الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie — Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master

En: - Filière mathématiques fondamentales

- spécialité mathématiques fondamentales et appliquées

Le comportement des solutions de certains systèmes des équations aux différences non linéaires

Préparé par : Bouzerara Meriem

Bousbaa Warda

Soutenue devant le jury..

- Président :	Arroud Chems Eddine	MAA	C. U. de Mila
- Examinateur :	Touafek Nouressadat	MCA	Université de Jijel
- Promoteur :	Halim Yacine	MAA	C. U. de Mila

Année universitaire : 2013/2014

REMERCIMENTS

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, et la patiencequ'il nous a donnée pour terminer ce mémoire.

*Nous remercions vivement Monsieur **Halim Yacine** d'avoir voulu proposer et assurer la direction de ce mémoire, sa disponibilité, son soutien, sesencouragements et ses précieux conseils tout au long de ce travail.*

*Nous adressons également nos vifsres remerciements à monsieur **Touafek Nouressadat** et monsieur **Arroud Chems Eddine** les membres de jury qui ont bien voulu et accepter d'examiner ce modeste travail.*

Nous adressons, également, mes remerciements Chaleureux aux membres de l'institut des sciences et de de la technologie et à tous ceux qui ont pris part près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Meriem et Warda

DIDICACE

En guise de remerciement et en termes de gratitude, je dédie ce modeste travail, Aux personnages les plus chers du monde et les plus chers à mon coeur, qui ont été si généreux, si patients, si noble avec moi pendant mes années d'étude.

A mon père ***Abdlhadie*** *source de force et de courage, qui n'a jamais cesse de Donner de sa sympathie et son éducation. A l'exemple de ma vie ma mère* ***Khadidja*** *qui toujour présent à mes coté, avec sa tendresse et son amour.*

A mes frères : ***Souhul Mohamed Hemza Adel Chihab Eddine*** *et* ***Saife Eddine***

*A mes soeurs :****Yasmina Fariza*** **et** ***Loubena****.*

A toutes mes tantes et tous mes oncles, a mes cousines et mes cousins et mes amies.

A mon binôme ***Warda*** *qui je la souhaite une vie plaine de joie et de prospérité.*

A tous qui occupe une place dans ma vie, dans mon coeur et sur tout aux étudiants de master deux mathématiques appliqués et fondamentales.

Meriem

DIDICACE

En guise de remerciement et en termes de gratitude, je dédie ce modeste travail, Aux personnages les plus chers du monde et les plus chers à mon coeur, qui ont été si généreux, si patients, si noble avec moi pendant mes années d'étude.

*A mon père **Ammar** source de force et de courage, qui n'a jamais cesse de Donner de sa sympathie et son éducation. A l'exemple de ma vie ma mère **Dahbia** qui toujour présent à mes coté, avec sa tendresse et son amour.*

*A mes frères : **Yacine Samir** et **Halim***

*A mes soeurs : **Mona*** **et** ***Lamia**.*

A toutes mes tantes et tous mes oncles, a mes cousines et mes cousins et mes amies.

*A mon binôme **Meriem** qui je la souhaite une vie plaine de joie et de prospérité.*

A tous qui occupe une place dans ma vie, dans mon coeur et sur tout aux étudiants de master deux mathématiques appliqués et fondamentales.

Warda

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les équations aux différences sont à la base de l'analyse appliquée depuis L.Euler, P.L.Tchebycheff et A.A.Markov. Actuellement, elles sont le support de nombreux algorithmes d'analyse numérique et omniprésentes en combinatoire.

La théorie des équations aux différences est les systèmes des équations aux différences est intéressante et il est facile de voir qu'elle va jouer un plus grand rôle dans un avenir proche. De plus, il y a une forte augmentation des applications de la théorie des équations aux différences à divers domaines tels que l'analyse numérique, la théorie du contrôle, les mathématiques et l'informatique finie. Ainsi, il y a toutes les raisons d'étudier la théorie des équations aux différences comme une discipline à part entier sont réunies.

Les équations aux différences est les systèmes des équations aux différences apparaissent comme des phénomènes naturels descriptions évolution observée parce que la plupart des mesures de l'évolution des variables temporelles sont discrètes et, comme tels, ces équations sont dans leur propre droit important des modèles mathématiques. Plus important encore, les équations aux différences est les systèmes des équations aux différences apparaissent également dans l'étude des méthodes de discrétisation des équations différentielles. Plusieurs résultats de la théorie des systèmes des équations aux différences ont été obtenues comme plus ou moins naturel analogues discrets de résultats correspondant des systèmes différentielles. Cela est particulièrement vrai dans le cas de la théorie de Lyapunov de la stabilité.

Des exemples de phénomène discret dans la nature abondent et pourtant sa version continue a réquisitionné toute notre attention peut-être due à ce mécanisme spécial dans la nature humaine qui nous permet de constater que ce que nous avons été conditionnés à. Bien les équations aux différences se manifestent comme des modèles mathématiques décrivant des situations de vie réelle dans la théorie des probabilités, les problèmes de files d'attente, des problèmes statistiques, séries temporelles stochastiques, analyse combinatoire, la théorie des nombres, géométrie, réseaux électriques, les quanta de rayonnement, de la génétique en biologie, économie, psychologie, sociologie, etc.

Ce mémoire est réparti sur l'introduction générale et trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons donnés des définitions et résultats généraux sur les équations aux différences linéaires et non linéaires.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse aux systèmes des équations aux différences linéaires. Dans la première partie on présente l'essentiel des systèmes autonomes. Finalement, nous étudions les systèmes non autonomes.

Dans le dernier chapitre, on s'est intéressé de la détermination de la solution des systèmes des équations aux différences non linéaires suivants :

$$x(n+1) = \frac{u(n)}{1+v(n)}, y(n+1) = \frac{w(n)}{1+s(n)},$$
$$x(n+1) = \frac{1+v(n)}{u(n)}, y(n+1) = \frac{1+s(n)}{w(n)}.$$

avec $u(n), v(n), w(n), s(n) \in \{x(n), y(n)\}$, où les conditions initiales $x(0), y(0)$ sont des nombres réels non nuls.

CHAPITRE 1

EQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques définitions de base et des résultats généraux qui sont utilisés au long du travail. Dans la première partie, nous intéressons aux équations aux différences linéaires homogènes et non-homogènes dans le cas des coéfficients constants. Dans la dernière partie, on s'intéresse aux équations aux différences non linéaires. En prend dans tout la suite que $\mathbb{N}_{n_0}^{+}$ désigne l'ensemble des nombres $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie sur $\mathbb{N}_{n_0}^{+}$.

1.1 Equations aux différences linéaires

1.1.1 Définitions et résultats généraux

Définition 1.1.1 *Une équation de la forme*

$$y(n+k) + p_1(n)\, y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)\, y(n) = g(n) \tag{1.1}$$

avec, $p_0(n) = 1$, $p_1(n)$, $p_2(n)$,$\cdots$, $g(n)$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}^+_{n_0}$, s'appelle équation aux différences linéaire d'ordre k dés que $p_k(n) \neq 0$. Avec les conditions initiales

$$y(n_0) = c_1,\ y(n_0+1) = c_2, \cdots,\ y(n_0+k-1) = c_k \tag{1.2}$$

où les c_i, $i = 1,\cdots,k$ sont des constantes réelles ou complexes.

Exemple 1.1.1 1.*L'équation suivante est une équation aux différence linéaire d'ordre* 2

$$y(n+2) - \frac{n}{n+2}y(n+1) + y(n) = 3n \tag{1.3}$$

avec les conditions initiales

$$y(1) = 1,\ y(2) = 0.$$

Les conditions précédentes permettent de trouver les valeurs de $y(3)$, $y(4)$,...

2. *L'équation*

$$3n^2y(n+1) - \ln(n)y(n) = \exp(n).$$

est une équation aux différences linéaire d'ordre 1.

3. *L'équation*

$$y(n+3) - \frac{y(n+2)}{2y(n+1)} - y^2(n) = n^2.$$

est une équation aux différences non linéaire.

Théorème 1.1.1 *[4] L'équation(1.1)avec les conditions initiales (1.2) admet une et une seul solution.*

Dans la suite on note par $y(n, n_0, c)$ la solution de l'équation (1.1) tel que

$$y(n_0 + j, n_0, c) = c_{j+1},\ \ j = 0, 1, \cdots, k-1$$

avec

$$c = (c_1, c_2, \cdots, c_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Définition 1.1.2 *L'équation (1.1) est dite homogène si $g(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^+_{n_0}$.*

Soit l'opérateur L définie par

$$\begin{aligned} L \ : \ \mathbb{R} &\to \ \mathbb{R} \\ y(n) \mapsto Ly(n) &= \sum_{i=0}^{k} p_i(n) y(n+k-i). \end{aligned}$$

L'équation (1.1) prend la forme

$$Ly(n) = g(n) \tag{1.4}$$

et l'équation homogène sera

$$L\ y(n) = 0. \tag{1.5}$$

Il est clair que L est linéaire sur $\mathbb{R}$.

Notons l'espace des solutions de l'équation (1.5) par S. En vertu de la linéarité de L on a le résultat suivant :

Lemme 1.1.1 *Toute combinaison linéaire des éléments de S reste dans S.*

i.e., si $y_1(n), \cdots, y_k(n)$ sont des solutions de l'équation homogène (1.5), alors

$$\begin{aligned} y(n) &= a_1 y_1(n) + \cdots + a_k y_k(n) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i y_i(n),\ a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est aussi une solution de l'équation (1.5).

Preuve. Soient $y_1(n), \cdots, y_k(n)$ sont des solutions de l'équation (1.5), alors

$$Ly_1 = 0,\ Ly_2 = 0, \cdots,\ Ly_k = 0$$

et comme L est un opérateur linéaire alors

$$\begin{aligned} L(a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ky_k) &= a_1Ly_1 + a_2Ly_2 + \cdots + a_kLy_k \\ &= 0,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, k \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y(n) &= a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ky_k \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_iy_i,\ a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est une solution de l'équation (1.5). Donc, toute combinaison linéaire des éléments de S reste dans S. ■

Lemme 1.1.2 *Soit $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$. Alors toute solution $y(n, n_0, c)$ de l'équation (1.5) avec ces conditions initiales, s'écrit comme combinaison linéaire des solutions $y(n, n_0, E_i)$, avec $y(n, n_0, E_1)$,..., $y(n, n_0, E_k)$ solutions de l'équation (1.5) et $E_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$,... , $E_k = (0, 0, 0, \ldots, 1)$.*

Preuve. *Soit $y(n, n_0, c)$ une solution de l'équation (1.5) avec les conditions initiales $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$. Alors par le lemme (1.1.1)*

$$z(n) = \sum_{i=1}^{k} c_iy(n, n_0, E_i)$$

est une solution de l'équation (1.5) qui satisfait les mêmes conditions initiales. En effet pour

$n = n_0$,

$$z(n_0) = \sum_{i=1}^{k} c_i y(n_0, n_0, E_i)$$

en utilisant l'égalité

$$y(n_0 + j, n_0, E_i) = E_i^{j+1},\ j = 0, \ldots, k-1$$

on obtient que

$$z(n_0) = c_1,\ z(n_0+1) = c_2, \ldots,\ z(n_0+k-1) = c_k.$$

Ainsi par le théorème (1.1.1), les deux solutions $z(n)$ *et* $y(n, n_0, c)$ *coincident. Donc,* $y(n, n_0, c) = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i y(n_0, n_0, E_i)$.

Définition 1.1.3 *Soit* f_i, *k fonctions définies sur* $\mathbb{N}_{n_0}^{+}$, *on définit la matrice* $K(n)$ *(Matrice de Casorati) par :*

$$K(n) = \begin{pmatrix} f_1(n) & f_2(n) & \cdots & f_k(n) \\ f_1(n+1) & f_2(n+1) & \cdots & f_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(n+k-1) & f_2(n+k-1) & \cdots & f_k(n+k-1) \end{pmatrix}$$

Définition 1.1.4 *Les fonctions* $f_1(n)$, $f_2(n)$,..., $f_k(n)$ *sont linéaires dépendants pour* $n \geq n_0$ *si existe des constants* a_1, a_2, ..., a_k *non nuls tels que*

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \cdots + a_k f_k(n) = 0,\ n \geq n_0.$$

On dit que la famille des fonctions $\{f_i(n)\}_{i=1}^{k}$, *sont linéairement indépendantes si pour tout* $n \in \mathbb{N}_{n_0}^{+}$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, f_i(n) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_i \; = 0, \, i = 1, 2, \ldots, k. \; \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

■

Théorème 1.1.2 *Une condition suffisante pour que* $\{f_i(n)\}_{i=1}^{k}$ *soient linéairement indépendantes, est qu'il existe* $\check{n} \geq n_0$ *tel que*

$$\det \; K(\check{n}) \neq 0.$$

Preuve. *Supposons que*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \, f_i(n) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \, f_i(n+1) = 0 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \, f_i(n+k-1) = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$K(n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = 0$$

ainsi, s'il existe un $n = \check{n}$ *tel que*

$$\det \; K(\check{n}) \neq 0$$

alors

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc les $\{f_i(n)\}_{i=1}^{k}$ *soient linéairement indépendantes.*

Lemme 1.1.3 *[2](Lemme d'Abel) Soient* $y_1(n), \ldots, y_k(n)$ *sont des solutions de l'équation homogène (1.5), et soit* $K(n)$ *leur matrice de Casorati alors, pour tout* $n \geq n_0$

$$\det\ K(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) \det\ K(n_0).$$

Théorème 1.1.3 *Si* $\{f_i(n)\}_{i=1}^{k}$ *sont des solutions de l'équation (1.5) tel que*

$$\det\ K(n_0) \neq 0$$

alors

$$\det K(n) \neq 0,\ \forall n \geq n_0.$$

■

Preuve. *D'après la définition de la matrice de Casorati, on a*

$$\det K(n_0+1) = \det \begin{pmatrix} f_1(n_0+1) & f_2(n_0+1) & \cdots & f_k\,(n_0+1) \\ f_1(n_0+2) & f_2(n_0+2) & \cdots & f_k(n_0+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(n_0+k) & f_2(n_0+k) & \cdots & f_k(n_0+k) \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes sont des solutions, on peut écrire

$$f_i(n_0 + k),\ i = 1, \ldots, k$$

comme combinaison linéaire des

$$f_j(n_0 + k - j),\ j = 1, \ldots, k,$$

ainsi on obtient

$$\det K(n_0 + 1) = (-1)^k p_k(n_0) \det K(n_0) \neq 0,$$

car

$$\det K(n_0) \neq 0 \textit{ et } p_k(n_0) \neq 0,$$

donc

$$\det K(n_0 + 1) \neq 0.$$

En général, pour tout $n \in \mathbb{N}^+_{n_0}$

$$\det K(n + 1) = (-1)^k p_k(n) \det K(n)$$

et par récurrence

$$\det K(n) \neq 0.$$

Remarque 1.1.4 *Voici la démonstration si $k = 2$*

$$\begin{aligned}\det K(n_0+1) &= \det\begin{pmatrix} f_1(n_0+1) & f_2(n_0+1) \\ f_1(n_0+2) & f_2(n_0+2) \end{pmatrix} \\ &= f_1(n_0+1)f_2(n_0+2) - f_1(n_0+2)f_2(n_0+1)\end{aligned}$$

mais

$$f_1(n_0+2) = -p_1(n_0)f_1(n_0+1) - p_2(n_0)f_1(n_0)$$

$$f_2(n_0+2) = -p_1(n_0)f_2(n_0+1) - p_2(n_0)f_2(n_0)$$

ce qui donne

$$\det K(n_0+1) = p_2(n_0)\left[f_1(n_0)f_2(n_0+1) - f_2(n_0)f_1(n_0+1)\right]$$

i.e.,

$$\begin{aligned}\det K(n_0+1) &= \det\begin{pmatrix} f_1(n_0) & f_2(n_0) \\ f_1(n_0+1) & f_2(n_0+1) \end{pmatrix} \\ &= p_2(n_0)\det K(n_0) \\ &= (-1)^2\, p_2(n_0)\det K(n_0).\end{aligned}$$

Corollaire 1.1.1 *Les solutions $y(n, n_0, E_i)$, $i = 1,\ldots, k$ sont linéairement indépendantes.*

■

Preuve. *Comme $y(n, n_0, E_i)$ sont des solutions de l'équation (1.5) on a :*

$$K(n_0) = \begin{pmatrix} y(n_0, n_0, E_1) & y(n_0, n_0, E_2) & \cdots & y(n_0, n_0, E_k) \\ y(n_0+1, n_0, E_1) & y(n_0+1, n_0, E_2) & \cdots & y(n_0+1, n_0, E_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(n_0+k-1, n_0, E_1) & y(n_0+k-1, n_0, E_2) & \cdots & y(n_0+k-1, n_0, E_k) \end{pmatrix}$$

En utilisant l'égalité

$$y(n_0 + j, n_0, E_i) \; = E_i^{j+1}, \; j = 0, \ldots, k-1$$

on obtient

$$K(n_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\det K(n_0) = 1 \neq 0.$$

Alors $y(n, n_0, E_i)$, $i = 1, \cdots, k$ sont linéairement indépendantes, et $\{y(n, n_0, E_i)\}_{i=1}^{k}$ s'appelle la base canonique de l'espace des solutions S.

