



N° Réf :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master
en: - Filière mathématiques fondamentales
- Spécialité mathématiques fondamentales et appliquées

Méthode Adaptée Pour La Résolution D'un Programme Linéaire Général

Préparé par : CHAHDANE AMINA
BENSIMESSAOUD SOUAD

Soutenue devant le jury :

Président :	B. BOUFELGHA	Grade	MAB
Examineur :	A. ZAIDI	Grade	MAB
Promoteur :	M. AZI	Grade	MAA

Année universitaire : 2013/2014

Remerciements

Nous tenons à remercier le bon dieu qui nous a donné la force, la patience, le courage, la santé pour pouvoir terminer ce travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et notre remerciement pour nos enseignants du département de mathématique et informatique pendant la période universitaire.

Nous remercions notre encadreur le professeur M.AZI, pour ses conseils précieux, ses critiques et ses directions qui nous ont donné le plaisir de travailler assidument.

Nous remercions tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Enfin nous exprimons notre profonde.

Merci bien

Table des matières

1	Méthode de résolution d'un problème linéaire	4
1.1	La programmation linéaire	4
1.1.1	Formulation mathématique d'un programme linéaire	4
1.1.2	Structure d'un programme linéaire	6
1.2	Résolution d'un problème linéaire	7
1.2.1	Résolution graphique d'un PL	7
1.3	Méthode du simplexe	12
1.3.1	Caractérisation des points extrêmes	13
1.3.2	Critère d'optimalité	14
1.3.3	Algorithme du simplexe	17
1.4	La Dualité en programmation linéaire	25
1.4.1	Critère d'optimalité	30
1.4.2	Algorithme dual du simplexe	33
2	Méthode adaptée pour la résolution d'un problème linéaire standard	37
2.1	Position du problème et définitions	37
2.2	Critère d'optimalité	39
2.3	Critère de suboptimalité	41
2.4	Algorithme de la méthode	42
2.5	Exemple numérique	45
3	Méthode adaptée pour la résolution d'un problème linéaire général	48
3.1	Position du problème et définitions	48
3.2	Critère d'optimalité	50
3.3	Critère de suboptimalité	51
3.4	Algorithme de la méthode	52
3.4.1	Changement du plan	53
3.4.2	Changement de support	56
3.5	Exemple numérique	59

Table des figures	65
Table des tableaux	66
Bibliographie	67

Introduction Générale

La programmation linéaire est une branche des mathématiques qui étudie la résolution optimale de certains problèmes décisionnels. Elle est utilisée en particulier pour l'allocation des ressources limitées en vue d'atteindre des objectifs fixés.

Historiquement la programmation linéaire a une autre dimension de la méthode du simplexe. Cette méthode a été développée en 1947 par George Bernard Dantzig, Marshall Wood et leurs collaborateurs au U.S. Département of the Air Force. Actuellement, il existe d'autres méthodes concurrentes à titre d'exemple : la méthode adaptée, et la méthode de point intérieure.

Outre une introduction, ce travail s'articule autour de trois chapitres. Le premier chapitre traite trois méthodes de résolution d'un problème linéaire : la méthode graphique ; la méthode du simplexe, ainsi que la méthode dual-simplexe. Le deuxième chapitre est consacré à la résolution des problèmes de programmation linéaire avec contraintes d'égalité à variables bornées par la méthode adaptée qui est une généralisation de la méthode du simplexe. Le troisième chapitre, noyau de ce mémoire, est consacré à la résolution des problèmes de programmation linéaire avec contraintes générales, avec la méthode adaptée. Cette méthode se base sur deux procédures essentielles : la première est le changement de la solution réalisable x par $\bar{x}$; la deuxième procédure est le changement de support Q_B par $\overline{Q}_B$ de façon à changer tous les variables non basiques à la fois. En-fin, ce mémoire se termine par une conclusion générale et un bibliographe.

Chapitre 1

Méthode de résolution d'un problème linéaire

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la formulation mathématique des problèmes de programmation linéaire, par la suite, nous exposons trois méthodes de résolution qui sont la méthode graphique qui est employée pour résoudre les problèmes de dimension deux ou trois ; la méthode du simplexe qui est la méthode classique la plus courante, et en fin la méthode dual-simplexe.

1.1 La programmation linéaire

La programmation linéaire est une branche des mathématiques appliquées qui permet de trouver la solution optimale de certains problèmes, elle est utilisée en particulier, dans l'industrie et dans la planification économique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts.

1.1.1 Formulation mathématique d'un programme linéaire

Il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire un modèle de programmation linéaire :

- 1) Identifier des variables de décision, on suppose dans un premier temps que ces variables peuvent prendre n'importe quelle valeur positive.
- 2) Identifier les contraintes du problème et les exprimer par un système d'équation et/ou d'inéquation linéaire par rapport aux variables de décision.

- 3) Identifier la fonction à optimiser (la fonction objectif) et la représenter sous une forme linéaire par rapport aux variables de décision. De plus, il faut spécifier si la fonction objectif est à maximiser ou à minimiser.

Exemple :

Une compagnie spécialisée dans la production de deux types de produits : des climatiseurs et des ventilateurs. Les deux produits nécessitent un certain nombre d'heures machine, et certaine nombre d'heures de main d'oeuvre. Le tableau suivant donne l'information nécessaire sur les deux produits, c'est-à-dire les nombres d'heures machine et d'heures main d'oeuvre nécessaires à la fabrication d'une unité de chacun de ce produit ainsi que le profit généré par la production d'une unité de ce produit. Le tableau nous donne, de plus, le nombre total d'heures machines et d'heures main d'oeuvre disponible.

	Heures machine	Main d'oeuvre	profit
Climatiseur	2h/unité	3h/unité	25 DA/unité
Ventilateur	2h/unité	1h/unité	15 DA/unité
Total disponible	240 h	184 h	

Formulation mathématique du problème

1) Variables de décision :

La compagnie veut trouver le nombre de climatiseurs et de ventilateurs à produire pour maximiser le profit. Ceci nous amène à choisir les deux variable de décision suivantes :

x_1 : nombre de climatiseurs à produire.

x_2 : nombre de ventilateurs à produire .

2) Contraintes du modèle :

Les conditions sur les ressources impose les contraintes suivantes :

1) Contraintes heures machine $2x_1 + 2x_2$

2) Contrainte main d'oeuvre $3x_1 + x_2$

3) Contraintes de non-négative (exprimant que les niveaux d'activité ne peuvent être négatifs) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

3) La fonction objectif :

l'objectif de l'entreprise est de déterminer le programme de production qui maximisera son profit. La fonction objectif s'écrit alors :

$$\text{Maximiser } Z = 25x_1 + 15x_2.$$

$$\text{En effet, le modèle complet est le suivant : } (P) \begin{cases} \max Z = 25x_1 + 15x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ 3x_1 + x_2 \leq 148 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1.1.2 Structure d'un programme linéaire

Un programme linéaire (PL) s'écrit sous l'une des deux formes suivantes :

a) La forme canonique :

$$(p) \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où : $x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, A : (m \times n)$ matrice réelle.

b) La forme standard :

$$(p) \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où : $x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, A : (m \times n)$ matrice réelle.

Remarques :

- 1- On peut vérifier facilement l'équivalence entre les deux formes précédentes. En effet, toute inégalité peut être transformée en une égalité par une addition d'une variable positive, dit variable d'écart comme suit :

$$a_i^T x \leq b_i \quad \Rightarrow \quad a_i^T x + e_i = b_i \quad e_i \geq 0.$$

Et pour toute contrainte d'égalité équivalant à deux contraintes d'inégalités comme suit :

$$a_i^T x = b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_i^T x \leq b_i \\ -a_i^T x \leq -b_i \end{cases}.$$

- 2- Pour trouver une solution optimale x^* d'un problème de minimisation, il suffit de multiplier la fonction objectif Z par (-1) , prendre $\max Z = \min(-Z)$ et la valeur optimale s'obtient par : $\max Z(x^*) = -\min(-Z(x^*))$.

1.2 Résolution d'un problème linéaire

1.2.1 Résolution graphique d'un PL

L'objet principale, de cette section est de proposer une méthode de résolution d'un problème linéaire à deux variables de décision. La méthode consiste à délimiter l'intersection des demi-plans représentant les inéquations des contraintes et la recherche sur le bord de ce domaine des points donnant l'optimum de La fonction objectif.

Définition 1 Une solution x est dite **réalisable** (admissible) si elle vérifie toutes les contraintes.

Définition 2 On appelle **domaine réalisable** (admissible), l'ensemble S des solution réalisable (admissible) du problème.

Définition 3 On appelle **solution optimale** toute solution réalisable donnant la meilleure évaluation de La fonction objectif.

Technique de résolution graphique d' un PL

Il existe deux méthodes de résolution graphique d' un PL qui sont :

- **Première méthode :**

1. Représenter les lignes de contraintes et l'ensemble des solutions réalisables ;
2. Localiser la solution optimale ;
3. Calculer la solution optimale.

1. Représentation les lignes des contraintes et l'ensemble des solutions réalisables :

Le domaine hachuré représente le domaine du plan formé par l'ensemble des points vérifiant toutes les contraintes (l'ensemble des solutions réalisables).

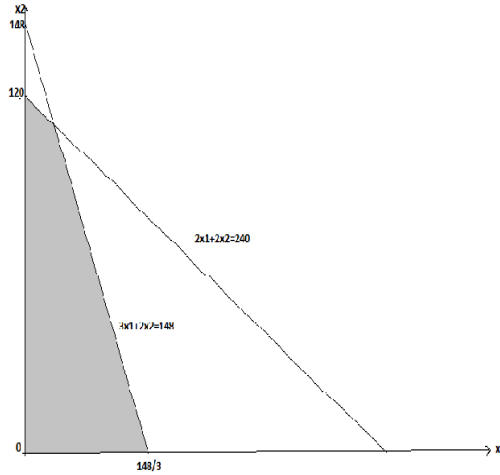


FIGURE 1.1 – Ensemble des solutions réalisables

2. Localisation de la solution optimale : Soit le problème de maximisation précédent :

$$(p) \begin{cases} \max Z = 25x_1 + 15x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ 3x_1 + x_2 \leq 148 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Posons $Z = 25x_1 + 15x_2 = K$ qui représente l'équation des courbes de niveau. Donc, pour maximiser Z , on cherchera la plus haute courbe de niveau qui a une intersection non vide avec le domaine des solutions réalisables. Tout point appartenant à cette intersection est une solution optimale.

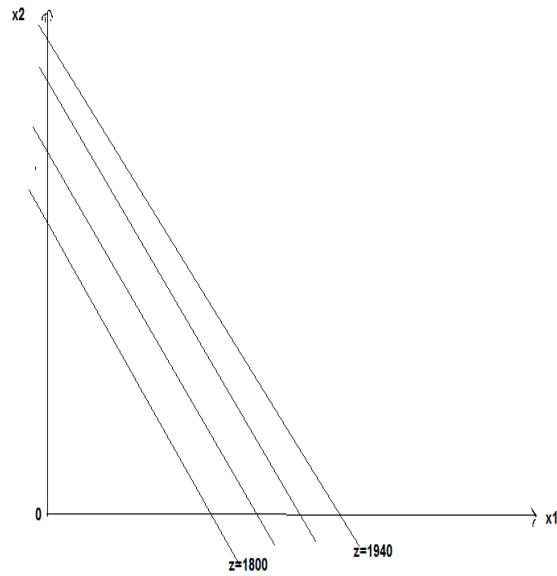


FIGURE 1.2 – Représentation de la fonction objectif

Pour minimiser le problème précédent, c'est-à-dire résoudre le problème P1 :

$$(P1) \begin{cases} \min Z = 25x_1 + 15x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ 3x_1 + x_2 \leq 148 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème de minimisation ne se diffère pas du problème de maximisation que par la recherche de la courbe de niveau qui donne la plus petite valeur à k , tout en satisfaisant toutes les contraintes du modèle.

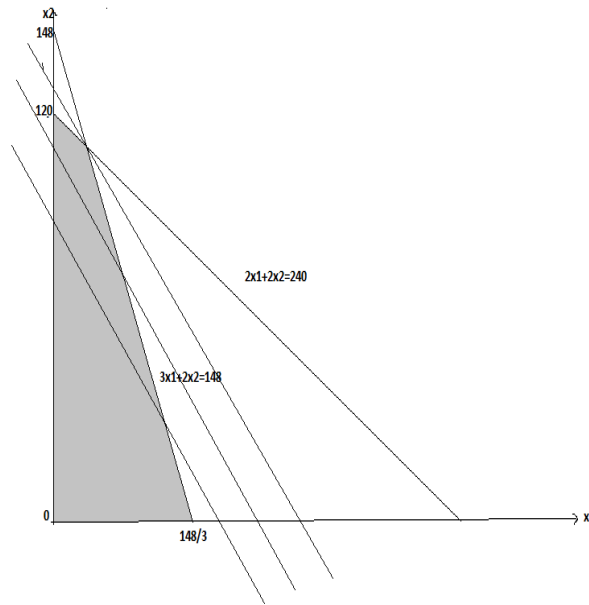


FIGURE 1.3 – Localisation de la solution optimal

3. Calcule de la solution optimale : On a localiser graphiquement la solution optimale. Celle-ci correspond au point d'intersection B des deux droites D et D' d'équation respectives :

$$2x_1 + 2x_2 = 240 \quad \text{et} \quad 3x_1 + x_2 = 148.$$

Donc : $Z(x^*) = \max Z(x) = Z(x_1^* = 14, x_2^* = 106)^T = 1940$.

● **Deuxième méthode :**

Théorème 1.1 : *La fonction objectif d'un PL atteint son maximum (ou minimum) en un point extrême de l'ensemble S des solution réalisable*

Cette théorème nous assure que la solution optimale ne peut être que sur le bord du domaine des solutions réalisables, de plus, elle est dans le cas général donnée par un des points extrêmes correspondant aux intersections des droites de contraintes, ceci nous amène à proposer une deuxième méthode qui consiste à :

1. Représenter les lignes de contraintes et l' ensemble des solutions réalisables.
2. Localiser tous les points extrêmes (les points d'intersection des droites de contraintes).

3. Calculer la valeur de la fonction objectif en chacun de ces points, et sélectionner la solution optimale.

Dans l'exemple précédant, les quatre points extrêmes correspondent aux points suivantes :

$$\begin{pmatrix} O(0, 0) & Z = 0 \\ A(0, 120) & Z = 1800 \\ B(14, 106) & Z = 1940 \\ C(148, 3) & Z = 3700/3 \end{pmatrix}$$

donc la solution optimale est $x^* = (14, 106)$, avec $Z^* = 1940$.

Théorème 1.2 : *Le domaine admissible S d'un PL peut être :*

- *Vide* : Dans un tel cas le problème est non réalisable (et ne possède évidemment pas de solution optimale).
- *Borné (et non vide)* : Le problème possède toujours au moins une solution optimale quelle que soit la fonction objectif.
- *Non borné* : Dans ce cas, selon la fonction objectif :
 - Le problème peut posséder des solutions optimales infinie.
 - Il peut exister des solution admissibles de valeur arbitrairement grande (ou petite), dans un tel cas le PL n'admet pas de solution.

Théorème 1.3 : *Si la fonction objectif atteint son maximum en plusieurs points extrêmes, elle prendra alors cette même valeur maximale en tout point qui est combinaison linéaire convexe de ces points extrêmes.*

Autrement dit, l'ensemble des points maximums est convexe.

Preuve :

On a la fonction $Z(x) = c^T x$ est affine ; alors, supposons $(x^1, x^2) \in S^2$ deux points maximums de Z :

$$\Rightarrow Z(x^1) = Z(x^2) = \max_{x \in S} Z(x).$$

Soit $y = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$, $\lambda \in [0, 1]$, alors :

$$\begin{aligned} Z(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) &= \lambda Z(x^1) + (1 - \lambda)Z(x^2). \\ &= Z(x^1) = Z(x^2). \end{aligned}$$

donc y est un point maximum de Z . En effet, l'ensemble des points maximums forme un ensemble convexe.

