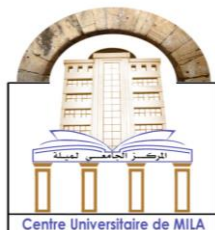


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

En : -Filière : Mathématiques Fondamentales

Thème

Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien

Préparé par :

Berdai Amira
Bouzeraa Sana
Lakehal Safa
Rihane Siham

Dirigé par : Kecies Mohamed

Année universitaire : 2013/2014

Remerciements

Chaque fois qu'on achève une étape importante dans notre vie, on fait une pose pour regarder en arrière et se rappeler toutes ces personnes qui ont partagé avec nous tous les bons moments de notre existence, mais surtout les mauvais.

Avant tout, nous remercions le bon dieu tout puissant qui nous avons donné la force et de nous avoir permis d'arriver à ce stade-là.

*Notre première pensée va tout naturellement à notre encadreur Mr **Mohamed Kecies** qui suit fidèlement nos travaux, nous tenons à le remercier pour son encadrement, pour la confiance qu'il nous a témoigné en nous confiant ce travail et pour nous avoir donné les moyens d'arriver à cette mémoire.*

Nous voudrions remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette mémoire.

*Ensuite, nous tenons à remercier **tous les enseignants** du centre universitaire de Mila en général et l'équipes **enseignantes de l'institut des sciences et de technologie** en particulier pour la richesse des enseignements de ces années de la Licence.*

Nous dédions cet humble travail :

-à nos très chers parents dont le courage et l'abnégation constitueront toujours pour nous un exemple à suivre.

*-Aux familles " **LAKEHAL** ", " **BOUZERAA** ", " **BERDAI** " et " **RIHANE** ".*

*Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à **tous nos proches et amis** et **tous les groupes de la licence LMD** qui nous ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de cette mémoire.*

Table des matières

Introduction Générale	2
1 Espaces euclidiens	3
1.1 Généralités	3
1.1.1 Exemples fondamentaux	3
1.2 Inégalités, Normes euclidiennes	6
1.3 Orthogonalité	10
1.4 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt	14
1.4.1 Exemple d'orthonormalisation	16
1.4.2 Conséquences	16
1.5 Produit scalaire et base orthonormale	17
1.6 Projecteurs et symétries	19
1.6.1 Projecteurs (Projection suivant une direction)	19
1.6.2 Symétrie (suivant une direction)	22
1.6.3 Projecteurs orthogonaux, Symétries orthogonales	25
1.6.4 Symétrie orthogonale	30
2 Groupe orthogonal	35
2.1 Endomorphismes orthogonaux	35
2.2 Matrices réelles orthogonales	39
3 Etude du groupe orthogonal en dimension 2	43
3.1 Classification des isométries vectorielles en dimension 2	43
Bibliographie	51

Introduction Générale

Dans un espace euclidien, tout endomorphisme qui conserve le produit scalaire est appelé automorphisme orthogonal. La conservation du produit scalaire entraîne celle de la norme et réciproquement, les identités de polarisation assurent que si l'endomorphisme f conserve la norme, alors il conserve le produit scalaire. Pour cette raison, les automorphismes orthogonaux sont aussi appelés isométries vectorielles. En dimension finie, f est une isométrie vectorielle si et seulement si les vecteurs colonnes de sa matrice dans une base orthonormale donnée sont des vecteurs unitaires et orthogonaux entre eux deux à deux. Par suite dans le cas réel, f est un automorphisme orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale donnée est une matrice orthogonale. Dans un espace euclidien de dimension deux, il existe deux types d'automorphismes orthogonaux : les rotations et les réflexions (ou symétries orthogonales par rapport à une droite).

L'orthogonalité est une notion première de la géométrie. Depuis un siècle, elle joue aussi un rôle important pour traiter les problèmes d'analyse fonctionnelle, par exemple ceux posés par les physiciens. La géométrie s'introduit ainsi dans un domaine inattendu, elle apporte des idées visuelles d'orthogonalité là où les mathématiciens d'avant 1900 ne voyaient que des calculs.

Ce mémoire est réparti sur l'introduction générale et trois chapitres. Dans le premier chapitre, on va donner les différentes notions de bases qui s'avèrent indispensables pour le reste de ce travail, en particulier les notions de produit scalaire, norme, orthogonalité, bases orthonormales, projections et symétries orthogonales.

Nous étudierons dans le deuxième et troisième chapitre les endomorphismes d'un espace euclidien qui préservent le produit scalaire, ou autrement dit les isométries. Nous verrons que les isométries d'un espace euclidien E donné forment un groupe appelé groupe orthogonal et nous étudierons complètement ce groupe dans le cas où $\dim E = 2$. Nous ferons le lien entre les matrices et ces endomorphismes remarquables et nous introduirons la notion de matrice orthogonale.

Chapitre 1

Espaces euclidiens

1.1 Généralités

Définition 1.1.1 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

(1) φ est une forme bilinéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in E^3 :$

$$\begin{cases} \varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \mu \varphi(y, z) & (\varphi \text{ linéaire par rapport à la 1}^{\text{ère}} \text{ place}) \\ \varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x, z) & (\varphi \text{ linéaire par rapport à la 2}^{\text{ème}} \text{ place}) \end{cases}$$

(2) φ est symétrique: $\forall (x, y) \in E^2 : \varphi(y, x) = \varphi(x, y)$.

(3) φ est définie : $\forall x \in E : \varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

(4) φ est positive: $\forall x \in E : \varphi(x, x) \geq 0$.

Notation 1.1.2 On note souvent $(x|y) = \langle x, y \rangle = x.y = \varphi(x, y)$ le produit scalaire.

1.1.1 Exemples fondamentaux

Exemple 1.1.3

1) **Produit scalaire usuel** sur $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$:

L'application $\varphi : (\mathbb{R}^n)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) = (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé produit scalaire usuel (ou : canonique) sur $\mathbb{R}^n$.

2) **Produit scalaire canonique** sur $M_{n,p}(\mathbb{R}), (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2 :$

L'application (Trace)

$$\begin{aligned}\varphi : (M_{n,p}(\mathbb{R}))^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\longmapsto \text{tr}({}^tAB)\end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelé produit scalaire canonique.

En effet :

Soient $A, B \in \mathbf{M}_{n,p}, \lambda \in \mathbb{R}$, alors :

(i)

$$\varphi(B, A) = \text{tr}({}^tBA) = \text{tr}({}^t({}^tAB)) = \text{tr}({}^tAB) = \varphi(A, B)$$

(ii)

$$\varphi(A, \lambda B + B') = \text{tr}({}^tA(\lambda B + B')) = \text{tr}(\lambda {}^tAB + {}^tAB') = \lambda \text{tr}({}^tAB) + \text{tr}({}^tAB') = \lambda \varphi(A, B) + \varphi(A, B')$$

(iii) *En notant $A = (a_{ij})_{ij}$, on a*

$$\varphi(A, A) = \text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij}^2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij}^2 \geq 0$$

(iv) *De même*

$$\varphi(A, B) = 0 \iff \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = 0, a_{i,j}^2 \geq 0 \iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}, a_{ij} = 0 \iff A = 0$$

En particulier pour $p = 1$, en identifiant $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, on retrouve le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

3) *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -ev des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Considérons l'application*

$$\varphi : E^2 \longrightarrow \int_a^b fg$$

Alors φ est un produit scalaire sur E . En effet :

Soient $f, g \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, alors

(i)

$$\varphi(g, f) = \int_a^b gf = \int_a^b fg = \varphi(f, g)$$

(ii)

$$\varphi(f, \lambda g_1 + g_2) = \int_a^b f(\lambda g_1 + g_2) = \lambda \int_a^b f g_1 + \int_a^b f g_2 = \lambda \varphi(f, g_1) + \varphi(f, g_2)$$

(iii)

$$\varphi(f, f) = \int_a^b f^2 \geq 0$$

(iv)

$$\varphi(f, f) = 0 \iff \int_a^b f^2 = 0 \iff f = 0$$

car f est continue.

Proposition 1.1.4 Soient E un $\mathbb{R}$ -ev, φ un produit scalaire sur E . On pose

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi(x, x) \end{aligned}$$

Alors

1) $\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall (y_1, \dots, y_p) \in E^p :$

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^p \mu_j y_j \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_i \mu_j \varphi(x_i, y_j)$$

2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in E^2 :$

$$\Phi(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 \Phi(x) + 2\lambda\mu\Phi(x, y) + \mu^2 \Phi(y)$$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \Phi(\lambda x) = \lambda^2 \Phi(x).$

4) $\forall (x, y) \in E^2 : \Phi(x + y) = \Phi(x) + 2\Phi(x, y) + \Phi(y).$

5) $\forall (x, y) \in E^2 : \Phi(x + y) + \Phi(x - y) = 2(\Phi(x) + \Phi(y)).$

Preuve.

1) On voit, par récurrence sur n

$$\forall Y \in E : \varphi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, Y \right) = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \mu_j \varphi(x_i, Y)$$

Donc

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^p \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi\left(x_i, \sum_{j=1}^p \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j=1}^p \mu_j \varphi(x_i, y_j)\right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_i \mu_j \varphi(x_i, y_j)$$

2) Cas particulier de 1). 3) et 4) cas particuliers de 2).