Théorème 1.1.5 *L'espace S des solutions de l'équation (1.5) avec les conditions initiales est un espace vectoriel de dimension k sur le corp $\mathbb{R}$.*

■

Preuve. *Elle résulte du lemme (1.1.2) et le corollaire (1.1.1).*

Lemme 1.1.4 *[2]Si $y(n)$ et $\bar{y}(n)$ sont deux solutions de l'équation (1.4), alors $y(n) - \bar{y}(n)$ est une solution de (1.5).*

■

Théorème 1.1.6 *Si $y(n, n_0, a_i)$, $i = 1, \ldots, k$, $a_i \in \mathbb{R}^k$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.5) et si $\bar{y}(n)$ la solution de l'équation (1.4), alors toute autre solution $y(n)$ de (1.4) s'écrit*

$$y(n) = \bar{y}(n) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y(n, n_0, a_i).$$

Preuve. Remarquons que d'aprés le lemme (1.1.10), $y(n) - \bar{y}(n)$ est une solution de l'équation homogène (1.5), ainsi $y(n) - \bar{y}(n) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i y(n, n_0, a_i)$, pour une certaines constantes a_i. Alors vérifier cette théorème. ■

1.1.2 Les équations aux différences linéaires à coéfficients constants

Dans toute la suite, on s'intéresse aux équations aux différences à coéfficients constants homogènes, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{k} p_i y(n + k - i) = 0, \; p_0 = 1. \tag{1.6}$$

Les p_i sont des constantes réels ou complexes.

Résolution de l'équation homogène

Théorème 1.1.7 *L'équation (1.6) a des solutions de la forme*

$$y(n) = \lambda^n$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et vérifie

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0. \tag{1.7}$$

Preuve. En remplaçant par $y(n) = \lambda^n$ dans l'équation (1.6), on trouve

$$\lambda^n \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0$$

ce qui donne

$$\sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0.$$

Alors λ^n est une solutions de l'équation (1.6). ■

Remarque 1.1.8 *Le polynôme*

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i}$$

s'appelle polynôme caractéristique associé à l'équation (1.6).

Théorème 1.1.9 *Si les racines $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, de $P(\lambda)$ sont distinctes, alors les solutions de (1.6) sont linéairement indépendantes.*

Preuve. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sont des racines distinctes du $P(\lambda)$ alors $\left\{\lambda_1^n, \cdots, \lambda_k^n\right\}$sont k solutions de l'équation (1.6). Montrons qu'ils sont linéairement indépendantes.

Considérons la matrice de Casorati

$$K(n) = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_k^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \cdots & \lambda_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \cdots & \lambda_k^{n+k-1} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\det K(n) = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k)^n \prod_{\substack{i>j \\ i,j=1,\cdots,k}} (\lambda_i - \lambda_j)$$

où $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq k} (\lambda_j - \lambda_i)$ est appelé le déterminant deVandermonde gènèralisè.

Ainsi

$$\det k\,(n) \neq 0$$

alors les solutions $\lambda_1^n\,, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_k^n$ sont linéairement indépendantes. ■

Corollaire 1.1.2 *Du théorème précédent, il résulte que toute solution de l'équation* (1.6) *s'écrit comme combinaison linéaire de* λ_i^n*,* $i = 1, \cdots, k$*, i.e,*

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, c_i \in \mathbb{R}$$

avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ *sont des racines distinctes du polynôme caractéristique* $P(\lambda)$.

Théorème 1.1.10 *[2] Si* λ_i, $i = 1, \cdots, s$ *est une racine du polynôme* $P(\lambda)$ *de degré de multiplicité* m_i. *Alors les fonctions*

$$y_{i,j}(n) = n^j \lambda_i^n,\ 0 \leq j \leq m_i - 1,\ i = 1, \cdots, s,\ m_1 + \cdots + m_s = k$$

sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.6) *et donc forment une base.*

Corollaire 1.1.3 *La solution générale de l'équation* (1.6)*s'écrit :*

$$y(n) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n,\ c_{i,j} \in \mathbb{R}$$

où

•*Le paramètre* $s \leq k$ *désigne le nombre de racines distinctes de l'équation caractéristique* (1.7).

•*Le paramètre* λ_i *désigne une racine de l'équation caractéristique* (1.7).

•*Le paramètre* m_i *désigne la multiplicité de la racine* λ_i.

•*Les coéfficients* $c_{i,j}$ *sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions intiales.*

Racines réelles simple

Exemple 1.1.2 *(Suite de Fibonacci)*

On considère l'équation

$$y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0,\ avec\ y(0) = 0\ et\ y(1) = 1. \tag{1.8}$$

L'équation caractéristique de (1.8) *est*

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Ainsi, les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solution générale de l'équation (1.8) *s'écrit*

$$y(n) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Utilisons les conditions initiales, on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

d'ou

$$y(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Racines réelles multiples

Exemple 1.1.3 *Considérons l'équation aux différences linéaires d'ordre* 2

$$y(n+2) - y(n+1) + \frac{1}{4}y(n) = 0,\ \textit{avec}\ y(0) = 0,\ y(1) = 1\ . \tag{1.9}$$

Son polynôme caractéristique associé est

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}$$

qui admet deux racines

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \, (racines \ double) \, .$$

La solution générale de (1.9) *s'écrit*

$$y(n) = c_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_1 n \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Pour trouver les constantes c_0*et* c_1*, on résoudre le système*

$$\begin{cases} y(0) = & c_0 & = 0 \\ y_1(1) = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_1 = 1 \end{cases}$$

alors

$$c_0 = 0 \ et \ c_1 = 2$$

d'où

$$y(n) = 2n \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Exemple 1.1.4 *(Racines complexes conjuguées)*

Considérons l'équation

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = 0. \tag{1.10}$$

Supposons que l'équation (1.10) *admet deux racines complexes*

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

la solution générale est alors

$$y(n) = c_1 (\alpha + i\beta)^n + c_2 (\alpha - i\beta)^n .$$

En cordonnés polaires :

$$\alpha = r\cos\theta,\ \beta = r\sin\theta,\ r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},\ \theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} y(n) &= c_1(r\cos\theta + ir\sin\theta)^n + c_2(r\cos\theta - ir\sin\theta)^n \\ &= r^n\left[(c_1 + c_2)\cos(n\theta) + i(c_1 - c_2)\sin(n\theta)\right] \\ &= r^n\left[a_1\cos(n\theta) + a_2\sin(n\theta)\right] \end{aligned}$$

où

$$a_1 = c_1 + c_2,\ a_2 = i\,(c_1 - c_2)$$

soit

$$\cos\omega = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},\ \sin\omega = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},\ \omega = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right).$$

L'équation générale devient

$$\begin{aligned} y(n) &= r^n \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left[\cos\omega \cos(n\theta) + \sin\omega \sin(n\theta)\right] \\ &= r^n \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cos(n\theta - \omega) \\ &= A r^n \cos(n\theta - \omega) \, . \end{aligned}$$

Résolution de l'équation nonhomogène

Le principe de résolution consiste à éliminer d'abord la fonction g_n, et ensuite résoudre l'équation homogène. Une technique permettant d'éliminer plusieurs types de fonctions $g(n)$, est l'utilisation de l'opérateur d'avancement E.

Opérateur d'avancement

Définition 1.1.5 *Etant donnée une suite de nombres entiers $f(n)$, l'opérateur d'avancement E est défini comme suit*

$$\begin{aligned} f(n) = c\,(\textit{une constante}) &\Rightarrow E(f(n)) = c \\ f(n) \neq \quad \textit{constante} \quad &\Rightarrow E(f(n)) = f(n+1). \end{aligned}$$

Exemple 1.1.5

$$\begin{aligned} f(n) = \quad 2 \quad &\Rightarrow \; E(f(n)) = 2 \\ f(n) = (n+1)^2 \; &\Rightarrow \; E(f(n)) = (n+2)^2. \end{aligned}$$

D'autres opérateurs peuvent aussi être crées en combinant l'opérateur E à lui-même ou à des constantes. Pour ce faire, on définit pour la constante c l'opérateur de même nom c comme suit :

$$c\,(f\,(n)) = c \times f\,(n)\,.$$

La multiplication et l'addition d'opérateurs sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}(\,E_1 \times E_2)f\,(n) &= E_1(E_2(f\,(n)))\\ (\,E_1 + E_2)f\,(n) &= E_1(f\,(n)) + E_2(f\,(n)).\end{aligned}$$

Remarque 1.1.11 *Il est facile de vérifier que :*

1· *L'addition et la multiplication d'opérateurs sont commutatives*

$$\begin{aligned}(E_1 + E_2)\,f\,(n) &= (E_2 + E_1)f\,(n)\\ (E_1 \times E_2)f\,(n) &= (E_2 \times E_1)f\,(n)\,.\end{aligned}$$

2· *L'addition et la multiplication d'opérateurs sont associatives*

$$\begin{aligned}((E_1 + E_2) + E_3)f\,(n) &= (E_1 + (E_2 + E_3))f\,(n)\\ ((E_1 \times E_2)E_3)f\,(n) &= (E_1\,(E_2 \times E_3))f\,(n)\,.\end{aligned}$$

Exemple 1.1.6 *Soit à resoudre l'équation suivante :*

$$y(n+2) - 4y(n+1) + y(n) = n^2, \ avec \ y(0) = 0, \ y(1) = 1. \tag{1.11}$$

Application l'opérateur E au terme n^2 comme suit :

$$\begin{aligned} E(n^2) &= (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \\ (E-1)(n^2+2n+1) &= ((n+1)^2 + 2(n+1)) + 1 - n^2 - 2n - 1 = (2n+3) \\ (E-1)(2n+3) &= 2(n+1) - 2n + 3 - 3 = 2 \\ (E-1)(2) &= 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, en appliquant l'expression $(E-1)^3$ aux deux membres de l'équation (1.11) , on obtient :

$$(E-1)^3(y(n+2) - 4y(n+1) + y(n)) = (E-1)^3 n^2.$$

Développant cette relation, on obtient :

$$y(n+5) - 7y(n+4) + 16y(n+3) - 16y(n+2) + 7y(n+1) - y(n) = 0$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^5 - 7\lambda^4 + 16\lambda^3 - 16\lambda^2 + 7\lambda - 1 = 0$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = 1\,(triple)\,, \ \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}(simple) \ et \ \lambda_3 = 2 + \sqrt{3}(simple)$$

la solution est de la forme

$$y(n) = (a_0 + a_1 n + a_2 n^2) + a_3(2 - \sqrt{3})^n + a_4(2 + \sqrt{3})^n$$

pour trouver les constants a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 on va calculer $y(2)$, $y(3)$, $y(4)$, on obtient

$$\begin{cases} y(0) = a_0 + a_3 + a_4 = 0 \\ y(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \left(2 - \sqrt{3}\right)a_3 + \left(2 + \sqrt{3}\right)a_4 = 1 \\ y(2) = a_0 + 2a_1 + 4\,a_2 + \left(7 - 4\sqrt{3}\right)a_3 + \left(7 + 4\sqrt{3}\right)a_4 = 4 \\ y(3) = a_0 + 3a_1 + 9\,a_2 + \left(26 - 15\sqrt{3}\right)a_3 + \left(26 + 15\sqrt{3}\right)a_4 = 16 \\ y(4) = a_0 + 4a_1 + 16\,a_2 + \left(97 - 56\sqrt{3}\right)a_3 + \left(97 + 56\sqrt{3}\right)a_4 = 64 \end{cases}$$

alors $a_0 = -1, a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{6+\sqrt{3}}{12}, a_4 = \frac{6-\sqrt{3}}{12}$ *, donc la solution est :*

$$y(n) = -1 + n - \frac{n^2}{2} + \frac{6 + \sqrt{3}}{12}\left(2 - \sqrt{3}\right)^n + \frac{6 - \sqrt{3}}{12}\left(2 + \sqrt{3}\right)^n$$

Exemple 1.1.7 *Soit à resoudre l'équation suivante :*

$$y(n) - y(n-1) = n, \text{ avec } y_0 = 1.$$

On applique l'opérateur E, on obtient

$$(E-1)(n) = E(n) - n = 1$$

$$(E-1)(1) = 0$$

par conséquent

$$(E-1)^2\,(y_n - y_{n-1}) = 0$$

développant cette relation, on obtient

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 3y(n) - y(n-1) = 0$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = 1\,(triple)$$

la solution est de la forme

$$y(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2$$

pour trouver les constants a_0, a_1, a_2 *on va calculer* $y(1), y(2)$ *on obtient*

$$\begin{cases} y(0) = & a_0 & = 1 \\ y(1) = & a_0 + a_1 + a_2 & = 2 \\ y(2) = & a_0 + 2a_1 + 4a_2 & = 4 \end{cases}$$

alors $a_0 = 1$*et* $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}$ *donc la solution est :*

$$y(n) = 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2.$$

Exemple 1.1.8 *Soit à resoudre l'équation suivante :*

$$y(n) - y(n-1) = n \times 2^n, \; avec \; y(0) = 0.$$

On applique l'opérateur E, on obtient

$$(E-2)^2 \ (n \times 2^n) = 0$$

par conséquent

$$(E-2)^2 \ (y(n) - y(n-1)) = 0$$

développant cette relation on obtient

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 8y(n) - 4y(n-1) = 0.$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = 1 \, (simple) \ \ et \ \lambda_2 = 2 \, (double)$$

la solution est de la forme

$$y(n) = (a_0 + a_1 n) \, 2^n + a_2$$

pour trouver les constants a_0, a_1, a_2, on va calculer $y(1)$, $y(2)$ on obtient

$$\begin{cases} y(0) = \quad a_0 + a_2 \quad = 0 \\ y(1) = \quad 2a_0 + 2a_1 + a_2 = 2 \\ y(2) = 4a_0 + 8a_1 + a_2 \quad = 10 \end{cases}$$

alors $a_0 = -2$ et $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, donc la solution est :

$$y(n) = (n-1)\,2^{n+1} + 2.$$

Le tableau ci-dessous résume l'expression à employer pour éliminer quelques fonctions $g(n)$ dans les équations nonhomogènes.