1.3 Méthode du simplexe

La méthode du simplexe est une méthode classique créée par l'américain Géorge Danzig en 1947.

Cette méthode est la plus utilisée pour la résolution d'un problème linéaire de la forme standard.

Définitions et résultats fondamentaux

Considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1.1)$$

où : $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A(m \times n)$ matrices réelle.

$I = \{1, 2, \dots, m\}$ ensemble des indices lignes de A (les indices des contraintes).

$J = \{1, 2, \dots, n\}$ ensemble des indices colonnes de A (les indices des variables).

$A = A(I, J) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_j, j \in J)$ ie : a_j sont les colonnes de A .

Avec $\text{rang } A = m \leq n$.

On pose : $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n}\}$.

S est appelé l'ensemble des solutions réalisables (ensemble des contraintes), alors que $Z(x)$ est appelé la fonction objectif.

Le problème (1.1) consiste à trouver un point $x^* \in S$ tel que :

$$Z(x^*) \geq Z(x), \forall x \in S \iff Z(x^*) = \max_{x \in S} Z(x)$$

(x^* est appelé la solution optimale du problème (1.1)).

Définition 4 : On appelle base du problème (1.1) toute sous matrice carrée

$A_B = A(I, J_B)$ où $J_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\} \subset J$, tel que : $\det A_B \neq 0$.

Soit A_B une base du problème (1.1), posons : $J_N = J \setminus J_B$;

Donc : $A = [A_B \mid A_N]$, tel que : $A_N = A(I, J_N)$ est une sous-matrice de A de type $(m, (n - m))$, formée des vecteurs de A qui ne sont pas dans la base A_B , ces vecteurs s'appellent les vecteurs non basiques (ou bien hors base).

De même, on peut partitionner x et c comme suit :

$$x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n), x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}.$$

$$c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n), c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}.$$

x_B est le vecteur de variables de base et x_N est le vecteur de variables hors base, et c_B et c_N sont les vecteurs correspondants respectivement. Avec cette partition on aura :

$$A_B x_B + A_N x_N = b. \quad (1.2)$$

On appelle *solution de base* (associée à la base A_B), la solution particulière de l'équation (1.2) obtenue en posant $x_N = 0$.

Le vecteur x_B est, alors, déterminé d'une façon unique en résolvant le système : $A_B x_B = b$.

Ce qui nous donne : $x_B = A_B^{-1}b$, donc :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est la solution de base.}$$

Une solution de base est dite réalisable si $x_B \geq 0$, c'est-à-dire : $A_B^{-1}b \geq 0$. La base correspondante est appelée base réalisable.

Une solution de base réalisable est dite *dégénérée* si le vecteur $x_B = A_B^{-1}b$ a des composantes nulles, et elle est dite *non dégénérée* ou bien *simple* si :

$$x_B = A_B^{-1}b > 0.$$

1.3.1 Caractérisation des points extrêmes

Théorème(1.1) :

Soit le programme linéaire :

$$(p) \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Soit le polyèdre convexe $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$, alors :

$(x \in S \text{ est une solution de base réalisable}) \Leftrightarrow (x \in S \text{ est un point sommet de } S)$.

Corollaire :

Le polyèdre convexe $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0, \}$ a un nombre fini de points extrêmes qui ne dépasse pas C_n^m .

Autrement dit, le nombre de points extrêmes de $S \leq C_n^m$, où $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

1.3.2 Critère d'optimalité

Formule de l'accroissement de la fonction objectif

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$(P) \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$A = A(I, J)$ avec $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$, et $\text{rang } A = m$. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une solution de base réalisable, et $A_B = A(I, J_B)$ la matrice de base associée, avec J_B l'ensemble des indices de base.

Soient $J_N = J \setminus J_B$, $A_N = A(I, J_N)$, et $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ tel que :
 $x_B = \{x_j, j \in J_B\} = x(J_B)$, $x_N = \{x_j, j \in J_N\} = x(J_N)$;
 $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$, tel que : $c_B = \{c_j, j \in J_B\} = c(J_B)$, $c_N = \{c_j, j \in J_N\} = c(J_N)$.

Introduisons $\bar{x}$ une autre solution de base réalisable quelconque tel que :
 $\bar{x} = x + \Delta x$ alors :

$$\Delta Z = c^T \bar{x} - c^T x = c^T (x + \Delta x) - c^T x = c^T \Delta x,$$

alors on aura :

$$\Delta Z = c^T \Delta x. \quad (1.3)$$

Comme x et $\bar{x}$ sont tout les deux des solutions réalisables alors :

$$\begin{cases} Ax = b \\ A\bar{x} = b \end{cases} \Rightarrow A(x - \bar{x}) = 0 \Rightarrow A \Delta x = 0$$

$$A \Delta x = A_B \Delta x_B + A_N \Delta x_N = 0 \quad (1.4)$$

$$\Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1} A_N \Delta x_N. \quad (1.5)$$

De (1.3) et (1.4) on aura :

$$\Delta Z = c^T \Delta x = c_B^T (-A_B^{-1} A_N \Delta x_N) + c_N^T \Delta x_N.$$

En effet :

$$\Delta Z = -(c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T) \Delta x_N. \quad (1.6)$$

Construisons le vecteur des potentiels $U = U(I) \in \mathbb{R}^m$, donné par :

$$U^T = c_B^T A_B^{-1}, \quad (1.7)$$

et le vecteur des estimations $E = E(J) \in \mathbb{R}^n$, donné par $E^T = U^T A - c^T$, en effet on aura :

$$\begin{cases} E_B^T = E(J_B) = U^T A_B - c_B^T = 0. \\ E_N^T = E(J_N) = U^T A_N - c_N^T. \end{cases} \quad (1.8)$$

De (1.6) et (1.7) on aura :

$$\Delta Z = -(U^T A_N - c_N^T) \Delta x_N = E_N^T \Delta x_N,$$

donc :

$$\Delta Z = - \sum_{j \in J_N} E_j \Delta x_j. \quad (1.9)$$

Critère d'optimalité

Soit x une solution de base réalisable du problème (1.1) avec $A_B = A(I, J_B)$ la base associée.

Théorème(1.2)(Critère d'optimalité)

1) L'inégalité :

$$E_N = E(J_N) \geq 0, \quad (1.10)$$

est suffisante pour l'optimalité de la solution de base réalisable x ;

2) Cette même condition est aussi nécessaire si x est non dégénérée.

Preuve :

1) Montrons que si " $E_N \geq 0 \Rightarrow x$ est une solution optimale".

On a x est une solution de base réalisable alors $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, $x_B \geq 0$ et $x_N = 0$.

Soit $\bar{x}$ une solution de base réalisable quelconque et $\bar{x}_N \geq 0$, alors :

$$\Delta x_N = \bar{x}_N - x_N = \bar{x}_N \geq 0.$$

De (1.9) on a : $\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = -E_N^T \Delta x_N$.

Si $E_N \geq 0$ on aura :

$$\forall x \in S \quad Z(x) \geq Z(\bar{x}),$$

en effet, x est une solution optimale du problème (1.1).

2) Montrons que, si x est une solution optimale non dégénérée du problème (1.1) $\Rightarrow E_N \geq 0$ supposons que x est une solution optimale non dégénérée c'est-à-dire :

$$x_j > 0, \forall j \in J_B. \quad (1.11)$$

Supposons que $E_N \not\geq 0$, c'est-à-dire : $\exists j_0 \in J_N$ tel que $E_{j_0} < 0$.

Construisons, alors, un vecteur $\bar{x}$ de la forme : $\bar{x} = x + \theta l$, avec : $\theta \geq 0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$Al = 0. \quad (1.12)$$

$$l_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j_0 \\ 0 & \text{si } j \neq j_0 \end{cases}, \quad j \in J_N.$$

$l = \begin{pmatrix} l_B \\ l_N \end{pmatrix}$, tel que : $l_B = l(J_B), l_N = l(J_N)$.

On a : $A\bar{x} = Ax + \theta Al = Ax = b$. (car $Al = 0$).

$\bar{x}_B = x_B + \theta l_B$ vérifie les contraintes.

De (1.12) on aura : $Al = Al_B + Al_N = 0$

$$\Rightarrow l_B = -A_B^{-1} A_N l_N,$$

on a : $A_N l_N = a_{j_0}$,

alors :

$$l_B = -A_B^{-1} a_{j_0}. \quad (1.13)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= x_B + \theta l_B \\ &= x_B - \theta A_B^{-1} a_{j_0}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\bar{x}_N = x_N + \theta l_N = \theta l_N \geq 0. \quad (1.15)$$

De (1.14) et (1.11) on déduit que pour un θ suffisamment petit, $\bar{x}_B \geq 0$.

Donc on a :

$$\begin{cases} A\bar{x} = b \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases} \quad \text{alors } \bar{x} \text{ est une solution réalisable du problème (1.1).}$$

De (1.9) on aura :

$$\begin{aligned} \Delta Z &= c^T \bar{x} - c^T x = - \sum_{j \in J_N} E_j^T \Delta x_j \\ &= -\theta \sum_{j \in J_N} E_j^T l_j = -\theta E_{j_0} > 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

en effet, x n'est pas une solution optimale du problème (1.1),

par conséquent, si x est une solution optimale non dégénérée $\Rightarrow E_N \geq 0$.

Condition suffisante pour l'existence d'une solution optimale non borné

Soit le problème :

$$(P) \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Admettons que pour une solution réalisable de base x , le critère d'optimalité (1.10) n'est pas vérifié, c'est-à-dire : $\exists j_0 \in J_N$ tel que : $E_{j_0} < 0$.

On utilise la relation (1.14) et (1.15), si : $A_B^{-1}a_{j_0} \leq 0$ on aura :

$$\begin{cases} \bar{x}_B = x_B - \theta A_B^{-1}a_{j_0} \geq 0, & \forall \theta \geq 0. \\ \bar{x}_N = x_N + \theta l_N \geq 0. \end{cases}$$

Alors, $\bar{x}$ est une solution réalisable $\forall \theta \geq 0$.

De (1.16) on a :

$$\Delta Z = -\theta E_{j_0} \geq 0, \forall \theta \geq 0 \Rightarrow \quad \text{si } \theta \nearrow \quad \text{alors} \quad \Delta Z \nearrow.$$

Théorème(1.3) :

Si parmi les composantes non basiques du vecteur d'estimation E_N , il existe une composante $E_{j_0} < 0$ qui correspond un vecteur $A_B^{-1}a_{j_0} \leq 0$, alors la fonction objectif n'atteint pas son maximum c'est-à-dire : le problème est non borné.

1.3.3 Algorithme du simplexe

Principe de la méthode :

Géométriquement, l'algorithme du simplexe s'interprète comme un cheminement d'un point extrême à un autre adjacent. Algébriquement, la procédure s'interprète comme la détermination d'une suite de la solution de base réalisable jusqu'à ce que le critère d'optimalité soit vérifié.

Amélioration de la fonction objectif

Soit x une solution de base réalisable du problème (P) et $A_B = A(I, J_B)$ la base associé.

- 1) Si le critère d'optimalité (1.10) est vérifié, alors x est une solution optimale du problème (1.1).
- 2) Sinon, deux cas peuvent se représenter :

- i)** $\exists j_0 \in J_N$ telle que : $E_{j_0} < 0$ et $A_B^{-1}a_{j_0} \leq 0$, alors le problème (1.1) est non borné (d'après le théorème(1.3)).
- ii)** Pour $j_0 \in J_N$ tel que : $E_{j_0} < 0$ et le vecteur $A_B^{-1}a_{j_0}$ possède des composantes positives, alors avec l'algorithme du simplexe on construit une nouvelle solution, qui assure un accroissement maximal de la fonction objectif d'après la relation (1.16). Donc, il faudra choisir le nombre θ aussi grand que possible et l'indice j_0 tel que :

$$E_{j_0} = \min[E_j, j \in J_N]. \quad (1.17)$$

On prend θ le plus grand possible tel que le vecteur $\bar{x}$ donné par la relation (1.14) et (1.15) soit une solution réalisable :

$$\begin{cases} \bar{x}_B = x_B - \theta A_B^{-1}a_{j_0}, \\ \bar{x}_N = x_N + \theta l_N \geq 0. \end{cases}$$

Pour cela, il faut avoir :

$$\bar{x}_B = x_B + \theta l_B \geq 0 \Rightarrow \bar{x}_j = x_j + \theta l_j \geq 0, \quad \forall j \in J_B. \quad (1.18)$$

En posant : $A_B^{-1}a_{j_0} = X(J_B) = \{x_{jj_0}, j \in J_B\}$.

De (1.14) on aura :

$$\bar{x}_j = x_j - \theta x_{jj_0}, \quad \forall j \in J_B. \quad (1.19)$$

Pour les $x_{jj_0} > 0$ on doit avoir :

$$\theta \leq \frac{x_j}{x_{jj_0}} \quad \text{pour } j \in J_B. \quad (1.20)$$

Les composantes de $\bar{x}_j$ sont tous positives $\bar{x}_j \geq 0$ (si $x_{jj_0} < 0$). Si $\theta \leq \min\{\theta_j = \frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\}$, alors le vecteur $\bar{x}$ construit avec (1.14) et (1.15) sera une solution réalisable du problème (1.1).

Remarquons que pour $\theta > \min\{\theta_j = \frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\}$ le vecteur $\bar{x}$ aura des composantes négatives, donc il ne sera pas une solution réalisable.

Par conséquent, la plus grande valeur θ^0 telle que : $\bar{x} = x + \theta^0 l$ soit une solution réalisable est :

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = \frac{x_{j_1}}{x_{jj_0}} = \min\{\theta_j = \frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\}. \quad (1.21)$$

Dans le cas où x est une solution de base réalisable non dégénérée, la valeur de θ^0 sera strictement positive et en vertu de la relation (1.16) on aura :

$$Z(\bar{x}) = Z(x) - \theta^0 E_{J_N} > Z(x).$$

Montrons que le vecteur $\bar{x} = x + \theta^0 l$ est solution de base réalisable :

Remarquons que :

$$\bar{x}_j = x_j = 0, j \neq j_0, j \in J_N.$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{j_1} &= x_{j_1} - \theta^0 A_B^{-1} x_{j_0} = x_{j_1} - \theta^0 x_{j_1 j_0} \\ &= x_{j_1} - \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}} x_{j_1 j_0} = 0. \end{aligned}$$

Le vecteur $\bar{x}$ à $(n - m)$ composantes nulles, dont.

$$\bar{x}_j = 0, j \in \bar{J}_N \text{ où } \bar{J}_N = \{(J_N/j_0) \cup j_1\}.$$

$$\bar{A}_B = A(I, \bar{J}_B) \quad \text{avec } \bar{J}_B = \{(J_B/j_1) \cup j_0\} = J/\bar{J}_N.$$

Pour que $\bar{A}_B$ (matrice associé à $\bar{x}_B$) soit une base réalisable, on doit démontrer que les vecteurs $a_j, j \in \bar{J}_B$ sont linéairement indépendants. Posons :

$$\begin{aligned} A_B &= A_B(I, J_B) \\ A_B^{-1} &= A_B^{-1}(J_B, I) = (u_{ij}, i \in J_B, j \in I) \\ A_B A_B^{-1} &= I_m = \sum_{i \in J_B} a_i u_{ij} = e_j, j \in I. \end{aligned} \tag{1.22}$$

On va faire sortir le vecteur a_{j_1} et rentrer a_{j_0} .

$$\begin{aligned} A_B^{-1} a_{j_0} &= X(J_B) \Leftrightarrow a_{j_0} = A_B X(J_B) \\ a_{j_0} &= \sum_{i \in J_B} a_i x_{ij_0}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

De (1.21), (1.23) on déduit :

$$\begin{aligned} a_{j_0} &= \sum_{i \in J_B} a_i x_{ij_0} = a_{j_1} x_{j_1 j_0} + \sum_{i \in J_B/j_1} a_i x_{ij_0} \\ \Rightarrow a_{j_1} &= \frac{a_{j_0}}{x_{j_1 j_0}} - \frac{\sum_{i \in J_B/j_1} a_i x_{ij_0}}{x_{j_1 j_0}}. \end{aligned}$$

De (1.22) on aura :

$$\frac{a_{j_0}}{x_{j_1 j_0}} u_{j_1 j} + \sum_{i \in J_B/j_1} a_i (u_{ij} - \frac{x_{ij}}{x_{j_1 j_0}}) = e_j, j \in I. \tag{1.24}$$

Formons la matrice $\bar{u} = \bar{u}(\bar{J}_B, I) = (\bar{u}_{ij}, i \in \bar{J}_B, j \in I)$;

où :

$$\bar{u}_{ij} = \begin{cases} u_{ij} - \frac{x_{ij_0}}{x_{j_1 j_0}}, & i \neq j_0, i \in \bar{J}_B, j \in I, \\ \frac{u_{j_1 j}}{x_{j_1 j_0}} & \text{si } i = j_0, j \in I. \end{cases} \quad (1.25)$$

De (1.25) on aura : $\sum_{i \in \bar{J}_B} a_i \bar{u}_{ij} = e_j, j \in I$, c'est-à-dire : $A(I, \bar{J}_B) \bar{u} = I_m$.

