الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

En : Filière Mathématiques fondamentales

Thème

Théorème du graphe fermé

Préparé par :

Amira Belhayene
Aicha Bouabdellah
Faten Boulkroune
Abd Elmalek Belguermat

Encadré par : **Grade : MA**
Boudjerida Nadjet

Année universitaire : 2013/2014

Nous tenons tout d'abords

à remercié le bon dieu pour

nous avoir donné le courage,

la patience et le privilège d'étudier

et terminer ce modeste travail.

Nous remercions notre encadreuse

Md Boudjerida Nadjet pour son soutien

et ses consentes précieux qui nous

ont considérablement aidé.

Nous remercions nos familles pour

leur patience et soutien, sons

oublier toutes les personnes et les amés

qui nous ont aidés de prêt au de loin.

AICHA & AMIRA

FATEN & ABD ELMALEK

Table des matières

Introduction générale

On s'intéresse dans ce mémoire à un théorème connu dans l'analyse fonctionelle , le théorème de graphe fermé . on vérifie facilement que toute applications continue entre deux espaces vectoriel normés (et même entre deux espace métriques) a son graphe fermé.

La réciproque est faux en général comme le montre l'exemple élèmentaire suivante : la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définié par $x \to \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ a son graphe fermé mais n'est pas continue . Le théorème du graphe fermé expréme cependant que la réciproque est vraie dans le cadre des applications linéaire continues entre deux espaces de Banach .

Notre mémoire , comporte deux chapitres :

Le première chapitre est consacré à des rappels et préliminaires sur les notions de base utilisés tout au long du mémoire , en particulier cells concernant les espaces vectoriels normés , les espaces de Banach et les applications linéaires continues .

Dans le deuxième chapitre , on présente le théorème du graphe fermé avec une démonstration de taillée .

On termine ce chapitre par donner deux applications qui traiduisent l'importance de ce théorème .

Notation

- $\mathbb{N}$: *Ensmeble des nombres entiers naturels.*
- $\mathbb{R}$: *Ensmeble des nombres réels.*
- $\mathbb{C}$: *Ensmeble des nombres complexes.*
- $\Bbbk$=($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :Est un corps des scalaires d'un espace vectoriel.
- $B(x_0\ ,r)$: La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

-$\bar{B}(x_0\ ,r)$:La boule fermé de centre x_0 et de rayon r .

- $S(x_0\ ,r)$:La sphère de centre x_0 et de rayon r .
- $B(0\ ,1)$:La boule unite.
- $\|\cdot\|$:La norme.
- $<\ ,\ >$: Le produit scalaire.
- $L(E\ ,F)$: Ensmeble des applications linéaires de E dans F.
- $L_C(E\ ,F)$: Ensmeble des applications linéaires continues de E dans F .
- $L(E)$: Ensmeble de applications linéaires de E dans E.

-$\oplus$: La somme directe algébrique.

- $G(f)$: *Graphe fermé.*
  - $\ker f$: La nayau de f .- $\mathrm{Im}(f)$: L'image de f .

Chapitre 1

Notions et résultats préliminaire.

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1.1.1 ***un espace vectoriel*** *sur un corps* $\mathbb{k}$($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) *est un ensemble* E *muni de deux lois*$(+,\cdot)$, *la loi*$(+)$ *étant une application de* $E \times E$ *vers* E *,la loi*$(\cdot)$ *multiplication par un scalaire étant une application* $\mathbb{k} \times E$ *vers* E *telle que :*

1.$(E, +)$ *est groupe commutatif* .

2.$\forall \alpha \in \mathbb{k}\ \forall x\ ,\ y \in E : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

3.$\forall \alpha\ ,\ \beta \in \mathbb{k}\ \ \forall x\ ,\ y \in E : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$.

4. $\forall \alpha\ ,\ \beta \in \mathbb{k}\ \forall x \in E : (\alpha \cdot \beta)x = \alpha(\beta \cdot x)$.

5.$\forall x \in E : 1_{\mathbb{k}} \cdot x = x$.

Les elements de $\mathbb{k}$ (respectivement E) sont appelle **scalaire** , le triple $(E, +, L)$ s'appelle un **espace vectoriels** sur la corps $\mathbb{k}$.

Définition 1.1.2 *Soit E un ensmeble non vide muni d'une loi interne $(+)$, $(E\ ,+)$ est un **groupe commutatif** si et sulement si :*

1.$\forall x\ ,\ y \in E : x + y = y + x$.
2.$\forall x\ ,\ y\ ,\ z \in E : (x + y) + z = x + (y + z)$.
3.$\exists\ e \in E\ , \forall x \in E : x + e = e + x = x$.
4.$\forall x \in E\ ,\ \exists\ x' \in E : x' + x = x + x' = e$.

Remarque 1.1.3 *L'ensemble $E = \mathbb{R}^n$ muni des opérations habituelle d'addion de vecteur et de produit d'un vecteurs par un scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 1.1.4 *Soit E un espace vectoriel , $u \subset E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$ alors on a :*

1.$0 \cdot u = 0$.
2. $\lambda \cdot 0 = 0$.
3. $(-1) \cdot u = -u$.
4. *si* : $\lambda \cdot u = 0$ *alors* $\lambda = 0$ *ou* $u = 0$.