Dans le tableau qui suit, $P_k(n)$ et α représentent un polynôme en n de degré k et une valeur entière respectivement.

Fonction $g(n)$	*Eliminateur correspondant*
$g(n) = constante$	*(E-1)*
$g(n) = p_k(n)$	*(E-1)$^{k+1}$*
$g(n) = \alpha^n$	*(E-α)*
$g(n) = \alpha^n p_k(n)$	*(E-α)$^{k+1}$*

1.2 Equations aux différences non linéaires

1.2.1 Définitions et résultats généraux

Une équation aux différences non linéaire d'ordre $(k+1)$ est une équation de la forme

$$x(n+1) = f\,(x(n), x(n-1), \cdots, x(n-k)),\ n = 0, 1, \cdots, \tag{1.12}$$

avec $f : I^{k+1} \to I$ est une fonction continue, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$(x(n), x(n-1), \cdots, x(n-k)) \in I^{k+1}$$

sont les conditions initiales.

Remarque 1.2.1 *Toute solution $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ de l'équation (1.12) est uniquement déterminée par les conditions initiales.*

Définition 1.2.1 *Un point $\bar{x} \in I$ est dit point d'équilibre pour l'équation (1.12) si*

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x})$$

autrement dit

$$x(n) = \bar{x}, \ \forall n \geq -k.$$

Définition 1.2.2 *Une solution $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ de l'équation (1.12) est dite périodique de période p si*

$$x(n+p) = x(n), \ \forall n \geq -k.$$

Définition 1.2.3 *Un intervalle $J \subseteq I$ est dit intervalle invariant pour l'équation (1.12) si*

$$x(-k), x(-k+1), \cdots, x(0) \in J \Rightarrow x(n) \in J, \ n > 0.$$

1.2.2 Stabilité des équations aux différences non linéaires

Définition 1.2.4 *Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre de l'équation (1.12).*

$1 \cdot \bar{x}$ *est dit localement stable si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x(-k), \cdots, x(0) \in I \ : \ |x(-k) - \bar{x}| + \cdots + |x(0) - \bar{x}| < \delta$$

alors

$$|x(n) - \bar{x}| < \varepsilon, \ \forall n \geq -k.$$

2. $\bar{x}$ *est dit localement asymptotiquement stable si*

•$\bar{x}$ *est localement stable,*

•$\exists \gamma > 0$, $\forall x(-k), \cdots, x(0) \in I : |x(-k) - \bar{x}| + \cdots + |x(0) - \bar{x}| < \gamma$ *alors*

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = \bar{x}.$$

3. $\bar{x}$ *est dit globalement attractif si*

$$\forall x(-k), \cdots, x(0) \in I, \ \lim_{n \to \infty} x(n) = \bar{x}.$$

4. $\bar{x}$ *est dit globalement asymptotiquement stable si*

• $\bar{x}$ *est localement stable,*

• $\bar{x}$ *est globalement attractif.*

5·*Le point* $\bar{x}$ *est dit instable s'il est non localement stable.*

Théorème 1.2.2 *[2] Une solution* $\bar{y}(n)$ *de l'équation (1.6) est asymptotiquement stable si et seulement si les racines de* $p(\lambda)$ *sont à l'intérieur du cercle unité, c'est à dir*

$$\bar{y}(n) \text{ est asymptotiquement stable } \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1, i = 1, \cdots, s.$$

Supposons en plus que f est une fonction différentiable au voisinage du point d'équilibre $\bar{x}$.

Définition 1.2.5 *On appelle équation aux différences linéaire associée à l'équation (1.12) l'équation*

$$y(n+1) = p_0 y(n) + p_1 y(n-1) + \cdots + p_k y(n-k) \tag{1.13}$$

avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \cdots, \bar{x}),\ i = 0, \cdots, k.$$

Pour laquelle on associé le polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0\lambda^k - \cdots - p_k.$$

Remarque 1.2.3 *La stabilité de l'équation (1.12) est caractérisé par la stabilité de l'équation aux différences linéaire associé (1.13).*

Le théorème suivant du Clark, donne une condition suffisante de la stabilité locale asymptotique de l'équation (1.12).

Théorème 1.2.4 *(théorème de Clark)*

Une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique de l'équation (1.12) et

$$\left|p_0\right| + \left|p_1\right| + \cdots + \left|p_k\right| < 1.$$

Pour montrer cette théorème, on utilisant le théorème de Rouché.

Théorème 1.2.5 *(théorème de Rouché) Supposons que :*

1. *Deux fonctions $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont analytiques à l'intérieur est sur une simple conteur fermé γ dans le domaine complexe, et*

2. $\mid f(\lambda) \mid > \mid g(\lambda) \mid$ *pour tout les points sur γ.*

Alors $f(\lambda)$ et $f(\lambda) + g(\lambda)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur du disque unité

Preuve. (théorème 1.2.4)

soit

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0\lambda^k - \cdots - p_k$$

le polynôme caractéristique associé à l'équation (1.12). Soit f et g deux fonctions complexes définies par

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1}, \; g(\lambda) = p_0\lambda^k + \cdots + p_k.$$

On a pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$

$$\begin{aligned} \left|g(\lambda)\right| &= \left|p_0\lambda^k + \cdots + p_k\right| \\ &\leq \left|p_0\right| + \left|p_1\right| + \cdots + \left|p_k\right| \\ &< 1 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\left|g(\lambda)\right| < \left|f(\lambda)\right|.$$

Alors par le théorème de Rouché $f(\lambda)$ et $f(\lambda) + g(\lambda)$ ont le même nombre de zéros $(k+1)$ à l'intérieur du disque unité. Ainsi les racines du polynôme $p(\lambda)$ sont de modules inférieures à 1, et le résultat découle du théorème (1.2.2) . ■

Exemple 1.2.1 *Soit l'équation aux différences non linéaire d'ordre* 2 *suivante*

$$x(n+1) = \frac{1}{x(n)x(n-1)} \tag{1.14}$$

avec les valeurs initiales $x(0), x(-1)$.

L'équation (1.14) admet un seul point d'équilibre

$$\bar{x} = \sqrt[3]{1}.$$

L'équation linéaire assosiée à (1.14) est donnée par

$$y(n+1) + y(n) + y(n-1) = 0.$$

L'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

On a

$$\left|p_0\right| + \left|p_1\right| = 2 \geq 1.$$

Donc d'aprés le théoréme de Clark $\bar{x}$ est instable.

L'équation (1.14) périodique de période 3, *en effet*

$$\begin{aligned}
x(n+1) &= \frac{1}{x(n)x(n-1)} \\
x(n+2) &= \frac{1}{x(n+1)x(n)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x(n)x(n-1)}\right)x_n} = \frac{1}{\frac{1}{x(n-1)}} = x(n-1) \\
x(n+3) &= x(n).
\end{aligned}$$

CHAPITRE 2

SYSTÈME DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES LINÉAIRES

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux systèmes des équations aux différences linéaires. Dans la première partie on présente l'essentiel des systémes autonomes. Dans lequel, nous intéressons à l'analogue discrète de l'algorithme de Putzer et les formes de Jordan . Finalement, nous étudions les systémes non autonomes. Dans lequel, nous présentons la théorie de base et les systèmes linéaires périodiques.

2.1 Systémes autonomes

Nous allons considéré maintenant le système de k équations linéaires suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \cdots + a_{1k}x_k(n) \\ x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \cdots + a_{2k}x_k(n) \\ \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_k(n+1) = a_{k1}x_1(n) + a_{k2}x_2(n) + \cdots + a_{kk}x_k(n) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x_1(0)$, $x_2(0), \cdots, x_k(0)$ sont des constantes réelles ou complexes. Ce système peut être écrit sous la forme

$$X(n+1) = AX(n), \tag{2.1}$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$, et $X(n) = (x_1(n), x_2(n), \cdots, x_k(n))^T$,

qui nous donne finalement :

$$\begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_k(0) \end{pmatrix}.$$

L'équation aux différences linéaire (2.1) est dite non homogène si

$$X(n+1) = A\,X(n) + g(n),$$

pour tout $g(n) \in \mathbb{R}^k$.

Si pour tout $n_0 \geq 0$, $X(n_0) = X_0$ est spécifiée, alors le système (2.1) est appelée un problème aux limite. On peut montrer que la solution est donnée par

$$X(n, n_0, x_0) = A^{n-n_0} X_0, \tag{2.2}$$

où $A^0 = I$ est la matrice identité. Notez que $X(n_0, n_0, x_0) = X_0$. Si $n_0 = 0$, alors la solution de la formule (2.2) peut être écrite sous la forme $X(n, x_0)$, ou simplement $X(n)$. Nous montrons maintenant que nous pouvons supposer que $n_0 = 0$ sans perte de généralité.

Soit $y(n - n_0) = x(n)$, donc la formule (2.1) devient

$$y(n + 1) = Ay(n), \tag{2.3}$$

avec $y(0) = x(n_0)$ et

$$y(n) = A^n y(0). \tag{2.4}$$

Il existe une théorie parallèle pour les systèmes d'équations différentielles linéaires. la solution du problème aux limite

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t),\ x(t_0) = x_0,$$

où A est une matrice $k \times k$ et $x \in \mathbb{R}^k$ est donnée par

$$x(t) = \exp^{A(t-t_0)} x_0.$$

2.1.1 L'analogue discrète de l'algorithme de Putzer

Dans les équations différentielles l'algorithme de Putzer est utilisée pour calculer e^{At}. Ici, nous introduisons un algorithme analogue pour calculer A^n.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle de $k \times k$ tel que les valeurs propres λ_k sont des réelles ou complexes et les vecteurs propres est donnée par

$$AV = \lambda V,\ V \in \mathbb{C}^k.$$

Cette relation est équivalente

$$(A - \lambda I)V = 0. \tag{2.5}$$

L'équation (2.5) a une solution non nulle si et seulement si

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

où

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \cdots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0. \tag{2.6}$$

L'équation (2.6) est dite l'équation caractéristique de A, tel que les racines λ sont les valeurs propres de A. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont des valeurs propres distinctes alors l'équation caractéristique (2.6) on écrire comme

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} \left(\lambda - \lambda_j\right) = 0. \tag{2.7}$$

Théorème 2.1.1 *[9](théoreme de Cayley-Hamilton) Soit A une matrice et P sa polynôme caractéristique, alors*

$$P(A) = \prod_{j=1}^{k} \left(A - \lambda_j I\right) = 0. \tag{2.8}$$

où

$$A^k + a_1A^{k-1} + a_2A^{k-2} + \cdots + a_kI = 0. \tag{2.9}$$

2.1.2 Le développement de l'algorithme pour $\mathbf{A}^n$

Soit A une matrice réelle de $k \times k$, alors la forme de A^n est donnée par

$$A^n = \sum_{j=1}^{S} u_j(n) M(j-1), \tag{2.10}$$

tels que $u_j(n)$ sont des fonctions scalaires, et

$$M(j) = \left(A - \lambda_j I\right) M(j-1), \ M(0) = I, \tag{2.11}$$

où

$$M(j+1) = \left(A - \lambda_{j+1} I\right) M(j), \ M(0) = I.$$

Par réccurence, on a

$$M(n) = (A - \lambda_n I)(A - \lambda_{n-1} I) \cdots (A - \lambda_1 I),$$

alors

$$M(n) = \prod_{j=1}^{n} \left(A - \lambda_j I\right). \tag{2.12}$$

D'aprés le théoreme de Cayley-Hamilton on a

$$M(k) = \prod_{j=1}^{k} \left(A - \lambda_j I\right) = 0.$$

Par conséquence, $M(n) = 0$ pour chaque $n \geq k$. On écrire la formule (2.10) comme

$$A^n = \sum_{j=1}^{k} u_j(n) M(j-1). \tag{2.13}$$

Si $n = 0$ dans la formule (2.13), on obtient

$$A^0 = I = u_1(0) I + u_2(0) M(1) + \cdots + u_k(0) M(k-1). \tag{2.14}$$

L'équation (2.14) est satisfait si

$$u_1(0) = 1 \text{ } et \text{ } u_2(0) = u_3(0) = \cdots = u_k(0) = 0. \tag{2.15}$$

D'aprés la formule (2.13), on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} u_j(n+1)M(j-1) = AA^n &= A\left[\sum_{j=1}^{k} u_j(n)M(j-1)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{k} u_j(n)AM(j-1).\end{aligned}$$

En remplaçant par $AM(j-1)$ dans l'équation (2.11), on trouve

$$\sum_{j=1}^{k} u_j(n+1)M(j-1) = \sum_{j=1}^{k} u_j(n)\left[M(j) + \lambda_j M(j-1)\right]. \tag{2.16}$$

On comparé les coéfficients de $M(j)$, $1 \leq j \leq k$, dans l'équation (2.16) et on applique les conditions initiales (2.15) on obtient

$$\begin{cases} u_1(n+1) = \lambda_1 u_1(n), & u_1(0) = 1, \\ u_j(n+1) = \lambda_j u_j(n) + u_{j-1}(n), & u_j(0) = 0, \quad j = 2,3,\ldots,k. \end{cases} \tag{2.17}$$

Les solutions de (2.17) sont données par

$$u_1(n) = \lambda_1^n, \quad u_j(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_j^{n-1-i} u_{j-1}(i), \qquad j = 2,3,4,\cdots,k. \tag{2.18}$$

Exemple 2.1.1 *On considére le système de* 3 *équations aux différences linéairres*

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_2(n) + x_3(n) \\ x_2(n+1) = -2x_1(n) + 3x_2(n) + x_3(n) \\ x_3(n+1) = -3x_1(n) + x_2(n) + 4x_3(n) \end{cases}$$

Ce système écrit sous la forme : $X(n+1) = AX(n)$, *ou* $X(n) = (x_1(n), x_2(n), x_3(n))$.

Et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique associé est

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 \\ &= (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3) \end{aligned}$$

qui admet deux racines

$$\lambda_1 = 2(double), \lambda_2 = 3.$$

Donc

$$M(0) = I, \;\; M(1) = (A - 2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$M(1) = (A - 2I), \;\; M(2) = (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$u_1(n) = 2^n.$$

$$u_2(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{(n-1-i)}.2^i = n2^{n-1}.$$

$$u_3(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 3^{(n-1-i)}\left(i2^{i-1}\right) = \frac{3^{n-1}}{2}\sum_{i=0}^{n-1} i\left(\frac{2}{3}\right)^i$$
$$= \frac{3^{n-1}}{2}\left[\frac{\left(\frac{2}{3}-1\right)n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2}\right] = -2^n + 3^n - n2^{n-1}.$$

Alors

$$A^n = \sum_{j=1}^{n} u_j(n)\, M(j-1)$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n - n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2^n + 3^n \\ 2^n - 3^n - n2^{n-1} & (n+2)\,2^{n-1} & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2\cdot 3^n - n2^{n-1} & n2^{n-1} & -2^n + 2\cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

Alors la solution de l'équation aux diffèrences est donnée par

$$x(n) = A^n x(0) = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n - n2^{n-1}x_1(0) + n2^{n-1}x_2(0) - 2^n + 3^n x_3(0) \\ 2^n - 3^n - n2^{n-1}x_1(0) + (n+2)\,2^{n-1}x_2(0) - 2^n + 3^n x_3(0) \\ -2^{n+1} - 2.3^n - n2^{n-1}x_1(0) + n2^{n-1}x_2(0) - 2^n + 2.3^n x_3(0) \end{pmatrix},$$

tel que $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T$.