Ce qui montre que $\bar{A}_B = A(I, \bar{J}_B)$ est inversible et que :

$$\bar{A}_B^{-1} = \bar{u}. \quad (1.26)$$

Remarque 1 : Les éléments $\bar{u}_{ij}$ de la matrice inverse de $\bar{A}_B = A(I, \bar{J}_B)$ sont calculés en fonction de ceux de A_B^{-1} et des composants du vecteur $A_B^{-1} a_{j_0}$.

On peut encore calculer $\bar{A}_B^{-1}$ de la manière suivante :

$$\bar{A}_B^{-1} = A_B^{-1}(\bar{J}_B, I) = D(\bar{J}_B, J_B) A_B^{-1}(J_B, I). \quad (1.27)$$

$$\text{Où : } D = D(\bar{J}_B, J_B) = (d_{ij}, i \in \bar{J}_B, j \in J_B), d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, j \neq j_1, \\ \frac{-x_{ij_0}}{x_{j_1 j_0}} & \text{si } i \neq j_0, j = j_1, \\ \frac{1}{x_{j_1 j_0}} & \text{si } i = j_0, j = j_1. \end{cases}$$

Pour $J_B = \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = j_1, i_{k+1}, \dots, i_m\}$, on posera :

$$\bar{J}_B = \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = j_0, i_{k+1}, \dots, i_m\}.$$

$$D = D(\bar{J}_B, J_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-x_{1j_0}}{x_{j_1 j_0}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{-x_{2j_0}}{x_{j_1 j_0}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{x_{j_1 j_0}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{-x_{mj_0}}{x_{j_1 j_0}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant tous les résultats précédents, l'algorithme du simplexe s'écrit :

Schéma de l'algorithme

Soit J_B les indices de base, avec A_B est inversible et x est une solution de base réalisable.

Etape1 : Calculons $U^T = c_T^B A_B^{-1}$.

Etape2 : Calculons $E_j = U^T a_j - c_j$, $j \in J_N$.

Etape3 : Il y a deux cas :

1. Si : $E_j \geq 0$, $\forall j \in J_N$, alors x est une solution optimale du problème (1.1) , et le processus de résolution est terminé.
2. Sinon : $\exists j_0 \in J_N$ tel que : $E_{j_0} \leq 0$, $E_{j_0} = \min\{E_j, j \in J_N\}$, calculons, alors, le vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} = X(J_B) = (x_{jj_0}, j \in J_B)$,
 - a) Si le vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$, alors, le problème (1.1) est non borné ie :

$$\sup_{x \in X} Z(x) = +\infty, \text{ et le processus est arrêté.}$$

b) Sinon :

- Calculons : $\theta^0 = \theta_{j_1} = \min\left\{\frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\right\} = \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}}$.
- Calculons : $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)$, tel que :

$$\begin{cases} \bar{x}(J_B) = x(J_B) - \theta^0 A_B^{-1} a_{j_0} \\ \bar{x}_j = x_j = 0, j \in (J_N / j_0) \\ \bar{x}_{j_0} = \theta^0. \end{cases}$$

– Posons :

$$J_B = \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = j_1, i_{k+1}, \dots, i_m\}.$$

$$\bar{J}_B = \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = j_0, i_{k+1}, \dots, i_m\}.$$

Calculons A_B^{-1} à l'aide de la relation suivante :

$$\bar{A}_B^{-1} = A_B^{-1}(\bar{J}_B, I) = D(\bar{J}_B, J_B) A_B^{-1}(J_B, I);$$

$$\text{Où } D = D(\bar{J}_B, J_B) = d_{ij}, i \in \bar{J}_B, j \in J_B.$$

$$\text{Avec : } d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{x_{jj_0}} & \text{si } i = j_0, j = j_1, \\ 0 & \text{si } i \neq j, j \neq j_1, \\ \frac{-x_{ij_0}}{x_{j_1 j_0}} & \text{si } i \neq j_0 \text{ et } j = j_1. \end{cases}$$

En posant :

$$\begin{aligned} J_B &= \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = j_1, i_{k+1}, \dots, i_m\}. \\ \overline{J}_B &= \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = j_0, i_{k+1}, \dots, i_m\}. \end{aligned}$$

Etape4 : Aller à l'étape 1 avec $J_B = \overline{J}_B$.

Exemple :

Soit le problème (l'exemple précédent) :

$$(PL) \begin{cases} \max Z = 25x_1 + 15x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ 3x_1 + x_2 \leq 148 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le programme standard de (PL) est :
$$\begin{cases} \max Z = 25x_1 + 15x_2 + 0e_1 + 0e_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + e_1 = 240 \\ 3x_1 + x_2 + e_2 = 148 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0. \end{cases}$$

Posons :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 240 \\ 148 \end{pmatrix}; \quad c^T = (240, 148, 0, 0).$$

On a : $\text{rang } A = 2$. $x^T = (x_1, x_2, e_1, e_2)$; $J = \{1, 2, 3, 4\}$; $I = \{1, 2\}$,

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est la base de départ } \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$J_B = \{3, 4\}, J_N = \{1, 2\}.$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, c_B = (0, 0), c_N = (25, 15).$$

$$\text{On a : } x_B = A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 240 \\ 148 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 148 \end{pmatrix}.$$

Donc : $x^0 = (0, 0, 240, 148)^T$ est une solution de base réalisable de départ associée à A_B .

Itération 1 :

Etape1 : Calculons U^T :

$$U^T = c_B^T A_B^{-1} = (0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0).$$

Etape2 : Calculons E_N :

$$E_N = U^T A_N - c_N = \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ -15 \end{pmatrix} < 0.$$

Etape3 : On a : $E_{j_0} = \min\{E_j, j \in J_N\} = \min\{-25, -15\} = -25 \Rightarrow j_0 = 1$.

Calculons le vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} = A_B^{-1} a_1$:

$$A_B^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

On a : $A_B^{-1} a_1 = \{x_{j_1}, j \in J_B\} > 0$ donc :

– Calculons :

$$\begin{aligned} \theta_{j_1} = \frac{x_{j_1}}{x_{j_1}} &= \min \left\{ \frac{x_j}{x_{j_1}}, x_{j_1} > 0, j \in J_B \right\} = \min \left\{ \frac{240}{2}, \frac{148}{3} \right\} \\ &= \min \left\{ 120, \frac{148}{3} \right\} = \frac{148}{3}. \end{aligned}$$

$$\theta_3 = \frac{148}{3} \Rightarrow j_1 = 4.$$

– Calculons : $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)$.

$$\text{on a : } \bar{x}_B = x_B - \theta_4 A_B^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} 240 \\ 148 \end{pmatrix} - \frac{148}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{424}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{x}_j = x_j = 0, j \in (J_N / \{1\}) \Rightarrow \bar{x}_2 = 0.$$

$$\bar{x}_1 = \theta_4 = \frac{148}{3} \Rightarrow \bar{x}_N = \begin{pmatrix} \frac{148}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc : } \bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{148}{3} \\ 0 \\ \frac{424}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

– Posons :

$$\bar{J}_B = (J_B / j_1) \cup j_0 = \{3, 1\}.$$

$$\bar{J}_N = (J_N / j_0) \cup j_1 = \{4, 2\}.$$

$$\text{Donc : } \bar{A}_B = A(\bar{J}_B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \bar{A}_N = A(\bar{J}_N) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{c}_B^T = c^T(\bar{J}_B) = \begin{pmatrix} 0, 25 \end{pmatrix}, \bar{c}_N^T = c^T(\bar{J}_N) = \begin{pmatrix} 0, 15 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a : } \det \bar{A}_B = 3 - 0 = 3 \neq 0.$$

$$\text{Alors : } \bar{A}_B^{-1} = \frac{1}{\det \bar{A}_B} (\text{conv} \bar{A}_B)^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Itération 2 :

On pose : $J_B = \bar{J}_B = \{3, 1\}$, $J_N = \bar{J}_N = \{4, 2\}$.

$A_B^{-1} = \bar{A}_B^{-1}$, $A_N = \bar{A}_N$, $c_B^T = \bar{c}_B^T$, $c_N^T = \bar{c}_N^T$, $x = \bar{x}$.

Etape1 : Calculons U^T :

$$U^T = c_B^T A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{25}{3} \end{pmatrix}.$$

Etape2 : Calculons E_N :

$$E_N = U^T A_N - c_N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{25}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{20}{3} \end{pmatrix} < 0.$$

Etape3 : On a :

$$E_{j_0} = \min\{E_j, j \in J_N\} = \min\{0, -\frac{20}{3}\} = -\frac{20}{3} \Rightarrow j_0 = 2.$$

Calculons le vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} = A_B^{-1} a_2$:

$$A_B^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

on a : $A_B^{-1} a_2 = \{x_{j_2}, j \in J_b\} > 0$ donc :

– calculons :

$$\begin{aligned} \theta_{j_1} = \frac{x_{j_1}}{x_{j_2}} &= \min \left\{ \frac{x_j}{x_{j_2}}, x_{j_2} > 0, j \in J_B \right\} = \min \left\{ \frac{\frac{424}{3}}{\frac{4}{3}}, \frac{\frac{148}{3}}{\frac{1}{3}} \right\} \\ &= \min\{106, 148\} = 106 = \theta_3 \Rightarrow j_1 = 3. \end{aligned}$$

– Calculons : $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)$:

$$\text{On a : } \bar{x}_B = x_B - \theta_3 A_B^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} \frac{424}{3} \\ \frac{148}{3} \end{pmatrix} - 106 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

De plus : $\bar{x}_j = x_j = 0$, $j \in (J_N/2)$, alors $\bar{x}_4 = 0$;

$$\bar{x}_2 = \theta_3 = 106 \Rightarrow \bar{x}_N = \begin{pmatrix} 106 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc : $\bar{x} = \begin{pmatrix} 14, 106, 0, 0 \end{pmatrix}^T$.

– Posons : $\bar{J}_B = (J_B/j_1) \cup j_0 = \{2, 1\}$.
 $\bar{J}_N = (J_N/j_0) \cup j_1 = \{4, 3\}$.
Donc : $\bar{A}_B = A(\bar{J}_B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\bar{A}_N = A(\bar{J}_N) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 $\bar{c}_B^T = c^T(\bar{J}_B) = \begin{pmatrix} 15, 25 \end{pmatrix}$, $\bar{c}_N^T = c^T(\bar{J}_N) = \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}$.
On a : $\det \bar{A}_B = 6 - 2 = 4 \neq 0$.

$$\bar{A}_B^{-1} = \frac{1}{\det \bar{A}_B} (\text{conv} \bar{A}_B)^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Itération 3 :

On pose :

$$J_B = \bar{J}_B = \{2, 1\}, \quad J_N = \bar{J}_N = \{4, 3\}.$$

$$A_B^{-1} = \bar{A}_B^{-1}, \quad A_N = \bar{A}_N, \quad c_B^T = \bar{c}_B^T, \quad c_N^T = \bar{c}_N^T, \quad x = \bar{x}.$$

Etape1 : Calculons U^T :

$$U^T = c_B^T A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 15, 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5, 20 \end{pmatrix}.$$

Etape2 : Calculons E_N :

$$E_N = U^T A_N - c_N^T = \begin{pmatrix} 5, 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20, 5 \end{pmatrix} > 0$$

$$E_j > 0, \quad \forall j \in \{3, 4\}.$$

Donc : $x^* = (14, 106)$ est une solution optimale de Z , et la valeur optimale $Z(x^*) = \max Z(x) = 25(14) + 15(106) = 1940$.

1.4 La Dualité en programmation linéaire

Nous allons voir qu'il est possible de former à partir d'un programme linéaire un autre qu'est directement lié au premier. Le premier est appelé primal et le second est appelé dual.

La notion du dualité a été introduite par Von Neumann en 1947, puis développé

par Gal, kuhn et Tucker en 1951.

Elle est un concept fondamental en programmation linéaire, elle conduit à un résultat de grande importance théorique et pratique (théorème du dualité).

Formulation du dual d'un programme linéaire :

Considérons le programme linéaire sous forme générale suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \forall i = 1, \dots, h \leq m, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \forall i = h+1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, k \leq n. \\ x_j \in \mathbb{R}, \forall j = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

Alors, le dual du problème (P) par définition est le programme linéaire suivant :

$$(D) \quad \begin{cases} \min \varphi = \sum_{i=1}^m b_i y_i, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \forall j = 1, \dots, k \leq n, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j, \forall j = k+1, \dots, n, \\ y_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, h \leq m. \\ y_i \in \mathbb{R}, \forall i = h+1, \dots, m. \end{cases}$$

La variable $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ est appelée variable dual.

Le programme linéaire (P) est très lié au programme linéaire (D), en effet :

1. Le problème de maximisation dans le primale (P) devient un problème de minimisation dans le dual (D).
2. La matrice des contraintes de (D) est la transposée de la matrice des contraintes de (P).
3. Les coefficients économiques c_j dans (P) deviennent les seconds membres des contraintes dans le (D).
4. A chaque contrainte de (P) de type $(\leq)$ lui correspond une variable dual de signe (≥ 0) .
5. A chaque contrainte de (P) de type $(=)$ lui correspond une variable dual de signe $(\in \mathbb{R})$.

6. A chaque variable de décision positive dans (P), lui correspond une contrainte de type ($\geq$) dans (D).
7. A chaque variable de décision du signe ($\in \mathbb{R}$) dans (P), lui correspond une contraintes de type (=) dans (D).

Trouver le dual d'un problème de programme linéaire :

$$\begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax + \sum_m x_e = b, \\ x \geq 0, x_e \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max Z(\bar{x}) = \bar{c}^T \bar{x} \\ \bar{A}\bar{x} = b, \\ \bar{x} \geq 0. \end{cases}$$

posons :

$$\bar{A} = (A/I_m), \quad \bar{c} = (c/o_m), \quad \bar{x} = (x/x_e)$$

avec I_m matrice identité x_e variable d'écarts.

le dual s'écrit :

$$\begin{cases} \min w(y) = b^T y \\ A^T y \geq c, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Propriétés de la dualité

Le problème primale et son dual ne sont pas distincts, mais ils constituent deux facettes du même problème. En effet, quand on résoud l'un des deux, on aura facilement la solution de l'autre.

Remarque 2 : *Le dual de dual est le primal.*

Théorème 1.4 : *Si x et y deux solutions réalisables du primale et dual respectivement, alors :*

$$Z(x) = c^T x \leq \varphi(y) = b^T y.$$

Preuve :

Soit x solution réalisable de (P), alors :

$$Ax = b, \quad x \geq 0 \Rightarrow y^T Ax = y^T b.$$

Soit y solution réalisable de (D), alors :

$$A^T y \geq c, \quad x \geq 0 \Rightarrow x^T A^T y \geq x^T c \Rightarrow y^T Ax \geq c^T x$$

Donc, on déduit :

$$y^T Ax = y^T b \geq c^T x \Rightarrow y^T b \geq c^T x \Rightarrow \varphi(y) \geq Z(x).$$

Théorème 1.5 : Une solution réalisable du problème primaire x est optimale si et seulement s'il existe une solution réalisable du problème dual y pour laquelle $c^T x = b^T y$. D'où la contradiction avec l'hypothèse.