5) On a

$$\begin{cases} \Phi(x+y) = \Phi(x) + 2\varphi(x, y) + \Phi(y) \\ \Phi(x-y) = \Phi(x) - 2\varphi(x, y) + \Phi(y) \end{cases}$$

Puis additionner. ■

1.2 Inégalités, Normes euclidiennes

Théorème 1.2.1 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

$$\forall (x, y) \in E^2, (\varphi(x, y))^2 \leq \Phi(x)\Phi(y)$$

Preuve. On a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \Phi(x + \lambda y) \geq 0$$

Alors

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \Phi(y)\lambda^2 + 2\lambda\varphi(x, y) + \Phi(x) \geq 0$$

Si $\Phi(y) = 0$, le trinôme $\lambda \mapsto \Phi(y)\lambda^2 + 2\lambda\varphi(x, y) + \Phi(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$. Donc de discriminant ≤ 0

$$(\varphi(x, y))^2 - \Phi(x)\Phi(y) \leq 0$$

Si $\Phi(y) = 0$, alors $y = 0$, et l'inégalité voulue est évidente. ■

Proposition 1.2.2 (*Etude du cas d'égalité dans l'égalité de Cauchy-Schwarz*)

$$\forall (x, y) \in E^2, ((\varphi(x, y))^2 = \Phi(x)\Phi(y) \iff \{x, y\} \text{ lié})$$

Preuve.

1) Supposons $\{x, y\}$ lié, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha x$. On obtient

$$\begin{cases} (\varphi(x, y))^2 = (\varphi(x, \alpha x))^2 = \alpha^2(\varphi(x, x))^2 = \alpha^2(\Phi(x))^2 \\ \Phi(x)\Phi(y) = \Phi(x)\alpha^2\Phi(x) = \alpha^2(\Phi(x))^2 \end{cases}$$

D'où l'égalité voulue.

2) Réciproquement supposons

$$(\varphi(x, y))^2 = \varphi(x)\varphi(y)$$

Alors

Si $y = 0$, alors $\{x, y\}$ est lié.

Si $y \neq 0$ (donc $\Phi(y) > 0$). En notant $\lambda_0 = -\frac{\varphi(x, y)}{\varphi(y)}$, on a

$$\Phi(x + \lambda_0 y) = \left(\frac{\varphi(x, y)}{\Phi(y)} \right)^2 \Phi(y) - 2 \frac{\varphi(x, y)}{\Phi(y)} \varphi(x, y) + \Phi(x) = \frac{1}{\Phi(y)} (-(\varphi(x, y))^2 + \Phi(x)\Phi(y)) = 0$$

D'où $x + \lambda_0 y = 0$, (x, y) est lié. ■

Théorème 1.2.3 (*Inégalité de Minkowski*)

$$\forall (x, y) \in E^2 : (\Phi(x + y))^{\frac{1}{2}} \leq (\Phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\Phi(y))^{\frac{1}{2}}$$

Preuve. Pour tout (x, y) de E^2 , on a

$$\begin{aligned} (\varphi(x + y))^{\frac{1}{2}} &\leq (\varphi(x))^{\frac{1}{2}} + (\varphi(y))^{\frac{1}{2}} \iff \varphi(x + y) \leq \varphi(x) + 2(\varphi(x)\varphi(y))^{\frac{1}{2}} + \varphi(y) \\ &\iff \varphi(x, y) \leq (\Phi(x)\Phi(y))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Et cette dernière inégalité est conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

Proposition 1.2.4 (*Etude du cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski*)

Pour tout (x, y) de E^2 , on a

$$(\Phi(x + y))^{\frac{1}{2}} = (\Phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\Phi(y))^{\frac{1}{2}} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : y = \alpha x \end{cases}$$

On traduit cette dernière condition par $\{x, y\}$ est positivement liée.

Preuve.

1) L'étude du cas $x = 0$ est immédiate.

S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \alpha x$, alors d'après la proposition (1.1.4)

$$\begin{cases} (\Phi(x + y))^{\frac{1}{2}} = (\Phi((1 + \alpha)x))^{\frac{1}{2}} = (1 + \alpha)(\Phi(x))^{\frac{1}{2}} \\ (\Phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\Phi(y))^{\frac{1}{2}} = (\varphi(x))^{\frac{1}{2}} + \alpha(\Phi(x))^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

2) Réciproquement, supposons

$$(\Phi(x+y))^{\frac{1}{2}} = (\Phi(x))^{\frac{1}{2}} + (\Phi(y))^{\frac{1}{2}}$$

En reprenant le schéma de calcul dans la preuve de l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\varphi(x, y) = (\Phi(x))^{\frac{1}{2}} \cdot (\Phi(y))^{\frac{1}{2}}$$

Il y a alors égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz donc $\{x, y\}$ est lié d'après la proposition (1.2.4).

Le cas $x = 0$ étant d'étude immédiate.

Supposons $x \neq 0$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha x$. On a alors

$$\begin{aligned} |1 + \alpha| \sqrt{\Phi(x)} &= (1 + |\alpha|) \sqrt{\Phi(x)} \\ \implies (1 + \alpha)^2 &= (1 + |\alpha|)^2, 2\alpha = 2|\alpha| \\ \implies \alpha &\in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

■

Définition 1.2.5

1) On appelle *norme* sur E une application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$(a) \forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

$$(b) \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

$$(c) \forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

2) Une *distance* sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$(a') \forall x, y \in E : d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$(b') \forall x, y \in E : d(x, y) = d(y, x).$$

$$(c') \forall x, y, z \in E : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Définition 1.2.6 (Norme euclidienne associée à un produit scalaire)

1) On définit la *norme euclidienne associée à un produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E par

$$\forall x \in E, \|x\| = (\varphi(x, x))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

2) L'application d de $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \longmapsto \|x - y\|$ est appelée *distance euclidienne associée à φ* .

Remarque 1.2.7 $\|\cdot\|$ est bien définie car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire positive et donc pour tout vecteur $x \in E : \langle x, x \rangle \geq 0$.

Proposition 1.2.8

- 1) La norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E est une norme sur E .
- 2) La distance euclidienne d associée à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E est une distance sur E .

Preuve.

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique. Alors

- 1) On a

$$\|x\| = 0 \iff \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

- 2) On a

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|$$

- 3) La propriété (c) a déjà été prouvée dans le théorème (1.2.3). ■

Ainsi, un produit scalaire fournit naturellement une norme, qui fournit naturellement une distance.

Exemple 1.2.9 (Norme euclidienne associée)

- 1) Au produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$: Si $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$, alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

- 2) Au produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ($E = C^0([a, b], \mathbb{R})$) :

$$\forall f, g \in E : \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt, \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$$

- 3) Au produit scalaire sur l'espace des matrices $E = M_{n,p}(\mathbb{R})$: Si $A, B \in E$, alors

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB), \|A\| = \sqrt{\text{tr}({}^tAA)}$$

Remarque 1.2.10 D'après la proposition (1.1.4) (les résultats 4 et 5), on obtient

$$\forall (x, y) \in E^2 : \begin{cases} \varphi(x, y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{cases} \text{ (égalité (Identité) du parallélogramme ou de la médiane)}$$

Définition 1.2.11 Un vecteur x de E est dit unitaire (ou normalisé) si et seulement si $\|x\| = 1$.

Définition 1.2.12 Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien réel. Si de plus E est de dimension finie, on dit que E est un espace euclidien.

Exemple 1.2.13

- 1) $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel est un espace vectoriel euclidien.
- 2) $E = \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ muni du produit scalaire usuel est un espace vectoriel euclidien.
- 3) $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire usuel défini par

$$\forall P, Q \in E : \langle f, g \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

est un espace vectoriel préhilbertien.

1.3 Orthogonalité

Soient E un $\mathbb{R}$ -ev, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E , $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 1.3.1

- 1) Soit $(x, y) \in E^2$, on dit que x est orthogonal à y , et on note $x \perp y$, si et seulement si $\langle x, y \rangle = 0$.
- 2) Soient $x \in E$, $A \in \mathcal{P}(E)$, on dit que x est orthogonal à A , et on note $x \perp A$, si et seulement si $\forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0$.
- 3) Pour toute partie A de E , on définit l'orthogonal de A , noté $A^\perp$ par $A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A : \langle x, a \rangle = 0\}$
- 4) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite orthogonale si et seulement si $\forall (i, j) \in I^2 : (i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = 0)$.
- 5) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite orthogonale si et seulement si la famille $(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale et $\forall i \in I, \|x_i\| = 1$ ($(x_i)_{i \in I}$ sont unitaires).

Proposition 1.3.2

- 1) Pour toute partie A de E , $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
- 2) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : A \subset B \implies A^\perp \supset B^\perp$.
- 3) $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A^\perp = (\text{vect}(A))^\perp$.
- 4) $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A \subset A^{\perp\perp}$.

5) $E^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = E$.

6) $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A \cap A^\perp \subset \{0_E\}$.

7) pour tous sous-espaces vectoriels F, G de E , on a

$$(F + G)^\perp = F^\perp + G^\perp, \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$$

Preuve.

1) i) On a $\forall a \in A, \langle 0_E, a \rangle = 0$, donc $0_E \in A^\perp$.

ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in (A^\perp)^2$ alors

$$\begin{aligned} \forall a \in A, \langle \lambda x + y, a \rangle &= \lambda \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle = 0 \\ \implies \lambda x + y &\in A^\perp \end{aligned}$$

2) Supposons que $A \subset B$, et soit $y \in B^\perp$. On a

$$\forall b \in B, \langle y, b \rangle = 0$$

Donc

$$\forall a \in A, \langle y, a \rangle = 0 \implies y \in A^\perp.$$

3) i) Soit $A \subset \text{Vect}(A)$, donc $(\text{Vect}(A))^\perp \subset A^\perp$.

ii) La propriété est évidente si $A = \emptyset$. Supposons que $A \neq \emptyset$. Soit $x \in A^\perp$, pour tout y de $\text{Vect}(A)$

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, a_1, \dots, a_n \in A : y = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$$

$$\implies \langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, a_i \rangle = 0$$

Donc $x \in (\text{Vect}(A))^\perp$. On a ainsi montré $A^\perp \subset (\text{Vect}(A))^\perp$.