Définition 1.1.5 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ et F une partie de E ,on dit que F est un **sous espace vectoriel** de E si :*

1. $F \neq \varnothing$.
2. $\forall x, y \in F : (x+y) \in F$.
3. $\forall \alpha \in K$ *et* $\forall x \in F : (\alpha x) \in F$.

Définition 1.1.6 *On dit que un espace vectoriel E est de **dimention finie** , s' il est engendré par une famille de vecteurs , **i.e** il existe un nombre fini de vecteur $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ linéairement indépendant de E telle que :*

$$\forall x \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2 .... \alpha_n \in \mathbb{k}, x = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \ .$$

Définition 1.1.7 *Soit E un $K_$espace vectoriel et soient E_1, E_2deux sous-espace vectoriels de E on dit que E est une **somme direct** de E_1 et E_2 et on note :$E = E_1 \oplus E_2$ si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.*

1.2 Espaces vectoriels normés

Définition 1.2.1 *Soit E un $K_$espace vectoriel , on appelle **norme** sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$, habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant les trois proprietes suivants :*

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E$ (**homogénéité**).
2. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x \in E, \forall y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**inégalite triongulaire**).

Définition 1.2.2 *On appelle **espace vectoriel norme** la couple $(E, \|\cdot\|)$ ou E est un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\|\cdot\|$ une normé sur E .*

Exemple 1.2.3 *L'espace des nombres reéls $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue $x \rightarrow |x|$ est un espace vectoriel norme et appelée norme usuelle de $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.2.4 *Sur $\mathbb{R}^n$ on définie les applications suivantes :*

1. $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$on a $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

2. $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$on a $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

3. $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$on a $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

définissent des normes équivalentes.

Définition 1.2.5 *Soit $\|\cdot\|_1 et \|\cdot\|_2$ deux normes sur K-espace vectoriel E ,on dit que $\|\cdot\|_1 et \|\cdot\|_2$ sont* ***équivalentes*** *et écrit $\|\cdot\|_1 \simeq \|\cdot\|_2$ si et seulement s'il existe deux constante strictement positive a et b telle que pour tout $x \in E$ on dit :*

$$a \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b \|\cdot\|_1 .$$

Théorème 1.2.6 *Soit E un espace vectoriel de dimention finié alors touts les normes sur E sont équivalentes.*

1.3 Ensembles ouverts ,Ensembles fermés

Définition 1.3.1 *soit $(E \ , \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé , soient $x_0 \in E, r > 0$.*

• On appelle **boule ouvert** de centre x_0 et rayon $r > 0$, l' ensemble noté $B(x_0, r)$ des élèments x de E telsque $\|x - x_0\| < r$ **i.e** :

$$B(x_0, r) = \{x \in E, \|x - x_0\| < r\} .$$

• On appelle **boule fermé** de centre x_0 et rayon $r > 0$, l' ensemble noté $\bar{B}(x_0, r)$ des élèments x de E telsque $\|x - x_0\| \leq r$ **i.e** :

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in E, \|x - x_0\| \leq r\} .$$

• On appelle **sphère** de centre x_0 et rayon $r > 0$, l' ensemble noté $S(x_0, r)$ des élèments x de E telsque

$\|x \ - x_0\| = r$ **i.e** :

$$S(x_0, r) = \{x \in E \ , \|x - x_0\| = r\} .$$

On a $\bar{B}(x_0, r) = B(x_0, r) \cup S(x_0, r)$.

Définition 1.3.2 *On appelle* ***ensemble ouvert*** *de E tout partie O de E qui est voisinage de chacun ses point ,on note $O(E)$ le ensemble des ouverte de E si :*

$$O \subset E \ , O \in V(x) \Longleftrightarrow \forall x \in O \ , \exists r > 0 \ , B(x \ , r) \subset O.$$

Définition 1.3.3 *On appelle* ***ensemble fermé*** *de E ,tout complémentaire de E est ouvert,(C^E) ,on note $F(E)$ le ensemble de fermé de$E$.*

Proposition 1.3.4 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé , soit A une partie de E , A est fermé si et seulement si A contient les limites de toutes ses suites convergente .*

1.4 Suites dans un espace vectoriel normé

Dans cette partie $(E \ , \|\cdot\|)$est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$.

Définition 1.4.1 *Une suite de E est une application $u : \mathbb{N} \to E$,* ***l'image*** *$u(x)$ d'un entier n est appellée le terme d'indice n de la suite u et notée u_n . La suite u elle même est alors notée $(u_n)_{n \geq 0}$.*

- *Si $E = \mathbb{k}$, on dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une* **suite numérique**
  (*une suite réelle si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ et une suite complexe si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$*)

Définition 1.4.2 *La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est dite* ***convergente*** *s' il existe un élément u de E tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists n_0 \in \mathbb{N} \ , \forall n \in \mathbb{N} \ , \forall n \geq n_0 \ , \|u_n - u\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.4.3 *Une suite non convergente est dit divergente .*

Proposition 1.4.4 *:Soit E est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$ et soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de E on a :*

- *si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente , l'élèment u de la définition est unique , on l'appelle limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$*est *on noté $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.*
- *toute suite convergente est bornnée mais la réciproque est faux .*
- *si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers u ,la suite $n \to \|u_n\|$ converge vers $\|u\|$.*
- *la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $u \Leftrightarrow$ la suite $n \to \|u_n - u\|$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.4.5 *Soit $(u_n)_{n\geq o}$ une suite dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante , appelons v , la suite définie pour toute $n \in \mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$. On dit que v_n est une suite* ***extraite*** *ou sous suite de $(u_n)_{n\geq o}$.*

Remarque 1.4.6 *Avec les notion ci dessus,on vérifié que $\forall n \in \mathbb{N}$,$\varphi(n)_{n\geq 0}$.*

- Comme car particulier de suite extraite,on peut définié la suite des termes d'indices pairs ($\varphi(n) = 2n$) ou la suite des termes d'indices impairs ($\varphi(n) = 2n + 1$).

