F et sa version perturbée F_b , qui nous ont servi pour l'exemple. On utilisant la méthode ci-dessus pour calculer f , nous obtenons la fonction tracée sur la figure (2.3.3). Le paramètre de régularisation ayant été choisi convenablement par rapport au niveau de bruit.

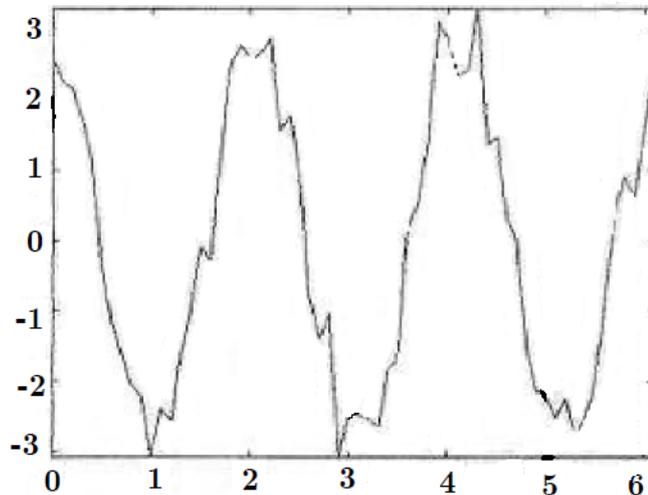


Figure 2.3.3 : Dérivée régularisée dans $L^2([0, 2\pi])$

On remarque que cette solution n'est pas satisfaisante car la fonction obtenue ne ressemble pas beaucoup à un cosinus comme elle le devrait, cela s'explique par le fait que la minimisation de la norme de f dans $L^2([0, 2\pi])$, n'oblige pas la fonction obtenue à être régulière. Une alternative pour apporter plus de régularité est d'utiliser la méthode de Tikhonov dans un espace de Sobolev, plutôt que dans $L^2([0, 2\pi])$.

Calculons donc la solution du problème

$$\min_{f \in H^1([0, 2\pi])} \|F_b - If\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 + \mu \|f\|_{H^1([0, 2\pi])}^2$$

La figure (2.3.4) montre la dérivée calculée de cette manière.

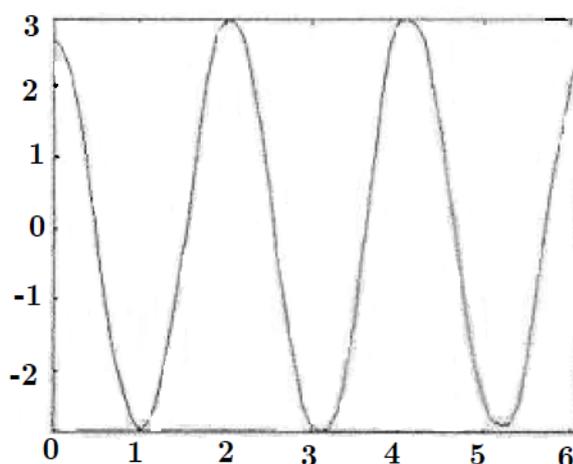


Figure 2.3.4 : Dérivée régularisée dans $H^2([0, 2\pi])$

La fonction f est ici bien plus régulière que celle trouvée précédemment, de plus, elle ressemble beaucoup à une fonction cosinus ce qui été le résultat souhaité. Cet exemple montre clairement que pour résoudre un problème inverse, il faut rajouter des hypothèses de manière à obtenir un résultat conforme à nos attentes.

2.3.2 Méthode de Lavrentiev

Soit A un opérateur linéaire compact sur un espace de Banach X . Une équation linéaire de la forme

$$Ax = y \tag{2.9}$$

sera appelée équation de première espèce. L'inconnue x est recherchée dans un espace de Banach X . y est un élément connu d'un espace de Banach Y . Les espaces X et Y sont tous deux réels ou tous deux complexes. L'ensemble de définition $D(A)$ de A se confond avec X tout entier. L'ensemble des valeurs $R(A)$ de l'opérateur A est en général non

fermé.

Supposons que $N(A) = \{0\}$, si X est de dimension infinie, l'opérateur A admet un inverse A^{-1} sur $R(A)$ qui n'est pas borné. Cette circonstance, fait que le problème défini par $Ax = y$ devienne instable.

Cette méthode consiste à réduire l'équation $Ax = y$ à une équation de deuxième espèce ($x - Ax = y$). Voici un problème qui illustre clairement, l'idée de la régularisation.

Soient \tilde{A} et \tilde{y} des ε approximation de A et de y respectivement. Considérons l'équation approchée

$$\tilde{A}x = \tilde{y} \quad (2.10)$$

Si par exemple, $\tilde{A} = A$ et $\tilde{y} \notin R(A)$, l'équation $\tilde{A}x = \tilde{y}$ n'a pas de solution. Même si elle a une solution \tilde{x} , nous n'avons aucune raison de croire que $\tilde{x} \mapsto x$ pour $\varepsilon \mapsto 0$, où, x est solution de $Ax = y$. Proposons-nous de "régulariser" cette équation. A cet effet, introduisons une équation auxiliaire de deuxième espèce

$$(\tilde{A} + \alpha I)x_\alpha = \tilde{y}, \quad (2.11)$$

En choisissant le paramètre de régularisation α en fonction de ε , de telle sorte que x_α tende vers x pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Cela est possible, en se donnant quelques restrictions supplémentaires.

Théorème 2.3.3 : *Supposons que l'opérateur A vérifie pour tout $\alpha > 0$, la condition*

$$\|A + \alpha I\|^{-1} \leq \frac{C}{\alpha}$$

Supposons aussi que $y \in D(A^{-2})$. Si le paramètre de régularisation $\alpha > 0$, est choisi en fonction de ε de telle sorte que, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on a aussi $\alpha \rightarrow 0$ et $\varepsilon\alpha^{-2} \rightarrow 0$, alors

$$x_\alpha \rightarrow x \quad \text{pour} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Si

$$\alpha = O(\varepsilon^{\frac{1}{3}}) \quad \text{pour} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Alors

$$\|x_\alpha - x\| = O(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$$

2.3.3 Le principe de Morozov

On donne ici un exemple de méthode de choix à posteriori du paramètre de régularisation. On expose la plus classique de celles-ci, "the discrepancy principle" de Morozov [61], ou le principe de décalage de Morozov.

D'après Kirsch [1], on présente un principe basé sur la méthode de régularisation de Tikhonov.

On assume que $K : X \rightarrow Y$ est un opérateur compact et injectif défini entre les deux espaces de Hilbert X et Y avec une image dense $Im(K) \subset Y$.

En étudie encore l'équation $Kx = y$, $y \in Y$.

On calcule maintenant le paramètre de régularisation $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ tel que la solution de Tikhonov correspondante est la solution de l'équation $\alpha x^{\alpha, \delta} + K^* K x^{\alpha, \delta} = K^* y^\delta$ et elle est le minimum de $J_\alpha(x) = \|Kx - y\|^2 + \alpha \|x\|^2$ qui satisfait à l'équation

$$\|Kx^{\alpha, \delta} - y^\delta\| = \delta$$

On note que le choix de par "the discrepancy principle" garantie d'une part que l'erreur est δ , d'autre part, α est très petit.

Théorème 2.3.4 : Soit $K : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire et compact avec une image dense dans Y .

Soit $Kx = y$, $x \in X$, $y \in Y$, $y^\delta \in Y$ tels que $\|y - y^\delta\| \leq \delta < \|y^\delta\|$. Soit $x^{\alpha(\delta)}$ la solution de Tikhonov satisfaisant $\|Kx^{\alpha(\delta), \delta} - y^\delta\| = \delta$ pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$. Alors :

- a) $x^{\alpha(\delta), \delta} \rightarrow x$ pour $\delta \rightarrow 0$. Donc "the discrepancy principle" est admissible.
- b) Soit $x = K^* z \in K^*(Y)$ avec $\|z\| \leq E$ alors

$$\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \leq 2\sqrt{\delta E}$$

Pour cela "the discrepancy principle" est une stratégie de régularisation optimale sous la condition $\|(K^*)^{-1}x\| \leq E$.

La preuve de ce théorème est dans [1]. p.48.