Exemple 2.1.2 *On considère le système de* 3 *équations aux différences linéaires*

$$\begin{cases} x_1(n+1) = 4x_1(n) + x_2(n) + 2x_3(n) \\ x_2(n+1) = 2x_2(n) - 4x_3(n) \\ x_3(n+1) = x_2(n) + 6x_3(n) \end{cases}$$

Ce système écrit sous la forme : $X(n+1) = AX(n)$, *où* $X(n) = (x_1(n), x_2(n), x_3(n))$,

et

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique associé est

$$P(\lambda) = (4 - \lambda)(\lambda - 4)^2$$

qui admet la racine

$$\lambda_1 = 4(triple).$$

Donc

$$M(0) = I, \ \ M(1) = (A - 4I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$M(2) = (A - 4I)M(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u_1(n) &= 4^n, \\ u_2(n) &= \sum_{i=0}^{n-1}(4^{n-1-i})(4^i) = n(4^{n-1}), \\ u_3(n) &= \sum_{i=0}^{n-1}4^{n-1-i}(i4^{i-1}) = 4^{i-2}\sum_{i=0}^{n-1}i \\ &= \frac{n(n-1)}{2}4^{i-2}. \end{aligned}$$

Alors

$$A^n = 4^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n4^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2} 4^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4^n & n4^{n-1} & 2n4^{n-1} \\ 0 & 4^n - 2n4^{n-1} & -n4^n \\ 0 & n4^{n-1} & 4^n + 2n4^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donc la solution est donnée par

$$x(n) = A^n x(0) = \begin{pmatrix} 4^n x_1(0) + n4^{n-1} x_2(0) + 2n4^{n-1} x_3(0) \\ (4^n - 2n4^{n-1}) x_2(0) - n4^n x_3(0) \\ n4^n x_2(0) + (4^n + 2n4^{n-1}) x_3(0) \end{pmatrix},$$

tel que $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T$.

2.1.3 Formes de Jordan

La forme de Jordan d'une matrice est vital pour résoudre les systèmes des équations aux linéaires autonomes. Dans cette section, nous allons décrire brièvement la réduction de Jordan.

Matrices diagonalisables

Soit A une matrice diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice P inversible et D

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix},$$

tel que,

$$D = P^{-1}AP,$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ sont les valeurs propres de A, et $P = [V_1, V_2, \cdots, V_k]$ où $V_1, V_2, \cdots, V_k$ sont des vecteurs propres assosiée à $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ respectivement.

On a

$$D^n = P^{-1}A^nP, \ A^n = PD^nP^{-1}.$$

Donc,

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{2.19}$$

Ceci permet de résoudre le système (2.1). La solution est

$$\begin{aligned} X(n) &= P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix} P^{-1}X(0). \\ &= C_1\lambda_1^nV_1 + C_2\lambda_2^nV_2 + \cdots + C_k\lambda_k^nV_k. \end{aligned}$$

Exemple 2.1.3 ***Cas1 :(Racines réelles)*** *Conséderons le système*

$$\begin{cases} x_1(n+1) = 2x_1(n) + 2x_2(n) + x_3(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) + 3x_2(n) + x_3(n) \\ x_3(n+1) = x_1(n) + 2x_2(n) + 2x_3(n) \end{cases}$$

Ce système écrit sous la forme $X(n+1) = AX(n)$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique de A est

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0.$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 5 \ (simple), \ \lambda_2 = 1(double).$$

Les sous espaces propres correspandants, sont

$$E_{\lambda_1} = \{X = (x_1, x_2, x_3) \ : \ (A - \lambda_1 I)X = 0_{\mathbb{R}}\}.$$

$$E_5 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \ : \ \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \langle (1,1,1) \rangle.$$

Pour $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ *nous avons*

$$E_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \langle (1,0,-1),(0,1,-2) \rangle .$$

Donc,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La solution générale est

$$x(n) = c_1 5^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$x(n) = \begin{pmatrix} c_1 5^n + c_2 \\ c_1 5^n + c_3 \\ c_1 5^n - c_2 - 2c_3 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Supposons que dans le problème ci-dessus nous donne une valeur initiale

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et doit trouver la solution $x(n)$ *avec cette valeur initiale. Une façon de le faire est en laissant* $n = 0$ *dans la solution proposée par la formule (2.20) et en évaluant les constantes* c_1, c_2 *et* c_3

ainsi

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 0 \\ c_1 + c_3 & = 1 \\ c_1 - c_2 - 2c_3 = 0 \end{cases}.$$

La résolution de ce système est donne $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ *et* $c_3 = \frac{1}{2}$ *qui nous conduit à la solution*

$$x(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}5^n - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}5^n + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}5^n - \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Cas2 :(Racines complexes conjuguées)

Supposons que A admet deux valeurs propres

$$\lambda = \alpha + i\beta, \ \bar{\lambda} = \alpha - i\beta.$$

En outre si V est le vecteur propre de A correspondant à la valeur propre $\lambda = \alpha + i\beta$, alors $\bar{V}$ est le vecteur propre de A correspondant à la valeur propre $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Profitant de ces observations, on peut être en mesure de simplifier considérablement le calcul impliqués dans la recherche une matrice fondamentale du système d'équations (2.1). Supposons que $V = V_1 + iV_2$. Une solution du système (2.1) peut alors être donnée par

$$x(n) = (\alpha + i\beta)^n(V_1 + iV_2).$$

Aussi, si

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

puis

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Cette solution peut maintenant être écrite comme

$$\begin{aligned}
x(n) &= [r\cos\theta + ir\sin\theta]^n (V_1 + iV_2) \\
&= r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta)(V_1 + iV_2) \\
&= r^n [(\cos n\theta)V_1 - (\sin n\theta)V_2] + ir^n [(\cos n\theta)V_2 + (\sin n\theta)V_2] \\
&= u(n) + iv(n),
\end{aligned}$$

où

$$u(n) = r^n[(\cos n\theta)V_1 - (\sin n\theta)V_2],$$

et

$$v(n) = r^n[(\cos n\theta)V_2 + (\sin n\theta)V_1].$$

On peut montrer que $u(n)$ et $v(n)$ sont des solutions linéairement indépendantes de système (2.1). Par conséquent nous n'avons pas besoin d'envisager la solution générée par $\bar{\lambda}$ et $\bar{V}$.

Exemple 2.1.4 *Soit à résoudre le système suivant*

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) - 5x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) - x_2(n) \end{cases}$$

Ce système écrit sous la forme $X(n+1) = AX(n)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \;\; X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = 2i, \;\; \lambda_2 = -2i.$$

Les vecteurs propres correspondant sont

$$E_{\lambda_1} = \langle V_1 \rangle, \; E_{\lambda_2} = \langle V_2 \rangle,$$

avec

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$x(n) = (2i)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix},$$

est une solution. Comme

$$\begin{aligned} i &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}, \\ i^n &= \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}, \end{aligned}$$

cette solution peut être écrite comme

$$\begin{aligned} x(n) &= 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix} + i2^n \begin{pmatrix} \frac{-2}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc,

$$u(n) = 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix},$$

et

$$v(n) = 2^n \begin{pmatrix} \frac{-2}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Sont deux solutions linéairement indépendantes. Donc Une solution générale peut être donnée par

$$\begin{aligned} x(n) &= c_1 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix} + c_2 2^n \begin{pmatrix} \frac{-2}{5}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5}c_1 - \frac{2}{5}c_2\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ c_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jusqu'à présent, nous avons discuté de la solution de système (2.1) *si la matrice A est diagonalisable. Nous remarquons ici qu'une condition suffisante pour matrice $k \times k$ être diagonalisable est qu'il ait k valeurs propres distinctes. Si la matrice A a répété les racines, alors il est diagonalisable si le dégré de multiplicité de λ_k égale* $\dim E_{\lambda_k}$.

Matrices trigonalisable

Nous nous tournons maintenant notre attention sur le cas général où la matrice A n'est pas diagonalisable. Cela se produit lorsque A a répété valeurs propres, et celui-ci est pas en mesure de générer k vecteurs propres linéairement indépendants. Par exemple, les matrices suivantes ne sont pas diagonalisable :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Théorème 2.1.2 *[1](de Jordan)* : *Si le polynôme caractéristique de A est scindé, alors existe une matrice P inversible tel que :*

$$P^{-1}AP = J,$$

où

$$J = diag(J_1, J_2, \cdots, J_r), \quad 1 \leq r \leq k. \tag{2.22}$$

et

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

et λ_i sont les valeurs propres de A.

La matrice J_i est appelé un bloc Jordanie. Ces remarques sont formalisées dans le théorème suivant.

Théorème 2.1.3 *(la forme canonique Jordanie) De préférence la matrice A de $k \times k$ est similaire à une forme de Jordan donnée par la formule (2.22) où chaque J_i est une matrice $s_i \times s_i$ de la forme* (2.23) *et* $\sum_{i=1}^{r} s_i = k$.

Le nombre de blocs correspondant à une Jordan de valeur propre λ est appelée la multiplicité géométrique de λ, et de ce nombre, à son tour, est égal au nombre de vecteurs propres linéairement indépendants correspondant à λ. La multiplicité algébrique d'une valeur propre λ de est le nombre de fois où il est répétée. Si la multiplicité algébrique de λ est 1 (c'est-à-λ n'est pas répété), alors nous nous référons à λ aussi simple. Si la multiplicité géométrique de λ est égal à sa multiplicité algébrique (c'est à dire, seulement 1×1 blocs Jordanie correspond à λ), il est alors appelé semi-simple. Par exemple la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a une valeur propre simple en 3 et une valeur propre semi-simple 2 et un valeur propre 5 qui n'est ni simple ni semi-simple.

Pour illustrer le théorème, nous énumérons ci-dessous les formes possibles d'une Jordan Matrice 3×3 avec une valeur propre $\lambda = 5$ de multiplicité 3. Dans la matrice, différents blocs Jordanie sont indiqués par des carrés.

$$\underset{(a)}{\begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}} \underset{(b)}{\begin{pmatrix} \boxed{5} & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{5} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}} \underset{(c)}{\begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{5} \end{pmatrix}} \underset{(d)}{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix}} \end{pmatrix}}.$$

Rappelons que si est l'ordre du Jordanie ième bloc et r est le nombre de Jordanie Blocs dans une forme de Jordan.

En (a) la matrice est diagonalisable et nous avons trois blocs Jordan d'ordre 1. Ainsi $s_1 = s_2 = s_3 = 1$, $r = 3$ et la multiplicité géométrique de λ est égal à 3.

En (b) il existe deux blocs Jordan avec $s_1 = 2, s_2 = 1, r = 2$ et l'multiplicité géométrique de λ est égal à 2.

En (c) il existe également deux blocs Jordanie avec $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $r = 2$ et la multiplicité géométrique de λ est égal à 2.

En (d) il ya seulement un pâté de Jordanie avec $s_1 = 3$, $r = 1$ et la multiplicité géométrique de λ est égal à 1.

Maintenant, nous savons que $A^n = (PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1}$, où

$$J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & & & 0 \\ & J_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k^n \end{bmatrix}$$

Notez que pour toute J_i, $i = 1, 2, \cdots, r$, nous avons $J_i = \lambda_i I + N_i$, où

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice nilpotent $s_i \times s_i$ (*i.e.*, $N_i^r = 0$ *pour tous* $r \geq s_i$). D'où

$$J_i^n = (\lambda_i I + N_i)^n = \lambda_i^n I + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_i^{n-1} N_i + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_i^{n-s_i+1} N_i^{s_i-1} \tag{2.24}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_i^{n-1} & \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_i^{n-2} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ s_i - 1 \end{pmatrix} \lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_i^{n-1} & \cdots & \begin{pmatrix} n \\ s_i - 2 \end{pmatrix} \lambda_i^{n-s_i+2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & & \cdots & \lambda_i^n \end{pmatrix}$$

Les lignes à l'intérieur J_i^n indiquent que les entrées de chaque diagonale sont identiques.

Nous pouvons maintenant prouver que la solution générale de système (2.1) est

$$x(n) = A^n c = PJ^n P^{-1} c.$$

Exemple 2.1.5 *Soit à résoudre le système suivant*

$$\begin{cases} x_1(n+1) = 4x_1(n) + x_2(n) + 2x_3(n) \\ x_2(n+1) = 2x_2(n) - 4x_3(n) \\ x_3(n+1) = x_2(n) + 6x_3(n) \end{cases}$$

ce système écrit sous la forme $X(n+1) = AX(n)$

tel que

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \; X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 4.$$

Le vecteur propre est

$$E_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \ : \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \langle V_1 = (0, -2, 1), V_2 = (1, -2, 1) \rangle \, .$$

Nous devons maintenant trouver un vecteur propre V_3 généralisée. En appliquant la formule $(A - 4I)V_3 = V_1$ alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 4I)V_3 = V_2$$

ou

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d'où, $x_2 + 2x_3 = 1$. *On peut maintenant définir*

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

et

$$J^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$x(n) = PJ^n\hat{c} = \begin{pmatrix} 0 & 4^n & n4^{n-1} \\ -2.4^n & -2.4^n & -2n4^{n-1} - 4^n \\ -4^n & 4^n & n4^{n-1} + 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \\ \hat{c}_3 \end{pmatrix}.$$

2.2 Systèmes non autonomes

2.2.1 La théorie de base

Maintenant contempler le système

$$X(n+1) = A(n)\, X(n), \tag{2.25}$$

où $A(n) = \left(a_{i,j}(n)\right)$ une matrice inversible $k \times k$ à valeurs fonction. C'est un système des équations aux différences linéaire homogène qui est non autonome. Système non homogène correspondant est donné par

$$y(n+1) = A(n)\, y(n) + g(n), \tag{2.26}$$

où $g(n) \in \mathbb{R}^k$

Nous établissons maintenant l'existence et l'unicité de solutions de (2.25).

Théorème 2.2.1 *Pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^k$ et $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ il existe une solution uniqe $x(n, n_0, x_0)$ de (2.25) avec $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$.*

Preuve. De (2.25)

$$x(n_0+1, n_0, x_0) = A(n_0)x(n_0) = A(n_0)x_0,$$
$$x(n_0+2, n_0, x_0) = A(n_0+1)x(n_0+1) = A(n_0+1)A(n_0)x_0.$$

Inductif, on peut conclure que

$$x(n, n_0, x_0) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right] x_0, \tag{2.27}$$

où

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)\dots A(n_0) & si\ n \geq n_0, \\ I & si\ n = n_0. \end{cases}$$

Formule (2.27) donne la solution unique avec les propriétés désirées. ■

Nous allons maintenant développer la notion de matrice fondamentale, une centrale bloc de construction dans la théorie des systèmes linéaires.