Définition 1.4.7 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace normé $(E\ ,\|\cdot\|)$ on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une* ***suite de Cauchy*** *si :*

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\forall n\ ,m \in \mathbb{N}\ ,n\ ,m \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon.$$

ie :

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_m\| = 0.$$

Proposition 1.4.8 *Dans un espace normé $(E\ ,\|\cdot\|)$:*

- *tout suite de Cauchy est bornné.*
- *toute suite convergente est de Cauchy.*
- *toute suite extraite d'une de Cauchy est de Cauchy.*
- *tout suite de Cauchy* adméttant une sous-suite convergente , converge .

Proposition 1.4.9 *si deux norme* $\|\cdot\|_1$*et* $\|\cdot\|_2$ *sont équivalents sur* E *alors : toute suite de Cauchy pour la norme* $\|\cdot\|_1$*est également une suite de Cauchy pour la norme* $\|\cdot\|_2$*. De même , toute suite convergente pour la norme* $\|\cdot\|_1$*il est également pour la norme* $\|\cdot\|_2$*.*

Théorème 1.4.10 *toute suite de Cauchy dans* $\mathbb{R}$ *est convergente plus généralement , toute suite de Cauchy d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.*

1.5 Espace de Banach

Définition 1.5.1 *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé,on dit que* E *est une* ***espace complet*** *si et seulement si toute suite de Cauchy de* E *converge dans* E*.*

Définition 1.5.2 *On appelle* ***espace de Banach*** *un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel normé complet .*

Proposition 1.5.3 *- Toute partie complet d'un espace normé est fermé .*

-Toute partie fermée d'un espace normé complet est complète .

Exemple 1.5.4 $\mathbb{R}$ *usuel est un espace de Banach .*

Proposition 1.5.5 *Un* $\mathbb{k}$*-espace vectoriel de dimension finié muni de n'importe quelle norme est un espace de Banach .*

Proposition 1.5.6 *Soit* E *un espace vectoriel muni de deux normes* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ *, on suppose* E *muni de chacune des normes*$\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ *est un espace de Banach ,on suppose que :*

$\exists c > 0$ telsque :

$$\|\cdot\|_2 \leq c \|\cdot\|_1 \text{ , } \forall x \in E$$

alors :

$$\exists\ c' > 0 \text{ telsque : } \|\cdot\|_1 \leq c' \|\cdot\|_2 \text{ , } \forall x \in E.$$

Autrement dit , les deux normrs sont équivalentes .

1.6 Applications linéaires continues

Dans cette partie nous intéressons à l'espace des fonctions linéaires continues , nous allons à norme cet espace puis à la caractériser .

Soient E , F deux ensemble non vide.

Définition 1.6.1 *Une application définie sur E et à valeurs dans F est une loi qui à tout élèment de E fait corspondre un unique élèment de F ,si on note f cette application ,le élèment associé à x par f est note $f(x)$ .Le ensemble E s'appelle ensemble de départ . Le ensemble F s'appelle ensemble de arrivée de f . On note suivant une fonction $f : E \to F$ ou $x \to f(x)$. Le élèment $y = f(x)$ s'appelle le image de x par f et x s'appelle un antécédent de y par f .*

Définition 1.6.2 *Une application $f : E \to F$ est* ***injective*** *si :*

$$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Définition 1.6.3 *Une application $f : E \to F$ est* ***surjective*** *si :*

$$\forall y \in F, \exists x \in E : f(x) = y.$$

Définition 1.6.4 *Une application $f : E \to F$ est* ***bijective*** *si :*

$$f \ est \ injective \ et \ surjective \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists! x \in E : y = \ f(x)$$

Définition 1.6.5 *Soient $f : E \to F$ une application $A \subset E$ et $B \subset F$ deux ensemble non vide .*

- *On appelle* **image direct** *de A par f noteé $f(A)$ et définie par :*
$$f(A) = \{y \in B, \exists X \in A : f(x) = y\} = \{f(x) \in B; x \in A\} \subset F.$$

- *On appelle* **image réciproque** *de B par f noteé $f^{-1}(B)$ et définie par :*
$$f^{-1}(B) = \{x \in A, \exists y \in B : f(x) = y\} = \{x \in A, f(x) \in B\} \subset E.$$

- *On appelle* **noyau** *de f , note $Ker(f)$ le sous ensemble particulier de E telque :*
$$Ker(f) = \{x \in A \ , \ f(x) = 0\} .$$

1.6.1 Applications continues

Soient $(E\ ,\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espace vectoriel normés sur le même corps $\Bbbk$ et $A \subset E$ ensemble non vide ,

et a un point de E .