4) Soit $a \in A$. Comme

$$\forall x \in A^\perp : \langle a, x \rangle = \langle x, a \rangle = 0$$

Alors $a \in (A^\perp)^\perp$.

5) Evident.

6) Si $x \in A \cap A^\perp$, alors, en particulier $\langle x, x \rangle = 0$, donc $x = 0$.

7) a) i)

$$\begin{cases} F \subset F + G \\ G \subset F + G \end{cases} \implies \begin{cases} F^\perp \supset (F + G)^\perp \\ G^\perp \supset (F + G)^\perp \end{cases} \implies F^\perp + G^\perp \supset (F + G)^\perp$$

ii) Réciproquement, soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$, alors

$$\begin{cases} \forall f \in F, \langle x, f \rangle = 0 \\ \forall g \in G, \langle x, g \rangle = 0 \end{cases}$$

Pour tout h de $F + G$, il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$ et donc

$$\langle x, h \rangle = \langle x, f \rangle + \langle x, g \rangle = 0 \implies x \in (F + G)^\perp$$

b) On a

$$\begin{cases} F \cap G \subset F \\ F \cap G \subset G \end{cases} \implies \begin{cases} (F \cap G)^\perp \supset F^\perp \\ (F \cap G)^\perp \supset G^\perp \end{cases} \implies F \cap G^\perp \supset F^\perp + G^\perp$$

■

Proposition 1.3.3 Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E . Si $(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale et $\forall i \in I : x_i \neq 0$, alors $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Preuve. Soient $N \in \mathbb{N}^*, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}, i_1, \dots, i_N \in I$ deux à deux distincts, tels que $\sum_{k=1}^N \lambda_k x_{i_k} = 0$.
Pour tout j de $\{1, \dots, N\}$, on a

$$0 = \langle x_{i_j}, \sum_{k=1}^N \lambda_k x_{i_k} \rangle = \sum_{k=1}^N \lambda_k \langle x_{i_j}, x_{i_k} \rangle = \lambda_j \|x_{i_j}\|^2$$

d'où $\lambda_j = 0$. ■

Proposition 1.3.4 (Théorème de Pythagore)

On a pour tout (x, y) de E^2

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Preuve. Immédiat en développant $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$. ■

Remarque 1.3.5

1) Avec le vocabulaire de la géométrie affine, le théorème de Pythagore devient :

Pour qu'un triangle ABC soit rectangle en A , il faut et il suffit que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

2) Pour toute famille finie orthogonale $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E , on a $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

Mais la réciproque est fautive (si $n \geq 3$) : par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ usuel, la famille (x_1, x_2, x_3) définie par $x_1 = (1, 2)$, $x_2 = (0, 2)$, $x_3 = (0, -1)$ vérifie $\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|x_3\|^2$ et n'est pas orthogonale.

Définition 1.3.6 (Bases orthogonales, bases orthonormales)

Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On dit que B est une base :

1) orthogonale si et seulement si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux, c'est à dire si et seulement si

$$\forall i, j = \overline{1, n} : i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

2) orthonormale si et seulement si $(e_i)_{i=\overline{1, n}}$ est une famille orthogonale et $\forall i = \overline{1, n} : \|e_i\| = 1$, c'est à dire si et seulement si

$$\forall i, j = \overline{1, n} : \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Exemple 1.3.7 La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire usuel.

Remarque 1.3.8 On abrège base orthonormée en b.o.n.

Théorème 1.3.9 (Calculs dans une base orthonormale)

Soient E un espace euclidien de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

1) Les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans une base orthonormale sont données par les produits scalaires

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ où } x_i = \langle x, e_i \rangle$$

2) Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

3) Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, alors

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

Preuve. Ces formules se prouvent facilement en utilisant les règles de calcul avec le produit scalaire (proposition (1.1.4)) et le fait que $\forall i, j = \overline{1, n} : \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

1) Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n de E , alors pour $x \in E$, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, on a

$$\langle e_i, x \rangle = \langle e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \langle e_i, e_j \rangle = x_i$$

$$\implies \forall x \in E : x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i$$

2) Soient $x, y \in E$, alors

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle x_i e_i, y_j e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

3) En particulier

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

■

1.4 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Le procédé de Gram-Schmidt est une méthode pour orthonormaliser une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. À partir d'une famille libre $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, on construit une famille orthonormale $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, qui engendre les mêmes espaces vectoriels successifs :

$$\forall i \leq n : F_i = \text{vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{vect}(v_1, \dots, v_i)$$

Théorème 1.4.1 (*Théorème de Schmidt*)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base quelconque de E . Alors il existe une base orthonormale $B' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de E vérifiant :

1) $\forall i = \overline{1, n} : v_i \in \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$.

2) $\forall i = \overline{1, n} : \langle e_i, v_i \rangle > 0$

Preuve. On va mettre en place un algorithme permettant de construire la base B' .

(a) Au rang 1 : Comme B est une base, e_1 est non nul et le vecteur $v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ (i.e : $e_1 =$

$\|e_1\|.v_1 = \lambda v_1$) est unitaire et vérifie $\text{vect}(e_1) = \text{vect}(v_1)$. Ainsi que $\langle e_1, v_1 \rangle = \|e_1\| > 0$.

(b) Au rang k : Soit $k = \overline{1, n-1}$. Supposons les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ construits tels que :

i) La famille $(v_1, \dots, v_k)$ est orthonormale.

ii) $\forall i = \overline{1, k} : v_i \in \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$.

iii) $\forall i = \overline{1, k} : \langle e_i, v_i \rangle > 0$.

(c) Au rang $k+1$: Construisons un vecteur v_{k+1} répondant au problème. Les conditions qu'il doit remplir nous invitent à le chercher sous la forme

$$v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + e_{k+1} : \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, k}$$

Pour tout $i = \overline{1, k}$, on a la série d'équivalences

$$\begin{aligned} v_i &\perp v_{k+1} \iff \langle v_i, v_{k+1} \rangle = 0 \\ &\iff \sum_{j=1}^k \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle + \langle v_i, e_{k+1} \rangle = 0 \\ &\iff \alpha_i \|v_i\|^2 + \langle v_i, e_{k+1} \rangle = 0, \|v_i\| = 1 \\ &\iff \alpha_i = -\langle v_i, e_{k+1} \rangle \end{aligned}$$

On considère alors le vecteur $\tilde{v}_{k+1}$ donné par

$$\tilde{v}_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_i, e_{k+1} \rangle v_i$$

et soit

$$v_{k+1} = \frac{\tilde{v}_{k+1}}{\|\tilde{v}_{k+1}\|}$$

Par construction, les vecteurs du système $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$ sont deux à deux orthogonaux et unitaires. Cette famille est donc orthonormale. De plus, pour tout $i = \overline{1, k}$, $\text{vect}(v_1, \dots, v_i) = \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$ et il est clair que

$$\text{vect}(v_1, \dots, v_{k+1}) = \text{vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$$

Enfin, quitte à considérer $-v_{k+1}$ plutôt que v_{k+1} , on peut supposer que $\langle e_{k+1}, v_{k+1} \rangle > 0$.

(d) Au rang n : En appliquant cet algorithme jusqu'au rang n , on construit la famille B' proposée. ■

Algorithm 1.4.2 Pour orthonormaliser une famille de vecteurs :

On souhaite appliquer l'algorithme de Schmidt à la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E . Pour ce faire :

1) On pose $v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.

2) On suppose les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ construits. On calcule le vecteur $\tilde{v}_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle v_i, e_{k+1} \rangle v_i$ et on pose

$$v_{k+1} = \frac{\tilde{v}_{k+1}}{\|\tilde{v}_{k+1}\|}$$

3) Si $\langle e_{k+1}, v_{k+1} \rangle < 0$, alors on remplace v_{k+1} par $(-v_{k+1})$.

1.4.1 Exemple d'orthonormalisation

Exemple 1.4.3 Soit l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs $e_1 = (2, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 2)$. Construisons une base orthonormale à partir de $B = (e_1, e_2, e_3)$. D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt :

1) On pose $v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = (1, 0, 0)$.

2) On a $\tilde{v}_2 = e_2 - \langle v_1, e_2 \rangle v_1 = (0, 1, 1)$, donc $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 0)$.

3) De même $\tilde{v}_3 = e_3 - \langle v_1, e_3 \rangle v_1 - \langle v_2, e_3 \rangle v_2 = (0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$, donc $v_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, -1, 1)$.

La famille $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base orthonormale de E .

Remarque 1.4.4 Comme, dans la construction, v_k se compose sur $e_k, v_1, \dots, v_{k-1}$ la matrice de passage de $(e_1, \dots, e_k)$ à $(v_1, \dots, v_k)$ est triangulaire supérieure à termes diagonaux égaux à 1.

1.4.2 Conséquences

Corollaire 1.4.5 (Théorème de la b.o.n incomplète)

Pour toute famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ d'un espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ de dimension n ($p \leq n$) peut être complétée par des vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ de E en sorte que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base orthonormale de E .

Preuve. En appliquant le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille orthonormale (et donc libre) $(e_1, \dots, e_p)$ par des vecteurs $x_{p+1}, \dots, x_n \in E$ tel que $(e_1, \dots, e_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ soit une base de E . L'application du procédé d'orthogonalisation de Schmidt conserve $e_1, \dots, e_p$ et donne une famille orthogonale $(e_1, \dots, e_p, v_{p+1}, \dots, v_n)$ à termes tous $\neq 0$. En notant $e_k = \frac{1}{\|v_k\|} v_k$ pour $k \in \{p+1, \dots, n\}$, on obtient une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$, et donc une b.o.n de E . ■

Corollaire 1.4.6 (Existence d'une base orthonormale)

Tout espace vectoriel euclidien E admet au moins une b.o.n.