Théorème 1.6 : (Théorème de la dualité) Étant donné un programme linéaire (P) et le programme dual (D) de (P) alors on a :

- a) si (P) et (D) ont des solutions, alors chacun d'eux a une solution optimale x^* et y^* respectivement et $\max Z(x) = c^T x^* = b^T y^* = \min \varphi(y)$.
- b) si l'un d'eux a un optimum non borné l'autre n'a pas de solution ie :
 - Si (P) admet une solution x et $c^T x$ est non borné alors (D) n'a pas de solution.
 - Si (D) admet une solution y et $b^T y$ est non borné alors (P) n'a pas de solution.

Théorème 1.7 : Le problème possède une solution optimale infinie, alors son dual n'admet pas de solution réalisable.

Preuve :

Supposons que le primal admet une valeur **optimale** infinie, alors il existe toujours une solution réalisable x telle que $c^T x > M$ pour tout $M > 0$. Ainsi si le dual admet une solution réalisable, alors en vertu du théorème(1.4), on aurait $b^T y \geq c^T x$. D'où la contradiction avec l'hypothèse.

Théorème 1.8 (Théorème des écarts complémentaires) :

Une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs réalisables $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ et $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ soient optimaux (dans les programmes primal et dual respectivement) est que leurs composantes vérifient les relations :

$$\begin{cases} x_j^* \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, & \forall j = 1, \dots, n \\ y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, & \forall i = 1, \dots, m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_j^* v_j^* = 0, & \forall j = 1, \dots, n \\ y_i^* e_i^* = 0, & \forall i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Autrement dit, a l'optimum :

1. A toute variable d'écart primaire (duale) positive correspond une variable de décision duale (primaire) nulle .
2. A toute variable de décision primaire (duale) positive correspond une variable d'écart duale (primaire) nulle.

Primal		Dual
<u>variables de décision</u>		<u>variables d'écarts</u>
• $x_j > 0$	$\Rightarrow$	• $v_j = 0$
• $x_j = 0$	$\Leftarrow$	• $v_j > 0$
<u>variables d'écarts</u>		<u>variables de décision</u>
• $e_i > 0$	$\Rightarrow$	• $y_i = 0$
• $e_i = 0$	$\Leftarrow$	• $y_i > 0$

TABLE 1.1 – La relation entre les variables duales et primales.

Passage du dernier tableau du simplexe du primal au dernier tableau du simplexe du dual

Lorsque le primal admet une solution optimale finie, il est facile de construire le dernier tableau simplexe du dual à partir du dernier tableau du simplexe du primal et vice-versa. En effet, il existe une relation très étroite entre les tableaux du simplexe finals au signe près.

Primal		Dual
Ligne $\begin{cases} x_j \\ e_i \end{cases}$ dans la base	=	Colonne $\begin{cases} v_j \\ y_i \end{cases}$ hors base
Colonne $\begin{cases} x_j \\ e_i \end{cases}$ hors base	=	Ligne $\begin{cases} v_j \\ y_i \end{cases}$ dans la base
Ligne E_j	=	Colonne P_0
Colonne P_0	=	Ligne $\varphi_i - b_i$

TABLE 1.2 – Relation entre le dernier tableau de simplexe du primal et dual.

Définition 5 : Soit y^* solution réalisable du problème (D) et $A_B = A(I, J_B)$ une matrice basique telle que $y^{*T} A_B = c_B^T$, $y^{*T} A_N \geq c_N^T$, avec $A_N = A(I, J)$. Alors le vecteur $x^* = (x_B^*, x_N^*) = (A_B^{-1}b, 0)$ pour $A_B^{-1} \geq 0$ est une solution réalisable basique du (P).

On a :

$$c^T x^* = c_B^T x_B^* + c_N^T x_N^* = c_B^T A_B^{-1}b = y_{*T}^T A_B A_B^{-1}b = y^{*T}b \Rightarrow c^T x^* = y^{*T}b$$

donc :

x^* solution optimale de (P) et y^* solution optimale de (D)

Ainsi, il suffit de construire une solution réalisable duale de la forme :

$$A_B^T y = c_B,$$

$$A_N^T y \geq c_N,$$

Cette solution est appelée solution réalisable basique du dual ou bien plan dual basique.

Définition 6 : Une solution réalisable duale y est dite basique avec la matrice duale basique A_B si :

$$\det A_B \neq 0, \quad A_B^T y = c_B, \quad A_N^T y \geq c_N, \quad \text{avec } c_N = c(J_N). \quad (1.28)$$

Une solution réalisable duale basique est dit non dégénéré si dans (1.28) les inégalités sont strictes ie : $A_N^T y > c_N$.

Définition 7 : Le vecteur $\delta = \delta(J)$, avec :

$$\delta = A^T y - c \geq 0 \quad (1.29)$$

associée à la solution réalisable duale est appelée coplan du problème (P).

Le coplan δ est dit basique s'il est associé à une solution réalisable duale basique y .

propriété :

Un coplan basique vérifie toujours la relation $\delta(J_B) = 0$.

Définition 8 : Un coplan basique δ est dit non dégénéré si $\delta(J_N) = \delta_N > 0$.

1.4.1 Critère d'optimalité

Formule d'accroissement de la fonction duale

Soit y une solution réalisable duale basique de (D), avec A_B matrice duale basique quelconque.

Considérons une autre solution réalisable duale (non nécessairement basique) $\bar{y}$.

$$\bar{y} = y + \Delta y.$$

L'accroissement de la fonction duale est :

$$b^T \bar{y} - b^T y = b^T \Delta y.$$

Comme $A_B x_B = b$, alors on aura :

$$\Delta \delta = \bar{\delta} - \delta = A^T \bar{y} - c - A^T y + c = A^T (\bar{y} - y) = A^T \delta y.$$

En effet, $\Delta \delta_B = A_B^T \delta y$.

De plus, $b^T \bar{y} - b^T y = b^T \Delta y = (\Delta y)^T b = (\Delta y)^T A_B x_B$.

Finalement, on aura : $b^T \bar{y} - b^T y = \Delta \delta_B^T x_B$

Critère d'optimalité

Théorème(1.4)(Critère d'optimalité)

Soit y une solution réalisable duale basique de problème (D) associée à la matrice duale basique $A_B = A(I, J_B)$.

Soit $x = (x_B = A_B^{-1}b, x_N = 0)$ le pseudo plan basique correspondant.

1) L'inégalité :

$$x_B \geq 0 \quad (1.30)$$

est suffisante pour l'optimalité de la solution réalisable duale basique y dans le problème(P)

2) La condition (1.30)est aussi nécessaire dans le cas où y est non dégénérée .

Preuve :

1) supposons que le pseudo plan basique $x = (x_B = A_B^{-1}b, x_N = 0)$ vérifie $x_B \geq 0$.

Soit $\bar{y} = y + \Delta y$ une autre solution réalisable dual le coplan $\bar{\delta}$ associée à $\bar{y}$ s'écrit :

$$\bar{\delta} = A^T \bar{y} - c = A^T \Delta y + A^T y - c = A^T \Delta y + \delta,$$

$$\text{donc, } \Delta \delta = \bar{\delta} - \delta = A^T \Delta y.$$

d' où :

$$\Delta \delta(J_B) = \bar{\delta}(J_B) - \delta(J_B) = \bar{\delta}(J_B) = A_B^T \Delta y$$

$$\Delta \delta(J_B) = A_B^T (\bar{y} - y) = A_B^T \bar{y} - A_B^T y \geq 0,$$

en effet, on aura :

$$\Rightarrow \Delta \delta(J_B) \geq 0. \quad (1.31)$$

D'autre part on a :

$$b^T \bar{y} - b^T y = \Delta \delta_B^T x_B = \Delta \delta(J_B)^T x_B \geq 0, \Rightarrow b^T \bar{y} \geq b^T y.$$

En effet, y est une solution optimale de problème (D).

Montrons que, $x = (x_B = A_B^{-1}b, x_N = 0)$ est une solution optimale du problème (P).

On a : $Ax = b, x \geq 0$, alors x est une solution réalisable du problème (P).

En outre on a :

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T x_B = c_B^T A_B^{-1}b \text{ et } A_B^T y = c_B \Rightarrow y^T = c_B^T A_B^{-1}.$$

En effet, $c^T x = y^T b = b^T y$, donc x est une solution optimal du problème (P).

2) Montrons que si y est une solution optimal de problème (D) et y est non dégénérée $\Rightarrow x_B \geq 0$.

Soit y est une solution réalisable du problème (D) non dégénérée, $A_N^T y > c_N$, on a :

$$\delta = A^T y - c \geq 0,$$

avec,

$$\delta_N = A_N^T y - c_N > 0.$$

Supposons que :

$$x_B \not\geq 0 \text{ c'est-à-dire : } \exists i_0 \in J_B / x_{i_1} < 0. \quad (1.32)$$

Construisons une nouvelle solution réalisable du dual $\bar{y} = y + \Delta y$ et son coplan associé $\bar{\delta} = \delta + \Delta \delta$.

Posons :

$$\Delta \delta_j = \begin{cases} \sigma & \text{si } j = i_1 \\ 0 & \text{si } j \neq i_1, \quad j \in J_B. \end{cases} \quad (1.33)$$

On a $\Delta \delta^T = \Delta y^T A$ si et seulement si :

$$\Delta \delta_B^T = \Delta y^T A_B, \quad (1.34)$$

et

$$\Delta \delta_N^T = \Delta y^T A_N. \quad (1.35)$$

Par conséquent on aura : $\Delta y^T = \Delta \delta_B^T A_B^{-1}$,
 $\Delta \delta_N^T = \Delta \delta_B^T A_B^{-1} A_N$ alors :

$$\Delta \delta_j = \Delta \delta_B^T A_B^{-1} a_j \quad j \in J_N. \quad (1.36)$$

En posant : $A_B^{-1} a_j = X = (x_{ij}, i \in J_B)$. La relation (1.36), de vienne,

$$\Delta \delta_j = \sigma x_{i_1 j} \quad j \in J_N, \quad (1.37)$$

d'où le résultat suivant :

$$\bar{\delta} = \delta + \Delta \delta = \begin{cases} \bar{\delta}_j = \delta_j + \sigma x_{i_1 j} & \text{si } j \in J_N \\ \bar{\delta}_j = \delta_j + \sigma & \text{si } j \in J_B, \quad j = i_1 \\ \bar{\delta}_j = \delta_j & \text{si } j \in J_B \setminus \{i_1\}. \end{cases} \quad (1.38)$$

En effet, on peut trouver $\sigma > 0$ (assez petit) talque :

$$\delta_j = \delta_j + \Delta \delta_j \geq 0 \quad \forall j \in J.$$

Ce qui veut dire que, $\bar{\delta}$ est un coplan associé à $\bar{y} = y + \Delta y$.

Donc,

$$b^T \bar{y} - b^T y = \Delta \delta_B^T x_B = \sigma x_{i1} < 0. \quad (1.39)$$

Par conséquent, $b^T \bar{y} < b^T y$. Contradiction avec l'hypothèse que y est une solution optimale, d'où $x_B \geq 0$.

Condition suffisantes pour l'inexistence de solution réalisable dans le problème primal

Supposons y une est solution réalisable basique (plan dual basique) du dual(D), le coplan basique $\delta = A^T y - c$ et le pseudo plan basique, $x = (x(J_B) = A_B^{-1}b, x(J_N) = 0)$.

Le critère d'optimalité $x_B \geq 0$ n'est pas vérifiée c'est-à-dire $\exists i_1 \in J_B / x_{i1} < 0$. Considérons un nouveau plan dual, $\bar{y} = y + \Delta y$, et son coplan associé : $\bar{\delta} = \delta + \Delta \delta$, construit selon la relation (1.34), posons, $A_B^{-1}a_j = (x_{ij}, i \in J_B), j \in J_N$.

Si les composantes

$$x_{i1j}, j \in J_N, \quad (1.40)$$

sont strictement négatives, alors d'après (1.34) $\Delta \delta_j = \sigma x_{i1j} \geq 0 \forall j \in J_N, \forall \sigma \geq 0$, et d'après (1.33) on aura :

$$\Delta \delta_j \geq 0 \quad \forall j \in J_B,$$

d'après (1.40) on aura :

$$b^T \bar{y} - b^T y = (\Delta \delta_B)^T x_B = \sigma x_{i1} < 0 \quad \forall \sigma > 0 \quad \sigma \rightarrow +\infty \text{ c'est-à-dire : la valeur de la fonction duale en } \bar{y} \text{ va décroître infiniment lorsque } \sigma \rightarrow +\infty$$

En appliquant le théorème (1.7) le problème primal n'admet pas de solution réalisable.

Ainsi, la condition suffisante pour l'inexistence de solution réalisable dans le problème primale est la suivante : $x_{i1j} \geq 0 \quad \forall j \in J_N \text{ ou } i_1 \in J_B / x_{i1} < 0$ et x est le pseudo plan associé au plan dual basique y et à la matrice dual basique $A_B = A(I, J_B)$.

1.4.2 Algorithme dual du simplexe

Soit y un plan dual basique aux quel sont associés :

$A_B = A(I, J_B)$ matrice duale basique, $\delta = A^T y - c$ coplan basique, $x = (x(J_B) = A_B^{-1}b, x(J_N) = 0)$ pseudo plan basique.

- 1) Si le critère d'optimalité (1.30) est vérifié alors y est une solution optimale du problème (D).

- 2) Sinon, $\exists i_1 \in J_B/x_{i_1} < 0$ et où les relations (1.40) ne sont pas vérifiées c'est-à-dire : $\forall i \in J_B/x_i < 0 \exists j \in J_N/x_{ij} < 0$.
Posons alors :

$$x_{i_1} = \min\{x_i < 0, i \in J_B\}, \quad (1.41)$$

dans ce cas, calculons le nombre maximum $\sigma \geq 0$ pour le quel le vecteur $\bar{\delta} = \delta + \Delta\delta$ restera un coplan.

Pour

$$\sigma = \sigma_j = -\frac{\delta_j}{x_{i_1 j}} \quad (1.42)$$

on aura :

$$\bar{\delta}_j = \delta_j + \Delta\delta_j = \delta_j + \sigma x_{i_1 j} = 0,$$

pour $\sigma > \sigma_j$ on aura :

$$\bar{\delta}_j = \delta_j + \Delta\delta_j = \delta_j + \sigma x_{i_1 j} = 0 < \delta_j - \delta_j \frac{x_{i_1 j}}{x_{i_1 j}} = 0 \Rightarrow \bar{\delta}_j < 0.$$

Dans ce cas, $\bar{\delta}$ ne sera pas un coplan.

Par conséquent, le nombre maximum $\sigma^0 > 0$ pour lequel le vecteur $\bar{\delta}$ restera un coplan est égal à :

$$\sigma^0 = \sigma_{j_0} = -\frac{\delta_{j_0}}{x_{i_1 j_0}} = \min\{\sigma_j, \sigma_j = \frac{-\delta_j}{x_{i_1 j}}, x_{i_1 j} < 0, j \in J_N\} \quad (1.43)$$

Remarque :

pour un plan dual basique non dégénérée (c'est-à-dire $\delta_N > 0$) le nombre σ^0 et en vertu de la relation (1.40) la fonction dual prendra alors au point $\bar{y}$ la valeur suivante :

$$b^T \bar{y} = b^T y + \sigma^0 x_{i_1} < b^T y.$$

Où $\bar{y} = y + \Delta y$ est le nouveau plan dual et le coplan associé est $\bar{\delta} = \delta + \Delta\delta$
En effet :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\delta}_j = 0, & \text{si } j \neq j_1, j \in J_B. \\ \bar{\delta}_{j_0} = \delta_{j_0} + \sigma^0 x_{i_1 j_0} = 0, \\ \bar{\delta}_{i_1} = \delta_{i_1} + \sigma^0 \geq 0 & \text{si } x_{i_1 j} \geq 0 \\ \bar{\delta}_j = \delta_j + \sigma^0 x_{i_1 j_0} \geq 0 & \text{si } j \in J_N \setminus J_0/x_{i_1 j} \geq 0, \\ \bar{\delta}_j = \delta_j + \sigma^0 x_{i_1 j_0} \geq \delta_j - \frac{\delta_j}{x_{i_1 j}} x_{i_1 j} = 0, & \text{si } j \in J_N \setminus J_0/x_{i_1 j} < 0. \end{array} \right.$$

Par conséquent, le nouveau coplan $\bar{\delta}$ vérifie les relations :

$$\begin{aligned}\bar{\delta}(\overline{J_B}) &= 0 & \overline{J_B} &= (J_B \setminus i_1) \cup j_0, \\ \bar{\delta}(\overline{J_N}) &\geq 0 & \overline{J_N} &= (J_N \setminus j_0) \cup i_1.\end{aligned}$$

Comme le nombre $x_{i_1 j_0} \neq 0$, on peut procéder d'une manière analogue que dans le primal pour démontrer que la nouvelle matrice : $\overline{A_B} = A(I, \overline{J_B})$ est inversible.