Définition 1.6.6 *Soit $f : E \to F$ une application.Mathématiquement , on dit que f* ***continue*** *au point $a \in A$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\exists\ \delta > 0\ ,\forall x \in A\ ,\ \|x-a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\|_F < \varepsilon.$$

Définition 1.6.7 *L'application f est continue sur E s'elle est continue en tout point de E .*

Théorème 1.6.8 *L'application f est continue au point a de E si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élèment de E qui converge vers a dans $(E\ ,\|\cdot\|_E)$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ dans $(F\ ,\|\cdot\|_F)$. Et $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$.*

Exemple 1.6.9 *L'application :* $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$

$$x \to \|x\| \qquad \text{est continue sur } E\ .$$

En effet :

soit $x_0 \in E$ on a :

$$\forall\ x \in E\ \ |\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\|\ \ .$$

Il suffit choisi $\delta = \varepsilon$ pour trouve :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists\ \delta > 0, \forall x \in E : \|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow |\|x\| - \|x_0\|| < \varepsilon$$

D'ou l'application normé est continue

Proposition 1.6.10 *soit $f : E \to F$ une application , alors f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de F est fermé de E .*

Définition 1.6.11 *Soit $f : E \to F$, on dit que f est* ***uniformément continue*** *sur E si :*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists\ \delta > 0\ ,\forall(x\ ,\ y) \in E^2, \|x-y\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|_F < \varepsilon\ \ \leq \|x-y\|\ .$$

Remarque 1.6.12 *Toute application uniformément continue est continue sur E .L'inverse est faux en général .*

Exemple 1.6.13 *Soit $E = (\varepsilon\,[0,1]\,,\mathbb{R})$ muni la norme.*

$$\|f\| = \sup|f(x)|_1\ \ , x \in [0,1] \text{ application continue.}$$

1.6.2 Applications linéaires continues

Dans cette partie nous intéresons à l'espace des fonctions linéaires continues , nous allons à norme cet espace puis à le caractériser . Dans toute cette partie $(E\ ,\ \|\cdot\|_E)$ et $(F\ ,\ \|\cdot\|_F)$ désignerons deux espaces vectoriels normes sur le même corps $\Bbbk$, on désigne par :

$L(E,F)$:L'ensmeble des applications linéaires de E dans F .

$L_c(E,F)$:L'ensmeble des applications linéaires continues de E dans F .

$L_C(E)$:L'ensmeble des applications linéaires continues de E dans E .

$L_c(E,K)$:L'ensmeble des applications linéaires continues de E dans K .

Définition 1.6.14 *Soient E , F deux K-espace vectoriel sur le même corps* $\Bbbk$ ($\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) *une application $f : E \to F$ une **application linéaire** si et seulement si :*

1. $\forall x\ ,\ y \in E\ ,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$

2. $\forall x\ ,\ y \in E\ ,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$

Proposition 1.6.15 *:Soit $f : E \to F$ une application **linéaire** alors les propriété suivante équivalantés :*

- *f continue sur E.* (1)
- *f continue sur 0_E.* (2)
- *f est bornné sur$\bar{B}(0,1)$.* (3)
- *f est borne sur $S(0,1)$, $\exists C > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq C\|x\|_E$.* (4)
- *f est Lipshitzienne.* (5)

Preuve. : (1) $\Rightarrow$ (2) : *comme f est continue donc f est continue au point* 0 .
(2) $\Rightarrow$ (3) : *supposons que f est continue au point* 0 , *soit* $\varepsilon = 1$ *il existe* $\delta > 0$ *telque* :

$\forall x \in E : \|x\| \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq 1$ *donc* $\frac{1}{\delta}\|x\| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\delta}\|f(x)\| \leq \frac{1}{\delta}$ *alors* :

$\forall y = \frac{1}{\delta}x, \|y\| \leq 1 \Rightarrow \|f(y)\| \leq \frac{1}{\delta}$ *donc* $f(B\overline{(0,1)}) \subset \overline{B_E}(0, \frac{1}{\delta})$.

d'ou f est borné sur la boule unite fermé de E.

■

(3) $\Rightarrow$ (4) *supposons que f est bornnée sur la boule unite fermé de E alors il existe* $a > 0$ *telque* :

$\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq a$.

on pose : $x = \frac{X}{\|X\|}$ *donc* $\|x\| = 1$ d'après ce qui précédent $\|f(x)\| \leq a$ donc

$\left\|f(\frac{X}{\|X\|})\right\| \leq a$ alors $\forall X \in E \; \|f(X)\| \leq a\|X\|$
(4) $\Rightarrow$ (5) *supposons que* (4) *et vraie , pour x , $y \in E$ on a* :

$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| \leq a\|x-y\|$ *donc f est Lipshitziènne de rapport a.*
(5) $\Rightarrow$ (1) *Tout application Lipshitziènne est uniformément continue donc continue.*

$\forall \varepsilon > 0 \exists \; \delta = \frac{\varepsilon}{N} > 0, \forall x \in E \; \|x-y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq a\|x-y\| \leq \|x-y\|$.