Preuve. Soit B une base de E . En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à cette famille, on construit une famille orthonormale B' telle que $\text{vect}(B) =$

$\text{vect}(B') = E$. Cette famille est donc libre et génératrice. Elle forme une base orthonormale de E . ■

1.5 Produit scalaire et base orthonormale

Proposition 1.5.1 Soient E un espace vectoriel euclidien, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n de E .

Soit $x \in E$ de composantes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans B . Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \text{Mat}_B(x)$.

Soit $y \in E$ de composantes $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans B . Notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \text{Mat}_B(y)$.

Alors

$$\langle x, y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Preuve. Soient $x, y \in E$, alors

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle x_i e_i, y_j e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tXY \end{aligned}$$

■

Proposition 1.5.2 (Définition)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n .

1) Pour tout sev F de dimension $p \leq n$ de E , alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E , appelé supplémentaire orthogonal de F dans E . Autrement dit

$$E = F \oplus F^\perp$$

$$2) \dim F^\perp = \dim E - \dim F.$$

Preuve.

1) Montrons que F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E .

i) On a $F \cap F^\perp = \{0\}$. En effet, si un vecteur x est à la fois dans F et dans l'orthogonal de F , alors il vérifie $\langle x, x \rangle = 0$ et donc $x = 0$.

ii) Montrons maintenant que $E = F + F^\perp$. Comme F est de dimension $p \leq n$ et d'après le corollaire (1.4.6), on peut trouver une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de F . Par application du théorème de la b.o.n incomplète, il existe $e_{p+1}, \dots, e_n \in E$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une b.o.n de E .

Montrons $F^\perp = \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Soient $x \in E, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ sa décomposition sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E , alors

$$\begin{aligned} x &\in F^\perp \iff \forall j \in \{1, \dots, p\} : \langle e_j, x \rangle = 0 \\ &\iff \forall j \in \{1, \dots, p\} : \sum_{i=1}^n x_i \langle e_j, e_i \rangle = 0 \\ &\iff \forall j \in \{1, \dots, p\} : x_j = 0 \\ &\iff x \in \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) \end{aligned}$$

Ainsi

$$x = x_1 + x_2, x_1 \in F \text{ et } x_2 \in F^\perp$$

$F = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $F^\perp = \text{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont supplémentaires dans E .

2) On a $E = F \oplus F^\perp$, alors $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$

$$\implies \dim F^\perp = \dim E - \dim F$$

■

Corollaire 1.5.3 Soit E un espace vectoriel euclidien. Alors

1) Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $F^{\perp\perp} = F$.

2) Pour tous sous-espaces vectoriels F, G de E , on a $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Preuve.

1) On a vu $F \subset F^{\perp\perp}$. De plus

$$\dim(F^{\perp\perp}) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(F)) = \dim(F).$$

2) On a vu

$$(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$$

Donc

$$\begin{aligned} \dim \left((F \cap G)^\perp \right) &= \dim(E) - \dim(F \cap G) \\ &= \dim(E) - (\dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G)) \\ &= (\dim(E) - \dim(F)) + (\dim(E) - \dim(G)) - (\dim(E) - \dim(F + G)) \\ &= \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim((F + G)^\perp) \\ &= \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F^\perp \cap G^\perp) \\ &= \dim(F^\perp + G^\perp) \end{aligned}$$

■

1.6 Projecteurs et symétries

1.6.1 Projecteurs (Projection suivant une direction)

Définition 1.6.1 1) Soient E un K -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$. Pour tout $x \in E$, il existe donc un couple unique $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$. Soient

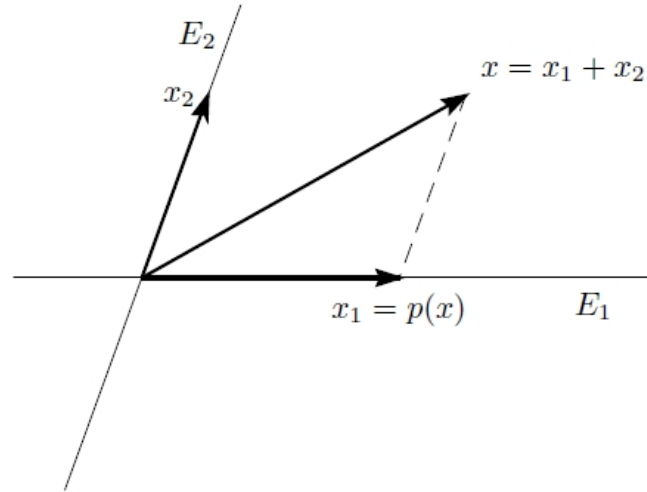
$$\begin{array}{ccc} p_1 : E & \longrightarrow & F \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & p_1(x) = x_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} p_2 : E & \longrightarrow & G \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & p_2(x) = x_2 \end{array}$$

Les applications p_1 (resp : p_2) est bien définie et est appelée projecteur de E sur F (resp : G) parallèlement à G (resp : F) notée p_F (resp : p_G), ou plus simplement projecteur.

2) Les applications p_1 et p_2 de E dans E sont appelés projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$.

3) F est appelé base de la projection et G direction de la projection.

Si $E_1 = F$ et $E_2 = G$, alors



Projection sur E_1 parallèlement E_2

Remarque 1.6.2 (*Quelques cas particuliers*)

- 1) Si $E = E \oplus \{0\}$, alors la projection sur E parallèlement à $\{0\}$ est l'application Id_E .
- 2) La projection sur $\{0\}$ parallèlement à E est l'application nulle.

Proposition 1.6.3 (*Propriétés des projecteurs*)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de K -espace vectoriel E et soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G , alors

- 1) p est linéaire (endomorphisme).
- 2) $\ker(p) = G, \text{Im}(p) = F$.
- 3) $p(x) = x \iff x \in F$ (F est l'ensemble des vecteurs invariants par p).

Preuve.

- 1) Soient $x = x_1 + x_2 \in F \oplus G = E$, $x' = x'_1 + x'_2 \in F \oplus G = E$ et $\alpha, \alpha' \in K$. On a

$$\alpha x + \alpha' x' = (\alpha x_1 + \alpha' x'_1) + (\alpha x_2 + \alpha' x'_2) \in E = F \oplus G \text{ où } (\alpha x_1 + \alpha' x'_1) \in F \text{ et } (\alpha x_2 + \alpha' x'_2) \in G$$

Alors

$$p(\alpha x + \alpha' x') = \alpha x_1 + \alpha' x'_1 = \alpha p(x) + \alpha' p(x')$$

Ce qui prouve que p est linéaire.

2) Soit $x = x_1 + x_2 \in E = F \oplus G$, alors

$$p(x) = 0 \iff x_1 = 0 \iff x = x_2 \iff x \in G$$

Par conséquent $\ker(p) = G$.

D'autre part, on a

$$x \in \operatorname{Im}(p) \iff \exists x' = x'_1 + x'_2 \in E = F \oplus G : x = p(x') \iff x = x'_1 \in F \iff x \in F$$

Donc $\operatorname{Im}(p) = F$.

3) Soit $x = x_1 + x_2 \in E = F \oplus G$, alors

$$p(x) = x \iff x = x_1 \iff x \in F$$

■

Proposition 1.6.4 (*Caractérisation des projecteurs*)

Soit $p \in L(E)$. p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas, p est le projecteur de E sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Preuve.

i) Soit $p \in L(E)$. Si p est un projecteur et si $x \in E$, alors $p(x) \in F$ (F est stable par p , d'après la proposition (1.6.3) précédente), donc

$$\begin{aligned} p(p(x)) &= p(x) \\ \implies (p \circ p)(x) &= p(x) \\ \implies p \circ p &= p \end{aligned}$$

ii) Réciproquement, si p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$. Posons $F = \operatorname{Im}(p)$ et $G = \operatorname{Ker}(p)$ et montrons que ces deux sous-espaces vectoriels de E sont supplémentaires dans E .

j) Soit $x \in F \cap G$. Alors, on a à la fois $p(x) = 0$ et $p(x') = x$ où $x' \in E$. Par conséquent

$$p(x) = p(p(x')) = 0$$

Mais comme $p \circ p = p$, on a $p(p(x')) = p(x') = x$ et donc $x = 0$. Alors

$$F \cap G = \{0\}$$

Ce qui prouve que F et G sont en somme directe.

jj) Soit $x \in E$, alors on peut écrire

$$x = p(x) + (x - p(x)) = x_1 + x_2$$

Où $x_1 = p(x) \in \text{Im}(p)$ et $x_2 = (x - p(x)) \in \ker(p)$. En effet

$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$$

Par conséquent $E = F + G$ et donc $E = F \oplus G$.

- Montrons que p est le projecteur de E sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Soit $x \in E$, et sa décomposition en $x = y + z$, avec $y \in \text{Im}(p)$, $z \in \ker(p)$. Alors

$$\exists x' \in E : y = p(x') \text{ et } p(x) = p(y) + p(z) = p(p(x')) + 0 = p(x') = y$$

Donc p est bien la projection de E sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$. ■

Proposition 1.6.5 *Si $E = F \oplus G$, si p est le projecteur de E sur F parallèlement à G et si $q \in L(E)$, alors on a équivalence entre*

- 1) *q est le projecteur de E sur G parallèlement à F .*
- 2) *$p + q = \text{Id}_E$.*

Preuve.