La détermination de $\alpha(\delta)$ est équivalente au problème de trouver la racine de la fonction monotone :

$$\phi(\alpha) = \|Kx^{\alpha, \delta} - y^\delta\|^2 - \delta^2$$

pour δ fixé. Ce n'est pas nécessaire de satisfaire l'équation $\|Kx^{\alpha, \delta} - y^\delta\| = \delta$, exactement, une inclusion de la forme

$$c_1 \delta \leq \|Kx^{\alpha(\delta), \delta} - y^\delta\| \leq c_2 \delta$$

est suffisante pour prouver les assertions du théorème précédent.

Dans le théorème suivant, on prouve que l'ordre de convergence $\mathcal{O}\sqrt{\delta}$ est meilleur pour le principe de décalage de Morozov.

Théorème 2.3.5 : Soit K un opérateur compact et soit $\alpha(\delta)$ choisit par le principe de

décalage. On assume que pour tout $x \in \text{Im}(K^*K)$, $y = Kx \neq 0$ et pour toute suite $\delta_n \rightarrow 0$ et $y^{\delta_n} \in Y$, tel que : $\|y - y^{\delta_n}\| \leq \delta_n$ et $\|y^{\delta_n}\| > \delta_n$ pour tout n . La solution de Tikhonov correspondante $x^n = x^{\alpha(\delta_n), \delta_n}$ converge vers x plus vite que $\sqrt{\delta_n}$ vers zéro, donc

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \|x^n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

alors l'image $\text{Im}(K)$ est de dimension fini.

Des efforts énormes sont faits pour modifier le principe de décalage original. Voir [27], [28], [29] et d'autres.

2.3.4 Méthode de quasi-réversibilité

Il est important de noter qu'il n'y a nullement unicité de la méthode quasi-réversibilité, dans tous les exemples que nous avons rencontré, il y a toujours une infinité de méthodes de quasi-réversibilité possibles (toutes relevant de la même idée : on change le "système" de façon que le problème qui était mal posé devienne bien posé).

L'idée générale de la méthode est de modifier convenablement les opérateurs aux dérivées partielles intervenant dans le problème. Cette modification se fait par l'introduction de termes différentiels, qui sont :

- soit "petits" (pouvant fortement tendre vers zéro) ;
- soit "dégénérant aux bords" (par exemple pour "éliminer" des conditions aux limites mathématiques gênantes, ou constituant précisément les inconnus à déterminer).

Ces opérateurs ainsi modifiés, sont généralement d'ordre différent de l'opérateur initial et de même nature (elliptique, etc.) ou non.

Exemple 2.3.6 : Il est connu que le problème de Cauchy pour l'équation rétrograde de la chaleur est instable vis-à-vis des faibles variations des valeurs initiales. L'instabilité persiste également lorsque la solution est assujettie à certaines conditions accessoires aux limites. La méthode de quasi-réversibilité [56] vise à obtenir une solution stable à de pareils problèmes. Se plaçant dans le cas du problème directe, soit D un domaine fini de l'espace euclidien \mathbb{R}^n à n dimensions, des points $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ limité par une surface lisse par morceaux S et t le temps. Soit ensuite $\varphi(x)$ une fonction continue définie sur D Le problème directe consiste à trouver la solution $u = u(x, t)$ de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \tag{2.12}$$

dans le domaine $G \equiv \{x \in D, t > 0\}$ vérifiant les conditions aux limites

$$u(x, t) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in S.$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{2.13}$$

Ici

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_k}.$$

On sait que ce problème a bien une solution. A chaque fonction $\varphi(x) \in C$ (C classe des solutions) répond une solution du problème (2.12) à (2.13), qui sera désignée par $u(x, t; \varphi)$.

Le problème inverse consiste à trouver $\varphi(x)$ à partir de $u(x, t; \varphi)$. Dans les problèmes pratiques, la fonction $u(x, t; \varphi)$ s'obtient en général à la suite d'une série de mesures : on ne la connaît donc, qu'approximativement. On admet que $u \in L^2$. Il se peut que cette fonction ne corresponde à aucune fonction « initiale » $\varphi(x)$ et, par conséquent, il est fort possible de ne pas trouver dans la classe C des fonctions la solution du problème inverse. Pour cette raison, on va s'occuper du problème de recherche d'une certaine la solution généralisée du problème inverse.

Soient connues, une quantité $T > 0$ et une fonction $\psi(x)$ définie dans le domaine D , $\psi(x) \in L^2$. On définit sur les fonctions $\varphi(x)$ de la classe C la fonctionnelle

$$f(\varphi) = \int_D |u(x, T; \varphi) - \psi(x)|^2 dx.$$

Par solution généralisée du problème inverse, nous entendrons la fonction $\varphi(x)$ sur laquelle on a :

$$f_0 = \inf_{\varphi \in C} f(\varphi).$$

Remarque 2.3.7 : L'intuition suggère de choisir la fonction $\varphi(x)$ de telle façon que $f(\varphi) = 0$. Il suffirait pour cela de trouver la solution du problème direct

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 \\ u(x, t) &= 0 \quad \text{pour} \quad x \in S, \quad 0 < t < T \\ u(x, T) &= \psi(x) \end{aligned} \tag{2.14}$$

et de poser $\varphi(x) = u(x, 0)$. Or un tel problème, pour une fonction donnée $\psi(x)$ de L^2 , serait en général non résoluble et, en outre, instable vis-à-vis de faibles variations de la fonction $\psi(x)$.

Sur une certaine classe de fonctions généralisées $\varphi(x)$ on a $f_0 = 0$. Il s'agit donc de

chercher une valeur approchée de f_0 à une erreur donnée près.

Étant donnée une quantité $\varepsilon > 0$, trouver une fonction $\varphi_\varepsilon(x)$ telle que $f(\varphi_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Ce problème se résout justement par la méthode de quasi-réversibilité.

L'idée de la méthode de quasi-réversibilité est de chercher au lieu de l'opérateur de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ un opérateur $B_\alpha \ll \text{voisin} \gg$ pour lequel le problème rétrograde

$$\begin{aligned} B_\alpha u_\alpha &= 0, & x \in D, & \quad 0 < t < T, \quad \alpha > 0; \\ u_\alpha(x, T) &= \psi(x); \\ u_\alpha(x, T)(x, t) &= 0 & \text{pour} & \quad x \in S, \quad t < T \end{aligned}$$

soit stable. Une fois le problème résolu, on pose

$$\varphi(x) = u_\alpha(x, T)(x, 0).$$

Généralement, on prend en quantité d'opérateur B_α l'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta - \alpha \Delta^2$$

et l'on cherche la solution du problème direct

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \Delta u_\alpha - \alpha \Delta^2 u_\alpha &= 0, & x \in D, & \quad t < T, \quad \alpha > 0; \\ u_\alpha(x, T) &= \psi(x); \\ u_\alpha(x, t) &= 0 & \text{pour} & \quad x \in S, \quad 0 < t \leq T, \\ \Delta u_\alpha &= 0 & \text{pour} & \quad x \in S, \quad 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

En suite on pose

$$\varphi(x) = u_\alpha(x, 0)$$

Notons que, pas plus que l'opérateur de la chaleur, l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta - \varepsilon \Delta^2\right)$ n'est pas réversible. Mais, l'un est "bien posé" dans le sens des t croissants, l'autre dans le sens des t décroissants, d'où la terminologie adoptée "quasi-réversibilité".

La méthode de quasi-réversibilité est applicable à une classe plus étendue de problèmes se rapportant aux équations d'évolution.

Remarque 2.3.8 : De façon générale, pour un problème donné relevant de la méthode de quasi-réversibilité, il n'y a pas une méthode Q.R, mais une infinité. Pour le choix de la méthode, on peut se borner le plus souvent à celle qui paraît \ll la plus simple \gg -ou bien à celle qui est susceptible d'interprétation physique, pouvant aider par exemple, au choix numérique de certains paramètres-Bien entendu, en première analyse, on doit déterminer

la nature et les propriétés des termes indispensables pour transformer le problème en un problème bien posé [8], [9], [18], [23], [36], [37], [38], [39], [42], [43], [50].