Exemple 1.6.16 *:soit* $\varphi : E \to \mathbb{R}$

$f \to \varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx.$

montre que φ *une application linéaire continue.*

φ *linéaire* : $\forall\alpha\ ,\ \beta \in \mathbb{R}\ ,\forall f\ ,\ g \in E : \varphi(\alpha f\ ,\ \beta g) \stackrel{?}{=} \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g).$

$\varphi(\alpha f\ ,\ \beta g) = \int_0^1 (\alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g))dx = \alpha \int_0^1 f(x)dx + \beta \int_0^1 g(x)$

$= \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g) \Rightarrow \varphi$ *linéaire.*

φ *continue* : *soit* $f \in E\ , \|\varphi(f)\| = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\, dx.$

on a $\forall x \in [0,1] : |f(x)| \leq \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|\,.$

donc : $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|\, dx$

$f \to \varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx.$

$\forall f \in E\, |\varphi(f)| \leq \int_0^1 \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|\, dx = \sup |f(x)|_0^1 = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| = \|f\|_E\,.$

Proposition 1.6.17 *Soit* $f : E \to F$ *une application alors :*$Ker(f)$ *est un ensmeble fermé de* E *.*

Théorème 1.6.18 *L'application* f *est continue au point* a *de* A *,si et seulement si pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'élèment de* A *qui converge vers* a *dans* $(E\ ,\ \|\cdot\|_E)$ *, la suite* $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(a)$ *dans* $(F\ ,\ \|\cdot\|_F)$ *.*

Corollaire 1.6.19 *On dimension finie , touts les application linéaire sont continue .*

Théorème 1.6.20 *Pour $f \in L_C(E,F)$ on pose :*

$$\|f\|_{L_C(E,F)} = \sup_{x\in E} \frac{\|f(x)\|}{x}.$$

La fonction : $f \in L_C(E,F) \to \|f\|_{L_C(E,F)}$ est une norme sur l'espace vectoriel $L_C(E,F)$, qui appellée normé naturelle de $L_C(E,F)$, et on a les égalites suivants :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L(E,F)} &= \sup_{x\in E} \|f(x)\|_F \\ &= \inf \{c \text{ réel } > 0 , \forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq c \|x\|_E\} . \end{aligned}$$

1.7 Espace de Hilbert

Définition 1.7.1 *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk$ ($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) , on applle* ***produit scalaire*** *sur E une fonction $f : E \times E \to \Bbbk$ vérifient les propriété suivants :*

1/ $\forall x , y , z \in E : f(x+y , z) = f(x , z) + f(y , z)$.

2/ $\forall x , y \in E , \forall \lambda \in \Bbbk : f(\lambda x , y) = \lambda f(x , y)$.

3/ $\forall x , y \in E : f(y , x) = \overline{f(x , y)}$.

4/ $\forall x \in E : f(x , x) \geq 0$.

5/ $\forall x \in E : f(x ,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Un produit scalaire est noté par $< , >$.

Définition 1.7.2 *Soit E un espace vectoriel sur $\Bbbk$, et soit $< , >$ un produit scalaire sur E , on associé au produit scalaire un norme en posant :$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{< x, x >}$.*

Définition 1.7.3 *On appelle* ***espace préhilbertien*** *le couple constitue par un espace vectoriel E et par un produit scalaire $< , >$ sur E ,on le notera $(E, < , >)$.*

Définition 1.7.4 *Un* ***espace de Hilbert*** *ou* ***espace Hilbertien*** *est espace préhilbertien complet pour la norme associe à son produit scalaire .*

Exemple 1.7.5 • *$\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $< x, y >= \sum_{0\leq j\leq i} x_j y_j$, $\mathbb{R}^n$ est préhilbertien.*

Théorème 1.7.6 ***(Cauchy.Shwartz)*** *soit* $(E, < \cdot >)$ *est un espace préhilbertien on a alors :*

$$|< x, y >|^{\,2} \leq < x, x >< y, y > \forall x, y \in E \ldots (1)$$

de plus on a l'égalite dans (1) si seulement si x et y sont linéaire.

- $L'application\ x \rightarrow \|x\| = \sqrt{< x, x >}\ est\ une\ norme\ sur E.$

Définition 1.7.7 *soit* A *une partie non vide d'un espace préhilbretien* E *, soit* $x \in E$ *on dit que un élèment* y *de* A *est un* ***projection*** *de* x *sur* A *si :*

$$d(x\ ,\ A)\ = \inf_{\alpha \in A} (x, \alpha) = \inf \|x - \alpha\|_{\alpha \in A} = \|x - y\|.$$

et on note : $y = p_A(x)$

Notation 1.7.8 *Lorsque b il n'y a pas de resque de coufission ,les produits scalaires on noté* $H\,[x, y] =< x/y >=< x, y >$.

Chapitre 2

Théorème du graphe fermé

2.1 théorème du graphe fermé

Définition 2.1.1 *Soient E et F deux ensemble non vide , soit $f : E \to F$ une fonction* ***Le graphe*** *de la fonction f est le sous-ensemble de $E \times F$ constitue des couples $(x \ , \ f(x))$ on le notera $G(f)$,*

$$G(f) = \{(x \ , \ y) \in E \times F \ , \ y = f(x)\} \, .$$

Théorème 2.1.2 *soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach soit f une application linéaire alors : le graphe de f, $G(f)$ est fermé dans $E \times F$ si et seulement si f est continue .*

Preuve. on muni l'espace $E \times F$ de la norme produit définie par : ■

$$\|(x \ , \ y\|_{E \times F} = \ \|x\|_E + \|y\|_F \ \ , (x \ , \ y) \in \mathbb{R}^2$$

• supposons que $G(f)$ est fermé dans $E \times F$ on considére sur E les normes :

$$\|x\|_1 = \|x\|_2 + \|f(x)\|_F \ \text{ et } \ \|x\|_2 = \|x\|_E$$

on a $(E\ ,\|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach , on veut montre que $(E\ ,\|\cdot\|_1)$ est aussi un espace de Banach .