1) Supposons que q est le projecteur de E sur G parallèlement à F . Si $x = x_1 + x_2 \in E = F \oplus G$, alors

$$p(x) = x_1, q(x) = x_2$$

$$\implies p(x) + q(x) = (p + q)(x) = x$$

$$\implies p + q = \text{Id}_E$$

2) Réciproquement, si $p + q = \text{Id}_E$ et si $x = x_1 + x_2 \in E = F \oplus G$ alors $q(x) = x - x_1 = x_2$ donc q est le projecteur de E sur G parallèlement à F . ■

1.6.2 Symétrie (suivant une direction)

Définition 1.6.6

1) *Soient E un K -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$. Pour tout $x \in E$, il existe donc un couple unique $(x_1, x_2) \in F \times G$*

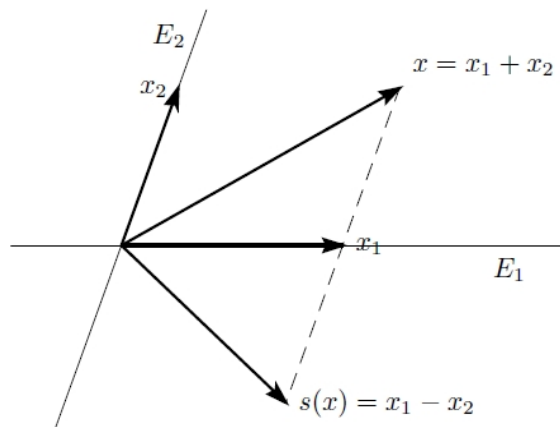
tel que $x = x_1 + x_2$. Soit

$$\begin{aligned} s : E &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto s(x) = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

L'application s est bien définie et est appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G , ou plus simplement symétrie.

2) F est appelé base de la symétrie et G direction de la symétrie.

Si $E_1 = F$ et $E_2 = G$, alors



Symétrie par rapport à F parallèlement à G

Remarque 1.6.7 (Quelques cas particuliers)

1) Si $E = E \oplus \{0\}$, alors la symétrie par rapport à E parallèlement à $\{0\}$ est l'application Id_E .

2) La symétrie par rapport à $\{0\}$ parallèlement à E est l'application $(-Id_E)$.

Proposition 1.6.8 (Propriétés des symétries)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de K -espace vectoriel E et soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G , alors

1) s est linéaire, $s \in L(E)$.

2) Si p est le projecteur de E sur F parallèlement à G alors $s = 2p - Id_E$.

3) s est involutive, c'est-à-dire $s \circ s = Id_E$.

Preuve. Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G . Soit $x = x_1 + x_2 \in F + G = E$. Alors

$$p(x) = x_1 \text{ et } (2p - Id_E)(x) = 2p(x) - x = 2x_1 - (x_1 + x_2) = x_1 - x_2 = s(x)$$

Ce qui démontre le second point. Comme p est linéaire et qu'une combinaison linéaire des applications linéaires est linéaire, s est linéaire et le premier point est aussi démontré.

Enfin, on a

$$\begin{aligned} s \circ s &= (2p - Id_E) \circ (2p - Id_E) = 2p \circ (2p - Id_E) - (2p - Id_E) \\ &= 4p^2 - 2p - 2p + Id_E = 4p - 4p + Id_E = Id_E \end{aligned}$$

et le troisième point est démontré. ■

Proposition 1.6.9 (*Caractérisation des symétries*)

Soit $s \in L(E)$. Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id_E$.

Dans ce cas $F = Ker(s - Id_E)$ et $G = Ker(s + Id_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Preuve.

i) Supposons que s est une symétrie, alors d'après la proposition précédente, on a $s \circ s = Id_E$.

ii) Supposons que $s \circ s = Id_E$. Posons $F = Ker(s - Id_E)$ et $G = Ker(s + Id_E)$.

Montrons tout d'abord que ces deux sous espaces vectoriels de E sont supplémentaires dans E .

j) On a clairement

$$Ker(s - Id_E) + Ker(s + Id_E) \subset E$$

car $Ker(s - Id_E)$ et $Ker(s + Id_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

Soit $x \in E$, alors on peut écrire

$$x = -\frac{1}{2}(s(x) - x) + \frac{1}{2}(s(x) + x) = x_1 + x_2, \quad x_1 = -\frac{1}{2}(s(x) - x) \in F, \quad x_2 = \frac{1}{2}(s(x) + x) \in G$$

Donc

$$E \subset Ker(s - Id_E) + Ker(s + Id_E)$$

Finalement $E = F + G$.

jj) Montrons maintenant que

$$F \cap G = \{0_E\}$$

On a clairement

$$\{0_E\} \subset F \cap G$$

Inversement, soit $x \in F \cap G$. On a donc $s(x) - x = 0$ et $s(x) + x = 0$. Soustrayant ces deux égalités, on obtient $x = 0$, donc

$$\begin{aligned} F \cap G &\subset \{0\} \\ \implies F \cap G &= \{0_E\} \end{aligned}$$

Par conséquent F et G sont en somme directe et donc $E = F \oplus G$.

ii) s est une symétrie par rapport F parallèlement à G . En effet, si $x = x_1 + x_2 \in F \oplus G = E$, alors comme $x_1 \in F$, on a $s(x_1) = x_1$ et comme $x_2 \in G$ on a aussi $s(x_2) = -x_2$. Par linéarité de s , on en déduit que

$$s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$$

■

Remarque 1.6.10

- 1) La symétrie s est un automorphisme et vérifie $s \circ s = Id_E$, donc $s^{-1} = s$.
- 2) Si s est une symétrie par rapport à $F = Ker(s - Id_E)$ et parallèlement à $G = Ker(s + Id_E)$. Alors on peut écrire $E = Inv(s) \oplus Opp(s)$ où $Inv(s)$ est l'ensemble des vecteurs invariants et $Opp(s)$ est l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé et s est une symétrie par rapport à $Inv(s)$ et parallèlement à $Opp(s)$.

1.6.3 Projecteurs orthogonaux, Symétries orthogonales

Rappelons que si E est un espace euclidien, alors pour tout sous-espace vectoriel F , on a $E = F \oplus F^\perp$. Dans ce cas, $F^\perp$ s'appelle le supplémentaire orthogonal de F .

Définition 1.6.11

- 1) Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . On appelle projection orthogonale sur F , qu'on note p_F , la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus F^\perp &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto p_F(x) = x_1 \end{aligned}$$

- 2) On peut écrire

$$x \in E : x = \underset{\text{projection}}{p_F(x)} + \underset{\text{orthogonal}}{ort_F(x)}, p_F(x) \in F, ort_F(x) \in F^\perp$$

Ainsi, $p_F(x)$ est l'unique élément de F tel que x s'écrive

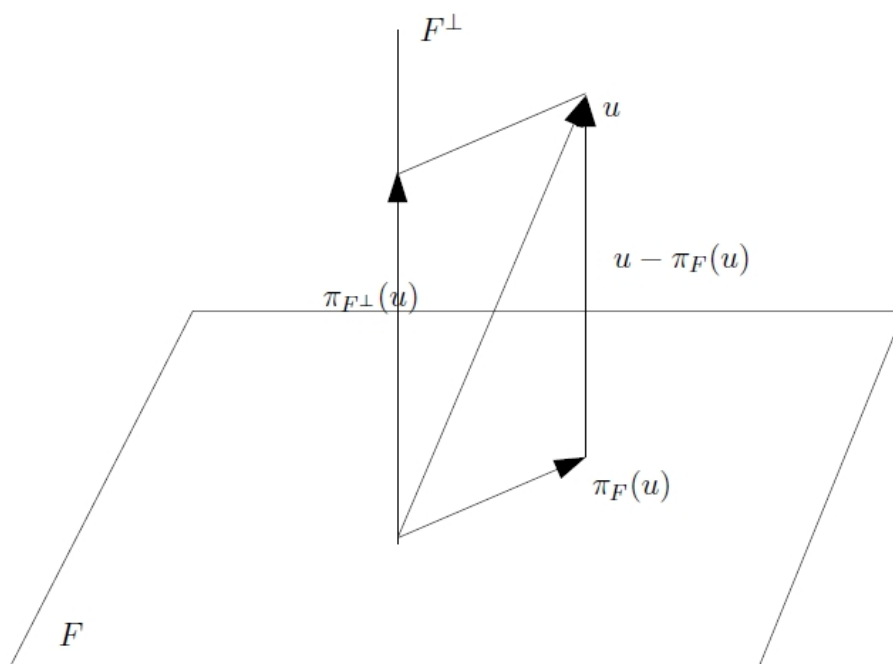
$$x = p_F(x) + u, u \in F^\perp, x \in E$$

$$\implies u = x - p_F(x) \in F^\perp$$

Autrement dit, $p_F(x)$ est l'unique élément de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$. Ainsi

$$y \in E, y = p_F(x) \iff y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp$$

3) Pour tout vecteur x de E , $p_F(x)$ est appelé projeté orthogonal de x sur F .