Définition 2.2.1 *Les solutions* $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ *de (2.25) sont dits linéairements indépendantes pour* $n \geq n_0 \geq 0$ *si*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\, x_i(n) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \ pour\ tout\ n \geq n_0,\ 1 \leq i \leq k.$$

Soit $\Phi(n)$ une matrice $k \times k$, tels que les colonnes de $\Phi(n)$ sont les k solutions linéairements indépendantes de (2.25). Nous écrire

$$\Phi(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)].$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\Phi(n+1) &= [A(n)x_1(n), A(n)x_2(n), \ldots, A(n)x_k(n)] \\ &= A(n)\,[x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)] \\ &= A(n)\Phi(n)\end{aligned}$$

Par conséquent, $\Phi(n)$ vérifie l'équation aux différences matriceielle

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n). \tag{2.28}$$

En plus, les solutions $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ sont linéairement indépendants pour $n \geq n_0$ si et seulement si la matrice $\Phi(n)$ est inversible ($\det \Phi(n) \neq 0$) pour tout $n \geq n_0$.

Définition 2.2.2 *Si $\Phi(n)$ est une matrice inversible pour tout $n \geq n_0$ et satisfait* (2.28)*, il est dite une matrice fondamentale pour le système* (2.25).

Remarque 2.2.2 *Notez que si $\Phi(n)$ est une matrice fondamentale et C est une matrice inversible , alors $\Phi(n)C$ est aussi une matrice fondamentale*

Ainsi, il existe une infinité de matrices fondamentales pour un système donné.

Cependant, il ya une matrice fondamentale que nous savons déjà, à savoir

$$\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i), \ \textit{avec}\ \Phi(n_0) = I.$$

Dans le cas autonome lorsque A est une matrice constante

$$\Phi(n) = A^{n-n0}$$

et si $n_0 = 0$, alors $\Phi(n) = A^n$. Par conséquent, il serait beaucoup plus approprié d'utiliser l'algorithme Putzer pour calculer la matrice fondamentale pour un système autonome.

Théorème 2.2.3 *[1] Il existe une solution unique $\Psi(n)$ de la matrice* (2.28) *avec $\Psi(n_0) = I$.*

Nous pouvons ajouter ici que, à partir de n'importe quel matrice fondamentale $\Phi(n)$, la matrice $\Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)$ est une matrice fondamentale. Cette matrice fondamental spécial est notée $\Phi(n, n_0)$ et est désigné comme la transition d'état matrice. On peut, en général, écrire

$$\Phi(n, m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)$$

pour tout deux entiers positifs n, m, tel que $n \geq m$. La matrice fondamentale $\Phi(n, m)$ a certaines propriétés agréables que nous devons énumérer ici. Observez d'abord que $\Phi(n, m)$est une solution de l'équation aux différences matriceielle

$$\Phi(n + 1, m) = A(n)\Phi(n, m).$$

Proposition 2.2.1
(i) $\Phi^{-1}(n, m) = \Phi(m, n)$.
(ii) $\Phi(n, m) = \Phi(n, r)\Phi(r, m)$.
(iii) $\Phi(n, m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i)$.

Preuve. *i*) On a

$$\Phi(n, m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m),$$

donc

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(n, m) &= \left(\Phi(n)\Phi^{-1}(m)\right)^{-1}, \\
&= \left(\Phi^{-1}(m)\right)^{-1} \Phi^{-1}(n), \\
&= \Phi(m)\Phi^{-1}(n), \\
&= \Phi(m, n).
\end{aligned}$$

ii) Soit

$$\begin{aligned}\Phi(n,r)\Phi(r,m) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(r)\Phi(r)\Phi^{-1}(m),\\ &= \Phi(n)\ I\ \Phi^{-1}(m),\\ &= \Phi(n,m).\end{aligned}$$

iii) On a

$$\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i),$$

alors

$$\begin{aligned}\Phi(n,m) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(m),\\ &= \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\ \Phi^{-1}(m),\end{aligned}$$

et

$$\Phi(m) = \prod_{i=n_0}^{m-1} A(i),$$

donc

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(m) &= \left(\prod_{i=n_0}^{m-1} A(i)\right)^{-1} = \left(A(n_0)A(n_0+1)\cdots A(m-1)\right)^{-1}\ ,\\ &= A^{-1}(m-1)\cdots A^{-1}(n_0+1)A^{-1}(n_0),\\ &= \prod_{i=n_0}^{m-1} A^{-1}(i).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\Phi(n,m) &= \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right)\left(\prod_{i=n_0}^{m-1} A^{-1}(i)\right), \text{ tel que } n \geq m,\\
&= \left(\prod_{i=n_0}^{m-1} A(i)\right)\left(\prod_{i=m}^{n-1} A(i)\right)\left(\prod_{i=n_0}^{m-1} A^{-1}(i)\right),\\
&= \left(\prod_{i=m}^{n-1} A(i)\right)\left(\prod_{i=n_0}^{m-1} A(i)\right)\left(\prod_{i=n_0}^{m-1} A^{-1}(i)\right),\\
&= \left(\prod_{i=m}^{n-1} A(i)\right)\left(\prod_{i=n_0}^{m-1} A(i)\, A^{-1}(i)\right),\\
&= \left(\prod_{i=m}^{n-1} A(i)\right).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.1 *La solution unique $x(n, n_0, x_0)$ de* (2.25) *avec $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$ est donnée par*

$$x(n, n_0, x_0) = \Phi(n, n_0)x_0. \tag{2.29}$$

Vérification de l'indépendance linéaire de la matrice fondamentale $\Phi(n)$ pour $n \geq n_0$ est une tâche redoutable. Nous allons plutôt montrer qu'il suffit d'établir indépendance linéaire à n_0.

Lemme 2.2.1 (*Lemme d'Abel*)

pour tout $n \geq n_0 \geq 0$,

$$\det \Phi(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} [\det A(i)]\right) \det \Phi(n_0). \tag{2.30}$$

Preuve. Prenant le déterminant des deux côtés de (2.28), on obtient l'équation aux différence

$$\det \Phi(n+1) = \det A(n) \det \Phi(n),$$

et pour n_0 on obtient

$$\begin{aligned}
\det \Phi(n_0+1) &= \det A(n_0) \det \Phi(n_0), \\
\det \Phi(n_0+2) &= \det A(n_0+1) \det \Phi(n_0+1) = \det A(n_0+1) \det A(n_0) \det \Phi(n_0), \\
&\vdots \\
\det \Phi(n) &= \det A(n-1) \det A(n-2) \cdots \det A(n_0) \det \Phi(n_0),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\det \Phi(n) &= [\det A(n-1) \det A(n-2) \cdots \det A(n_0)] \det \Phi(n_0), \\
&= \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} [\det A(i)] \right) \det \Phi(n_0).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.2 *Si dans (2.25) A est une matrice constante, alors*

$$\det \Phi(n) = [\det A]^{n-n_0} \det \Phi(n_0). \tag{2.31}$$

Preuve. Si A une matrice constante, alors dans l'équation (2.30) on obtient

$$\begin{aligned}
\det \Phi(n) &= \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} [\det A] \right) \det \Phi(n_0), \\
&= (\det A \;\; \det A \cdots \det A) \det \Phi(n_0), \\
&= [\det A]^{n-1-n_0+1} \det \Phi(n_0), \\
&= [\det A]^{n-n_0} \det \Phi(n_0).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.3 *La matrice fondamentale $\Phi(n)$ est inversible pour tout $n \geq n_0$ si et seulement si $\Phi(n_0)$ est inversible.*

Preuve. De la formule (2.30), si $\Phi(n_0)$ est inversible et on a dans l'équation (2.25) $A(n)$ est une matrice inversible, donc $\det A(i) \neq 0$ pour $i \geq n_0$, alors $\Phi(n)$ est inversible. ■

Corollaire 2.2.4 *Les solutions $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ de (2.25) sont linéairement indépendants pour $n \geq n_0$ si et seulement si $\Phi(n_0)$ est inversible.*

Preuve. Ce la résulte du corollaire 2.2.3. ■

Le théorème suivant établit l'existence de k solutions linéairement indépendants de (2.25).

Théorème 2.2.4 *Il ya k solutions linéairement indépendantes de système (2.25) pour $n \geq n_0$.*

Preuve. Pour chaque $i = 1, 2, ..., k$, soit $e_i = (0, 0, ..., 1, ..., 0)^T$ le vecteur unitaire standard dans $\mathbb{R}^k$ où toutes les composantes sont nulles l'exception de l'ième composante, qui est égale à 1. D'après le théorème (2.2.1), pour chaque e_i, $1 \leq i \leq k$, il existe une solution $x(n, n_0, e_i)$ de (2.25) avec $x(n_0, n_0, e_i) = e_i$. Pour prouver que l'ensemble $\{x(n, n_0, e_i)$, $1 \leq i \leq k\}$ est linéairement indépendant, selon Corollaire (2.2.3), il suffit de montrer que $\Phi(n_0)$ est inversible. Mais ce fait est évident, puisque $\Phi(n_0) = I_{\mathbb{R}}$. ■

Principe de Linéarité : Une caractéristique importante des solutions du système (2.25) est qu'ils sont fermés, par addition et multiplication scalaire

C'est-à-dire, si $x_1(n)$ et $x_2(n)$ sont des solutions de (2.25) et $c \in \mathbb{R}$, alors

(1) $x_1(n) + x_2(n)$ est une solution de (2.25).

(2) $c\ x_1(n)$est une solution de (2.25). C'est le principe de linéarité.

Preuve. (1) Soit

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n).$$

Alors

$$\begin{aligned} x(n+1) &= x_1(n+1) + x_2(n+1) \\ &= Ax_1(n) + Ax_2(n) \\ &= A\left[x_1(n) + x_2(n)\right] \\ &= Ax(n). \end{aligned}$$

(2) Soit

$$x(n) = c\, x_1(n).$$

Alors

$$\begin{aligned} x(n+1) &= c\, x_1(n+1) \\ &= c\, Ax_1(n) \\ &= A\left[cx_1(n)\right] \\ &= Ax(n). \end{aligned}$$

■

Une conséquence immédiate du principe de linéarité est que si $x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)$ sont également des solutions de système (2.25), il est tout combinaison linéaire de la forme

$$x(n) = c_1x_1(n) + c_2x_2(n) + \cdots + c_kx_k(n),$$

est une solution de (2.25).

Cela conduit à la définition suivante.

Définition 2.2.3 *Supposons que $\{x_i(n)\}_{i=1}^{k}$ est une ensemble linéairements indépendants des* *solutions de (2.25) donc la solution général de (2.25)*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i(n), \tag{2.32}$$

tel que $c_i \in \mathbb{R}$ et au moins un $c_i \neq 0$.

Formule (2.32) peut s'écrire

$$x(n) = \Phi(n)c, \tag{2.33}$$

où $\Phi(n) = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n))$ est une matrice fondamentale, et $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)^T$ $\in \mathbb{R}^k$.

Remarque 2.2.5 *L'ensemble S l'éspace des solutions de système (2.25) forme un espace vectoriel par rapport à addition et multiplication par un scalaire. Sa base est tout ensemble fondamental de solutions et donc sa dimension est k. La base $\{x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)\}$ couvre toutes les solutions de l'équation (2.25). Par conséquent, tout solution $x(n)$ de l'équation (2.25) peut s'écrire sous la forme (2.32) ou équivalente (2.33). C'est pourquoi nous appelons $x(n)$ dans (2.32) une solution générale.*

Concentrons-nous maintenant notre attention sur le système non homogène (2.26).

Nous définissons une solution particulière $y_p(n)$ de (2.26) que toute fonction k-vecteur

qui satisfait le système de différence non homogène. Le résultat suivant

nous donne un mécanisme pour trouver la solution générale de système (2.26).

Théorème 2.2.6 *Toute solution $y(n)$ de (2.26) peut être écrite comme*

$$y(n) = \Phi(n)c + y_p(n) \tag{2.34}$$

pour un choix approprié du c vecteur constante, et $y_p(n)$ une solution particulière .

Preuve. Soit $y(n)$ une solution de (2.26) et soit $y_p(n)$ solution particulier de (2.26). Si

$$x(n) = y(n) - y_p(n),$$

alors

$$\begin{aligned} x(n+1) &= y(n+1) - y_p(n+1) \\ &= A(n)y(n) - A(n)y_p(n) \\ &= A(n)\left[y(n) - y_p(n)\right] \\ &= A(n)x(n). \end{aligned}$$

Donc, $x(n)$ est une solution de l'équation homogène (2.25). D'où $x(n) = \Phi(n)c$ pour un vecteur constant c. Alors

$$y(n) - y_p(n) = \Phi(n)c$$

ce qui prouve (2.34). ■

Nous donnons maintenant une formule pour évaluer $y_p(n)$.

Lemme 2.2.2 *Une solution particulière de (2.26) peut être donnée par*

$$y_p(n) = \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r) \text{ avec } y_p(n_0) = 0$$

Preuve. Soit

$$\begin{aligned} y_p(n+1) &= \sum_{r=n_0}^{n} \Phi(n+1, r+1)g(r) = \sum_{r=n_0}^{n} A(n)\Phi(n, r+1)g(r), \\ &= \sum_{r=n_0}^{n-1} A(n)\Phi(n, r+1)g(r) + A(n)\Phi(n, n+1)g(n), \end{aligned}$$

$$= A(n)\sum_{r=n_0}^{n-1}\Phi(n,r+1)g(r) + \Phi(n+1,n+1)g(n),$$
$$= A(n)y_p(n) + g(n).$$

Donc, $y_p(n)$ est une solution de (2.26). En outre, $y_p(n_0) = 0$. ■

Théorème 2.2.7 *(Variation des constantes). La solution uniques du problème aux limite*

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n),\ y(n_0) = y_0, \tag{2.35}$$

est donnée par

$$y(n,n_0,y_0) = \Phi(n,n_0)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\Phi(n,r+1)g(r). \tag{2.36}$$

ou, plus explicitement, par

$$y(n,n_0,y_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1}A(i)\right)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1}A(i)\right)g(r). \tag{2.37}$$

Preuve. Du théorème (2.2.6) et Lemme (2.2.2).

on a la solution de l'équation (2.35) donnée par

$$y(n) = \Phi(n)c + y_p(n),$$

tel que

$$y_p(n) = \sum_{r=n_0}^{n-1}\Phi(n,r+1)g(r),\ \text{et}\ x(n,n_0,x_0) = \Phi(n,n_0)x_0,$$

donc

$$\begin{aligned} y(n,n_0,y_0) &= \Phi(n,n_0)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\Phi(n,r+1)g(r), \\ &= \Phi(n)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\Phi(n,r+1)g(r), \end{aligned}$$

et

$$\Phi(n,n_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1}A(i)\right) \textit{ alors } \Phi(n,r+1) = \left(\prod_{i=r+1}^{n-1}A(i)\right),$$

alors

$$y(n,n_0,y_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1}A(i)\right)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1}A(i)\right)g(r).$$

■

Corollaire 2.2.5 *Pour les systèmes autonomes, lorsque A est une matrice constante,la solution de (2.35) est donnée par*

$$y(n,n_0,y_0) = A^{n-n_0}y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}A^{n-r-1}g(r). \tag{2.38}$$

Exemple 2.2.1 *Considérons le système $y(n+1) = Ay(n) + g(n)$, où*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ g(n) = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix},\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'algorithme de Putzer, nous trouvons

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{r=0}^{n-1}\begin{pmatrix} 2^{n-r-1} & (n-r-1)\,2^{n-r-2} \\ 0 & 2^{n-r-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{r=0}^{n-1}\begin{pmatrix} r2^{n-r-1} + (n-r-1)\,2^{n-r-2} \\ 2^{n-r-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sum\limits_{r=1}^{n-1} r\left(\frac{1}{2}\right)^r + \frac{n-1}{4}\sum\limits_{r=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^r \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{r=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^r \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{n-1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} -\frac{n}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n2^{n-1} - \frac{3}{4}n \\ 2^n - 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n + n2^{n-1} - \frac{3}{4}n \\ 2^n - 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nous revisitons maintenant a les équations aux différence d'ordre k et montrons comment transformer à un système des équations aux différence de premier ordre.