2.3.5 Méthode des quasi-valeurs aux limites (quasi-boundary value method)

Soit A un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H où $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact de contraction dans H . On considère le problème de trouver $u : [0, T] \rightarrow H$ tel que :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 & 0 < t < T \\ u(T) = f \end{cases} \quad (\text{F.V.B})$$

pour une certaine valeur finale f dans H . De tels problèmes sont mal posés, du fait que même si la solution unique existe sur $[0, T]$, elle ne dépendra pas continûment de la valeur finale f .

L'idée était de remplacer (F.V.P) par un problème approché qui soit bien posé et d'utiliser ensuite, les solutions de ce nouveau problème pour, construire des solutions approchées du (F.V.P). Dans [56] est la remplace A par une perturbation ($A - \alpha A^2$) et on utilise la valeur initiale; seulement la méthode n'a pas considéré $u(t)$ pour $t < T$ et, l'opérateur contenant f dans $u_\alpha(0)$ avait une large norme, pour un petit paramètre α , [43].

Showalter [54] a approché le (F.V.P) par :

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0 \\ u_\alpha(0) = v_\alpha(0) \end{cases}$$

Où il montre que, les u_α sont des solutions approchées pour (F.V.P), dans le sens où $u_\alpha(T)$ converge vers f quand α tend vers zéro. De même il montre que $u_\alpha(t)$ converge vers la solution du (F.V.P), si et seulement si une telle solution existe. Mais la norme de la fonction f dans $v_\alpha(0)$ reste assez large pour un petit paramètre α .

Par la suite Miller [43] considéra ce problème en trouvant des perturbations optimales de l'opérateur A . Il affirma qu'il était possible de mettre la norme dans l'ordre de $\left(\frac{c}{\alpha}\right)$ plutôt que, $\exp\left(\frac{c}{\alpha}\right)$ avec des conditions sur la perturbation de $f(A)$, et de nouveau, il utilisa la valeur initiale du problème approché, il l'appela "quasi-réversibilité stabilisée".

Finalement, showalter [53] considéra un problème plus général dans un sens différent,

il approcha le problème :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) - Bu(t) = 0, & 0 < t < T \\ u(0) = f \end{cases}$$

Par :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) - Bu(t) = 0 & 0 < t < T \\ u(0) + \alpha u(T) = f \end{cases}$$

Il appela cette méthode : "quasi-boundary value method" (méthode aux valeurs limites).

Il conclut que, cette méthode donne une meilleure approche.

Selon cette méthode, G. Clark et S. Oppenheimer [23], ont approché le problème (F.V.P)

par :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 & 0 < t < T \\ \alpha u(0) + u(T) = f, \end{cases}$$

Ce qui a permis d'obtenir des estimations explicites, concernant l'ordre de convergence des approximations. L'erreur introduite par de petits changements dans la valeur finale f n'est pas exponentielle mais, de l'ordre de $\frac{1}{\alpha}$ sur $[0, T]$. Il montra que ce problème est bien posé pour tout $\alpha > 0$ et que, les approximations u_α sont stables. Il montra aussi, que $u_\alpha(T)$ converge vers f quand α tend vers zéro et, que les valeurs $u_\alpha(t)$ convergent sur $[0, T]$ si et seulement si (F.V.P) admet une solution.

Cette méthode est celle qui a été appliquée, pour régulariser un problème mal posé.

Chapitre 3

RÉGULARISATION D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES MAL POSÉS NON HOMOGENÈNE

3.1 Introduction

Soit A un opérateur auto-adjoint positif dans un espace de Hilbert séparable H . $-A$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction compact. Nous considérons le problème à valeur finale (F.V.P) suivant, qui consiste à trouver $u : [0, T] \rightarrow H$ telle que :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f & 0 < t < T \\ u(T) = g \end{cases} \quad (\text{F.V.B}) \quad (3.1)$$

Où $f \in C^1([0, T], H)$ et $g \in H$ sont deux fonctions données. On suppose que $0 \in \rho(A)$ et que A^{-1} est compact. Soit $\{\varphi_n\}$ une base orthonormée des vecteurs associé aux valeurs propres $\{\lambda_n\}$ de A .i.e : $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ On suppose que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

Formellement la solution du (F.V.P) si elle existe, elle s'écrit sous la forme :

$$u(t) = S(t - T) \left(g - \int_0^T S(T - s)f(s)ds \right) + \int_0^t S(t - s)f(s)ds \quad (3.2)$$

C'est un problème mal posé du fait que même si la solution unique existe sur $[0, T]$, elle ne dépendra pas nécessairement, continûment de la donnée finale g .

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f & 0 < t < T \\ \alpha u(0) + u(T) = g \end{cases} \quad (\text{Q.B.V.P}) \quad (3.3)$$

Où, la donnée finale $u(T) = g$, du (F.V.P) est perturbée pour former une famille de problèmes dépendant d'un petit paramètre. Cette méthode est appelée selon [23], méthode des quasi-valeurs aux limites, et son problème associé s'appelle "*quasi-boundary value problem*" (Q.B.V.P).

On note pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $f(t) \in H$ et pour $g \in H$:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\varphi_n \quad \text{et} \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\varphi_n$$

3.2 Condition suffisante pour l'existence de la solution du problème mal posé non homogène

Lemme 3.2.1 : Si $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\varphi_n$ est dans H , $f \in C^1([0, T], H)$, tel que $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\varphi_n$, alors, (F.V.P) admet une solution classique si :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(t) \quad \text{convergent.} \quad (3.4)$$

Preuve. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(t)$ convergent, on pose :

$$u(t) = S(t-T) \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \quad (3.5)$$

On a donc,

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= -AS(t-T) \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] + f(t) - A \int_0^t S(t-s)f(s)ds \\ &\quad + AS(t-T) \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] + A \int_0^t S(t-s)f(s)ds = f(t). \end{aligned}$$

D'où $u(t)$ est une solution de (F.V.P) et $u(t) \in C^1(]0, T[, H)$.

Vérifions que $u(t) \in H$:

$$\|u(t)\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{\lambda_n(T-t)} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right) + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s)ds \right] \varphi_n \right\|^2$$

$$\|u(t)\|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n(T-t)} \left[g_n^2 + \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T e^{\lambda_n T} (f_n(s)) ds \right)^2$$

et donc,

$$\|u(t)\|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} g_n^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} T \int_0^T e^{2\lambda_n T} f_n^2(s) ds + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T \int_0^T e^{2\lambda_n T} f_n^2(s) ds$$

$$\|u(t)\|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} g_n^2 + 6T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} f_n^2(s) \right) ds$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} f_n^2(t)$ convergent donc, $u(t)$ est dans H , donc $u(t)$ existe.

Vérifions que $u(t) \in D(A)$:

$$\|Au(t)\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[e^{\lambda_n(T-t)} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right] \varphi_n \right\|^2$$

$$\|Au(t)\|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n(T-t)} \left[g_n^2 + \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|Au(t)\|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2 + 6T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(s) \right) ds$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(t)$ convergent donc, $u(t) \in D(A)$, donc $u(t)$ est solution classique du (F.V.P). ■

3.3 Le problème approché

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u' + Au = f & 0 \leq t \leq T \\ \alpha u(0) + u(T) = g \end{cases} \quad (\text{Q.B.V.P}) \quad (3.6)$$

Où, la donnée finale $u(T) = g$, du (F.V.P) est perturbée pour former un problème non local approximatif qui, dépend d'un petit paramètre. Cette méthode est appelée selon [23], méthode des quasi-valeurs aux limites, et son problème associé s'appelle "quasi-boundary value problem"(Q.B.V.P).

Définition 3.3.1 : Pour tout g de H , $\alpha > 0$; $f \in C^1([0, T], H)$, on définit $u_\alpha : [0, T] \longrightarrow H$, tel que :

$$u_\alpha(t) = S(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] + \int_0^t S(t-s) f(s) ds \quad (3.7)$$

3.4 Existence, unicité et stabilité de la solution du problème approché

Théorème 3.4.1 : Si $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n$ est dans H , et $f \in C^1([0, T], H)$ fixé tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \| \| f_n \| \|^2$$

soient convergentes alors, la fonction $u_\alpha(t)$ est la solution classique du (Q.B.V.P) et elle dépend continûment de g .

$\| \| f_n \| \|$ étant la norme sup sur $C^1([0, T], H)$.