Projection orthogonale sur F

Définition 1.6.12 Soit $p \in L(E)$ un projecteur d'un espace euclidien (c'est à dire un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$). On dit que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de E . La base de p est $\text{Im}(p)$, sa direction est $\ker(p)$.

$$\forall x \in \ker(p), \forall y \in \text{Im}(p) : \langle x, y \rangle = 0$$

Remarque 1.6.13

1) D'après la proposition (1.6.5), pour tout sous-espace vectoriel de E , on a

$$p_{F^\perp} = Id_E - p_F$$

2) Si p_F le projecteur orthogonal sur F , alors on a $p_F \circ p_F = p_F$, $\text{Im}(p_F) = F$, $\text{ker}(p_F) = F^\perp$ et

$$\forall x \in E : p_F(x) \in F, x - p_F(x) \in F^\perp$$

Proposition 1.6.14 (Calcul du projeté orthogonal)

Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F , alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i$$

Preuve. On sait que pour tout $x \in E$, on a $p_F(x) \in F$. Puisque $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F , alors on a

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i, p_F(x) \rangle e_i = \sum_{i=1}^p \langle e_i, p_F(x) - x \rangle e_i + \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i$$

D'autre part, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, p\} : \langle e_i, p_F(x) - x \rangle = 0$$

Puisque $p_F(x) - x \in F^\perp$. D'où le résultat. ■

Proposition 1.6.15 (Projection sur une droite)

Soit F une droite vectorielle de E , donc $F = \text{Vect}(u)$ avec $u \neq 0$. On a $e_1 = \frac{u}{\|u\|}$ est une base orthonormale de F , donc on aura

$$\forall x \in E : p_F(x) = \langle e_1, x \rangle e_1 = \left\langle \frac{u}{\|u\|}, x \right\rangle \cdot \frac{u}{\|u\|}$$

C'est à dire

$$\forall x \in E : p_F(x) = \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} \cdot u$$

Exemple 1.6.16 (Matrice d'une projection orthogonale)

$\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Trouver la matrice M , par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur la droite vectoriel $F = \text{Vect}(e_1 - e_3)$.

On sait que les colonnes de M sont les coordonnées des vecteurs $p_F(e_1), p_F(e_2), p_F(e_3)$ dans la base B .

Posons $u = e_1 - e_3 \neq 0$, alors $\|u\| = \sqrt{2}$, donc on aura d'après la proposition précédente

$$\begin{cases} p_F(e_1) = \frac{1}{\|u\|^2} \cdot \langle u, e_1 \rangle \cdot u = \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}(e_1 - e_3) \\ p_F(e_2) = \frac{1}{\|u\|^2} \cdot \langle u, e_2 \rangle \cdot u = 0 \\ p_F(e_3) = \frac{1}{\|u\|^2} \cdot \langle u, e_3 \rangle \cdot u = \frac{-1}{2}u = \frac{-1}{2}(e_1 - e_3) \end{cases}$$

On obtient

$$M = \underset{B}{Mat}(p_F) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.6.17 Pour tous u et v de E , on a

$$\langle p_F(u), v \rangle = \langle u, p_F(v) \rangle$$

Preuve. Décomposons u et v dans la somme directe $E = F \oplus F^\perp$: $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$ avec $u_1, v_1 \in F$ et $u_2, v_2 \in F^\perp$. On a par construction $p_F(u) = u_1$ et $p_F(v) = v_1$.
Donc

$$\langle p_F(u), v \rangle = \langle u_1, v_1 + v_2 \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_1, v_2 \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle = \langle u, v_1 \rangle = \langle u, p_F(v) \rangle$$

■

Théorème 1.6.18 Soit p un projecteur de l'espace euclidien E . (c'est à dire $p \in L(E)$ et $p \circ p = p$), alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) La projection p est une projection orthogonale.
- 2) Pour tous vecteurs x et y de E , on a l'égalité

$$\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$$

Preuve.

i) $1 \implies 2$: On suppose que p est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire $p \circ p = p$ et $\ker p = (\text{Im } p)^\perp$. D'après la proposition (1.6.17), on a le résultat.

ii) $2 \implies 1$: On suppose

$$\forall x, y \in E : \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$$

On a pour tout $(x, y) \in \ker p \times \operatorname{Im} p$:

$$\langle x, y \rangle = \langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$$

Donc $\operatorname{Im} p^\perp = \ker p$. Par conséquent p est un projecteur orthogonal. ■

Corollaire 1.6.19 *La matrice représentative d'une projection orthogonale dans une base orthonormée est symétrique.*

Preuve. Notons $A = (a_{ij})$ la matrice d'une projection orthogonale p dans une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$. Le coefficient d'indice (i, j) de A est la i -ème composante dans B de l'image du j -ème vecteur de base par p . Ainsi $a_{ij} = \langle p(e_j), e_i \rangle$. Or p est une projection orthogonale et d'après le théorème précédent, donc

$$a_{ij} = \langle p(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, p(e_i) \rangle = a_{ji}$$

Par suite la matrice A est symétrique. ■

Définition 1.6.20 (*Distance d'un point à un sous-espace vectoriel*)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. On appelle distance de x à F , et on note $d(x, F)$, le réel positif défini par

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

Remarque 1.6.21 *Il est clair que pour tout $x \in E$, on a $d(x, F)$ est bien définie. En effet, notons $A = \{\|x - y\| : y \in F\}$. Alors A est partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle possède donc une borne inférieure.*

Proposition 1.6.22 *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. Soit p_F le projecteur orthogonal sur F . Alors*

$$\forall y \in F : \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$$

Preuve. Soit $y \in F$. Or $(x - p_F(x)) \in F^\perp$, $(p_F(x) - y) \in F$, donc ces deux vecteurs sont orthogonaux et le théorème de Pythagore peut s'appliquer pour donner

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x) - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2, (x - p_F(x)) \in F^\perp, (p_F(x) - y) \in F$$

$$\implies \|x - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$$

$$\implies \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$$

■

Théorème 1.6.23 (*Meilleure approximation*)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, F un sous-espace vectoriel de E et $x_0 \in E$. Soit p le projecteur orthogonal sur F . Alors $p(x_0)$ est l'unique élément de F tel que

$$d(x_0, F) = \|x_0 - p(x_0)\|$$

Ceci est équivalent à

$$\forall y \in F : \|x_0 - y\| = \|x_0 - p(x_0)\| \iff y = p(x_0)$$

Autrement dit, le projeté $p(x_0)$ réalise la meilleure approximation de x_0 par des vecteurs de F .

Parmi tous les vecteurs de F , le projeté orthogonal de x_0 est celui qui est « le plus proche » de x_0 .

Preuve. D'après la proposition précédente (1.6.22), il est clair que

$$\forall y \in F : \|x_0 - y\| \geq \|x_0 - p_F(x_0)\|$$

et

$$\forall y \in F : y \neq p_F(x_0) \implies \|x_0 - y\| > \|x_0 - p_F(x_0)\|$$

Donc la valeur $\|x_0 - p_F(x_0)\|$ est plus petit élément de l'ensemble $A = \{\|x_0 - y\| : y \in F\}$, et est donc la borne inférieure de A . Il vient alors

$$d(x_0, F) = \|x_0 - p(x_0)\|$$

■

Exemple 1.6.24 Soit $D = \text{Vect}(a)$ avec $a \neq 0$. Pour tout $x \in E$, on a $p_D(x) = \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2} \cdot a$.
Donc

$$d(x, D) = \left\| x - \frac{\langle a, x \rangle}{\|a\|^2} \cdot a \right\|$$

1.6.4 Symétrie orthogonale

Définition 1.6.25

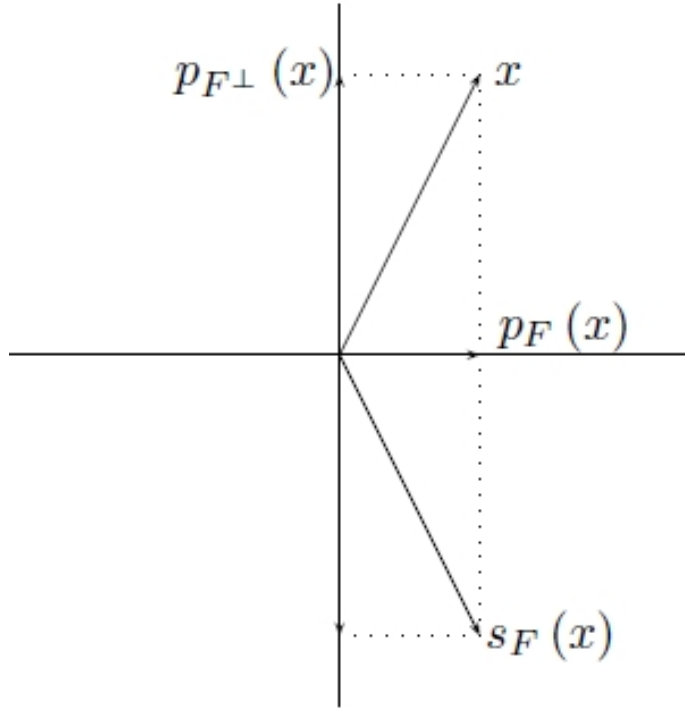
1) Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . On appelle symétrie orthogonale par rapport à F , qu'on note s_F , la symétrie par rapport à F parallèlement à

$F^\perp$. On écrit

$$\begin{aligned} s_F : E = F \oplus F^\perp &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto s_F(x) = x_1 - x_2 = \end{aligned}$$

On peut écrire

$$\forall x \in E : s_F(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x)$$



Symtrie orthogonale

2) Soient $s \in L(E)$ une symétrie ($s \circ s = Id_E$), soit $F = \ker(s - Id_E)$ et $G = \ker(s + Id_E)$, alors on sait que s est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G . On dit que s est une symétrie orthogonale lorsque $F^\perp = G$, on parle alors de la symétrie orthogonale par rapport à F .