Vérifions d'abord que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E . pour cela , on utilisera le fait que f est linéaire et les propriétés des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$

En effet , soient x , $y \in E$, $\lambda \in \mathbb{k}$ on a :

- $\|\cdot\|_1 = 0 \Rightarrow \|x\|_E + \|f(x)\| = 0$

$$\Rightarrow \|x\|_E = 0 \text{ et } \|f(x)\| = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

- $\|\lambda x\|_1 = \|\lambda x\|_2 + \|\lambda f(x)\| = \lambda\|x\|_2 + \lambda\|f(x)\| = \lambda(\|x\|_2 + \|f(x)\|) = \lambda\|x\|_1$

- $\|x+y\|_1 = \|x+y\|_2 + \|f(x+y)\|_F = \|x+y\|_2 + \|f(x)+f(y)\|_F$

$$\leq \|x\|_2 + \|y\|_2 + \|f(x)\|_F + \|f(y)\|_F$$

$$\leq \|x\|_2 + \|f(x)\|_F + \|y\|_2 + \|f(y)\|_F$$

$$\leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Il rester a montre que $(E\ ,\|\cdot\|_1)$ est complet .

Pour ce but , soit (x_n) une suite de Cauchy dans $(E\ ,\|\cdot\|_1)$, **i.e :**

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0\ , \forall p,q \geq n_0\ \|x_p - x_q\|_1 < \varepsilon$$

comme : $\|x_p - x_q\|_1 = \|x_p - x_q\|_E - \|f(x_p - x_q)\|_F$

$$= \|x_p - x_q\|_E - \|f(x_P) - f(x_q)\|_F$$

on obtient : $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\quad \forall p,q \geq n_0\ \ \|x_p - x_q\|_E < \varepsilon$

et : $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ ,\ \forall p\ ,\ q \geq n_0\ , \|f(x_P) - f(x_q)\|_F < \varepsilon$

D'ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(E\ ,\|\cdot\|_E)$ et $(f(x)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans F .

Et comme $(E\ ,\|\cdot\|_E)$ et F sont complet alors : la suite (x_n) converge dans $(E\ ,\|\cdot\|_p)$et la suite $(f(x)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(F,\|\cdot\|_F)$ **i.e** : il existe $x \in E$, $y \in F$ telque :

pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \, , \|x_n - x\|_E < \tfrac{\varepsilon}{2} \tag{2.1}$$

et

$$\exists n_2 \in E : \forall n \geq n_2 \, , \|F(x_n) - y\|_F \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \tag{2.2}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} \|(x_n \, , \; fx_n) - (x \, , \; y)\|_{E\times F} &= \|(x_n - x \, , \; f(x_n) - y)\|_{E\times F} \\ &= \quad \|x_n - x\|_E + \|f(x_n) - y\|_F < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Pour $n \geq \max\,(n_1, n_2)$, on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \, , \; f\,(x_n)) = (x \, , \; y) \;\; dans \;\; E \times F.$$

Or :$(x_n \, , f\,(x_n)) \;\in G\,(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque $G\,(f)$ est fermé dans $E \times F$,

on déduit d'après la proposition (1.3.4) que $(x, y) \in G\,(f)$ **i.e** :

$$y = f\,(x)\,.$$

De $(2, 1)$ et $(2, 2)$, on trouve que :

$$\|x_n - x\|_1 = \|x_n - x\|_2 + \|f(x_2) - f\,(x)\|_F < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donc $(E \, , \, \|.\|_1)$ est complet **i.e :** $(E \, , \, \|.\|_1)$ est un espace de Banach d'autre par , il est claire que :

$$\|x\|_2 = \|x\|_E \leq \|x\|_E + \|f\,(x)\|_F = \|x\|_1 \;\; , \forall x \in E.$$

On applique la proposition (1.5.6) on obtient $\|\cdot\|_1 \simeq \|\cdot\|_2$ **i.e** :

$$\exists c > 0 : \forall x \in E : \|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2 \;\; .$$

D'ou :

$$\exists c > 0 : \forall x \in E : \|x\|_E + \|f\,(x)\|_F \leq c\,\|x\|_2 = c\,\|x\|_E$$

Alors :

$$\exists\ c > 0 : \forall x \in E \quad , \ \|f(x)\| \leq \|x\|_E + \|f(x)\|_F \leq c\, \|x\|_E \ .$$

Donc

$$\exists c > 0 \ , \forall x \in E : \|f(x)\| \leq c\, \|x\|_E \, .$$

• supposons mantenant que f est continue et montre que $G(f)$ et fermé.