Preuve. Commençons par prouver que $u_\alpha(t)$ est solution du (Q.B.V.P) :

$$u_\alpha(t) = S(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] + \int_0^t S(t-s) f(s) ds$$

Donc

$$\begin{aligned} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) &= \\ -AS(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] - A \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds + f(t) \\ + AS(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] + A \int_0^t S(t-s) f(s) ds. \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Il est clair que $u_\alpha(t)$ vérifie l'équation

$$\alpha u_\alpha(0) + u_\alpha(T) = g$$

L'unicité :

On a

$$u(T) = S(T) u(0) + \int_0^T S(T-s) f(s) ds$$

Donc,

$$\alpha u(0) + u(T) = \alpha u(0) + S(T)u(0) + \int_0^T S(T-s)f(s)ds = g$$

D'où :

$$u(0) = S(0)(\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right)$$

Le (Q.B.V.P) devient :

$$\begin{cases} u' + Au = f \\ u(0) = S(0)(\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \end{cases}$$

C'est le problème de Cauchy, il admet la solution unique.

Stabilité :

Pour tout g_1, g_2 de H on a :

$$\begin{aligned} & \|u_{\alpha_{g_1}}(t) - u_{\alpha_{g_2}}(t)\| = \\ & \left\| S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left[g_1 - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right. \\ & \quad \left. - S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left[g_2 - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] - \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right\| \\ & \quad \|u_{\alpha_{g_1}}(t) - u_{\alpha_{g_2}}(t)\| = \|S(t)(\alpha I + S(T))^{-1}(g_1 - g_2)\| \\ & \quad \|u_{\alpha_{g_1}}(t) - u_{\alpha_{g_2}}(t)\| = \|S(t)(\alpha I + S(T))^{-1}\| \|g_1 - g_2\| \\ & \quad \|u_{\alpha_{g_1}}(t) - u_{\alpha_{g_2}}(t)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|g_1 - g_2\| \end{aligned}$$

Vérifions que $u_\alpha(t) \in D(A)$:

$$\begin{aligned} & \|Au_\alpha(t)\|^2 = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 + \lambda_n^2 \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s)ds \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\lambda_n e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right) \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s)ds \right) \right] \\ & \|Au_\alpha(t)\|^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left[\lambda_n^2 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \left(2g_n^2 + \left(2 \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right) + 2\lambda_n^2 \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] \\
& \qquad \|Au_\alpha(t)\|^2 \leq \\
& 4 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(g_n^2 + \left(\int_0^T f_n(s) ds \right)^2 \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(\int_0^T f_n(s) ds \right)^2 \\
& \qquad \|Au_\alpha(t)\|^2 \leq \\
& 4 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 + 4T \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(\int_0^T f_n^2(s) ds \right) + 2T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(\int_0^T f_n^2(s) ds \right) \\
& \qquad \|Au_\alpha(t)\|^2 \leq \\
& 4 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 + 4T \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2(s) \right) ds + 2T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2(s) \right) ds \\
& \qquad \|Au_\alpha(t)\|^2 \leq \\
& 4 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 + 4T \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|f_n\|^2 \right) ds + 2T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|f_n\|^2 \right) ds \\
& \qquad \|Au_\alpha(t)\|^2 \leq \\
& \left[4 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 + \left(4 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 + 2 \right) T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|f_n\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \qquad \|Au_\alpha(t)\|^2 \leq \\
& 2 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(2\alpha \frac{t-T}{T} + \sqrt{2} \right) T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|f_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

D'où $u_\alpha(t) \in D(A)$, $t \in [0, T]$. ■

3.5 Estimation de la solution approchée

Théorème 3.5.1 : Pour tout $g \in H$, $f \in C^1([0, T], H)$, $t \in [0, T]$ et $\alpha > 0$, on a :

$$\|u_\alpha(t)\| \leq 2\alpha \frac{t-T}{T} \|g\| + T \left(2\alpha \frac{t-T}{T} + \sqrt{2} \right) \|f\|$$

Preuve. on note $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$ et $\|g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2$

$$\|u_\alpha(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 + \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& +2 \frac{e^{-\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right) \\
& \|u_\alpha(t)\|^2 \leq \\
& 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n^2 + \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2 \\
& \|u_\alpha(t)\|^2 \leq \\
& 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n^2 + \left(\int_0^T f_n(s) ds \right)^2 \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t f_n(s) ds \right)^2 \\
\|u_\alpha(t)\|^2 & \leq 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \|g\|^2 + 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(T \int_0^T f_n(s) ds \right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(T \int_0^t f_n(s) ds \right)^2 \\
\|u_\alpha(t)\|^2 & \leq 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \|g\|^2 + 4T^2 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \|f\|^2 + 2T^2 \|f\|^2 \\
\|u_\alpha(t)\| & \leq \left[4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \|g\|^2 + \left(4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 + 2 \right) T^2 \|f\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
\|u_\alpha(t)\| & \leq 2\alpha^{\frac{t-T}{T}} \|g\| + T \left(2\alpha^{\frac{t-T}{T}} + \sqrt{2} \right) \|f\|
\end{aligned}$$

■

3.6 Convergence de la solution approchée

Théorème 3.6.1 : Pour tout $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n$ de H , $f \in C^1([0, T], H)$, tel que : $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \varphi_n$ On a $\|u_\alpha(T) - g\|$ tend vers zéro quand α tend vers zéro, ce qui signifie que, $u_\alpha(T)$ converge vers g dans H .

Preuve.

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(T) - g\|^2 & = \left\| S(T) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] + \int_0^T S(T-s) f(s) ds - g \right\|^2 \\
\|u_\alpha(T) - g\|^2 & = \left\| S(T) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] \right. \\
& \quad \left. - (\alpha I + S(T))^{-1} (\alpha I + S(T)) \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] \right\|^2 \\
\|u_\alpha(T) - g\|^2 & = \left\| (\alpha I + S(T))^{-1} (S(T) - (\alpha I + S(T))) \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] \right\|^2
\end{aligned}$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \alpha^2 \left\| (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \right\|^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \left[(\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 \right]$$

Pour un ε fixé, on choisi N_1 et N_2 tels que :

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} g_n^2 < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=N_2}^{\infty} f_n^2 < \frac{\varepsilon}{8T^2}$$

Prenant $N = \max(N_1, N_2)$, on a :

$$\sum_{n=N}^{\infty} g_n^2 < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=N}^{\infty} f_n^2 < \frac{\varepsilon}{8T^2}$$

On a alors,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 < 2 \sum_{n=N}^{\infty} g_n^2 + 2 \sum_{n=N}^{\infty} \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 \quad (3.8)$$

Donc,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 < 2 \sum_{n=N}^{\infty} g_n^2 + 2T \int_0^T \sum_{n=N}^{\infty} f_n^2(s)ds$$

D'où :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi :

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \sum_{n=1}^N \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 < \sum_{n=1}^N \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \left(2g_n^2 + 2 \left(\int_0^T f_n(s)ds \right)^2 \right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 < 2\alpha^2 \sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} g_n^2 + T \int_0^T e^{2\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 < 2\alpha^2 \sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} g_n^2 + T \int_0^T \sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds + \frac{\varepsilon}{2}$$

On note par : $I_N = \int_0^T \sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds$

Soit α tel que :

$$\alpha^2 < \frac{\varepsilon}{4} \left[\sum_{n=1}^N (e^{2\lambda_n T} g_n^2) + T I_N \right]^{-1}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - g\|^2 &< \\ \frac{\varepsilon}{2} \left[\sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} g_n^2 + T I_N \right]^{-1} \left[\sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} g_n^2 + T I_N \right] + \frac{\varepsilon}{2} \\ \|u_\alpha(T) - g\|^2 &< \varepsilon \end{aligned}$$

Le théorème est ainsi démontré. ■

Théorème 3.6.2 : Pour tout $g \in H$, $f \in C^1([0, T], H)$, tels que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2 \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(t)$$

soient convergentes, si le (F.V.P) admet une solution classique alors, la suite $u_\alpha(0)$ converge dans H , de plus, on aura $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$, quand α tend vers zéro uniformément en t .