Par conséquent, le coplan $\bar{\delta}$ est un coplan dual basique, avec duale basique $\overline{A_B} = A(I, \overline{J_B})$ est la matrice duale basique.

Schéma de l'algorithme :

Soit J_B les indices de base, avec A_B inversible et x solution de base réalisable.

Etape1 : Calculons $A_B = (I, J_B)$.

Etape2 : Calculons $\delta = A^T y - c$.

Etape3 : Calculons $x = x((J_B)) = A_B^{-1} b, x(J_N) = 0$.

Etape4 : Il ya deux cas :

1. Si : $x_{x_j} \geq 0 \forall j \in J_B$ alors y est une solution optimal de (D), et le processus de résolution est terminé.
2. Sinon : $\exists i_1 \in J_B / x_{i_1} < 0$, posons alors :
 $x_{i_1} = \min\{x_i < 0, i \in J_B\}$ i) Calculons :
 $\sigma_j = -\frac{\delta}{x_{i_1 j}}$, et $\sigma^0 = \sigma_{j_0} = -\frac{\delta_{j_0}}{x_{i_1 j_0}}$
 $= \min\{\sigma_j, \sigma_j = \frac{-\delta_j}{x_{i_1 j}}, x_{i_1 j} < 0, j \in J_N\}$
 ii) Calculons : $\bar{\delta}_j$
 – Si $\sigma > 0$, alors $\bar{\delta} = \delta + \Delta\delta$ restera un coplan.
 – Si $\sigma = \sigma_j$, alors $\bar{\delta}_j = \delta_j + \Delta\delta = 0$
 – Si $\sigma > \sigma_j$, $\bar{\delta}_j = \delta_j + \Delta\delta \Rightarrow \bar{\delta}_j < 0$ alors dans ce cas $\bar{\delta}$ sera pas un coplan.

Etape 5 : Aller à 1 avec $\delta = \bar{\delta}$.

Exemple

Réolvons avec l'algorithme dual-simplexe le programme linéaire de l'exemple précédant (D) :

$$\begin{cases} \max Z = 25x_1 + 15x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 240 \\ 3x_1 + x_2 \geq 148 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \max -Z = -25x_1 - 15x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -240 \\ -3x_1 - x_2 + x_4 = -148 \\ x_i \geq 0, i \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(y) = -240y_1 - 148y_2 \\ -2y_1 - 3y_2 \geq -25 \\ -2y_1 - y_2 \geq -15 \\ y_i \geq 0, i \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases} .$$

Base	a_1	a_2	a_3	a_4	P_0
a_3	-2	-2	1	0	-240
a_4	-3	-1	0	1	-148
δ	25	15	0	0	
σ	25/2	15/2			

Base	a_1	a_2	a_3	a_4	P_0
a_2	1	1	-1/2	0	120
a_4	-2	0	-1/2	1	-28
δ	0	0	15	0	
σ	0		30	0	

Base	a_1	a_2	a_3	a_4	P_0
a_2	0	1	-3/4	1/2	106
a_1	1	0	1/4	-1/2	14
δ					
σ					

On a $\min\{-240, -148\} = -240$ donc $j_1 = 3$ et a_3 sort de la base. $\min\{25/2, 15/2\} = 15/2$; donc $j_0 = 2$ et a_2 entre dans la base.

On a $\min\{120, -28\} = -28$ donc $j_1 = 4$ et a_4 sort de la base. On a $\min\{0\} = 0$ donc $j_0 = 1$ et a_1 entre de la base.

Tous les $b_i \geq 0$; le critère d'optimalité est vérifié. La solution optimale est : $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (14, 106, 0, 0)$. et $z^* = 1940$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les méthodes de résolution d'un programme tel que : La méthode graphique ; La méthode du simplexe qu'est un processus qui consiste à faire le passage d'une solution réalisable à une autre jusqu'à atteindre la solution optimale ; finalement la méthode dual-simplexe.

Chapitre 2

Méthode adaptée pour la résolution d'un problème linéaire standard

Introduction

Dans ce chapitre, nous exposons la méthode adaptée développée par R.Gabasso et F.M.Kirillova pour la résolution d'un problème de programmation linéaire avec contrainte d'égalité à variable bornées.

2.1 Position du problème et définitions

Un problème de programmation linéaire à variables bornées se présente sous la forme standard suivante :

$$\begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ d^- \leq x \leq d^+. \end{cases} \quad (2.1)$$

où c, x, d^-, d^+ , sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et $b \in \mathbb{R}^m$;

A est une matrice d'ordre $(m \times n)$, avec $\text{rang} A = m \leq n$.

$I = \{1, 2, \dots, m\}$ est l'ensemble des indices lignes de A (indices des contraintes).

$J = \{1, 2, \dots, n\}$ est l'ensemble des indices colonnes de A (indices des variables).

Nous pouvons, alors noter les différents vecteurs de la manière suivante :

$d^- = d^-(j) = (d_j^-, j \in J)$, $d^+ = d^+(j) = (d_j^+, j \in J)$; $x = x(j) = (x_j, j \in$

J); $c = c(j) = (c_j, j \in J)$

Soit l'ensemble des solutions réalisables (ensemble des contraintes) :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, d^- \leq x \leq d^+\}$$

Définition 9 : Un vecteur x vérifiant les contraintes générales $Ax = b$ et les contraintes simples $d^- \leq x \leq d^+$ est appelé **plan** ou **solution réalisable** du problème (2.1).

Le problème (2.1) consiste à trouver un **plan optimal** $x^0 \in X$, tel que :

$$Z(x^0) \geq Z(x), \forall x \in X \Leftrightarrow Z(x^0) = \max_{x \in X} Z(x).$$

Définition 10 : Soit ε un nombre positif ou nul choisi à l'avance, un plan x^ε est appelée ε -**optimal** ou **suboptimal** si :

$$Z(x^0) - Z(x^\varepsilon) = c^T x^0 - c^T x^\varepsilon \leq \varepsilon.$$

où x^0 est la solution optimale.

Définition 11 : l'ensemble de m indices $J_{sup} \subset J$ est appelé support du problème (2.1) si la sous-matrice $A_{sup} = A(I, J_{sup})$ est inversible.

Le support J_{sup} est le sous-ensemble d'indices de J , telle que quelle que soit le chois des composantes de $x_N = (x_j, j \in J_N)$, $J_N = J \setminus J_{sup}$, les contraintes générales reste satisfaite pour les composantes du vecteur $x_{sup} = (x_j, j \in J_{sup})$.

Réellement, les contraintes générales $Ax = b$ peut être écrit comme suit :

$$A_{sup}x_{sup} + A(I, J_N)x_N = b.$$

alors, cette égalité reste vérifiée pour :

$$x_{sup} = A_{sup}^{-1}(b - A_N x_N), \text{ avec } A_N = A(I, J_N). \quad (2.2)$$

Définition 12 : La paire $\{x, J_{sup}\}$ formée du plan x et du support J_{sup} est appelé **plan de support** ou bien **solution réalisable de support**.

Le plan de support $\{x, J_{sup}\}$ est dit non dégénéré si :

$$d_j^- < x_j < d_j^+, \forall j \in J_{sup}.$$

2.2 Critère d'optimalité

Formule d'accroissement de la fonction objectif :

Soit $\{x, J_{sup}\}$ un plan de support et considérons un autre plan quelconque $\bar{x} = x + \Delta x$. L'accroissement de la fonction objectif s'écrit, alors, comme suit :

$$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = c^T \bar{x} - c^T x = c^T \Delta x. \quad (2.3)$$

On a :

$$A \Delta x = A(\bar{x} - x) = A\bar{x} - Ax = b - b = 0, \quad (2.4)$$

et

$$\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_{sup} \\ \Delta x_N \end{pmatrix}, \Delta x_N = (\Delta x_j, j \in J_N), \Delta x_{sup} = (\Delta x_j, j \in J_{sup}).$$

Alors, on aura :

$$A_{sup} \Delta x_{sup} + A_N \Delta x_N = 0.$$

En effet :

$$\Delta x_{sup} = -A_{sup}^{-1} A_N \Delta x_N. \quad (2.5)$$

En substituant le vecteur Δx dans (2.3) on obtient :

$$\Delta Z = c_{sup}^T \Delta x_{sup} + c_N^T \Delta x_N = -(c_{sup}^T A_{sup}^{-1} A_N - c_N^T) \Delta x_N. \quad (2.6)$$

Définissons le vecteur des potentiels U donnée par :

$$U^T = c_{sup}^T A_{sup}^{-1} \in \mathbb{R}^m.$$

Ainsi que le vecteur des estimations E , avec :

$$E^T = (E_j, j \in J) = c_{sup}^T A_{sup}^{-1} A - c^T = U^T A - c^T. \quad (2.7)$$

Il est clair que toutes les composantes support de E^T sont nulles :

$$E_{sup}^T = c_{sup}^T A_{sup}^{-1} A_{sup} - c_{sup}^T = 0.$$

Les composantes non-support de E^T sont définie comme suit :

$$E_j = U^T a_j - c_j, \quad j \in J_N, \quad (2.8)$$

où a_j est le $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

De (2.6) et (2.7) on aura :

$$\Delta Z = -E_N^T \Delta x_N = - \sum_{j \in J_N} E_j \Delta x_j. \quad (2.9)$$

Le critère d'optimalité

Soit $\{x, J_{sup}\}$ une solution réalisable de support du problème (3.1), E_N est le vecteur des estimation non-support.

Théorème 2.1 :

1. Les relations suivantes sont suffisantes pour l'optimalité d'une solution réalisables $\{x, J_{sup}\}$:

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{si } x_j = d_j^-, \\ E_j \leq 0, & \text{si } x_j = d_j^+, \\ E_j = 0, & \text{si } d_j^- < x_j < d_j^+. \end{cases} \quad j \in J_N; \quad (2.10)$$

2. Ces même relations sont aussi nécessaires dans le cas où la solution réalisable de support $\{x, J_{sup}\}$ est non-dégénérée.

Preuve :

1. **Suffisance :** Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support vérifiant (2.10), pour tout plan $\bar{x}$ du problème (2.1), la formule d'accroissement (2.9) nous donne :

$$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = - \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(\bar{x}_j - d_j^-) - \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(\bar{x}_j - d_j^+)$$

et comme on a :

$$d_j^- \leq \bar{x}_j \leq d_j^+ \Rightarrow \bar{x}_j - d_j^- \geq 0 \text{ et } \bar{x}_j - d_j^+ \leq 0.$$

Donc, on déduit que :

$$Z(\bar{x}) - Z(x) \leq 0 \Rightarrow Z(\bar{x}) \leq Z(x), \forall \bar{x} \text{ plan}$$

alors, le vecteur x est donc un plan (solution) optimal du problème (2.1).

2. **Nécessité :**

Soit $\{x, J_{sup}\}$ un plan de support optimal non-dégénérée, et supposons que les relations (2.10) ne sont pas vérifiées. Alors, il existe au moins un indice $j_0 \in J_N$ tel que $E_{j_0} > 0$ et $x_{j_0} > d_{j_0}^-$ ou bien $E_{j_0} < 0$ et $x_{j_0} < d_{j_0}^+$. Construisons, alors, un autre plan (solution réalisable) $\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta l$, où θ est un nombre réel strictement positif et $l = l(J)$ un vecteur vérifiant :

$$\begin{cases} l_{j_0} = -\text{sign} E_{j_0} \\ l_j = 0, j \neq j_0, j \in J_N \\ l(J_{sup}) = -A_{sup}^{-1} A_N l(J_N) = -A_{sup}^{-1} a_{j_0} l_{j_0} = A_{sup}^{-1} a_{j_0} \text{sign} E_{j_0}. \end{cases}$$

On a :

$$A_{sup}l(J_{sup}) + A_Nl(J_N) = Al = 0 \quad \text{et} \quad A\bar{x} = A(x + \theta l) = Ax + \theta Al = b.$$

Le vecteur $\bar{x}$ vérifie, ainsi, les contraintes générales, alors pour que $\bar{x}$ soit un plan du problème (2.1), il doit aussi vérifier les contraintes simples.

$$d^- \leq \bar{x} \leq d^+ \Leftrightarrow d^- \leq x + \theta l \leq d^+ \Leftrightarrow d^- - x \leq \theta l \leq d^+ - x.$$

En écrivant composante par composante, on obtient :

$$\begin{cases} d_j^- - x_j \leq \theta l \leq d_j^+ - x_j, & j \in J_{sup}; \\ d_{j_0}^- - x_{j_0} \leq -\theta \text{sign} E_{j_0} \leq d_{j_0}^+ - x_{j_0}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Puisque le plan de support $\{x, J_{sup}\}$ est non dégénéré, alors on aura :

$$d_j^- < x_j < d_j^+ \Leftrightarrow d_j^- - x_j < 0 < d_j^+ - x_j, j \in J_{sup}.$$

De plus, on a :

$$\begin{cases} d_{j_0}^- - x_{j_0} < 0, & \text{si } E_{j_0} > 0; \\ d_{j_0}^+ - x_{j_0} > 0, & \text{si } E_{j_0} < 0. \end{cases}$$

Pour un nombre θ strictement positif assez petit, les relations (2.11) seront vérifiées, et le vecteur $\bar{x}$ sera un plan du problème (2.1).

La formule d'accroissement (2.9) nous donne alors :

$$\begin{aligned} Z(\bar{x}) - Z(x) &= - \sum_{j \in J_N} E_j(\bar{x}_j - x_j) = -\theta \sum_{j \in J_N} E_j l_j \\ &= -\theta E_{j_0}(-\text{sign} E_{j_0}) = \theta |E_{j_0}| > 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

On déduit que $Z(\bar{x}) > Z(x)$, ceci contredit le fait que x est un plan optimal du problème (2.1).

Par conséquent, si $\{x, J_{sup}\}$ est un plan optimal non dégénéré, alors les relations (2.10) seront forcément vérifiées.

Définition 13 : La paire $\{x^0, J_{sup}^0\}$ qui vérifie les relation (2.10) est une solution réalisable de support optimale.

2.3 Critère de suboptimalité

Estimation de suboptimalité

Soit $\{x, J_{sup}\}$ un plan de support et choisissons un autre plan $\bar{x} = x + \Delta x$, tel que les composantes non-support de $\bar{x}$ vérifient les contraintes simples :

$$d_j^- \leq \bar{x}_j = x_j + \Delta x_j \leq d_j^+, \quad j \in J_N.$$

d'où :

$$d_j^- - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N.$$

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(x)$ d'un plan de support quelconque, remplaçons, alors, dans la formule d'accroissement (2.3) le vecteur $\bar{x}$ par x^0 , et majorons la valeur de l'expression (2.9) :

$$\begin{aligned} \max \Delta Z(x) &= \max_{\substack{d_j^- - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^+ - x_j \\ j \in J_N}} \left(- \sum_{j \in J_N} E_j \Delta x_j \right) \\ &= \sum_{j \in J_N} \left(\max_{d_j^- - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^+ - x_j} (-E_j \Delta x_j) \right) \\ &= \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j (x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j (x_j - d_j^+). \end{aligned}$$

Posons :

$$\beta(x, J_{sup}) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j (x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j (x_j - d_j^+). \quad (2.13)$$

Par conséquent, on obtient une majoration de l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(x)$, qui est donnée par :

$$Z(x^0) - Z(x) \leq \beta(x, J_{sup}). \quad (2.14)$$

Le nombre réelle $\beta(x, J_{sup})$ défini par (2.13), est appelé *estimation de suboptimalité* du plan de support $\{x, J_{sup}\}$.