Conséderon l'équation :

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n). \tag{2.39}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations de premier ordre de dimension k. Soit

$$\begin{aligned}
z_1(n) &= y(n),\\
z_2(n) &= y(n+1) = z_1(n+1),\\
z_3(n) &= y(n+2) = z_2(n+1),\\
&\vdots\\
z_k(n) &= y(n+k-1) = z_{k-1}(n+1).
\end{aligned}$$

Soit $z(n) = (z_1(n), z_2(n), \ldots, z_k(n))$.

Donc,

$$\begin{aligned}
z_1(n+1) &= z_2(n),\\
z_2(n+1) &= z_3(n),\\
&\vdots\\
z_{k-1}(n+1) &= z_k(n),\\
z_k(n+1) &= -p_k(n)z_1(n) - p_{k-1}(n)z_2(n), \ldots, -p_1(n)z_k(n) + g(n).
\end{aligned}$$

En notation vectorielle, nous transcrivons ce système

$$z(n+1) = A(n)z(n) + h(n), \tag{2.40}$$

où

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\
-p_k(n) & -p_{k-1}(n) & -p_{k-2}(n) & \cdots & -p_1(n)
\end{pmatrix} \tag{2.41}$$

et

$$h(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(n) \end{pmatrix}.$$

Si $g(n) = 0$, nous arrivons au système homogène

$$z(n+1) = A(n)z(n). \tag{2.42}$$

La matrice $A(n)$ est appelée la matrice compagnon de (2.39).

Considérons maintenant l′ équation aux différences homogène d'ordre k avec à coefficients constantes

$$x(n+k) + p_1 x(n+k-1) + p_2 x(n+k-2) + \cdots + p_k x(n) = 0, \tag{2.43}$$

qui est équivalent au système où A est la matrice compagnon défini dans la formule (2.41) avec tout les p_i est constante

$$z(n+1) = Az(n). \tag{2.44}$$

Nous observons tout d'abord que de (2.43) est notée $C(n) = \det \Phi(n)$, où $\Phi(n)$ est une matrice fondamentale de (2.44). L'équation caractéristique de A est donnée

par

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \cdots + p_{k-1}\lambda + p_k.$$

2.2.2 Systèmes linéaires périodiques

Définition 2.2.4 *Soit le systéme linéaire*

$$X(n+1) = A(n)X(n). \tag{2.45}$$

On dit que le système(2.45) est périodique de période N si $A(n+N) = A(n)$, pour n un entier positif .

Exemple 2.2.2 *Conséderons le système*

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (-1)^n x_1(n) + \frac{2+(-1)^n}{2} x_3(n) \\ x_2(n+1) = (-1)^n x_2(n) + (-1)^n x_3(n) \\ x_3(n+1) = (-1)^n x_1(n) + \frac{2+(-1)^n}{2} x_3(n) \end{cases}$$

ce système écrit sous la forme $X(n+1) = AX(n)$

tel que

$$A(n) = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & \frac{2+(-1)^n}{2} \\ 0 & (-1)^n & (-1)^n \\ (-1)^n & 0 & \frac{2+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

on a $A(n+2) = A(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, Donc le système (2.45)est périodique de période 2.

Nous montrons maintenant que l'étude du système périodique (2.45) simplifie à l'étude d'un système autonome associée. Cette conclusion est l' analogue de la théorie de Floquet dans les équations différentielles. Mais avant de nous prouvons cette analogue, nous avons besoin du théorème suivant.

Lemme 2.2.3 *Soit B une matrice inversible $k \times k$ et soit m une entier positif. Alors il existe C un matrice $k \times k$ telle que $C^m = B$.*

Preuve. Soit

$$P^{-1}BP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$$

est la forme de Jordan de B. Ecrivons

$$J_i = \lambda_i(I_i + \frac{1}{\lambda_i}N_i),$$

où I_i est la matrice $s_i \times s_i$ d'identité et

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Observer que

$$N_i^{s_i} = 0. \tag{2.46}$$

Pour motiver notre construction, nous écrivons formellement

$$\begin{aligned} H_i &= \exp\left[\frac{1}{m}\ln\ J_i\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{m}\left\{\ln\lambda_i\, I_i + \ln\left(I_i + \frac{1}{\lambda_i}N_i\right)\right\}\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{m}\left\{\ln\lambda_i\, I_i + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}}{s}\left(\frac{N_i}{\lambda_i}\right)^s\right\}\right] \\ &= \exp\left[\frac{1}{m}\left\{\ln\lambda_i\, I_i + \sum_{s=1}^{s_i-1}\frac{(-1)^{s+1}}{s}\left(\frac{N_i}{\lambda_i}\right)^s + \sum_{s=s_i}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}}{s}\left(\frac{N_i}{\lambda_i}\right)^s\right\}\right]. \end{aligned}$$

En appliquant la formule (2.46), on obtient

$$H_i = \exp\left[\frac{1}{m}\left\{\ln \lambda_i I_i + \sum_{s=1}^{s_i-1} \frac{(-1)^{s+1}}{s}\left(\frac{N_i}{\lambda_i}\right)^s\right\}\right]. \tag{2.47}$$

Par conséquent, H_i est une matrice bien définie. En outre

$$\begin{aligned} H_i^m &= \left[\exp\left[\frac{1}{m}\ln\ J_i\right]\right]^m. \\ &= \exp\left[\ln\ J_i\right] = J_i. \end{aligned}$$

Maintenant, si nous laissons

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & & 0 & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_k \end{pmatrix},$$

où H_i est défini dans la formule (2.47), alors

$$H^m = \begin{pmatrix} H_1^m & & 0 & \\ & H_2^m & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_k^m \end{pmatrix} = J.$$

On pose $C = PHP^{-1}$. Donc $C^m = PH^mP^{-1} = PJP^{-1} = B$. ■

Lemme 2.2.4 *Pour le système (2.45), les déclarations suivantes sont vrais*

(i) *Si* $\Phi(n)$ *est une matrice fondamentale, alors* $\Phi(n+N)$ *est aussi une matrice fondamentale.*

(ii) $\Phi(n+N) = \Phi(n)C$, *pour chaque matrice inversible* C.

(iii) $\Phi(n+N, N) = \Phi(n, 0)$.

Preuve. (i) Soit $\Phi(n)$ une matrice fondamentale du système (2.45). Donc

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n).$$

Alors

$$\begin{aligned}\Phi(n+N+1) &= A(n+N)\Phi(n+N),\\ &= A(n)\Phi(n+N).\end{aligned}$$

D'où $\Phi(n+N)$ est également une matrice fondamentale du système (2.45).

(ii) Observer que $\Psi_1(n,n_0) = \Phi(n+N)\Phi^{-1}(n_0+N)$ et $\Psi_2(n,n_0) = \Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)$ sont des matrices fondamentales de système (2.25) avec le même condition initiale $\Psi_1(n_0,n_0) = \Psi_2(n_0,n_0) = I$. Par l'unicité des matrices fondamentales (Théoreme 2.2.3) $\Psi_1(n,n_0) = \Psi_2(n,n_0)$. Ceci implique que

$$\begin{aligned}\Phi(n+N) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(n_0)\Phi(n_0+N)\\ &= \Phi(n)C.\end{aligned}$$

(iii) Soit

$$\begin{aligned}\Phi(n+N,N) &= \Phi(n+N)\Phi^{-1}(N)\\ &= \Phi(n)C\,\Phi^{-1}(N)\\ &= \Phi(n)\Phi^{-1}(0),\ \text{tel que } C = \Phi^{-1}(0)\,\Phi(N)\ ,\\ &= \Phi(n,0).\end{aligned}$$

■

Il ya beaucoup de conséquences de ce lemme, y compris ce qui suit théorème.

Théorème 2.2.8 *Pour chaque Φ (n) la matrice fondamentale de système(2.45), il existe une* *matrice $P(n)$ inversible périodique de période N de telle sorte que*

$$\Phi(n) = P(n)B^n. \tag{2.48}$$

Preuve. Par le lemme (2.2.3), il existe une matrice B de telle sorte que $B^N = C$, où C est la matrice spécifiées dans le lemme (2.2.4) (ii). Définir $P(n) = \Phi(n)B^{-n}$, où $B^{-n} = (B^n)^{-1}$. puis

$$\begin{aligned}
P(n+N) &= \Phi(n+N)B^{-N}B^{-n} \\
&= \Phi(n)CB^{-N}B^{-n} \ \ [\textit{en utilisant la partie } (ii) \textit{ du lemme } (2.2.4)] \\
&= \Phi(n)B^{-n} \\
&= P(n).
\end{aligned}$$

Nous savons maintenant que $P(n)$ a période N et est clairement inversible. De la définition de $P(n)$, il en résulte que $\Phi(n) = P(n)B^n$. ■

Lemme 2.2.5 *[1]Si $\Phi(n)$ et $\Psi(n)$ sont deux matrices fondamentales de (2.45) de telle sorte que*

$$\Phi(n+N) = \Phi(n)C.$$
$$\Psi(n+N) = \Psi(n)E.$$

Alors C et E sont semblables(et c'est ainsi qu'ils ont les mêmes valeurs propres).

Lemme 2.2.6 *Un certain nombre λ complexe est un exposant de Floquet de (2.45) si et seulement si il existe une solution non triviale de (2.45) de la forme $\lambda^n q(n)$, où $q(n)$ est une fonction vectorielle avec $q(n+N) = q(n)$ pour tout n.*

Corollaire 2.2.6 (i) *Système (2.45) a une solution périodique de période N si et seulement si elle a un multiplicateur de Floquet égal à* 1.

(ii) *Il s'agit d'un multiplicateur de Floquet égal à* -1 *si et seulement si le système (2.45) a une solution périodique de période* 2N.

Preuve. Utilisez le lemme (2.2.6) , si $\lambda = 1$ est un exposant de Floquet donc

$$\begin{aligned} z(n) &= q(n), \\ z(n+N) &= q(n+N) = q(n) \\ &= z(n). \end{aligned}$$

Si $\lambda = (-1)$ donc

$$\begin{aligned} z(n) &= (-1)^n q(n), \\ z(n+2N) &= (-1)^{n+2N} q(n+2N) \\ &= (-1)^n q(n) \\ &= z(n). \end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.9 *Lemme (2.2.4), la partie (ii), nous donne une formule pour trouver la matrice $C = B^N$, dont les valeurs propres se trouvent être les multiplicateurs de Floquet de (2.45). Du lemme (2.2.4),*

$$C = \Phi^{-1}(n)\Phi(n+N).$$

Pour $n = 0$, on obtient

$$C = \Phi^{-1}(0)\Phi(N). \tag{2.49}$$

Si nous prenons $\Phi(N) = A(N-1)A(N-2)\cdots A(0)$, alors $\Phi(0) = I$. Ainsi, la formule (2.49) devient

$$C = \Phi(N)$$

ou

$$C = A(N-1)A(N-2)\cdots A(0). \tag{2.50}$$

Nous donnons maintenant un exemple pour illustrer les résultats ci-dessus.

Exemple 2.2.3 *Considérons le systéme*

$$X(n+1) = A(n)X(n).$$

tel que

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n \\ (-1)^n & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est claire que $A(n+2) = A(n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

En appliquant la formule (2.49)

$$B^2 = C = A(1)A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les multiplicateurs de Floquet sont $-1, -1$. *En vertu du corollaire (2.2.6), le système a une solution de* $4-$*périodique. On notera que puisque* $A(n)$ *présente la constante valeurs propres* $-1, 1$, $\rho(A(n)) = 1$.

CHAPITRE 3

LA SOLUTION DE CERTAINS SYSTÈMES DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES NON LINÉAIRES

Dans ce chapitre, nous étudions la forme des solutions des systèmes des équations aux différences non linéaires suivants :

$$x(n+1) = \frac{u(n)}{1+v(n)}, y(n+1) = \frac{w(n)}{1+s(n)},$$
$$x(n+1) = \frac{1+v(n)}{u(n)}, y(n+1) = \frac{1+s(n)}{w(n)},$$

avec $u(n), v(n), w(n), s(n) \in \{x(n), y(n)\}$, où les conditions initiales $x(0), y(0)$ sont des nombres réels non nuls.

3.1 Premier système

Dans cette section, nous étudions les solutions de système de deux équation aux différences non linéaires suivant

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{u(n)}{1+v(n)}, \\ y(n+1) = \frac{w(n)}{1+s(n)}. \end{cases}$$

avec $u(n), v(n), w(n), s(n) \in \{x(n), y(n)\}$, où $x(0), y(0)$ sont les conditions initiales.