Preuve. Supposons que, $u(t)$ soit la solution du (F.V.P)

$$u(t) = S(t - T) \left[g - \int_0^T S(T - s) f(s) ds \right] + \int_0^t S(t - s) f(s) ds$$

$$u(0) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)$$

Comme $u(0)$ est dans H , On choisit pour $\varepsilon > 0$, N , tel que :

$$\sum_{n=N}^{\infty} e^{2\lambda_n T} g_n^2 < \frac{\varepsilon}{8} \text{ et } \sum_{n=N}^{\infty} e^{2\lambda_n T} f_n^2 < \frac{\varepsilon}{8T^2}$$

On aura :

$$\sum_{n=N}^{\infty} e^{2\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

et soient α et γ deux réels strictement positifs, alors :

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 = \left\| (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T - s) f(s) ds \right) \right\|^2$$

$$\begin{aligned}
& -(\gamma I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right)^2 \Big\| \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 = \\
& \quad \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} - \frac{1}{\gamma + e^{-\lambda_n T}} \right) \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) \right] \varphi_n \right\|^2 \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 = \\
& \quad \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\gamma - \alpha) (\alpha\gamma + (\alpha + \gamma) e^{-\lambda_n T} + e^{-2\lambda_n T})^{-1} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) \right] \varphi_n \right\|^2 \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 = \\
& \quad \sum_{n=1}^N \left[(\gamma - \alpha)^2 (\alpha\gamma + (\alpha + \gamma) e^{-\lambda_n T} + e^{-2\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] \\
& + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[(\gamma - \alpha)^2 (\alpha\gamma + (\alpha + \gamma) e^{-\lambda_n T} + e^{-2\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq \\
& \quad \sum_{n=1}^N \left[(\gamma - \alpha)^2 e^{4\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] \\
& + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\frac{(\gamma - \alpha)^2}{(\alpha + \gamma)^2} e^{2\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq \\
& \quad (\gamma - \alpha)^2 \sum_{n=1}^N 2e^{4\lambda_n T} \left(g_n^2 + T \int_0^T (f_n(s))^2 ds \right) \Big] + \frac{\varepsilon}{2} \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq \\
& \quad (\gamma - \alpha)^2 \sum_{n=1}^N 2e^{4\lambda_n T} g_n^2 + T \int_0^T \sum_{n=1}^N 2e^{4\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

On note : $I'_N = \int_0^T \sum_{n=1}^N 2e^{4\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds$. Soit σ tel que :

$$\sigma^2 < \frac{\varepsilon}{4} \left[\sum_{n=1}^N e^{4\lambda_n T} g_n^2 + T I'_N \right]^{-1}$$

et $\alpha < \sigma$, $\gamma < \sigma$, d'où $\gamma - \alpha < \sigma$, et donc :

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
& 2\sigma^2 \sum_{n=1}^N e^{4\lambda_n T} (g_n^2 + T I'_N) + \frac{\varepsilon}{2} \\
& \|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq \\
& \frac{\varepsilon}{2} \left[\sum_{n=1}^N e^{4\lambda_n T} (g_n^2 + T I'_N) \right]^{-1} \left[\sum_{n=1}^N e^{4\lambda_n T} (g_n^2 + T I'_N) \right] + \frac{\varepsilon}{2} \\
& \|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

$\{u_\alpha(0)\}$ est donc une suite de Cauchy, donc elle est convergente.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right. \\
&\quad \left. - S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] - \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right\| \\
\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| &= \\
&\quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| S(t)u_0 - S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \right\| \\
\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| &\leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| S(t) \left[u_0 - (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \right] \right\| \\
\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| &\leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| u_0 - (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \right\|
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u_0 - u_\alpha(0)\|$$

qui converge uniformément.

Donc,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha(t) = u(t)$$

■

3.7 Estimation de l'erreur de convergence de la solution du problème approché

Théorème 3.7.1 : Si g est dans H , $f \in C^1([0, T], H)$ et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon \lambda_n T} g_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon \lambda_n T} (f_n(t))^2$$

convergent dans H , alors, $\|u_\alpha(T) - g\|$ converge vers zéro avec l'ordre de $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$.

Preuve. Soit ε dans $]0, 2]$, tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 e^{\varepsilon \lambda_n T} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon \lambda_n T} (f_n(t))^2 \quad \text{soient finies, et soit } k \text{ dans }]0, 2].$$

Pour un nombre naturel fixé n , on définit :

$$h_n(\alpha) = \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \tag{3.9}$$

$$h_n(\alpha) \leq h_n(\alpha_0); \quad \alpha_0 = \frac{k e^{-\lambda_n T}}{2 - k}$$

$$h_n(\alpha) \leq \left(\frac{k}{2 - k} \right)^k \frac{e^{-k \lambda_n T}}{(\alpha_0 + e^{-\lambda_n T})^2} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} & \|u_\alpha(T) - g\|^2 = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \\ & \|u_\alpha(T) - g\|^2 = \\ & \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \\ & \|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq \\ & \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2 - k} \right)^k e^{-k \lambda_n T} \left(\alpha_0^2 + e^{-2 \lambda_n T} + 2 \alpha_0 e^{-\lambda_n T} \right)^{-1} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \\ & \|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2 - k} \right)^k \sum_{n=1}^{\infty} e^{(2-k) \lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Si on choisit $k = 2 - \varepsilon$, on aura :

$$\begin{aligned}
& \|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq \\
& \alpha^\varepsilon \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} \left(2g_n^2 + 2 \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds\right)^2\right) \\
& \|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq \\
& 4\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} \left(2g_n^2 + 2 \left(\int_0^T f_n(s) ds\right)^2\right) \\
& \|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq \\
& 4\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} g_n^2 + 2T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} (f_n(s))^2\right) ds\right] \\
& \|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq \\
& 8\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} g_n^2 + T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} (f_n(s))^2\right) ds\right] \\
& \|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq C\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.7.2 : Si g est dans H , $f \in C^1([0, T], H)$ et S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 e^{(2+\varepsilon)T\lambda_n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(t))^2 e^{(2+\varepsilon)T\lambda_n},$$

convergent dans H , alors, $\|u_\alpha(t) - u(t)\|$ converge vers zéro avec l'ordre de $\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$ uniformément en t .

Preuve.

$$\begin{aligned}
& \|u_\alpha(0) - u(0)\| = \\
& (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s) ds\right) - S(-T) \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s) ds\right] \\
& \|u_\alpha(0) - u(0)\| = \\
& (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s) ds\right) \\
& - S(-T) (\alpha I + S(T)) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s) ds\right] \\
& \|u_\alpha(0) - u(0)\| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) (I - S(-T)(\alpha I + S(T))) \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u(0)\| = \\
& (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) (I - S(-T)(\alpha I + S(T))) \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u(0)\| = \\
& (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) (I - \alpha S(-T) - I) \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u(0)\| = \\
& \quad -\alpha S(-T) (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 = \\
& \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{2\lambda_n T}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f(s)ds \right)^2 \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \\
& \quad \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f(s)ds \right)^2 e^{2\lambda_n T} \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \\
& \quad \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k} \right)^k \sum_{n=1}^{\infty} e^{(2-k)\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 e^{2\lambda_n T}
\end{aligned}$$

Si on choisit $k = 2 - \varepsilon$

$$\begin{aligned}
& \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \\
& \quad \alpha^\varepsilon \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 e^{(2+\varepsilon)\lambda_n T}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
& \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \\
& \quad \alpha^\varepsilon \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^2 \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 e^{(2+\varepsilon)\lambda_n T} + 2T \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(s))^2 e^{(2+\varepsilon)\lambda_n T} ds \right] \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \\
& \quad \alpha^\varepsilon \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^2 \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 e^{(2+\varepsilon)\lambda_n T} + 2T \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(s))^2 e^{(2+\varepsilon)\lambda_n T} ds \right] \\
& \quad \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq C \alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_\alpha(t) - u(t) = \\
& S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) - S(t-T) \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \\
& u_\alpha(t) - u(t) = \\
& S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \\
& - S(t-T)(\alpha I + S(T))(\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \\
& u_\alpha(t) - u(t) = (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) (S(t) - \alpha S(t-T) - S(t)) \\
& u_\alpha(t) - u(t) = -\alpha S(t-T) (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \\
& \|u_\alpha(t) - u(t)\| = \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{2\lambda_n(T-t)}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 \\
& \|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 \leq \\
& \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k} \right)^k \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 e^{(4-k)\lambda_n T}
\end{aligned}$$

Posant $k = 2 - \varepsilon$, et procédant de la même manière que pour $u_\alpha(t) - u(t)$, on trouve :

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 = C\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$$

■

Application

On utilise la méthode des quasi-valeurs aux limites (quasi-boundary value method).
On considère le problème suivant, qui consiste à trouver $u : [0, T] \rightarrow H$ telle que :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f & 0 < t < T \\ u(T) = g \end{cases} \quad (\text{F.V.B}) \quad (3.12)$$

Où $f \in C^1([0, T], H)$ et $g \in H$ sont deux fonctions données.