Théorème 2.2 (Condition suffisante de suboptimalité) :

Soit $\{x, J_{sup}\}$ un plan de support du problème (2.1), et $\varepsilon \geq 0$ un nombre arbitraire.

Si $\beta(x, J_{sup}) \leq \varepsilon$, alors le plan x est suboptimal(ε - optimal).

2.4 Algorithme de la méthode

Étant donnée un nombre réel positif ou nul quelconque ε et un plan de support initial $\{x, J_{sup}\}$, le but de l'algorithme est de construire un plan ε -optimal x^ε ou carrément optimal x^0 . Une itération de la méthode adaptée consiste à passer d'un plan (solution réalisable) x à un autre $\bar{x}$ telle que :

$$Z(\bar{x}) \geq Z(x).$$

Pour le faire on construit le nouveau plan $\bar{x} = x + \theta l$, $\theta \geq 0$, où l est la direction d'amélioration ($l \in \mathbb{R}^n$) avec $Al = 0$, et θ le pas le long de cette direction.

Pour que l'accroissement $\Delta Z = - \sum_{j \in J_N} E_j(\bar{x}_j - x_j) = -\theta \sum_{j \in J_N} E_j l_j$ soit maximale, il faut choisir θ assez grand que possible et choisir j_1 tel que :

$$|E_{j_1}| = \max_{j \in J_{NN}} |E_j|,$$

où l'ensemble J_{NN} représente le sous ensemble de J_N des indice non optimaux (ne vérifie pas le critère d'optimalité), alors j_1 sera indice de support.

Construction d'une direction d'amélioration adaptée

Considérons la métrique suivante pour les composantes non supports de la direction admissible l :

$$d_j^- - x_j \leq l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N. \quad (2.15)$$

Cette métrique dépend du plan courant x , et de ce fait, elle est dite **adaptée**. Les composantes (2.15) se calculent en rendant maximal l'accroissement de la fonction objectif dans l'espace des variables non supports.

Ainsi, en tenant compte de la métrique (2.15), l'accroissement de la fonction objectif atteint son maximum pour les valeurs des composantes non supports suivantes :

$$l_j = \begin{cases} d_j^- - x_j & \text{si } E_j > 0, \\ d_j^+ - x_j & \text{si } E_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j = 0. \end{cases} \quad j \in J_N. \quad (2.16)$$

En outre, on a :

$$Al = A_{sup}l_{sup} + A_N l_N = 0 \Rightarrow A_{sup}l_{sup} = -A_N l_N.$$

Alors, on aura :

$$l_{sup} = -A_{sup}^{-1} A_N l_N. \quad (2.17)$$

Calcul du pas maximale θ^0

Construisons un nouveau plan $\bar{x}$ sous la forme :

$$\bar{x} = x + \theta^0 l,$$

où l est la direction d'amélioration, définie par (2.16), (2.17) et le nombre θ^0 est le pas le long de cette direction. Ce dernier se calcule de façon à ce que les contraintes générales et simples soient satisfaites. Pour les contraintes simples on doit avoir :

$$d_j^- - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{sup}. \quad (2.18)$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N. \quad (2.19)$$

De (2.16) et (2.19) nous déduisons que :

$$\theta^0 \leq 1.$$

En outre, pour satisfaire les contraintes (2.18). On doit choisir θ^0 tel que :

$$\theta^0 \leq \theta_{j_0}, \quad \theta_{j_0} = \min_{j \in J_{sup}} \theta_j, \quad (2.20)$$

où :

$$\theta_j = \begin{cases} (d_j^+ - x_j)/l_j & \text{si } l_j > 0, \\ (d_j^- - x_j)/l_j & \text{si } l_j < 0, \\ \infty & \text{si } l_j = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

De (2.20), (2.21) la valeur de θ^0 choisie comme suit :

$$\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, 1\}. \quad (2.22)$$

Ce choix va nous assurer que lors du déplacement le long de la direction l , les contraintes (2.18) (2.19) ne seront pas violées, c'est-à-dire il va nous garantir l'admissibilité du nouveau plan $\bar{x}$. Dans ce cas l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur de $Z(\bar{x})$ sera majoré comme suit :

$$Z(x^0) - Z(\bar{x}) = c^T x^0 - c^T \bar{x} = c^T x^0 - c^T x - \theta^0 c^T l \leq \beta(x, J_{sup}) - \theta^0 c^T l. \quad (2.23)$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \beta(x, J_{sup}) - \theta^0 c^T l &= \beta(x, J_{sup}) - \theta^0 (u^T A_{sup} - E^T) l(j) \\ &= \beta(x, J_{sup}) + \theta^0 (E^T l - u^T A_{sup} l) \\ &= \beta(x, J_{sup}) - \theta^0 \beta(x, J_{sup}) = (1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}). \end{aligned}$$

Finalement, nous auront :

$$Z(x^0) - Z(\bar{x}) \leq (1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}). \quad (2.24)$$

De là, trois cas peuvent se présenter :

1. $\theta^0 = 1$: le plan $\bar{x} = x + l$ vérifie le critère d'optimalité, il est donc optimal et le processus de résolution est terminé.
2. $(1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}) \leq \varepsilon$: le plan $\bar{x}$ est donc ε -optimal et le processus de résolution peut être arrêté.
3. $(1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}) > \varepsilon$: poser $\bar{J}_{sup} = (J_{sup} \setminus j_0) \cup j_1$, $\bar{J}_N = (J_N \setminus j_1) \cup j_0$ et passer à l'itération suivante avec $x = \bar{x}$, $J_{sup} = \bar{J}_{sup}$.

2.5 Exemple numérique

Soit le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max Z = 25x_1 + 15x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 240 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 148 \\ 1 \leq x_1 \leq 16 \\ 100 \leq x_2 \leq 110 \\ 0 \leq x_3 \leq 7 \\ 0 \leq x_4 \leq 3. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 240 \\ 148 \end{pmatrix}, \quad c^T = (25, 15, 0, 0;).$$

$$d^{-T} = (1, 100, 0, 0), \quad d^{+T} = (16, 110, 7, 3), \quad x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4);$$

$$J = \{1, 2, 3, 4\}, \quad I = \{1, 2\}, \quad \text{rang} A = 2.$$

Soit $\varepsilon = 0.2$ une précision donnée.

Itération 1 :

Soit :

$$J_{sup} = \{1, 3\}, J_N = \{2, 4\},$$

$$A_{sup} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{on prend } x_N^T = (100, 0) = (d_2^-, d_4^-),$$

$$x_{sup} = A_{sup}^{-1}(b - A_N x_N),$$

donc :

$$A_N x_N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix},$$

d' où :

$$b - A_N x_N = \begin{pmatrix} 240 \\ 148 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 48 \end{pmatrix},$$

en effet :

$$x_{sup} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48/3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

D' où $x^T = (48/3, 100, 8, 0)$ est une solution réalisable.

on a :

$$c_{sup}^T = (25, 0), \quad c_N^T = (15, 0),$$

donc :

$$E_N^T = c_{sup}^T A_{sup}^{-1} A_N - c_N^T = 0,$$

avec :

$$c_{sup}^T A_{sup}^{-1} = (25, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix} = (0, 25/3).$$

$$\text{Par conséquent : } E_N^T = (0, 25/3) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (15, 0) = (25/3, 25/3) - (15, 0) = (-20, 25/3) = (E_2, E_4).$$

On a :

$E_2 < 0$, $x_{=100} = d_2^-$, $j = 2 = j_1$ ne vérifie pas le critère d'optimalité,
 $E_4 > 0$, $x_4 = 0 = d_4^-$, $j = 4$ vérifie le critère d'optimalité.

Calculons la direction l :

$$\begin{cases} l_2 = d_2^+ - x_2 = 110 - 100 = 10 \\ l_4 = d_4^- - x_4 = 0 - 0 = 0. \end{cases} \Rightarrow l_N^T = (10, 0).$$

$$l_{sup} = -A_{sup}^{-1} A_N l_N,$$

on a :

$$-A_{sup}^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{d' où : } l_{sup} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/3 \\ -40/3 \end{pmatrix}.$$

Alors, $l^T = (-10/3, 10, -40/3, 0)$.

Calculons le pas maximale θ^0 :

On a : $\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, 1\}$, tel que :

$$\theta_{j_0} = \min_{j \in J_{sup}} \theta_j = \min\{\theta_1, \theta_3\}.$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{d_1^+ - x_1}{l_1} = \frac{\frac{45}{3}}{\frac{10}{3}} = 45/10 \\ \theta_3 = \frac{d_3^- - x_3}{l_3} = \frac{\frac{8}{40}}{\frac{3}{3}} = 3/5. \end{cases}$$

Alors : $\theta_{j_0} = 3/5 = \theta_3 = \theta^0$, $j_0 = 3$ sorte de support (sera indice non support).

Calculons le nouveau plan $\bar{x}$:

$$\bar{x} = x + \theta^0 l = \begin{pmatrix} 48/3 \\ 100 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -10/3 \\ 10 \\ -40/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 106 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons $\beta(x, J_{sup})$, on a :

$$\beta(x, J_{sup}) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+).$$

$$= 25/3(0 - 0) - 20/3(106 - 110) = 80/3 > \varepsilon.$$

de plus, $(1 - \theta^0)\beta(x, J_{sup}) = (1 - \frac{3}{5})80/3 = 32/3 > \varepsilon.$

Donc la nouvelle solution réalisable est $\bar{x}^T = (14, 106, 0, 0)$, avec le nouveau support $\bar{J}_{sup} = \{1, 2\}$ et $\bar{J}_N = \{3, 4\}$.

Itération 2 :

On pose : $x^T = \bar{x}^T = (14, 106, 0, 0)$, $J_{sup} = \bar{J}_{sup} = \{1, 2\}$, $J_N = \bar{J}_N = \{3, 4\}$.

d' où on aura :

$$A_{sup} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 3/4 & -3/4 \end{pmatrix},$$

$$\text{et : } A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_{sup}^T = (25, 15), \quad c_N^T = (0, 0),$$

$$\text{en effet : } E_N^T = (25, 15) \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (0, 0) = (35/2, 5/4) = (E_3, E_4);$$

on a :

$$E_3 = 35/2 > 0, \quad x_3 = 0 = d_3^-.$$

$$E_4 = 5/4 > 0, \quad x_4 = 0 = d_4^-.$$

Par conséquent, le critère d'optimalité est vérifié, par suite $x^{*T} = (14, 106, 0, 0)$ est une solution optimale, avec $Z^* = 1940$.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode adaptée pour la résolution un problème linéaire avec contrainte d'égalité à variable bornée.

Cette méthode possède une métrique, différente du celle du simplexe et elle permet de calculer estimation de suboptimalité qui mesure l'écart entre la valeur optimal de la fonction objectif et sa valeur a une itération donnée.

Chapitre 3

Méthode adaptée pour la résolution d'un problème linéaire général

Introduction

Dans ce chapitre, nous exposons, la méthode adaptée pour la résolution d'un problème linéaire avec des contraintes d'inégalités et à variables bornées.

3.1 Position du problème et définitions

Considérons le problème de programmation linéaire suivante :

$$\begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ b^- \leq Ax \leq b^+, \\ d^- \leq x \leq d^+, \end{cases} \quad (3.1)$$

où c, x, d^-, d^+ , sont des vecteurs de dimension n ;

b^-, b^+ , sont des vecteurs de dimension m ;

A est une matrice d'ordre $(m \times n)$, avec $\text{rang } A = m < n$.

Définissons les ensembles d'indices suivants :

$I = \{1, 2, \dots, m\}, J = \{1, 2, \dots, n\}$;

$$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) = (a'_i, i \in I), \text{ où } a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}.$$

Une contrainte d'indice $i \in I$, est dite active au point x si l'une des égalités

suivantes est vérifié :

$$a'_i x = b_i^- \text{ ou } a'_i x = b_i^+. \quad (3.2)$$

Construisons alors l'ensemble d'indices des contraintes actives au point x noté $I_a = I_a^- \cup I_a^+$, avec :

$$I_a^- = \{i, a'_i x = b_i^-\}, \quad (3.3)$$

$$I_a^+ = \{i, a'_i x = b_i^+\}, \quad (3.4)$$

Soit l'ensemble des solutions réalisables (ensemble des contraintes) :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / b^- \leq Ax \leq b^+, d^- \leq x \leq d^+\}$$

Définition 14 : Un vecteur x vérifiant les contraintes $b^- \leq Ax \leq b^+$ et $d^- \leq x \leq d^+$ est appelé **plan** ou **solution réalisable** du problème (3.1).

Le problème (3.1) consiste à trouver un **plan optimal** $x^0 \in X$, tel que :

$$Z(x^0) \geq Z(x), \forall x \in X \Leftrightarrow Z(x^0) = \max_{x \in X} Z(x).$$

Définition 15 : Soit ε un nombre positif ou nul choisi à l'avance, un plan x^ε est appelée **ε -optimal** ou **suboptimal** si :

$$Z(x^0) - Z(x^\varepsilon) = c^T x^0 - c^T x^\varepsilon \leq \varepsilon,$$

où x^0 est une solution optimale.

Choisissons dans l'ensemble I le sous-ensemble I_B , et soit un sous-ensemble d'indices $J_B \in J$ tel que $|J_B| = |I_B| \leq m$. L'ensemble $Q_B = (I_B, J_B)$ est appelé support du problème (3.1) si la sous-matrice $A_B = A(I_B, J_B)$ est inversible.

Définition 16 : La paire $\{x, Q_B\}$ formé du plan x et du support Q_B est appelée **plan de support** ou bien **solution réalisable de support**.

Le plan de support $\{x, Q_B\}$ est dit non dégénéré si :

$$\begin{cases} d_j^- < x_j < d_j^+, j \in J_B, \\ b_i^- < a'_i x < b_i^+, i \in I_N = I \setminus I_B. \end{cases} \quad (3.5)$$

3.2 Critère d'optimalité

Formule d'accroissement de la fonction objectif :

Soit $\{x, Q_B\}$ un plan de support et considérons un autre plan quelconque $\bar{x} = x + \Delta x$.

L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = c'\bar{x} - c'x = c' \Delta x. \quad (3.6)$$

Définissons le vecteur des potentiels u donné par :

$$u' = u'(I_B) = c'_B A_B^{-1}, \quad (3.7)$$

ainsi que le vecteur des estimation E donné par :

$$E = E'(J) = u' A(I_B, J) - c', \quad (3.8)$$

où,

$$E' = (E'_B, E'_N), \quad \text{avec} \quad E'_B = u' A_B - c'_B = 0 \quad \text{et} \quad E'_N = u A_N - c'_N.$$

En vertu des définitions (3.7) et (3.8), la formule d'accroissement (3.6) prend la forme équivalente :

$$\Delta Z = (u' A(I_B, J_N - E'(J_N)) \Delta x(J_N) + u' A_B \Delta x(J_B)). \quad (3.9)$$

Par ailleurs, on a :

$$b^- \leq A\bar{x} \leq b^+ \implies b^- \leq A(x + \Delta x) \leq b^+ \implies b^- - Ax \leq A \Delta x \leq b^+ - Ax \quad (3.10)$$

Notons :

$$\begin{aligned} \delta^- &= b^- - Ax, \\ \delta^+ &= b^+ - Ax, \end{aligned}$$

et

$$z(I_B) = A(I_B, J_B) \Delta x(J_B) + A(I_B, J_N) \Delta x(J_N), \quad (3.11)$$

avec

$$\delta^-(I_B) \leq z(I_B) \leq \delta^+(I_B). \quad (3.12)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\Delta x(J_B) = A_B^{-1} z(I_B) - A_B^{-1} A(I_B, J_N) \Delta x(J_N). \quad (3.13)$$

Grâce à ces notations, l'accroissement (3.9) devient :

$$\Delta Z = -E'(J_N) \Delta x(J_N) + u' z(I_B). \quad (3.14)$$

Critère d'optimalité

Soit $\{x, Q_B\}$ une solution réalisable de support du problème (3.1), E_N est le vecteur des estimation non-support.