Cas 1 : $u(n) = v(n) = x(n)$, $w(n) = s(n) = y(n)$

Donc ce système peut écrit sous la forme

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{x(n)}{1+x(n)}, & (1) \\ y(n+1) = \frac{y(n)}{1+y(n)}. & (2) \end{cases}$$

On pose :

$$a(n) = \frac{1}{x(n)} \Rightarrow x(n) = \frac{1}{a(n)},$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(n+1)} &= \frac{\frac{1}{a(n)}}{1+\frac{1}{a(n)}} \\ &= \frac{1}{a(n)+1}, \end{aligned}$$

ceci implique que

$$a(n+1) = 1 + a(n), \tag{3.1}$$

alors la solution de l'équation (3.1) est

$$a(n) = a(0) + 1n.$$

Et on a

$$x(n) = \frac{1}{a(n)} \Rightarrow x(0) = \frac{1}{a(0)},$$

donc

$$x(n) = \frac{1}{a(0)+n} = \frac{1}{\frac{1}{x(0)}+n} = \frac{x(0)}{1+x(0)n}$$

$$x(n) = \frac{x(0)}{1+x(0)n}. \tag{3.2}$$

De même, on pose

$$b(n) = \frac{1}{y(n)} \Rightarrow y(n) = \frac{1}{b(n)},$$

En remplaçant par $y(n) = \frac{1}{b(n)}$, on trouve

$$b(n+1) = 1 + b(n), \tag{3.3}$$

alors la solution de (3.3) est

$$b(n) = b(0) + n.$$

tel que

$$y(n) = \frac{1}{b(n)} \Rightarrow y(0) = \frac{1}{b(0)},$$

donc

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{b(0)+n} = \frac{1}{\frac{1}{y(0)}+n} \\ &= \frac{y(0)}{1+y(0)n}. \end{aligned}$$

Cas 2 : $u(n) = v(n) = w(n) = s(n) = x(n)$

Dans ce cas le système est

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{x(n)}{1+x(n)}, & (1) \\ y(n+1) = \frac{x(n)}{1+x(n)}. & (3) \end{cases}$$

On a la solution de l'équation (1) est $x(n) = \frac{x(0)}{1+x(0)n}$ et remplaçant dans (3) on trouve

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \frac{\frac{x(0)}{1+x(0)n}}{1+\frac{x(0)}{1+x(0)n}} \\ &= \frac{x(0)}{1+x(0)(n+1)}, \end{aligned}$$

On pose $n+1 = m$, $\forall\, n$ alors $n = m-1$, donc

$$y(m) = \frac{x(0)}{1+x(0)m} \Rightarrow y(m-1) = \frac{x(0)}{1+x(0)(m-1)}.$$

Donc

$$y(n) = \frac{x(0)}{1+x(0)n}.$$

Alors

$$x(n) = y(n).$$

Cas 3 : $u(n) = v(n) = w(n) = s(n) = y(n)$

Alors le système est

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{y(n)}{1+y(n)}, & (4) \\ y(n+1) = \frac{y(n)}{1+y(n)}. & (2) \end{cases}$$

En remplaçe la solution de l'équation (2) dans (1) alors :

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \frac{\frac{y(0)}{1+y(0)n}}{1+\frac{y(0)}{1+y(0)n}} \\ &= \frac{y(0)}{1+y(0)(1+n)}, \end{aligned}$$

on pose : $n+1=m$ on obtient

$$x(m)=\frac{y(0)}{1+y(0)m}\Rightarrow x(m-1)=\frac{y(0)}{1+y(0)(m-1)}.$$

Donc

$$x(n)=\frac{y(0)}{1+y(0)n}.$$

Alors

$$x(n)=y(n).$$

Cas 4 : $u(n)=x(n)$, $v(n)=w(n)=s(n)=y(n)$

Alors

$$\begin{cases} x(n+1)=\frac{x(n)}{1+y(n)}, & (5)\\ y(n+1)=\frac{y(n)}{1+y(n)}. & (2)\end{cases}$$

On a $y(n)=\frac{y(0)}{1+y(0)n}$, on remplaçe dans l'équation (5), on obtient

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \frac{x(n)}{1+y(n)}=\frac{x(n)}{1+\frac{y(0)}{1+y(0)n}}\\ &= \frac{1+y(0)n}{1+(1+n)y(0)}\,x(n).\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
x(1) &= \frac{x(0)}{1+y(0)},\\
x(2) &= \frac{1+y(0)}{1+2y(0)}x(1) = \frac{1+y(0)}{1+2y(0)}\frac{x(0)}{1+y(0)} = \frac{x(0)}{1+2y(0)},\\
x(3) &= \frac{1+2y(0)}{1+3y(0)}\frac{1+y(0)}{1+2y(0)}\frac{x(0)}{1+y(0)} = \frac{x(0)}{1+3y(0)},\\
&\vdots\\
x(n) &= \frac{1+(n-1)y(0)}{1+(n)y(0)}\frac{1+(n-2)y(0)}{1+(n-1)y(0)}\cdots\frac{x(0)}{1+(1)y(0)} = \frac{x(0)}{1+ny(0)},
\end{aligned}$$

Alors

$$x(n) = x(0)\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1+(i)y(0)}{1+(i+1)y(0)} = \frac{x(0)}{1+ny(0)}.$$

Cas 5 : $u(n) = v(n) = s(n) = x(n)$ et $w(n) = y(n)$

On obtient

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{x(n)}{1+x(n)}, & (1)\\ y(n+1) = \frac{y(n)}{1+x(n)}. & (6)\end{cases}$$

On a $x(n) = \frac{x(0)}{1+x(0)n}$, en remplaçe dans l'équation (6), alors

$$\begin{aligned}
y(n+1) &= \frac{y(n)}{1+\frac{x(0)}{1+x(0)}}\\
&= \frac{1+x(0)n}{1+x(0)+x(0)n}\,y(n).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
y(1) &= \frac{y(0)}{1+x(0)},\\
y(2) &= \frac{1+x(0)}{1+2x(0)}y(1) = \frac{1+x(0)}{1+2x(0)}\frac{y(0)}{1+x(0)} = \frac{y(0)}{1+2x(0)},\\
y(3) &= \frac{1+2x(0)}{1+3x(0)}\frac{1+x(0)}{1+2x(0)}\frac{y(0)}{1+x(0)} = \frac{y(0)}{1+3x(0)},\\
&\vdots\\
y(n) &= \frac{1+(n-1)x(0)}{1+(n)x(0)}\frac{1+(n-2)x(0)}{1+(n-1)x(0)}\cdots\frac{y(0)}{1+(1)x(0)} = \frac{y(0)}{1+nx(0)},
\end{aligned}$$

alors

$$y(n) = y(0)\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1+(i)x(0)}{1+(i+1)x(0)} = \frac{y(0)}{1+nx(0)}.$$

Cas 6 : $u(n) = v(n) = s(n) = y(n)$ et $w(n) = x(n)$

Alors le système est

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{y(n)}{1+y(n)}, & (4)\\ y(n+1) = \frac{x(n)}{1+y(n)}. & (7)\end{cases}$$

On a

$$x(n+1) = \frac{y(n)}{1+y(n)} \Rightarrow x(n) = \frac{y(n-1)}{1+y(n-1)},$$

On remplaçe (4) dans (7) donc

$$\begin{aligned}
y(n+1) = \frac{\frac{y(n-1)}{1+y(n-1)}}{1+y(n)} &= \frac{y(n-1)}{1+y(n-1)}\frac{1}{1+y(n)}\\
&= \frac{y(n-1)}{1+y(n-1)(1+y(n))}.
\end{aligned}$$

On pose

$$y(n) = \frac{1}{a(n)} \Rightarrow y(n-1) = \frac{1}{a(n-1)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{a(n+1)} &= \frac{\frac{\frac{1}{a(n-1)}}{1+\frac{1}{a(n-1)}}}{1+\frac{1}{a(n)}} = \frac{\frac{1}{a(n-1)}}{1+\frac{1}{a(n-1)}}\,\frac{a(n)}{a(n)+1}\\ &= \frac{a(n)}{(a(n-1)+1)(a(n)+1)},\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\frac{a(n+1)}{a(n)+1} = \frac{a(n-1)+1}{a(n)}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{a(2)}{a(1)+1} &= \frac{a(0)+1}{a(1)},\\ \frac{a(3)}{a(2)+1} &= \frac{a(1)+1}{a(2)} = \frac{a(1)}{a(0)+1},\\ \frac{a(4)}{a(3)+1} &= \frac{a(2)+1}{a(3)} = \frac{a(0)+1}{a(1)},\end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} \frac{a(2n+1)}{a(2n)+1} = \frac{a(1)}{a(0)+1} = p\ , \\ \frac{a(2n+2)}{a(2n+1)+1} = \frac{a(0)+1}{a(1)} = q. \end{cases}$$

Ceci implique que

$$\begin{cases} a(2n+1) = p\,a(2n) + p, & (*) \\ a(2n+2) = q\,a(2n+1) + q. & (**) \end{cases}$$

et $a(2n) = q\,a(2n-1) + q$ donc, on remplaçe dans $(*)$ on obtient

$$a(2n+1) = a(2n-1) + 1 + p,$$

alors

$$a(2n+1) = a(1) + n(1+p).$$

Et on remplaçe $(*)$ dans $(**)$, on obtient

$$a(2n+2) = a(2n) + 1 + q,$$

donc

$$a(2n+2) = a(0) + n(1+q).$$

Et ona $y(n) = \frac{1}{a(n)}$, alors

$$\begin{cases} y(2n+1) = \frac{x(0)}{1+nx(0)+(n+1)y(0)}, \\ y(2n) = \frac{y(0)}{1+n(x(0)+y(0))}. \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} x(2n+1) = \frac{y(0)}{1+nx(0)+(n+1)y(0)}, \\ x(2n) = \frac{x(0)}{1+n(x(0)+y(0))}. \end{cases}$$

Cas 7 : $u(n) = w(n) = y(n)$, $v(n) = s(n) = x(n)$

On obtient

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{y(n)}{1+x(n)}, & (8) \\ y(n+1) = \frac{y(n)}{1+x(n)}. & (6) \end{cases}$$

On remarque que $x(n+1) = y(n+1) \Rightarrow x(n) = y(n)$, et on a $y(n) = \frac{y(n-1)}{1+x(n-1)}$ donc

$$x(n+1) = \frac{\frac{y(n-1)}{1+x(n-1)}}{1+x(n)} = \frac{y(n-1)}{(1+x(n-1))(1+x(n))},$$

donc,

$$x(2) = \frac{y(0)}{(1+x(0))(1+x(1))} = \frac{y(0)}{(1+x(0))(1+\frac{y(0)}{1+x(0)})} = \frac{y(0)}{1+x(0)+y(0)},$$

$$x(3) = \frac{y(1)}{(1+x(1))(1+x(2))} = \frac{\frac{y(0)}{1+x(0)}}{(1+\frac{y(0)}{1+x(0)})(1+\frac{y(0)}{1+x(0)+y(0)})} = \frac{y(0)}{1+x(0)+2y(0)},$$

$$\vdots$$

$$x(n) = y(n) = \frac{y(0)}{1+x(0)+(n-1)y(0)}.$$

Cas 8 : $u(n) = w(n) = x(n), et\ v(n) = s(n) = y(n)$

donc

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{x(n)}{1+y(n)}, & (5) \\ y(n+1) = \frac{x(n)}{1+y(n)}. & (7) \end{cases}$$

On a $x(n) = y(n)$ et $y(n) = \frac{x(n-1)}{1+y(n-1)}$, donc

$$x(n+1) = \frac{x(n)}{1+\frac{x(n-1)}{1+y(n-1)}} = \frac{1+y(n-1)}{1+x(n-1)+y(n-1)}\, x(n),$$

Alors

$$x(2) = \frac{1+y(0)}{1+x(0)+y(0)}\, x(1) = \frac{x(0)}{1+x(0)+y(0)},$$

$$x(3) = \frac{1+y(1)}{1+x(1)+y(1)}\, x(2) = \frac{x(0)}{1+2x(0)+y(0)},$$

$$\vdots$$

$$x(n) = y(n) = \frac{x(0)}{1+(n-1)x(0)+y(0)}.$$

Cas 9 : $u(n) = v(n) = y(n)$, et $w(n) = s(n) = x(n)$

Alors

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{y(n)}{1+y(n)}, & (4) \\ y(n+1) = \frac{x(n)}{1+x(n)}. & (3) \end{cases}$$

On a $x(n) = \frac{y(n-1)}{1+y(n-1)}$ donc

$$y(n+1) = \frac{\frac{y(n-1)}{1+y(n-1)}}{1+\frac{y(n-1)}{1+y(n-1)}} = \frac{y(n-1)}{1+2y(n-1)},$$

Alors

$$\begin{cases} y(2n+1) = \frac{y(2n-1)}{1+2y(2n-1)}, \\ y(2n) = \frac{y(2n-2)}{1+2y(2n-2)}. \end{cases}$$

On pose $y(n) = \frac{1}{a(n)}$, *donc*

$$\begin{cases} \frac{1}{a(2n+1)} = \frac{\frac{1}{a(2n-1)}}{1+\frac{2}{a(2n-1)}} = \frac{1}{a(2n-1)+2} \\ \frac{1}{a(2n)} = \frac{\frac{1}{a(2n-2)}}{1+\frac{2}{a(2n-2)}} = \frac{1}{a(2n-2)+2} \end{cases}$$

ceci implique que

$$\begin{cases} a(2n+1) = a(2n-1)+2 \\ a(2n) = a(2n-2)+2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} a(2n+1) = a(1)+2n \\ a(2n) = a(0)+2n \end{cases}$$

et on a $y(n) = \frac{1}{a(n)}$, donc

$$\begin{cases} y(2n+1) = \frac{1}{a(1)+2n}, \\ y(2n) = \frac{1}{a(0)+2n}. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} y(2n+1) = \frac{x(0)}{1+(2n+1)x(0)}, \\ y(2n) = \frac{y(0)}{2y(0)n+1}. \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} y(2n+1) = \frac{y(0)}{1+(2n+1)y(0)}, \\ x(2n) = \frac{x(0)}{2x(0)n+1}. \end{cases}$$

Cas 10 : (Problème ouvert)

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{y(n)}{1+y(n)}, & (4) \\ y(n+1) = \frac{y(n)}{1+x(n)}. & (6) \end{cases}$$

Cas 11 : (Problème ouvert)

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{x(n)}{1+y(n)}, & (5) \\ y(n+1) = \frac{x(n)}{1+x(n)}. & (3) \end{cases}$$

3.2 deuxieme système

Dans cette section, nous étudions les solutions de système de deux équation aux différences suivant

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{1+v(n)}{u(n)}, \\ y(n+1) = \frac{1+s(n)}{w(n)}. \end{cases}$$

avec $u(n), v(n), w(n), s(n) \in \{x(n), y(n)\}$, où les conditions initiales $x(0), y(0)$ sont des nombres réels non nuls.

Lemme 3.2.1 *Soit $F(n)$ la suite de Fibonacci alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lambda_1.$$

Preuve. On a
$$F(n) = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \Rightarrow F(n+1) = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$
De plus, quand n tend vers l'infini, λ_2^n tend vers 0 (puisque $\|\lambda_2\| < 1$), donc $F(n)$ est équivalent à $\frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$ donc
$$\frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{\frac{\lambda_1^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}}{\frac{\lambda_1^n}{\lambda_1-\lambda_2}} = \lambda_1.$$
Alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \lim_{n\to\infty} \lambda_1 = \lambda_1.$$

■

Cas 1 : $v(n) = u(n) = x(n)$ et $s(n) = w(n) = y(n)$

donc ce système peut écrit sous la forme

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{1+x(n)}{x(n)}, & (1) \\ y(n+1) = \frac{1+y(n)}{y(n)}. & (2) \end{cases}$$

On pose $x(n) = \frac{z(n+1)}{z(n)}$ donc

$$\begin{aligned} \frac{z(n+2)}{z(n+1)} &= \frac{1 + \frac{z(n+1)}{z(n)}}{\frac{z(n+1)}{z(n)}} \\ &= \frac{z(n) + z(n+1)}{z(n+1)}, \end{aligned}$$

ceci implique que
$$z(n+2) = z(n+1) + z(n), \tag{3.4}$$

alors la solution de l'équation (3.4) est

$$z(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n.$$

Alors

$$\begin{cases} z(0) = c_1 + c_2, \\ z(1) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{z(1)-z(0)\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \\ c_2 = \frac{z(0)\lambda_1-z(1)}{\lambda_1-\lambda_2} \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} z(n) &= \frac{z(1)-z(0)\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^n + \frac{z(0)\lambda_1-z(1)}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2^n, \\ &= \frac{\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_2\lambda_1^n}{\lambda_1-\lambda_2}z(0) + \frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}z(1), \\ &= \frac{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}}{\lambda_1-\lambda_2}z(0) + \frac{\lambda_1^n-\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}z(1), \\ &= F(n-1)z(0) + F(n)z(1), \text{ tel que } F(n) \text{ la suit de Fibonacci.} \end{aligned}$$

Et on a

$$x(n) = \frac{z(n+1)}{z(n)} \Rightarrow x(0) = \frac{z(1)}{z(0)},$$

Alors

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{F(n+1)z(1) + F(n)z(0)}{F(n)z(1) + F(n-1)z(0)} = \frac{F(n+1)\frac{z(1)}{z(0)} + F(n)}{F(n)\frac{z(1)}{z(0)} + F(n-1)}, \\ &= \frac{F(n+1)x(0) + F(n)}{F(n)x(0) + F(n-1)}. \end{aligned}$$

De même, on pose $y(n) = \frac{z(n+1)}{z(n)}$ donc

$$\frac{z(n+2)}{z(n+1)} = \frac{z(n) + z(n+1)}{z(n+1)},$$

ceci implique que

$$z(n+2) = z(n+1) + z(n), \tag{3.5}$$

alors la solution de l'équation (3.5) est

$$z(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n.$$

Alors

$$\begin{cases} z(0) = c_1 + c_2, \\ z(1) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{z(1)-z(0)\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}, \\ c_2 = \frac{z(0)\lambda_1-z(1)}{\lambda_1-\lambda_2}. \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} z(n) &= \frac{z(1) - z(0)\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^n + \frac{z(0)\lambda_1 - z(1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2^n, \\ &= F(n-1)z(0) + F(n)z(1), \text{ tel que } F(n) \text{ la suit de Fibonacci.} \end{aligned}$$

Et on a

$$y(n) = \frac{z(n+1)}{z(n)} \Rightarrow y(0) = \frac{z(1)}{z(0)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{F(n+1)z(1) + F(n)z(0)}{F(n)z(1) + F(n-1)z(0)} = \frac{F(n+1)\frac{z(1)}{z(0)} + F(n)}{F(n)\frac{z(1)}{z(0)} + F(n-1)}, \\ &= \frac{F(n+1)y(0) + F(n)}{F(n)y(0) + F(n-1)}. \end{aligned}$$

Corollaire 3.2.1 *Chaque solution de* (1) *tend vers* (λ_1, λ_1).