La solution du (F.V.P) s'écrit sous la forme suivante :

$$u(t) = S(t - T) \left(g - \int_0^T S(T - s) f(s) ds \right) + \int_0^t S(t - s) f(s) ds$$

Et on considère le problème approché suivant :

$$\begin{cases} u' + Au = f & 0 \leq t \leq T \\ \alpha u(0) + u(T) = g \end{cases} \quad (\text{Q.B.V.P})$$

Pour tout g de H , $\alpha > 0$; $f \in C^1([0, T], H)$, on définit

$u_\alpha : [0, T] \rightarrow H$, est la solution du problème approché tel que :

$$u_\alpha(t) = S(t) (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T - s) f(s) ds \right] + \int_0^t S(t - s) f(s) ds$$

En considérant l'équation de la chaleur, et prenant $T = 1$, $g = 25$, $f = \sin(t\pi^2)$, $S(t) = e^{-t\pi^2}$ si nous choisissons $n = 11$.

Avec matlab on retrouve les tableaux suivant avec figures.

Cas 1 : $\alpha = 0.01$

temps	$u(t)$	$u_\alpha(t)$	différence
0	4.8278e+005	2.4842e+003	4.8029e+005
0.1	1.7993e+005	0.9259e+003	1.7901e+005
0.2	0.6706e+005	0.3451e+003	0.6672e+005
0.3	0.2499e+005	0.2095e+003	0.2487e+005
0.4	0.0932e+005	0.1287e+003	0.0927e+005
0.5	0.0347e+005	0.0480e+003	0.0345e+005
0.6	0.0129e+005	0.0068e+003	0.0129e+005
0.7	0.0048e+005	0.0026e+003	0.0048e+005
0.8	0.0018e+005	0.0010e+003	0.0018e+005
0.9	0.0007e+005	0.0004e+003	0.0007e+005
1	0.0003e+005	0.0002e+003	0.0002e+005

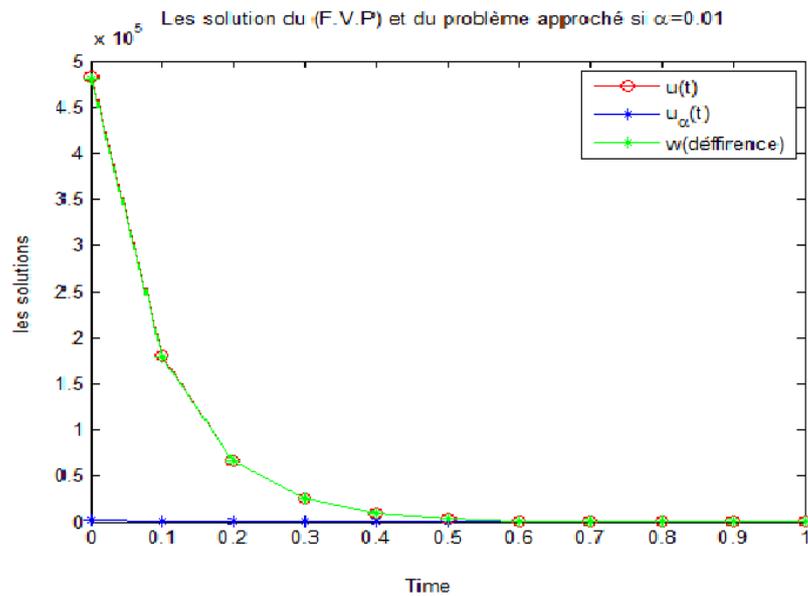


FIGURE 3.1

Cas 2 : $\alpha = 0.001$

temps	$u(t)$	$u_\alpha(t)$	différence
0	4.8278e+005	2.3743e+004	4.5903e+005
0.1	1.7993e+005	0.8849e+004	1.7109e+005
0.2	0.6706e+005	0.3298e+004	0.6376e+005
0.3	0.2499e+005	0.1229e+004	0.2377e+005
0.4	0.0932e+005	0.0458e+004	0.0886e+005
0.5	0.0347e+005	0.0171e+004	0.0330e+005
0.6	0.0129e+005	0.0064e+004	0.0123e+005
0.7	0.0048e+005	0.0024e+004	0.0046e+005
0.8	0.0018e+005	0.0009e+004	0.0017e+005
0.9	0.0007e+005	0.0003e+004	0.0006e+005
1	0.0003e+005	0.0001e+004	0.0002e+005

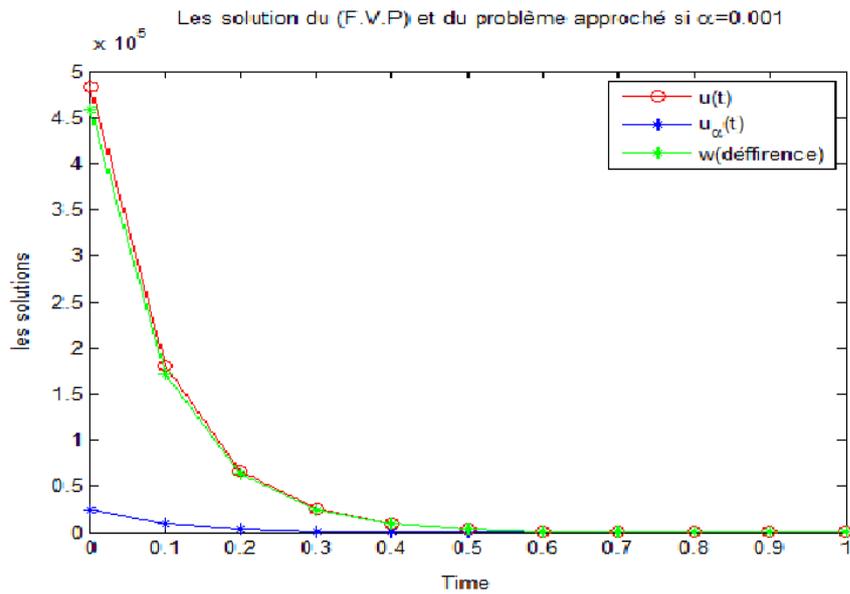


FIGURE 3.2

Cas 3 : $\alpha = 0.0001$

temps	$u(t)$	$u_\alpha(t)$	différence
0	4.8278e+005	1.6458e+005	3.1820e+005
0.1	1.7993e+005	0.6134e+005	1.1859e+005
0.2	0.6706e+005	0.2286e+005	0.4420e+005
0.3	0.2499e+005	0.0852e+005	0.1647e+005
0.4	0.0932e+005	0.0318e+005	0.0614e+005
0.5	0.0347e+005	0.0118e+005	0.0229e+005
0.6	0.0129e+005	0.0044e+005	0.0085e+005
0.7	0.0048e+005	0.0016e+005	0.0032e+005
0.8	0.0018e+005	0.0006e+005	0.0012e+005
0.9	0.0007e+005	0.0002e+005	0.0004e+005
1	0.0003e+005	0.0001e+005	0.0002e+005