Soit $(x_n\ ,\ f(x_n))$ une suite d'élèments dans $G(f)$ qui converge vers (x,y) dans $E \times F$ **i.e** :

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n\ ,\ f(x_n)) - (x\ ,\ y)\|_{E\times F} = 0$$

on a :

$$\|(x_n, f(x_n)) - (x, y)\|_{E\times F} = \|(x_n - x), (f(x_n) - y)\|_{E\times F}$$

$$= \|x_n - x\|_E + \|f(x_n) - y\|_F$$

ce qui amplique :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_E = \lim_{n\to\infty} \|f(x) - y\|_F = 0 \ , \ \textbf{i.e.}$$

(x_n) converge vers x dans E et $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge vers y dans F .

Gràce à la continute de f , nous avons le théorème (1.6.9)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x).$$

l'unicite de la limite dans un espace norme permet de conclure que $y = f(x)$

et par suite $(x, y) \in G(f)$ d'ou $G(f)$ est fermé .

2.2 Applications

2.2.1 Première application

Théorème 2.2.1 *(Théorème de Hellinger-Toepliz)*

Soit $(H, < ., . >)$ un espace de hilbert , et soit $f : H \longrightarrow H$ une application linéaire .
1. on suppose qu'il existe un application linéaire $S : H \longrightarrow H$ tel que :

$$< S(x), y >=< x, f(y) > \text{ pour tout } x, y \in H \qquad (2.3)$$

alors f est continue .
2. On suppose que $(H, \langle ., . \rangle)$, est réel et qu'on a : $\langle f(x), x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$, alors f est continue .

Preuve. 1. Soit G le graphe de f, et soit $(x_n, f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans G convergent vers un point $(x\ , y) \in H \times H$, pour $z \in H$, ■
on a alors d'après (2.3) :

$$\begin{aligned}
\langle z, f(x) \rangle &= \langle S(z), x \rangle \\
&= \lim_{n\to+\infty} \langle S(z), x_n \rangle \\
&= \lim_{n\to+\infty} \langle z, f(x_n) \rangle \\
&= \langle z, y \rangle
\end{aligned}$$

par conséquent :
$\langle z\ , f(x) - z \rangle = 0\ ,\ \forall z \in H$
en particulier pour $z = f(x) - z$, cela prouve qu'on a $y = f(x)$ et donc $(x, y) \in G$. Ainsi , le graphe de f est fermé dans
$H \times H$ donc f est continue d'après le théorème du graphe fermé

2. On applique à nouveau le théorème du graphe fermé , soit $(x_n, f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points du graphe
de f convergent vers $(x, y) \in H \times H$, il s'agit de montrer que $y = f(x)$,quitte à remplacer x_n par $(y - f(x))$,on peut
en fait supposer $x = 0$ .Ainsi, x_n tend vers 0 , $f(x_n)$ tend vers y,et on veut montrer qu'on a $y = 0$.

Soit $h \in H$ quelconque ,on a $\langle f(x_n + h), x_n + h\rangle \geq 0; \forall n \in \mathbb{N}$, autrement dit :

$$\langle f(x_n), x_n\rangle + \langle f(h), h\rangle + \langle f(x_n), h\rangle + \langle f(h), x_n\rangle \geq 0; \forall n \in \mathbb{N} , \tag{2.4}$$

Or , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \quad \langle f(x_n), x_n\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} x_n \right\rangle \\ &= \langle y\ , 0\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), h\rangle &= \left\langle \lim_{n\to\infty} f(x_n), h \right\rangle \\ &= \langle y\ , h\rangle . \end{aligned}$$

Donc, en passent à la limite dans (2.4) , on trouve :

$$\langle f(h), h\rangle + \langle y, h\rangle \geq 0$$

En remplaçant h par λh ,on déduit par linéarité de f :

$$\lambda^2 \langle f(h), h\rangle + \lambda \langle y, h\rangle \geq 0, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

ce qui n'est possible que si$\langle y, h\rangle = 0$. En effet ,
si $\lambda > 0$, on trouve

$$\lambda \langle f(h), h\rangle + \langle y, h\rangle \geq 0 \tag{2.5}$$

dans le cas ou $\lambda < 0$, on a :

$$\lambda \langle f(h), h\rangle + \langle y, h\rangle \leq 0 \tag{2.6}$$

En passant à la limite quand $\lambda \overset{>}{\to} 0$ dans (2.5) et quand $\lambda \overset{<}{\to} 0$ dans (2.6),on trouve respectivement $\langle y\ , h\rangle \geq 0$ et $\langle y\ ,\ h\rangle \leq 0$,

d'ou $\langle y\ ,\ h\rangle = 0$.Comme $h \in H$ est arbitraire,on a donc $y = 0$.

Soit E un espace de Banach,et soient E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.

On note $P_i : E \to E_i\,; i = \{1\ ,\ 2\}$ les projections déterminées par cette décomposition ,pour $x = x_1 + x_2$ (avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$), la décomposition étant unique puisque E est un somme directe de E_1et E_2 on a :

$p_1(x) = x_1$ et $p_2(x) = x_2$.On a alors, $x = p_1(x) + p_2(x)$.

2.2.2 deuxième application

Lemme 2.2.2 *On a :*

1. $p_1 + p_2 = Id$.
2. p_1 et p_2 sont linéaires.
3. Si $x \in E_1$ (resp.$x \in E_2$) , alors $p_1(x) = x$ (resp.$p_2(x) = x$).
4. $E_1 = \ker(p_1 - Id)$ et $E_2 = \ker(p_1)$.

ou Id est l'application identité sur E.