Remarque 1.6.26 Il est clair que

- 1) Si p_F est la projection orthogonale sur F , alors on a $s_F = 2p_F - Id_E$.
- 2) Or $p_F + p_{F^\perp} = Id_E$, alors on déduit que s_F est aussi définie par

$$\forall x \in E : s_F(x) = 2p_F(x) - Id_E(x) = 2p_F(x) - x = x - 2p_{F^\perp}(x)$$

3) Pour $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} x &\in F \iff s_F(x) = x \\ x &\in F^\perp \iff s_F(x) = -x \end{aligned}$$

En effet

$$\begin{cases} x \in F \iff p_F(x) = x \iff s_F(x) = x \\ x \in F^\perp \iff p_{F^\perp}(x) = x \iff s_F(x) = -x \end{cases}$$

4) On a $s_F + s_{F^\perp} = 0$ et $s_F \circ s_{F^\perp} = s_{F^\perp} \circ s_F = -Id_E$. En effet :

On a

$$s_F + s_{F^\perp} = (p_F - p_{F^\perp}) + (p_{F^\perp} - p_F) = 0$$

et

$$s_F \circ s_{F^\perp} = (p_F - p_{F^\perp}) \circ (p_{F^\perp} - p_F) = p_F \circ p_{F^\perp} - p_F \circ p_F - p_{F^\perp} \circ p_{F^\perp} + p_{F^\perp} \circ p_F = -p_F - p_{F^\perp} = -Id_E$$

Proposition 1.6.27 Soit s une symétrie sur E . Alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si

$$\forall x \in E : \|s(x)\| = \|x\|$$

Preuve.

i) Soit s une symétrie par rapport à F selon G (où G est tel que $E = F \oplus G$). Soit $x \in E$, alors

$$x = x_F + x_G, s(x) = x_F - x_G$$

Donc

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x_F + x_G, x_F + x_G \rangle = \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2 + 2 \langle x_F, x_G \rangle \quad (1.1)$$

et

$$\|s(x)\|^2 = \langle s(x), s(x) \rangle = \langle x_F - x_G, x_F - x_G \rangle = \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2 - 2 \langle x_F, x_G \rangle \quad (1.2)$$

On a s est une symétrie orthogonale, alors $\langle x_F, x_G \rangle = 0$ et

$$\|s(x)\| = \|x\|$$

ii) Soit s une symétrie par rapport à F selon G . Supposons que $\forall x \in E : \|s(x)\| = \|x\|$. Montrons que F et G sont orthogonaux ($F^\perp = G$).

D'après (1.1) et (1.2), on obtient

$$\begin{aligned}\|s(x)\| &= \|x\| \iff 2 \langle x_F, x_G \rangle = -2 \langle x_F, x_G \rangle \\ &\implies \langle x_F, x_G \rangle = 0\end{aligned}$$

Alors F et G sont orthogonaux. Par conséquent s est une symétrie orthogonale. ■

Théorème 1.6.28 *Soit E un espace euclidien, et soit s une symétrie orthogonale de E .*

Alors

1)

$$\forall x, y \in E : \langle s_F(x), y \rangle = \langle y, s_F(x) \rangle$$

2)

$$\forall x, y \in E : \langle s_F(x), s_F(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Les symétries orthogonales conservent le produit scalaire. En particulier, les symétries orthogonales conservent la norme.

Preuve.

1) Soient $x, y \in E$, alors

$$\begin{aligned}\langle s_F(x), y \rangle &= \langle 2p_F(x) - x, y \rangle = 2 \langle p_F(x), y \rangle - \langle x, y \rangle = 2 \langle x, p_F(y) \rangle - \langle x, y \rangle \\ &= \langle x, 2p_F(y) \rangle - \langle x, y \rangle = \langle x, s_F(y) \rangle\end{aligned}$$

2) Soient $x, y \in E$, alors

$$\langle s_F(x), s_F(y) \rangle = \langle x, s_F(s_F(y)) \rangle = \langle x, (s_F \circ s_F)(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

■

Corollaire 1.6.29 *La matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormée est symétrique.*

Preuve. Notons $A = (a_{ij})$ la matrice d'une symétrie orthogonale s dans une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$. Le coefficient d'indice (i, j) de A est la i -ème composante dans B de l'image du j -ème vecteur de base par s . Ainsi $a_{ij} = \langle e_i, s(e_j) \rangle$. Or s est une symétrie orthogonale donc

$$a_{ij} = \langle s(e_i), e_j \rangle = \langle e_j, s(e_i) \rangle = a_{ji}$$

Par suite la matrice A est symétrique. ■

Proposition 1.6.30 (*Calcul de la symétrie orthogonale*)

Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F . Soit s_F la symétrie orthogonale sur E . Alors

$$\forall x \in E : s_F(x) = 2 \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i - x$$

Preuve. Soit p_F la projection orthogonale sur F , alors

$$\forall x \in E : p_F(x) \in F$$

Donc

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i$$

D'autre part, on a $s_F = 2p_F - Id_E$, alors

$$s_F(x) = 2 \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i - x$$

■

Proposition 1.6.31 (*Symétrie orthogonale par rapport une droite vectorielle*)

Soit F une droite vectorielle de E , donc $F = \text{Vect}(u)$ avec $u \neq 0$. On a $e_1 = \frac{u}{\|u\|}$ est une base orthonormale de F , donc on aura

$$\forall x \in E : s_F(x) = 2 \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} \cdot u - x$$

Preuve. D'après la proposition (1.6.15), on a

$$\forall x \in E : p_F(x) = \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} \cdot u$$

D'autre part, on a $s_F = 2p_F - Id_E$, alors

$$\forall x \in E : s_F(x) = 2 \frac{\langle u, x \rangle}{\|u\|^2} \cdot u - x$$

■

Chapitre 2

Groupe orthogonal

2.1 Endomorphismes orthogonaux

On considère dans toute la suite un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. On note n la dimension de E .

Définition 2.1.1 Soit f un endomorphisme de E . On dit que f est un endomorphisme orthogonal, si et seulement si f conserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$$

On note $\mathcal{O}(E, \langle ., . \rangle)$ (ou : $\mathcal{O}(E)$) l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E .

Les éléments de $\mathcal{O}(E)$ sont aussi appelés isométries vectorielles.

Exemple 2.1.2

- 1) Les applications Id_E et $(-Id_E)$ sont des endomorphismes orthogonaux.
- 2) Soit F un sous-espace vectoriel non trivial de E . Alors la symétrie orthogonale s_F par rapport à F est un endomorphisme orthogonal (d'après la proposition (1.6.27), mais la projection orthogonale p_F par rapport à F n'est pas un endomorphisme orthogonal.
- 3) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (y, -x) \end{aligned}$$

est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.1.3 (Caractérisation à l'aide de la conservation de produit scalaire)

Un endomorphisme f de E est un endomorphisme orthogonal si et seulement si f conserve

le produit scalaire, c'est à dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Preuve.

1) Supposons que f est un endomorphisme orthogonal de E . On sait que

$$\forall z_1, z_2 \in E : 2 \langle z_1, z_2 \rangle = \|z_1 + z_2\|^2 - \|z_1\|^2 - \|z_2\|^2$$

Alors pour tous $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} 2 \langle f(x), f(y) \rangle &= \|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \\ \implies 2 \langle f(x), f(y) \rangle &= \|f(x + y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \\ \implies 2 \langle f(x), f(y) \rangle &= \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2 \langle x, y \rangle \quad (\text{conservation de la norme}) \\ \implies \langle f(x), f(y) \rangle &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

2) Supposons que f conserve le produit scalaire alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

En remplaçant y par x , on trouve

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(x) \rangle &= \langle x, x \rangle \\ \implies \|f(x)\|^2 &= \|x\|^2 \\ \implies \|f(x)\| &= \|x\| \end{aligned}$$

Donc f est un endomorphisme orthogonal. ■

Remarque 2.1.4 Si f est un endomorphisme orthogonal de E , alors les seules valeurs propres réelles possibles sont -1 et 1 .

En effet, supposons que λ est valeur propre (donc réelle) de f , et soit x un vecteur propre associé, alors

$$f(x) = \lambda x \implies \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

Or $\|f(x)\| = \|x\|$, alors

$$|\lambda| = 1 \implies \lambda \in \{-1, 1\}$$

Théorème 2.1.5 (bijectivité des endomorphismes orthogonaux en dimension finie)

Soit f un endomorphisme orthogonal de E , alors f est un automorphisme de E et $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Preuve.

1) Puisque l'on travaille dans un espace euclidien, il est de dimension finie et il suffit de démontrer que l'endomorphisme f est injectif. Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in \ker f &\iff f(x) = 0 \iff \|f(x)\| = \|x\| = 0 \iff x = 0 \\ &\implies \ker f = \{0\} \end{aligned}$$

Donc f est injective.

2) Or f est bijective, donc f^{-1} existe. Montrons que f^{-1} conserve la norme. Soit $x \in E$, tel que

$$f(x) = y$$

On a f est un endomorphisme orthogonal, alors

$$\|f(x)\| = \|x\| = \|y\|$$

Donc, comme $x = f^{-1}(y)$, alors

$$\|f^{-1}(y)\| = \|x\| = \|y\|$$

Par conséquent f^{-1} est un endomorphisme orthogonal. ■

Proposition 2.1.6 (*Caractérisation avec les bases orthonormales*)

Soient f un endomorphisme de E et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Alors, on a

$$f \in \mathcal{O}(E) \iff f(B) \text{ est une base orthonormale de } E$$

Autrement dit, un endomorphisme est orthogonal si et seulement s'il transforme une base orthonormale donnée en une base orthonormale. Et dans ce cas, il transforme toute base orthonormale en une base orthonormale. On dit que f conserve les bases orthonormales.