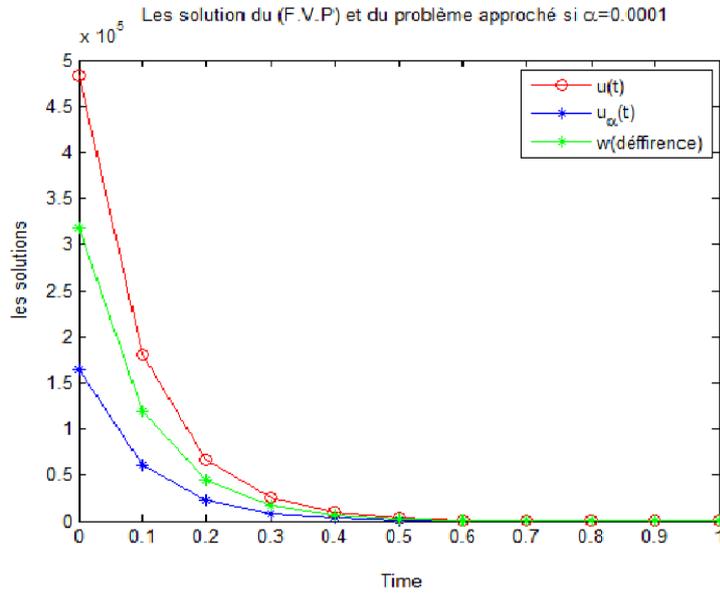


FIGURE 3.3

Cas 4 : $\alpha = 0.00001$

temps	$u(t)$	$u_\alpha(t)$	différence
0	4.8278e+005	4.0456e+005	7.8216e+004
0.1	1.7993e+005	1.5078e+005	2.9152e+004
0.2	0.6706e+005	0.5620e+005	1.0865e+004
0.3	0.2499e+005	0.2095e+005	0.4050e+004
0.4	0.0932e+005	0.0781e+005	0.1509e+004
0.5	0.0347e+005	0.0291e+005	0.0563e+004
0.6	0.0129e+005	0.0108e+005	0.0210e+004
0.7	0.0048e+005	0.0040e+005	0.0078e+004
0.8	0.0018e+005	0.0015e+005	0.0029e+004
0.9	0.0007e+005	0.0007e+005	0.0011e+004
1	0.0003e+005	0.0002e+005	0.0004e+004

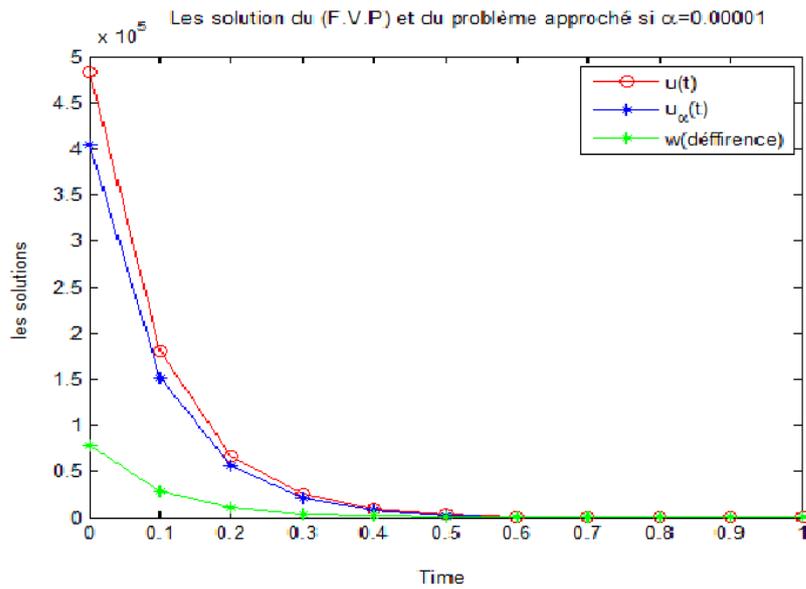


FIGURE 3.4

Conclusion générale

Les résultats numériques et graphiques confirment l'efficacité de la méthode des quasi-valeurs aux limites (quasi-boundary value method) pour une certaine classe de problèmes mal posés ce qui permettrait son utilisation dans beaucoup de domaines.

Bibliographie

- [1] A. Kirsch, An introduction to the mathematical theory of inverse problems, Springer-Verlag, New-York, 1996.
- [2] A. N. Tikhonov et V. Arsenine, Solution of ill-posed problems, Winston, New-York, 1977.
- [3] A. N. Tikhonov, A. V. GONCHARSKY, V.V. STEPANOV , A.G. YAGOLA, Numerical methods for the solution of ill-posed problems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [4] A. N. TIKHONOV, On the stability of inverse problems, Dokl. Akad. Nauk SSSR39, N°5, 195-198, 1943.
- [5] A. N. TIKHONO, V. ARSÉNINE, A. A. DOUMOVA, L. V. MAÏOROV, V. I. MOSTOVOI, Une méthode nouvelle de reconstitution de spectre vrais (en russe). Energie atomique, 18, 6, 1965.
- [6] A. N. TIKHONOV, V. V. ALIKAIEV, V. IA.ARSÉNINE V, A. A. DOUMOVA, Détermination de la fonction de répartition des électrons du plasma d'après le spectre du rayonnement de freinage (en russe). Journal de physique expérimentale et théorique, 55, 5, 1968.
- [7] A.N.Tikhonov, V. Ya. Arsenin, Solutions of Ill-Posed Problems, Halsted Press, Washington-Winston-New York (1977).
- [8] A. Oleinik, solution discontinues des équations aux dérivées partielles non linéaires, Ouspechi Mat.Nauk, 12, pp3-73., 1957.
- [9] A. Oleinik, A problem of Fichera, Doklady Akad.Nauk, vol.157, pp1297-1301, 1964.
- [10] Ben Abdallah, J. Inversion gaussienne appliquée à la correction paramétrique de modèles structuraux. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, France (1995).
- [11] B. M. C. HETRICK, R. J. HUGHES, Continious dependence results for inhomogenous ill-posed problems in Banach space, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 331, Issue1, pp342-357, 2007 .

- [12] Bonnet, M., Bui, H. D., Maigre, H., Planchard, J. Identification of heat conduction coefficient : application to nondestructive testing. In H. D. Bui M. Tanaka (ed.), IU-TAM symposium on inverse problems in engineering mechanics, pp. 475–488. Springer-Verlag (1993).
- [13] Bonnet, M., Maigre, H., Manaa, M. Numerical reconstruction of interfacial defects and interface thermal resistances using thermal measurements. In D. Balageas (ed.), Quantitative Infrared Thermography (QIRT 92), pp. 266-271. Editions Européennes Thermique et Industrie (1992). Congrès QIRT 92, 7-9 juillet 1992, Paris).
- [14] Clement Berger. Topologie pour la licence cours et exercices. 24 jare la dérivée calculée de cette manière.
- [15] Colin Daly, Régularisation et krigeage pour les problèmes mal posé une application au problème de poissonisation, ENSMP centre de géostatistique 35 rue St-Honoré 77305 Fontainebleau ,France.
- [16] Dang Duc TRONG, Nguyen Huy TUAN, Stabilised quasi-reversibility method for a class of nonlinear ill-posed problems. Electronic journal of differential equations, N°84, pp1-12. ISSN : 1072-6691. 2008.
- [17] Daniel Lignon, Méthodes numériques et Géométrie, Françoise MAZAT-GASTARRIET Jean-Louis POSS, Version 2.03, Mars 2002.
- [18] D. Huet, Phénomène de perturbation singulière dans les problèmes aux limites, Anales inst.Fourier, pp.1-96, 1960.
- [19] Dongarra, J. J., Bunch, J. R., Moler, C. B., Stewart, G. B. Linpack users'guide. SIAM, Philadelphia (1979).
- [20] Fletcher, R. Practical Methods of Optimization. John Wiley and sons (1987).
- [21] Fogel, D. B. Evolutionary computation : towards a new philosophy of machine intelligence. IEEE Press (1995).
- [22] Francis Hirsch, Gilles Lacombe. Eléments D'analyse Fonctionnelle. Dunod, paris 1999-2009.
- [23] G. W. Clark and S. F. Oppenheimer. Qusi-reversibility methods for non well-posed problems, Electronique Journal of Differential Equations, no. 8, pp.1-9, 1994.
- [24] Hadamard, J., Lectures on Cauchy's Problem in linear Partial Differential Equations. Yale University Press. 1923.
- [25] Hadamard, J., Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique, Bull. Un. V. Princeton, V.B. 1902.
- [26] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