Preuve. On a

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{F(n+1)x(0) + F(n)}{F(n)x(0) + F(n-1)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(n)\left(\frac{F(n+1)}{F(n)}x(0) + 1\right)}{F(n-1)\left(\frac{F(n)}{F(n-1)}x(0) + 1\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{F(n-1)} \left(\frac{\left(\frac{F(n+1)}{F(n)}x(0) + 1\right)}{\left(\frac{F(n)}{F(n-1)}x(0) + 1\right)} \right) = \lambda_1. \end{aligned}$$

■

Cas 2 : $v(n) = u(n) = x(n)$ et $s(n) = w(n) = x(n)$

Donc ce cas le système est

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{1+x(n)}{x(n)}, & (1) \\ y(n+1) = \frac{1+x(n)}{x(n)}. & (3) \end{cases}$$

On a la solution de l'équation (1) est $x(n) = \frac{F(n+1)x(0)+F(n)}{F(n)x(0)+F(n-1)}$ et remplaçant dans (3) on trouve

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \frac{1+\frac{F(n+1)x(0)+F(n)}{F(n)x(0)+F(n-1)}}{\frac{F(n+1)x(0)+F(n)}{F(n)x(0)+F(n-1)}} = \frac{(F(n)+F(n+1))\,x(0)+F(n-1)+F(n)}{F(n+1)x(0)+F(n)}, \\ &= \frac{F(n+2)x(0)+F(n+1)}{F(n+1)x(0)+F(n)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} y(1) &= \frac{F(2)x(0)+F(1)}{F(1)x(0)+F(0)}, \\ y(2) &= \frac{F(3)x(0)+F(2)}{F(2)x(0)+F(1)}, \\ &\vdots \\ y(n) = x(n) &= \frac{F(n+1)x(0)+F(n)}{F(n)x(0)+F(n-1)}. \end{aligned}$$

Cas 3 : $v(n) = u(n) = y(n)$ et $s(n) = w(n) = y(n)$

Donc ce cas le système est

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{1+y(n)}{y(n)}, & (4) \\ y(n+1) = \frac{1+y(n)}{y(n)}. & (2) \end{cases}$$

En remplaçe la solution de l'équation (2) dans (1) alors :

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \frac{1+\frac{F(n+1)y(0)+F(n)}{F(n)y(0)+F(n-1)}}{\frac{F(n+1)y(0)+F(n)}{F(n)y(0)+F(n-1)}} = \frac{(F(n)+F(n+1))\,y(0)+F(n-1)+F(n)}{F(n+1)y(0)+F(n)}, \\ &= \frac{F(n+2)y(0)+F(n+1)}{F(n+1)y(0)+F(n)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
x(1) &= \frac{F(2)y(0) + F(1)}{F(1)y(0) + F(0)}, \\
x(2) &= \frac{F(3)y(0) + F(2)}{F(2)y(0) + F(1)}, \\
&\vdots \\
x(n) = y(n) &= \frac{F(n+1)y(0) + F(n)}{F(n)y(0) + F(n-1)}.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.2.2 *Chaque solution de* (2) *tend vers* (λ_1, λ_1).

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
y(n) = \frac{F(n+1)y(0) + F(n)}{F(n)y(0) + F(n-1)} &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(n)\left(\frac{F(n+1)}{F(n)}y(0) + 1\right)}{F(n-1)\left(\frac{F(n)}{F(n-1)}y(0) + 1\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{F(n-1)} \left(\frac{\left(\frac{F(n+1)}{F(n)}y(0) + 1\right)}{\left(\frac{F(n)}{F(n-1)}y(0) + 1\right)} \right) = \lambda_1.
\end{aligned}$$

■

Cas 4 : $v(n) = u(n) = s(n) = x(n)$ et $w(n) = y(n)$

Alors

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{1+x(n)}{x(n)}, & (1) \\ y(n+1) = \frac{1+x(n)}{y(n)}. & (5) \end{cases} \tag{3.6}$$

On a

$$\begin{aligned}
y(n+2) = \frac{1 + x(n+1)}{y(n+1)} &= \frac{1 + \frac{1+x(n)}{x(n)}}{\frac{1+x(n)}{y(n)}} \\
&= \frac{2x(n) + 1}{1 + x(n)} \frac{y(n)}{x(n)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
y(2) &= \frac{2x(0)+1}{1+x(0)}\frac{y(0)}{x(0)} = x(2)\frac{y(0)}{x(0)},\\
y(3) &= \frac{3x(0)+2}{1+2x(0)}\frac{x(0)}{y(0)} = x(3)\frac{x(0)}{y(0)},\\
y(4) &= \frac{5x(0)+3}{2+3x(0)}\frac{y(0)}{x(0)} = x(4)\frac{y(0)}{x(0)},\\
y(5) &= \frac{8x(0)+5}{3+5x(0)}\frac{x(0)}{y(0)} = x(5)\frac{x(0)}{y(0)},
\end{aligned}
$$

ceci implique que

$$
\begin{cases}
y(2n) = x(2n)\frac{y(0)}{x(0)},\\
y(2n+1) = x(2n+1)\frac{x(0)}{y(0)}.
\end{cases}
$$

Donc

$$
\begin{cases}
y(2n) = \frac{F(2n+1)x(0)+F(2n)}{F(2n)x(0)+F(2n-1)}\frac{y(0)}{x(0)},\\
y(2n+1) = \frac{F(2n+2)x(0)+F(2n+1)}{F(2n+1)x(0)+F(2n)}\frac{x(0)}{y(0)}.
\end{cases}
$$

Alors

$$
y(n) = \frac{F(n+1)x(0)+F(n)}{F(n)x(0)+F(n-1)}\left(\frac{y(0)}{x(0)}\right)^{(-1)^n}.
$$

Corollaire 3.2.3 *Soit* $\{x(n), y(n)\}$ *un solution de* (3.6)*, alors*

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(x(2n), y(2n)) &= \left(\lambda_1, \frac{y(0)}{x(0)}\lambda_1\right),\\
\lim_{n\to\infty}(x(2n+1), y(2n+1)) &= \left(\lambda_1, \frac{x(0)}{y(0)}\lambda_1\right).
\end{aligned}
$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x(2n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F(2n+1)x(0)+F(2n)}{F(2n)x(0)+F(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{F(2n)\left(\frac{F(2n+1)}{F(2n)}x(0)+1\right)}{F(2n-1)\left(\frac{F(2n)}{F(2n-1)}x(0)+1\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{F(2n)}{F(2n-1)} \left(\frac{\left(\frac{F(2n+1)}{F(2n)}x(0)+1\right)}{\left(\frac{F(2n)}{F(2n-1)}x(0)+1\right)} \right) = \lambda_1.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x(2n+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F(2n+2)x(0)+F(2n+1)}{F(2n+1)x(0)+F(2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{F(2n+1)\left(\frac{F(2n+2)}{F(2n+1)}x(0)+1\right)}{F(2n)\left(\frac{F(2n+1)}{F(2n)}x(0)+1\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{F(2n+1)}{F(2n)} \left(\frac{\left(\frac{F(2n+2)}{F(2n+1)}x(0)+1\right)}{\left(\frac{F(2n+1)}{F(2n)}x(0)+1\right)} \right) = \lambda_1.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y(2n) &= \lim_{n\to\infty} x(2n)\frac{y(0)}{x(0)} = \frac{y(0)}{x(0)}\lambda_1,\\ \lim_{n\to\infty} y(2n+1) &= \lim_{n\to\infty} x(2n+1)\frac{x(0)}{y(0)} = \frac{x(0)}{y(0)}\lambda_1.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} (x(2n), y(2n)) = \left(\lambda_1, \frac{y(0)}{x(0)}\lambda_1\right), \\ \lim\limits_{n\to\infty} (x(2n+1), y(2n+1)) = \left(\lambda_1, \frac{x(0)}{y(0)}\lambda_1\right). \end{cases}$$

■

Cas 5 : $v(n) = s(n) = w(n) = y(n)$ et $u(n) = x(n)$

On obtient

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{1+y(n)}{x(n)}, & (6) \\ y(n+1) = \frac{1+y(n)}{y(n)}. & (2) \end{cases} \tag{3.7}$$

De même,

$$\begin{aligned} x(n+2) &= \frac{1+y(n+1)}{x(n+1)} \\ &= \frac{2y(n)+1}{1+y(n)} \frac{x(n)}{y(n)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} x(2) &= y(2)\frac{x(0)}{y(0)}, \\ x(3) &= y(3)\frac{y(0)}{x(0)}, \\ x(4) &= y(4)\frac{x(0)}{y(0)}, \\ x(5) &= y(5)\frac{y(0)}{x(0)}, \end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{cases} x(2n) = y(2n)\frac{x(0)}{y(0)}, \\ x(2n+1) = y(2n+1)\frac{y(0)}{x(0)}. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} x(2n) = \frac{F(2n+1)y(0)+F(2n)}{F(2n)y(0)+F(2n-1)} \frac{x(0)}{y(0)}, \\ x(2n+1) = \frac{F(2n+2)y(0)+F(2n+1)}{F(2n+1)y(0)+F(2n)} \frac{y(0)}{x(0)}. \end{cases}$$

Alors

$$x(n) = \frac{F(n+1)y(0)+F(n)}{F(n)y(0)+F(n-1)} \left(\frac{x(0)}{y(0)}\right)^{(-1)^n}.$$

Corollaire 3.2.4 *Soit* $\{x(n), y(n)\}$ *un solution de* (3.7)*, alors*

$$\lim_{n\to\infty}(x(2n), y(2n)) = \left(\frac{x(0)}{y(0)}\lambda_1, \lambda_1\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}(x(2n+1), y(2n+1)) = \left(\frac{y(0)}{x(0)}\lambda_1, \lambda_1\right).$$

Cas 6 : $v(n) = s(n) = y(n)$ et $u(n) = w(n) = x(n)$

On obtient le système

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{1+y(n)}{x(n)}, & (6) \\ y(n+1) = \frac{1+y(n)}{x(n)}. & (7) \end{cases}$$

On remarque que $x(n+1) = y(n+1) \Rightarrow x(n) = y(n)$, donc

$$x(n+1) = \frac{1+x(n)}{x(n)}.$$

Alors

$$x(n) = y(n) = \frac{F(n+1)x(0) + F(n)}{F(n)x(0) + F(n-1)}.$$

Cas 7 : $v(n) = s(n) = x(n)$ et $u(n) = w(n) = y(n)$

Alors le système est

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{1+x(n)}{y(n)}, & (8) \\ y(n+1) = \frac{1+x(n)}{y(n)}. & (5) \end{cases}$$

On remarque que $x(n+1) = y(n+1) \Rightarrow x(n) = y(n)$, et on a la solution de (5) est

$$y(n) = \frac{F(n+1)x(0) + F(n)}{F(n)x(0) + F(n-1)}\left(\frac{y(0)}{x(0)}\right)^{(-1)^n}.$$

Alors

$$x(n) = y(n) = \frac{F(n+1)x(0) + F(n)}{F(n)x(0) + F(n-1)}\left(\frac{y(0)}{x(0)}\right)^{(-1)^n}.$$

CONCLUSION

Les systèmes des équations aux différences non linéaires sont simples dans son formules, mais difficile de comprendre le comportement de leurs solutions. Dans notre travail, nous étudions le comportement des solutions de certains systèmes des équations aux différences non linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.W. Clark, *A delayed-recruitment model of population dynamics with an application to baleen whale populations*, Journal of mathematical biology 3, (1976), 381-391.

[2] S. Elaydi, *An introduction to difference equation*, Springer 1999.

[3] S. Elaydi, J. Cushing, R. Lasser, V. Papageorgiou, A. Ruffing, W. Van. Assche, *Difference equations, special functions and orthogonal polynomials*, World scientific publishing, 2007.

[4] N. Finizio and G. Ladas, *An introduction to differential equations and difference equations, fourier series, and partial differential equations*, Wadsworth publishing company 1982.

[5] E. A. Grove, G. Ladas, *Periodicities in nonlinear difference equations*, Chapman & Hall/CRC, 2005.

[6] V. L. Kocic, G. Ladas, *Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications*, Kluwer academic publishers, 1993.

[7] M. R. C. Kulenovic, G. Ladas, *Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjectures*, Chapman & Hall/CRC, 2002.

[8] S. Stevic, *On some solvable systems of difference equations*, Applied Mathematics and Computation, 218 (2012) 5010-5018.

[9] Serge Lang, "algebra" , édition spiringer (2002).

[10] D. T. Tollu, Y. Yazlik, N, Taskara, *On fourteen solvable systems of difference equations*, Applied Mathematics and Computation, 233(2014) 310-319.

[11] N. Touafek,Y. Halim, *Global Attractivity of a Rational Difference Equation.* Math. Sci. Lett., 2(3) (2013), 161-165.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude des systèmes des équations aux differences linéaires et le compertement du solutions de sertains systèmes des équations aux differences non linéaires d'ordre un.

Mots clés : *Systèmes des équations aux differences, périordicité, systèmes (non) autonomes.*

Abstract

In This work we study the Systems of linear difference equations and the behavior of solutions for some Systems of nonlinear first-order difference equations.

Keywords **:** *Systems of linear difference equations, periodicity,(non)autonomous systems*.

ملخص

نقوم في هذا العمل بدراسة جمل معادلات الفروق الخطية كما نقوم بدراسة السلوك التقاربي لسلوك حلول بعض جمل معادلات الفروق غير الخطية من الدرجة الأولى.

الكلمات الأساسية : جمل معادلات الفروق، الدورية، جمل مستقلة، جمل مرتبطة.