Théorème 3.1 :

- 1) *Les relations suivantes sont suffisantes pour l'optimalité d'une solution réalisables de support (x, Q_B) :*

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{si } x_j = d_j^-, \\ E_j \leq 0, & \text{si } x_j = d_j^+, \\ E_j = 0, & \text{si } d_j^- < x_j < d_j^+, \quad j \in J_N; \\ u_i \geq 0, & \text{si } a'_i x = b_i^+, \\ u_i \leq 0, & \text{si } a'_i x = b_i^-, \\ u_i = 0, & \text{si } b_i^- < a'_i x < b_i^+, \quad i \in I_B; \end{cases} \quad (3.15)$$

- 2) *Ces même relations sont aussi nécessaires dans le cas où la solution réalisable de support $\{x, Q_B\}$ est non-dégénérée.*

3.3 Critère de suboptimalité

Estimation de suboptimalité

Pour estimer l'écart qui existe entre la **valeur optimale** $Z(x^0)$ et la valeur $Z(x)$ d'un **plan de support** quelconque $\{x, Q_B\}$, remplaçons $\bar{x}$ au niveau de la formule d'accroissement par x^0 :

$$\begin{aligned} Z(x^0) - Z(x) &= -E'(J_N)(x^0(J_N) - x(J_N)) + u' z^0(I_B) \\ &= \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - x_j^0) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - x_j^0) + \sum_{u_i > 0, i \in I_B} u_i z_i^0 \\ &\quad + \sum_{u_i < 0, i \in I_B} u_i z_i^0, \end{aligned}$$

avec

$$z^0(I_B) = A(I_B, J_B)(x^0(J_B) - x(J_B)) + A(I_B, J_N)(x^0(J_N) - x(J_N)).$$

Puisque le **plan optimal** x^0 vérifie $d_j^- \leq x_j^0 \leq d_j^+$, $j \in J$, il en résulte que :

$$\begin{aligned} x_j - x_j^0 &\leq x_j - d_j^-, \\ x_j - x_j^0 &\geq x_j - d_j^+, \end{aligned}$$

d' où,

$$\begin{aligned} E_j(x_j - x_j^0) &\leq E_j(x_j - d_j^-), \text{ si } E_j > 0 \\ E_j(x_j - x_j^0) &\leq E_j(x_j - d_j^+), \text{ si } E_j < 0 \end{aligned}$$

En outre, d'après la relation (3.12) on a :

$$\delta_i^- \leq z_i^0 \leq \delta_i^+, \text{ si } i \in I_B,$$

d' où

$$\begin{cases} u_i z_i^0 \leq u_i \delta_i^+, & \text{si } u_i > 0, \\ u_i z_i^0 \leq u_i \delta_i^-, & \text{si } u_i < 0, \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient une majoration de l'écart entre la **valeur optimale** $Z(x^0)$ et la valeur $Z(x)$, qui est donnée par :

$$z(x^0) - z(x) \leq \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+) + \sum_{u_i > 0, i \in I_N} u_i \delta_i^+ + \sum_{u_i < 0, i \in I_N} u_i \delta_i^-. \quad (3.16)$$

Le nombre $\beta(x, Q_B)$ défini par (3.17), est appelé estimation de suboptimalité du **plan de support** $\{x, Q_B\}$:

$$\beta(x, Q_B) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+) + \sum_{u_j > 0, j \in I_N} u_j \delta_j^+ + \sum_{u_j < 0, j \in I_N} u_j \delta_j^-. \quad (3.17)$$

Théorème 3.2 (Condition suffisante de suboptimalité) :

Soit $\{x, Q_B\}$ un plan de support du problème (3.1), et $\epsilon \geq 0$ un nombre positif arbitraire.

Si $\beta(x, Q_B) \leq \epsilon$, alors le plan x est suboptimal (ϵ - optimal).

3.4 Algorithme de la méthode

Étant donné un nombre réel positif ou nul quelconque ϵ et un plan de support initial $\{x, Q_B\}$, le but de l'algorithme est alors de construire un plan

ϵ – *optimal* x^ϵ ou carrément optimal x^0 .

Une itération de la méthode adaptée basée sur le principe de diminution de l'estimation de suboptimalité. En d'autres termes, elle consiste à faire le passage de $\{x, Q_B\}$ à $\{\bar{x}, \overline{Q_B}\}$ tel que $\beta(\bar{x}, \overline{Q_B}) < \beta(x, Q_B)$.

Ainsi, Ce principe se réalise en deux procédure :

1. Changer la solution réalisable x par $\bar{x}$ de manière à diminuer la mesure de non optimalité du plan, $\beta(\bar{x}) \leq \beta(x)$;
2. Changer le support Q_B par $\overline{Q_B}$ de telle sorte que la mesure de non optimalité du support sera diminué $\beta(\overline{Q_B}) \leq \beta(Q_B)$, où $\beta(x, Q_B) = \beta(\overline{Q_B}) + \beta(Q_B)$.

3.4.1 Changement du plan

Construisons le nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \theta l,$$

où est la direction d'amélioration, et $\theta \geq 0$ le pas le long de cette direction.

Construction d'une direction d'amélioration adaptée

Considérons la métrique pour les composantes non basiques de la direction admissible l :

$$d_j^- - x_j \leq l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N. \quad (3.18)$$

Cette métrique dépend du plan courant x , et de ce fait, elle dite adaptée. Les composantes (3.18) se calculent en rendant maximal l'accroissement de la fonction objectif dans l'espace des variables non basiques.

Ainsi, tenant compte de la métrique (3.18) l'accroissement de la fonction objectif atteint son maximum pour les valeurs des composantes non basiques suivantes :

$$l_j = \begin{cases} d_j^- - x_j & \text{si } E_j > 0, \\ d_j^+ - x_j & \text{si } E_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j = 0, \end{cases} \quad \text{pour } j \in J_N. \quad (3.19)$$

En outre, l'accroissement de la fonction objectif atteint son maximum pour les composantes basiques calculées par la formule :

$$A(I_B, J)l = \delta, \quad (3.20)$$

où δ est donné par :

$$\delta_i = \begin{cases} \delta_i^- & \text{si } u_i > 0, \\ \delta_i^+ - x_j & \text{si } u_i < 0, \\ 0 & \text{si } u_i = 0, \end{cases} \quad \text{pour } i \in I_B. \quad (3.21)$$

Ainsi, nous aurons :

$$l(J_B) = A_B^{-1}\delta(I_B) - A_B^{-1}A(I_B, J_N)l(J_N). \quad (3.22)$$

Calcul du pas maximal θ^0

Construisons un plan $\bar{x}$ sous la forme :

$$\bar{x} = x + \theta^0 l,$$

où l est la direction d'amélioration définie par (3.19)(3.22) et le nombre θ^0 est le pas le long de cette direction ; ce dernier se calcule de façon à ce que les contraintes directes et principales soient satisfaites pour $\bar{x}$, pour les contraintes directes on doit avoir :

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_j \leq d_j^+ - x_j, j \in J_B, \quad (3.23)$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta l_j \leq d_j^+ - x_j, j \in J_N. \quad (3.24)$$

Des inégalités (3.19) et (3.24), nous déduisons que

$$\theta^0 \leq 1. \quad (3.25)$$

En outre, pour satisfaire les contraintes (3.23), on doit choisir θ^0 tel que :

$$\theta^0 \leq \theta_{j_1}, \quad \theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j. \quad (3.26)$$

où

$$\theta_j = \begin{cases} d_j^+ - x_j / l_j & \text{si } l_j > 0, \\ d_j^- - x_j / l_j & \text{si } l_j < 0, \\ \infty & \text{si } l_j = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

D'autre part, θ^0 doit vérifier les inégalités suivantes pour satisfaire les contraintes principales pour $\bar{x}$:

$$\delta_i^- \leq a_i' \theta l \leq \delta_i^+, i \in I_B; \quad (3.28)$$

$$\delta_i^- \leq a_i' \theta l \leq \delta_i^+, i \in I_N. \quad (3.29)$$

De (3.20), on voit bien que l'inégalité (3.28) est vérifiée pour $\theta \leq 1$. Ainsi, il reste à satisfaire les contraintes (3.29). Pour cela, nous choisissons θ^0 de la manière suivante :

$$\theta^0 \leq \theta_{i1}, \theta_{i1} = \min_{i \in I_B} \theta_i, \quad (3.30)$$

où :

$$\theta_i = \begin{cases} \delta^+ / a'_i l & \text{si } a'_i l > 0, \\ \delta^- / a'_i l & \text{si } a'_i l < 0, \\ \infty & \text{si } a'_i l = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

De (3.25), (3.26) et (3.30), la valeur θ^0 sera choisie par la relation : $\theta^0 = \min\{1, \theta_{j1}, \theta_{i1}\}$. Ce choix va nous assurer que lors du déplacement le long de la direction l , les contraintes (3.28), (3.29) et (3.23) (3.24) ne seront pas violées, donc, il va nous garantir l'admissibilité du nouveau plan $\bar{x}$. Dans ce cas l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(\bar{x})$ sera majoré comme suit :

$$Z(x^0) - Z(\bar{x}) = c'x^0 - c'\bar{x} = c'x^0 - c'x - \theta^0 c'l \leq \beta(x, Q_B) - \theta^0 c'l, \quad (3.32)$$

de plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \beta(x, Q_B) - \theta^0 c'l &= (\beta(x, Q_B) - \theta^0 (u' A(I_B, J)) - E')l(J) \\ &= \beta(x, Q_B) + \theta^0 (E'l - u'\delta(I_B)) \\ &= \beta(x, Q_B) - \theta^0 \beta(x, Q_B) \\ &= (1 - \theta^0)(\beta(x, Q_B)). \end{aligned}$$

Finalement, nous aurons :

$$Z(x^0) - Z(\bar{x}) \leq (1 - \theta^0)\beta(x, Q_B). \quad (3.33)$$

De là, trois cas peuvent se présenter :

1. $\theta^0 = 1$: le plan $\bar{x} = x+l$ vérifie le critère d'optimalité, il est donc optimal et le processus de résolution du problème (3.1) est, donc, terminé ;
2. $(1 - \theta^0)\beta(x, Q_B) \leq \varepsilon$: le plan $\bar{x}$ est donc *optimal* (suboptimal) et le processus de résolution du (3.1) peut être arrêté ;
3. $(1 - \theta^0)\beta(x, Q_B) > \varepsilon$: on abordera la procédure du changement de support.

3.4.2 Changement de support

Afin d'améliorer la mesure de non optimalité du support $\beta(Q_B)$, construisons une itération de la méthode dual de support.

Introduisons le problème dual du problème(3.1) :

$$\begin{cases} L(\lambda) = b'^+s - b'^-t - d'^-v + d'^+w \rightarrow \min, \\ A'y - v + w = c, \\ s - t - y = 0, \\ s \geq 0, t \geq 0, v \geq 0, w \geq 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

A cet effet, faisons correspondre au plan du support $\{x, Q_B\}$, un coplan $\delta = E$ et un plan dual $\lambda(y, s, t, v, w)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} y(I_B) = u, y(I_N) = 0, \\ s_i = y_i, t_i = 0, & \text{si } y_i \geq 0; \\ s_i = 0, t_i = -y_i, & \text{si } y_i < 0, i \in I \\ v_j = E_j, w_j = 0, & \text{si } E_j \geq 0, \\ v_j = 0, w_j = -E_j, & \text{si } E_j < 0, j \in J. \end{cases} \quad (3.35)$$

On remarque que le plan dual λ et son coplan correspondant $\delta = E$ dépend uniquement du support Q_B .

Montrons, que l'estimation de suboptimalité se décompose ainsi :

$$\beta(x, Q_B) = \beta(x) + \beta(Q_B), \quad (3.36)$$

avec,

$$\beta(x) = c'x_0 - c'x \quad (3.37)$$

$$\beta(Q_B) = L(\lambda) - L(\lambda^0) = b'^+s - b'^-t - d'^-v + d'^+w - b'^+s^0 + b'^-t^0 + d'^-v^0 - d'^+w^0 \quad (3.38)$$

où, x^0 et $\lambda^0 = (y^0, s^0, t^0, v^0, w^0)$ sont des solution optimales du problème (3.1) et (3.34) respectivement.

Grâce aux relation (3.35), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \beta(x, Q_B) &= \sum_{j \in J} E_j x_j - \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j d_j^- - \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j d_j^+ - \sum_{i \in I_B} u_i a_i' x + \sum_{u_i > 0, i \in I_B} u_i b_i^+ \\ &\quad + \sum_{u_i < 0, i \in I_B} u_i b_i^- \\ &= [u' A(I_B, J - c')]x - d'^-v + d'^+w - u' A(I_B, J)x + b'^+s - b'^-t \\ &= -c'x - d'^-v + d'^+w + d'^+s - b'^+t. \end{aligned}$$

De la relation $Z(u^0) = L(\lambda^0)$, la valeur de suboptimalité peut être décomposée comme suit :

$$\begin{aligned}\beta(x, Q_B) &= -c'x - d^{-'}v + d^{+'}w + b^{+'}s - b^{-'}t + Z(u^0) - L(\lambda^0) \\ &= (c'x^0 - c'x) + (b^{+'}s - b^{-'}t - d^{-'}v + d^{+'}w - b^{+'}s^0 + b^{-'}t_0 + d^{-'}v^0 - d^{+'}w^0) \\ &= \beta(x) + \beta(Q_B).\end{aligned}$$

Ainsi, pour diminuer la valeur de $\beta(Q_B)$, effectuons une itération de la méthode duale de support, en construisant une nouvelle solution réalisable $\bar{\lambda}$ avec son coplan $\bar{\delta}$ correspondant d'une manière à avoir $\beta(\bar{Q}_B) \leq \beta(Q_B)$. En effet, les changements de support se produisent de la manière suivante :

1. Pour $\theta^0 = \theta_{i_1} < 1$, on posera :

$$\alpha = a'_{i_1}l, \quad (3.39)$$

et

$$\sigma^0 = \min\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}, \quad (3.40)$$

avec

$$\sigma_{i_0} = \min\{\sigma_i, i \in I_B\}, \quad (3.41)$$

et

$$\sigma_{j_0} = \min\{\sigma_j, j \in J_N\}. \quad (3.42)$$

Les quantités σ_j, σ_i sont données par :

$$\sigma_j = \begin{cases} \frac{-E_j}{z_j} & \text{si } E_j z_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j = 0, z_j > 0, x_j \neq d_j^-, \text{ ou bien} \\ & E_j = 0, z_j < 0, x_j \neq d_j^+, j \in J_N; \\ \infty & \text{sinon .} \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\sigma_i = \begin{cases} \frac{-u_i}{z_i} & \text{si } u_i z_i < 0, \\ 0 & \text{si } u_i = 0, z_i > 0, i \in I_a^+, \text{ ou bien} \\ & u_i = 0, z_i < 0, i \in I_a^-, i \in I_B; \\ \infty & \text{sinon .} \end{cases} \quad (3.44)$$

Où :

$$z'(J_N \cup I_B) = ke'_{i1} \{A(I_N, J_N) - A(I_N, J_B)A_B^{-1}A(I_B, J_N), -A(I_N, J_B)A_B^{-1}\}, \quad (3.45)$$

$$k = \begin{cases} 1 & \text{si } a'_{i1}\bar{x} = b_{i1}^+, \\ -1 & \text{si } a'_{i1}\bar{x} = b_{i1}^-. \end{cases} \quad (3.46)$$

et e_{i1} est un vecteur unitaire dont la composante i_1 vaut 1.