- [27] H. Engl and A. Neubauer. Optimal discrepancy principles for the Tikhonov regularization of integral equations of the first kind. In G. Hämmerlin and K. H. Hoffmann, editors, *Constructive Methods for the Practical Treatment of Integral Equations*, volume ISNM 73, pages 120-141, Basel, 1985. Birkhäuser Verlag.
- [28] H. Engl. Discrepancy principles for Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. *J. Optim. Theory Appl.*, 52 : 209-215. 1987.
- [29] H. Gfrerer. An a posteriori parameter choice for ordinary and iterated Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. *Math. Comput.*, 49 : 507-522, 1987.
- [30] Jean-Pierre Raymond. *Equations d'évolution*. Université Paul Sabatier. Résumé de la première partie du cours du module A0 du DEA de Mathématiques Appliquées.
- [31] J. DOUGLAS, A numerical method for analytic continuation. *Boundary Problems, Different. Equat.*, Univ. Wisconsin Press, Madison, 1960.
- [32] J. DOUGLAS, Approximate continuation of harmonic and parabolic functions. *Numer. Sol. of Partial Different. Equat.*, Birkhauser, 1960.
- [33] J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Dover. New-York, MR14 :474f. 1952.
- [34] J. HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Paris, Hermann. 1932.
- [35] J. HADAMARD, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. *Bull. Univ. Princeton*, 13, 1902.
- [36] J. Kohn, L. Nirenberg, Non coercive boundary value problems. *Comm. Pure Applied Maths*, vol. XVIII, pp, 446-492, 1965.
- [37] J. L. Lions, *Cours C.I.M.E.*, Varenna, mai 1963.
- [38] J. L. Lions, *Sur l'approximation des solutions de certains problèmes aux limites*. *Rend. Sem. Padova*, vol. XXXII, pp. 3-54, 1962.
- [39] J. VON. Neumann, R. Richtmyer, A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks, *J. Appl. Phys.*, vol.21, p.232. 1950.
- [40] K. AMES, G. W. CLARK, J. F. EPPERSON, and S.F. OPPENHEIMER, A comparison of regularisations for an ill-posed problem. *Mathematics of computation*. v.67, N°224, pp. 1451-1471, 1998.
- [41] K. Kunisch, W. Ring, Regularization of nonlinear ill-posed problems with closed operators, *Numer. Funct. Anal. and optimiz.* 14, 389404, 1993.
- [42] K. O. Friedrichs, *Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 616, pp. 485-504, 1955.

- [43] K. Miller, Stabilized quasi-reversibility and other nearly best possible methods for non-well posed problems, Symposium on non-well posed problems and logarithmic convexity, Lecture notes in mathematics, 316, Springer Verlag, Berlin, 161-176, 1973.
- [44] Kress, R., Zinn, A. Three dimensional reconstructions from near-field data in obstacle scattering. In M. Yamaguti, et al. (eds.), Inverse problems in engineering sciences. Springer-Verlag (1991). (ICM 90 Satellite Conference Proceedings).
- [45] Marc Bonnet, PROBLÈMES INVERSES, Master recherche Ecole Centrale de Paris Mention Matière, Structures, Fluides, Rayonnement Spécialité Dynamique des Structures et Systèmes Couplés octobre 2008.
- [46] M. DENCHE, and S. DJEZZAR, A modied quasi-boundary value method for a class of abstract parabolic ill-posed problems. Boundary value problems, article ID37524, pp.1-8, 2006
- [47] M. DENCHE, K. BESSILA, A modied quasi-boundary value method for ill-posed problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, N°2, 419-426, 301, 2005
- [48] Nawfal El Hassan. Topologie générale et espace normés. Dunod 2011.
- [49] O. PROT. Méthode de régularisation antropique et application au calcul de la fonction de distribution des ondes. Thèse, Orleans, 2005.
- [50] P. D. Lax, B. Wendroff, on the stability of difference schemes with variable coefficients. comm. Pure Applied math., 14, pp. 497-520. 1961.
- [51] P. S. Novicov, Sur lunicité inverse de la théorie du potentiel (en russe). Rapports de lacaémie des sciences de IU .R.S.S, 18, 3, 1938.
- [52] R. Courant, Variational methods for the solutions of problems of equilibrium and vibrations, Bull. Amer. Math. Soc, 49, pp. 1-23, 1943.
- [53] R. E. Showalter, Cauchy problem for hyper-parapolic partial differential equations, Trends in the theory and practice of non-linear analysis Elsevier. 1983.
- [54] R. E. Showalter, the final value problem for evolution equation, J.Math. Anal.Appl. 563-572, 1974.
- [55] Richard Zekri, Master M1, Année 2009-2010.
- [56] R. LATTÉS, J. L. LIONS, Méthode de quasi-réversibilité et applications. DUNOD. Paris. 1967.
- [57] Schoenauer, M., Jouve, F., Kallel, L. Identification of mechanical inclusions. In Z. Michalewicz D. Dasgupta (ed.), Evolutionary computation in engineering., pp. 477-494. Springer-Verlag (1997).

- [58] S. DJEZZAR, A regularisation method for an abstract backward Cauchy problem. Proceedings of the Third International Conference on Mathematical Sciences-ICM2008, pp1116-1125.
- [59] Simon, J. Second variations for domain optimization problems. In F. Kappel, K. Kunisch, W. Schappacher (eds.), Control theory of distributed parameter systems and applications., vol. 91 of International Series of Numerical Mathematics, pp. 361-378. Birkhäuser Verlag, Basel (1989).
- [60] T. F. DOLGOPOLAVA Régularisation de dimensionnie appliquée à la différentiation numérique des fonctions périodiques (en russe). Anales mathématiques de l'université d'Oural, 7, 4, 1970
- [61] V. A. Morozov. Methods for Solving Incorrectly Posed problems. Springer-Verlag New-York, 1984.
- [62] V. IVANOV, T. I. KOROLIUK. Sur un problème de prolongement analytique numérique des fonctions harmoniques (en russe). Anales Mathématiques de l'Université d'Oural, 5, 4, 1966.
- [63] W.H. Press, S.A. Teutolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, Numerical recipes, Cambridge University Press, 1986.

Résumé

On considère la méthode « quasi-valeurs aux limites » pour régulariser un problème parabolique non homogène donné par :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f & 0 < t < T \\ u(T) = g & (F.V.B) \end{cases}$$

Avec A un opérateur auto-adjoint positif. Ce problème est mal posé, la donnée finale est perturbée pour former une famille de problèmes dépendant d'un petit paramètre α .

On montre que le problème approché est bien posé et que la solution u_α converge dans $[0, T]$ si le problème initial admet une solution classique. On obtient aussi une estimation de la solution du problème approché, ainsi que la convergence de la solution approchée et l'estimation de l'erreur de convergence.

Ce travail est couronné par une application numérique.

Mots clés : *problème mal posé, semi-groupes, opérateur auto adjoint, quasi-réversibilité, méthode des quasi-valeurs aux limites.*

Abstract

We consider a “quasi-boundary value” method regularization of the non-homogeneous parabolic problem given by:

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f & 0 < t < T \\ u(T) = g & (F.V.B) \end{cases}$$

With unbounded positive self-adjoint operator A , which is known to be ill-posed, we perturb the final condition to form an approximate problem depending on a small parameter α .

We show that the approximate problem is well posed and that its solution u_α converges on $[0, T]$ if and only if the original problem has a classical solution. We also obtain an estimate solution of the approximate problem, as well as the convergence of approximate solutions and estimate convergence error.

This work is crowned by a numerical application.

Keywords: *ill-posed problem, semi –groups, self-adjoint operator, quasi- reversibility, quasi-boundary value method.*

ملخص

نعتبر "قيم الشبه حدية" للمسائل الغير متجانسة التي تعطى على الشكل التالي:

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f & 0 < t < T \\ u(T) = g & (F.V.B) \end{cases}$$

هذه المسائل سيئة الطرح. بحيث نحدث دبدبة في المعطيات النهائية من أجل تشكيل صنف من

المسائل اعتمادا على قيمة صغيرة ل α .

و نبرهن أن المسألة التقريبية جيدة الطرح وأن الحل u_α يتقارب في المجال $[0, T]$ إذا كان المسألة لابتدائية تقبل حل كلاسيكي, ونحصل على تقدير و تقارب حلول المسألة التقريبية و تقدير خطأ التقارب. و في الأخير توج هذا العمل بتطبيق عددي.

الكلمات المفتاحية:

المسألة سيئة الطرح, نصف زمرة, معامل المنطوق الذاتي, شبه عكسية, قيم الشبه حدية.