Preuve. 1. Par définition de $p_1$et p_2. ■

2. Soient $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2 \in E$ (x_1 , $y_1 \in E_1$ et x_2 , $y_2 \in E_2$) , α , $\beta \in \mathbb{k}$ alors :

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2)$$

E_1et E_2 étant des sous-espaces vectoriels de E,

on déduit que $\alpha x_1 + \beta y_1 \in E_1$ et $\alpha x_2 + \beta y_2 \in E_2$, et donc par définition de $p_1$et p_2 , on trouve

$$p_1(\alpha x + \beta y) = \alpha x_1 + \beta y_1 = \alpha p_1(x) + \beta p_1(y)$$

et

$$p_2(\alpha x + \beta y) = \alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha p_2(x) + \beta p_2(y)$$

d'ou la linéarité de $p_1$et p_2 .

3. Si $x \in E_1$,on a $x = x + 0$, donc par définition de p_1 , on a $p_1(x) = x$, si $x \in E_1$, on a $x = 0 + x$,

d'ou $p_2(x) = x$.

4. Soit $x \in \ker(p_1 - Id)$ **i.e :**

$p_1(x) = x$.

Or $x \in E$ donc admet une composition unique $x = x_1 + x_2$,

ou $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. D'après la définition de p_1 , on a $p_1(x) = x_1$ ce qui implique $x = x_1$, et donc $x \in E_1$.

On vient alors de montrer que :

$$\ker(p_1 - Id) \subset E_1.$$

D'autre part , si $x \in E_1$, on peut écrire $x = x + 0$, avec $x \in E_1$ et $0 \in E_2$ et cette décomposition est unique ,

donc $p_1(x) = x$ **i.e :**

$x \in \ker(p_1 - Id)$ d'ou linclusion inverse $E_1 \subset \ker(p_1)$, et par conséquent,

$\ker(p_1 - Id) = E_1$.

Soit maintenant $x \in \ker(p_1)$ **i.e :**$E_2 \subset \ker(p_1)(x) = 0$, et comme $x = p_1(x) + p_2(x)$ on a alors $x = p_2(x) \in E_2$,alors

$$\ker(p_1) \subset E_2.$$

D'autre part , si $x \in E_2$, alors $x = x + 0$, d'où $p_1(x) = 0$, **i.e :**

$$x \in \ker(p_1) \ , \ alors : E_2 \subset \ker(p_1),$$

d'où

$$E_2 = \ker(p_1).$$

Théorème 2.2.3 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) Les deux projecections p_1 et p_2 sont continues .

(2) Les sous-espaces E_1 et E_2 sont fermés dans E.

Preuve. • On a d 'après le lemme précédent $E_1 = \ker(p_1 - Id)$ et $E_2 = \ker(p_1)$,donc si p_1 et p_2 sont continues, E_1 et E_2 ■

sont fermés dans E .

• Soit : $G = \{(x, y) \in E \times E_1; y = p_1(x)\} \subset E \times E_1$, le graphe de p_1.Soit $(x_n, p_1(x_n))$ une suit de points de G

convergeant vers $(x, y) \in E \times E_1$, alors

$$(x_n) \text{ converge vers } x \text{ dans } E \ , \tag{2.7}$$

et

$$p_1(x_n) \text{ converge vers } y \text{ dans } E, \tag{2.8}$$

comme E_1 est fermé et $y \in E_1$ donc

$$p_1(y) = y \tag{2.9}$$

par le lemme :

$$\begin{aligned} p_1(x_n - p_1(x_n)) &= p_1(x_n) - p_1(p_1(x_n)) \\ &= p_1(x_n) - p_1(x_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

i.e : $x_n - p_1(x_n) \in \ker(p_1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $x_n - p_1(x_n) \in E_2$ grâce au lemme

En utilisant (2.7) , (2.8) et (2.9) on voit que

$$x_n - p_1(x_n) \overset{n \to \infty}{\to} x - p_1(y) \text{ dans } E$$

E_2 étant lui aussi fermé , on déduit que $x - p_1(y) \in E_2$ et par conséquent ,

$$P_1(x - p_1(y)) = 0$$

ce qui implique

$$p_1(x) = p_1(y)$$

En fin , on déduit par (2.9) que

$$y = p_1(x)$$

donc $(x, y) \in G$ .Ce qui prouve que graphe de $p_1$et fermé dans $E \times E_1$, comme E est un espace de Banach et E_1 également puisque E_1 et fermé , p_1 est continue d'après le théorème du graphe fermé , donc $p_2 = Id - p_1$ d'après le lemme également.

Bibliographe

[1] Jean-Jacques Colin , Jean-Marie Morvan . Espaces vectoriels , application linéaires
. Cepad 2011.

[2] Guy Auliac -Jean-Yvescaby . Mathématique topologie et analyse .
Dunod Paris 2005 .

[3] Nawfal El Hage Hassan . Topologie génerale et espace normés .
Dunod Paris 2011 .

[4] Walter Rundin . Analyse fonctinelle .

[5] Mohamed Hazi Introduction aux espaces normés .