2. Pour $\theta^0 = \theta_{j1} < 1$, on posera :

$$\alpha = l_{j1}. \quad (3.47)$$

Construisons les quantités σ^0, σ_i et σ_j de la même manière que le cas précédent, avec

$$z'(j_N \cup I_B) = ke'_{j1} \{A_B^{-1}A(I_B, J_N), A_B^{-1}\}, \quad (3.48)$$

où

$$k = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x}_{j1} = d_{j1}^-, \\ -1 & \text{si } \bar{x}_{j1} = d_{j1}^+. \end{cases} \quad (3.49)$$

et e_{j1} est un vecteur unitaire dont la composante j_1 vaut 1.

Pour la construction du nouveau support, considérons les quatre cas suivants :

1. Pour $\theta^0 = \theta_{i1} < 1, \sigma^0 = \sigma_{i0}$, nous construisons un nouveau support $\bar{Q}_B$ avec :

$$\bar{I}_B = (I_B \setminus i_0) \cup i_1, \quad \bar{J}_B = J_B; \quad (3.50)$$

2. Pour $\theta^0 = \theta_{i1} < 1, \sigma^0 = \sigma_{j0}$, le nouveau support sera $\bar{Q}_B$:

$$\bar{I}_B = I_B \cup i_1, \quad \bar{J}_B = J_B \cup J_0; \quad (3.51)$$

3. Pour $\theta^0 = \theta_{j1} < 1, \sigma^0 = \sigma_{i0}$, le nouveau support devient :

$$\bar{I}_B = I_B \setminus i_0, \quad \bar{J}_B = J_B \setminus j_1; \quad (3.52)$$

4. Pour $\theta^0 = \theta_{j1} < 1, \sigma^0 = \sigma_{j0}$, le nouveau support devient :

$$\bar{I}_B = I_B, \quad \bar{J}_B = (J_B \setminus J_1) \cup j_0. \quad (3.53)$$

Ce changement de support va nous donner une autre majoration de l'écart qui existe entre la valeur optimale $Z(x^0)$ et la valeur $Z(\bar{x}_0)$:

$$Z(x^0) - z(\bar{x}) \leq \bar{\beta} = (1 - \theta^0)(\beta(x, Q_B) - \sigma^0|\alpha|), \quad (3.54)$$

où

$$\alpha = \begin{cases} a'_{i1}l, & \text{si } \theta^0 = \theta_{i1}, \\ l_{j1} & \text{si } \theta^0 = \theta_{j1}. \end{cases} \quad (3.55)$$

Ainsi, si $\bar{\beta} \leq \varepsilon$, le plan $\bar{x}$ est ε -*optimal*, donc on arrête l'algorithme. Par ailleurs, si $\bar{\beta} > \varepsilon$, nous recommençons une nouvelle itération avec le couple $\{\bar{x}, \bar{Q}_B\}$.

3.5 Exemple numérique

Soit le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max Z = 25x_1 + 15x_2 \\ 0 \leq 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 240 \\ 0 \leq 3x_1 + x_2 + x_4 \leq 148 \\ 1 \leq x_1 \leq 16 \\ 100 \leq x_2 \leq 110 \\ 0 \leq x_3 \leq 7 \\ 0 \leq x_4 \leq 3. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^+ = \begin{pmatrix} 240 \\ 148 \end{pmatrix}, \quad b^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^T = (25, 15, 0, 0).$$

$$d^{-T} = (1, 100, 0, 0), \quad d^{+T} = (16, 110, 7, 3), \quad x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

$$J = \{1, 2, 3, 4\}, \quad I = \{1, 2\}, \quad \text{rang } A = 2.$$

Soit $\varepsilon = 0.2$ une précision donné.

Itération 1 :

Soit :

$$J_B = \{1, 3\}, \quad J_N = \{2, 4\}, \quad I_B = \{1, 2\},$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{on prend } x_N^T = (100, 0) = (d_2^-, d_4^-),$$

$$A_B^{-1}(b^- - A_N x_N) \leq x_B^T \leq A_B^{-1}(b^+ - A_N x_N)$$

donc :

$$A_N x_N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$$

d' où :

$$b^+ - A_N x_N = \begin{pmatrix} 240 \\ 148 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 48 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$A_B^{-1}(b^+ - A_N x_N) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48/3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

on a :

$$b^- - A_N x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ -100 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$A_B^{-1}(b^- - A_N x_N) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -200 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100/3 \\ -400/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

en effet :

$\begin{pmatrix} -100/3, -400/3 \end{pmatrix} \leq x_B^T \leq \begin{pmatrix} 48/3, 8 \end{pmatrix}$. Pour que x soit réalisable il faut prendre, $x_B^T = \begin{pmatrix} 48/3, 8 \end{pmatrix}$, donc $x^T = \begin{pmatrix} 48/3, 100, 8, 0 \end{pmatrix}$ on a : $c_B^T = (25, 0)$, $c_N^T = (15, 0)$,

donc :

$$E_N^T = c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T,$$

$$\text{avec : } c_B^T A_B^{-1} = (25, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix} = (0, 25/3),$$

par conséquent :

$$E_N^T = (0, 25/3) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (15, 0) = (25/3, 25/3) - (15, 0) = (-20, 25/3) = (E_2, E_4).$$

On a : $E_2 < 0$, $x_2 = 100 = d_2^-$, $j = 2 = j_1$ ne vérifie pas le critère d'optimalité,

$E_4 > 0$, $x_4 = 0 = d_4^-$, $j = 4$ vérifie le critère d'optimalité,

$u_1 = 0$, $b_1^- < a_1' x < b_1^+$ ne vérifie pas le critère d'optimalité,

$u_2 \geq 0$, $a_2' x = b_2^+$ vérifie le critère d'optimalité.

Calculons la direction l :

$$\begin{cases} l_2 = d_2^+ - x_2 = 110 - 100 = 10 \\ l_4 = d_4^- - x_4 = 0 - 0 = 0. \end{cases} \Rightarrow l_N^T = (10, 0).$$

$$l_B = A_B^{-1} \delta(I_B) - A_B^{-1} A_N l_N$$

on :

$$-A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

$$-A_B^{-1} A_N l_N = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10/3 \\ -40/3 \end{pmatrix}.$$

Donc $l_B^T = \begin{pmatrix} -10/3, -40/3 \end{pmatrix}$,
en effet : $l^T = \begin{pmatrix} -10/3, 10, -40/3, 0 \end{pmatrix}$
Calculons le pas maximale θ^0 :
on a : $\theta^0 = \min \{1, \theta_{j_1}, \theta_{i_1}\}$, tel que :
 $\theta_{j_1} = \min \theta_j = \min \{\theta_1, \theta_3\}$

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{d_1^+ - x_1}{l_1} = \frac{\frac{45}{3}}{\frac{10}{3}} = 45/10 \\ \theta_3 = \frac{d_3^- - x_3}{l_3} = \frac{8}{\frac{40}{3}} = 3/5. \end{cases}$$

Alors : $\theta_{j_1} = 3/5 = \theta_3 = \theta^0$, $j_1 = 3$ sorte le support (sera indice non support).

$$\theta_{i_1} = \min \theta_i = \min\{\theta_1, \theta_2\}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \infty, \\ \theta_2 = \infty. \end{cases}$$

Alors : $\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \theta_{i_1}\} = \theta_{j_1} = \theta_3 = 3/5$.

Calculons le nouveau plan $\bar{x}$:

$$\bar{x} = x + \theta^0 l = \begin{pmatrix} 48/3 \\ 100 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -10/3 \\ 10 \\ -40/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 106 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

on a :

$$\begin{aligned} \beta(x, Q_B) &= E_4(x_4 - d_4^-) + E_2(x_2 - d_2^+) + u_2 \delta_2^+, \\ &= 25/3(0 - 0) - 20(106 - 110) + 0 = 80 > \varepsilon, \end{aligned}$$

de plus, $(1 - \theta^0)\beta(x, Q_B) = (1 - \frac{3}{5})80 = 32 > \varepsilon$.

Alors la nouvelle solution réalisable est $\bar{x}^T = (14, 106, 0, 0)$, donc on change de support

on a : $\theta^0 = \theta_{j_1} = 3/5 < 1$ on posera :

$$z'(j_N \cup I_B) = ke'_{j_1} \{A_B^{-1} A(I_B, J_N), A_B^{-1}\},$$

donc :

$$z'_{j_N} = ke'_{j_1} A_B^{-1} A(I_B, J_N),$$

$$A_B^{-1}A(I_B, J_N) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$z'_{j_N} = (0, 1) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -2/3 \end{pmatrix} = (4/3, -2/3).$$

Donc

$$z_j = \begin{cases} z_2 = 4/3, \\ z_4 = -2/3, \end{cases}$$

On a : $\sigma^0 = \min\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\}$, tel que :

$$\sigma_{j_0} = \min\{\sigma_j, j \in J_N\}$$

$$\sigma_j = \begin{cases} \sigma_2 = -E_2/z_2 = 5/3 \\ \sigma_4 = -E_4/z_4 = 25/2. \end{cases}$$

$$\sigma_{j_0} = \min\{\sigma_2, \sigma_4\} = \sigma_2 = 5/3.$$

Calculons $\sigma_{i_0} = \min\{\sigma_i, i \in I_B\}$

on a :

$$z'_i = ke'_{j_1} A_B^{-1} = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix} = (-1, 2/3),$$

donc :

$$z_i = \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 2/3. \end{cases}$$

Alors :

$$\sigma_i = \begin{cases} \sigma_1 = \infty \\ \sigma_2 = \infty. \end{cases}$$

en effet :

$$\sigma^0 = \min\{\sigma_{i_0}, \sigma_{j_0}\} = \sigma_{j_0} = 5/3, j_0 = 2.$$

Calculons : $|\bar{\beta} = (1 - \theta^0)(\beta(x, Q_B) - \sigma^0)|\alpha| = 23 > \varepsilon$,

Donc la nouvelle solution réalisable est $\bar{x}^T = (14, 106, 0, 0)$ avec le nouveau support $\bar{J}_B = \{1, 2\}$ et $\bar{J}_N = \{3, 4\}$.

On pose : $x^T = \bar{x}^T = (14, 106, 0, 0)$, $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0 = \{1, 2\}$, $I_B = \bar{I}_B = \{1, 2\}$.

Itération 2 :

on aura :

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 3/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

et :

$$A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_B^T = (25, 15), \quad c_N^T = (0, 0).$$

$$u(I_B) = c_B^T A_B^{-1} = (25, 15) \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & -3/4 \end{pmatrix} = (35/2, 5/4),$$

en effet :

$$E_N^T = (35/2, 5/4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (0, 0) = (35/2, 5/4) = (E_3, E_4),$$

on a :

$$E_3 = 35/2 > 0, \quad x_3 = 0 = d_3^-,$$

$$E_4 = 5/4 > 0, \quad x_4 = 0 = d_4^-,$$

$$u_1 = 35/2 > 0, \quad a'_1 x = b_1,$$

$$u_2 = 5/4 > 0, \quad a'_2 x = b_2.$$

Par conséquent, le critère d'optimalité est vérifié, par suite $x^{*T} = (14, 106, 0, 0)$ est une solution optimale, avec $z^* = 1940$.

Conclusion

La méthode que nous avons présentée a la particularité de tenir compte des spécificités des problèmes tels qu'ils sont formulés lors de leur modélisation première.

Cette méthode se base sur deux procédures essentielles : i) changer la solution réalisable x par $\bar{x}$ d'une manière à diminuer la mesure de non optimalité du plan, $\beta(\bar{x}) \leq \beta(x)$; ii) changer le support Q_B par $\overline{Q}_B$ de telle sorte que la mesure de non optimalité du support sera diminuée. En outre, elle utilise une métrique dite adaptée pour la direction d'amélioration, sa particularité étant le fait de changer tous les variables non support à la fois.

Conclusion générale

L'objectif de notre travail consiste à étudier la méthode adaptée d'un problème linéaire général. Pour cela nous avons traité dans le premier chapitre la résolution d'un problème linéaire par trois méthodes : la méthode graphique, qui présente géométriquement les solutions optimales ; la méthode de simplex, cette dernière est une méthode numérique qui fait le passage d'une solution de base réalisable à une autre jusqu'à ce que la solution réalisable vérifie les critères d'optimalité ; et ainsi la méthode dual-simplexe. En deuxième chapitre nous avons étudiés la méthode adaptée pour résoudre un problème linéaire avec contrainte égalité à variable bornée, cette méthode nous permet de calculer une estimation de suboptimalité qui nous mesure l'écart entre une solution donnée et la solution optimale . Dans le troisième chapitre nous avons présentés la méthode adaptée pour la résolution d'un problème linéaire avec contrainte général, l'algorithme de résolution se base sur deux procédures essentielles : le changement de la solution réalisable, pour cela nous avons calculé la direction d'amélioration et le pas de long le cette direction par une métrique différente de celle de simplex ; est le changement de support Q_B par $\overline{Q}_B$ de façon à réduire la non optimalité de support .

Table des figures

1.1	Ensemble des solutions réalisables	8
1.2	Représentation de la fonction objectif	9
1.3	Localisation de la solution optimal	10

Liste des tableaux

1.1	La relation entre les variables duales et primales.	29
1.2	Relation entre le dernier tableau de simplexe du primal et dual. . .	29

Bibliographie

- [1] M. AZI, Support du cours de programmation linéaire, Centre Universitaire de Mila 2012 – 2013.
- [2] N.SOUILAH et A.SEDDIKI, Méthode adaptée pour la résolution d'un programme linéaire, Mémoire de mastre, Centre universitaire de Mila.
- [3] B.BRAHMI, Méthodes primales et duales pour la programmation quadratique :extension et application, Mmoire de magistre,Béjaia 2012.
- [4] A.LAOUAR, Méthode adaptée pour la résolution d'un problème de programmation quadratique convexe a variable mixtes, Béjaia 2012.
- [5] J.Teghem, Recherch opérationnelle Tome 1 Méthodes D'optimisation, Marketing S.A.,2012.
- [6] Y.DODGE, Optimisation appliquée, Ver log France 2005.
- [7] B.KORTE et J.VYGEN, Optimisation combinatoire théorie et algorithmes, Springer-Ver log France 2010.
- [8] M.BERGOUNIOUX, Optimisation et contrôle des systèmes linéaires cours et exercices avec solution, Paris 2001.
- [9] C. BREZINSKI, Initiation à la programmation linéaire et à l'algorithme du simplexe, Ellipses Édition Marketing S.A 2002.
- [10] A. ZAATRI, Les techniques de la recherche opérationnelle, la collection mathématique de l'université mentouri constantine Mars 2002.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire, est d'étudier, les méthodes de résolution d'une programmation linéaire, et particulièrement, la méthode adaptée. Pour cela, nous avons présenté les méthodes d'une programmation linéaire les plus connues par la suite, nous avons exposé la méthode adaptée pour la résolution d'une programmation linéaire standard et général, cette méthode est une généralisation et amélioration de la méthode du simplexe, et elle possède la capacité pour résoudre les problèmes sans faire des transformations avec problème initiale.

Mots clés : Programmation linéaire, programmation linéaire général , solution optimale, méthode du simplexe . méthode adaptée.

Abstract

The aim of this work is to study the methods which are used to solve problems of linear programming, especially the adapted method, for this purpose we have studied the famous methods to solve linear problems, moreover we have studied the adapted method in case the problem is standard and also in case of the general linear problem. This method is a generalization and an improvement of the simplex method. It has the ability to solve the problems, without doing any changes to the primary problem.

Key words: Linear programming, general linear programming, optimal solution, the simplex method, the adapted method.

الملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة الطرق المستعملة في حل المشكل في البرمجة الخطية و بالأخص طريقة الموافقة, ومن أجل هذا قمنا بدراسة الطرق المشهورة في حل المشاكل الخطية ثم درسنا طريقة الموافقة في حالة إذا ما كان المشكل standard وفي حالة إذا ما كان المشكل الخطي معمم وهذه الطريقة هي تعميم وتحسين لطريقة simplex و تقوم بحل المشكل دون إجراء تغييرات على المشكل .

الكلمات المفتاحية: البرمجة الخطية، البرمجة الخطية المعممة، الحل المثالي ، طريقة Simplex، طريقة الموافقة.