Preuve.

i) Supposons que $f \in \mathcal{O}(E)$ et soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une b.o.n.de E . Alors

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Montrons que $f(B)$ est une base orthonormale de E . C'est à dire

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \delta_{ij}$$

On a f est un endomorphisme orthogonal, donc il conserve le produit scalaire. On alors

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

ce qui prouve que la famille $f(B)$ est une base orthonormale de E .

ii) Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , et on suppose que $f(B)$ est une base orthonormale. Montrons que f est un endomorphisme orthogonal. C'est-à-dire, qu'il conserve la norme.

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$. On obtient

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \langle f(x), f(x) \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \langle f(e_i), f(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \|f(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2 \\ \|f(x)\| &= \|x\| \end{aligned}$$

L'endomorphisme f conserve la norme, donc il est orthogonal. Et dans ce cas, on a montré qu'il transforme toute base orthonormale en une base orthonormale. ■

Théorème 2.1.7 Soit E un espace vectoriel euclidienne. Alors l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E , noté $\mathcal{O}(E)$, forme un groupe pour la loi $\circ$, appelé groupe orthogonal de E .

Preuve. Nous allons montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous groupe de $(GL(E), \circ)$, où $GL(E)$ est le groupe des automorphismes de E , appelé groupe linéaire de E .

On a les endomorphismes orthogonaux de E sont des automorphismes de E , donc on a bien $\mathcal{O}(E) \subset GL(E)$.

i) De plus il est clair que Id_E conserve la norme donc c'est un endomorphisme orthogonal, et $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$.

ii) Puis, si $f, g \in \mathcal{O}(E)$ (f, g conservent la norme dans E), alors

$$\forall x \in E : \|(g \circ f)(x)\| = \|g(f(x))\| = \|f(x)\| = \|x\|$$

Donc $g \circ f \in \mathcal{O}(E)$.

iii) Enfin, pour tout f dans $\mathcal{O}(E)$, on a d'après le théorème (2.1.5) $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$. ■

2.2 Matrices réelles orthogonales

Dans cette section, n désigne un élément de $\mathbb{N}^*$ et les espaces vectoriels $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M_{1,n}(\mathbb{R})$ sont munis de leur produit scalaire canonique.

Définition 2.2.1 On dit qu'une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ${}^t A \cdot A = I_n$ ou $A \cdot {}^t A = I_n$.

On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$.

Remarque 2.2.2 Une matrice orthogonale A est inversible et $A^{-1} = {}^t A$. Ce qui montre qu'elle vérifie également $A \cdot {}^t A = I_n$.

Exemple 2.2.3 $I_n, (-I_n) \in O_n(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Corollaire 2.2.4 (Déterminant d'une matrice orthogonale)

Si A est une matrice orthogonale alors $\det(A) = \pm 1$

Preuve. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} {}^t A \cdot A &= I_n \implies \det({}^t A) \cdot \det(A) = \det(I_n) \\ &\implies \det(A)^2 = 1 \\ &\implies \det(A) = \pm 1 \end{aligned}$$

■

La réciproque est fausse. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 2.2.5 (caractérisation matricielle des endomorphismes orthogonaux)

Soit $f \in L(E)$, alors f est un endomorphisme orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de E est une matrice orthogonale.

Preuve. On considère une base orthonormale $B = (e_1, \dots, e_n)$ d'un espace euclidien E . Notons $A = \underset{B}{\text{Mat}}(f)$.

1) Supposons que $f \in O(E)$. En notant ${}^t A \cdot A = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, C_i la colonne i et C_j la colonne j de A . Alors

$$\forall 1 \leq i, j \leq n : p_{ij} = \langle C_i, C_j \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Ce qui signifie que ${}^t A.A = I_n$. La matrice A est donc orthogonale.

2) Supposons que la matrice A est donc orthogonale. Alors ${}^t A.A = I_n$. On a alors pour $1 \leq i, j \leq n$

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij}$$

Ce qui signifie que $f(B)$ est une base orthonormée de f et $f \in \mathcal{O}(E)$. ■

Remarque 2.2.6 *Le résultat précédent est faux pour une base non orthonormée. Par exemple l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (-x, y)$ est orthogonale et sa matrice dans la base $B = (e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est non orthogonale, car ${}^t A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \neq I_2$.*

Théorème 2.2.7 *(Caractérisation par les vecteurs colonnes ou par les vecteurs lignes)*
Une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses colonnes (ou ses lignes), considérées comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Preuve.

1) On note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A . Soit A de $M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, alors

$${}^t A.A = I_n$$

se traduit par

$$\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij}$$

Où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Donc les colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

2) On suppose que les colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. En notant ${}^t A.A = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, C_i la colonne i et C_j la colonne j de A . Alors

$$p_{ij} = \langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\implies {}^t A.A = I_n$$

Donc A est orthogonale. De même pour les lignes de A . ■

Théorème 2.2.8 *L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ forme un groupe pour la multiplication, appelé groupe orthogonal d'ordre n .*

Preuve. Nous allons montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, où $GL_n(\mathbb{R})$ est appelé le groupe linéaire (l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$).

i) On sait que toute matrice orthogonale est inversible, alors $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$. De plus, il est clair que ${}^t I_n \cdot I_n = I_n$, donc $I_n \in O_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

ii) Soient $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, alors

$${}^t(AB) \cdot (AB) = {}^t B \cdot {}^t A \cdot A \cdot B = {}^t B \cdot I_n \cdot B = {}^t B \cdot B = I_n$$

Donc $A \cdot B \in O_n(\mathbb{R})$.

iii) Enfin, on a

$$\forall A \in O_n(\mathbb{R}) : A^{-1} = {}^t A \text{ et } {}^t(A^{-1}) \cdot A^{-1} = {}^t({}^t A) \cdot A = A \cdot A = I_n$$

Donc $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. ■

Remarque 2.2.9 Si on fixe une base B de E , orthonormale, l'application de $L(E)$ dans $M_n(\mathbb{R})$, qui à un endomorphisme f associe sa matrice dans la base B , induit un isomorphisme de groupes de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ dans $(O_n(\mathbb{R}), \cdot)$. Autrement dit, si B une b.o.n de E , $f \in L(E)$, $A = \text{Mat}_B(f)$. Alors

$$f \in \mathcal{O}(E) \iff A \in O_n(\mathbb{R})$$

et l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}(E) &\longrightarrow O_n(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \varphi(f) = \text{mat}_B(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

Proposition 2.2.10 (Caractérisation des matrices de passage entre bases orthonormales) Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit B une base orthonormale de E et B' une autre base de E . Si on note P la matrice de passage de B à B' , alors B' est orthonormale si et seulement si P est orthogonale.

On peut donc dire que les matrices orthogonales sont les matrices de passage entre bases orthonormales.

Preuve. Soit donc $B = (e_1, \dots, e_n)$ une bas orthonormale de E et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E en notant P la matrice de passage de l'une à l'autre. Les coefficients de P sont (en colonne) les coordonnées des vecteurs de B' exprimés dans la base B . Soit $f \in L(E)$ telle que

$$f(e_1) = e'_1, \dots, f(e_n) = e'_n$$

Alors

$$P = Pass(B, B') = Mat_B(f)$$

Car

$$Mat_B(f) = (f(e_1) \quad . \quad . \quad . \quad f(e_n))_B = (e'_1 \quad . \quad . \quad . \quad e'_n)_B = P$$

Alors f est orthogonale si et seulement si la matrice de f dans une base orthonormée est orthogonale, c'est-à-dire si l'image de B est une base orthonormée, donc si et seulement si B est une base orthonormée. ■

Théorème 2.2.11 *Un endomorphisme orthogonal de E est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.*

Preuve.

1) Soit s est une symétrie orthogonale et A sa matrice dans une base orthonormale de E , alors

$${}^tA = A^{-1} \text{ (car } s \in \mathcal{O}(E))$$

Or s est une symétrie orthogonale, alors $s^{-1} = s$, par conséquent $A = A^{-1}$, donc ${}^tA = A$. Ce qui signifie que A est symétrique.

2) Si s est un endomorphisme orthogonal de E et si la matrice A de s dans une base orthonormale de E est symétrique, alors ${}^tA = A^{-1}$ (car $s \in \mathcal{O}(E)$) et ${}^tA = A$ car A est symétrique, donc $A = A^{-1}$ d'où s est une symétrie. ■

Chapitre 3

Etude du groupe orthogonal en dimension 2

3.1 Classification des isométries vectorielles en dimension 2

Définition 3.1.1 (*isométries positives ou négatives*)

Soit E un espace euclidien. Si f est un endomorphisme orthogonal de E , alors $\det(f)$ est égal à 1 ou à -1 .

- 1) Si $\det(f) = 1$, on dit que f est un endomorphisme orthogonal positif (ou direct).
- 2) Si $\det(f) = -1$, on dit que f est un endomorphisme orthogonal négatif (ou indirect).

Notation 3.1.2

- 1) On note $\mathcal{O}^+(E)$ ou $\mathcal{SO}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux positifs

$$\mathcal{O}^+(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) : \det(f) = 1\}$$

- 1) On note $\mathcal{O}^-(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux négatifs

$$\mathcal{O}^-(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) : \det(f) = -1\}$$

Exemple 3.1.3 L'application Id_E est dans $\mathcal{SO}(E)$. Mais $(-\text{Id}_E)$ est dans $\mathcal{SO}(E)$ si et seulement si $\dim(E)$ est paire. Car

$$\begin{aligned}\det(\text{Id}_E) &= 1 \\ \det(-\text{Id}_E) &= (-1)^n\end{aligned}$$

Proposition 3.1.4 (*Le groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien*)

L'ensemble des endomorphismes orthogonaux positifs $\mathcal{SO}(E)$ est un sous groupe de $\mathcal{O}(E)$, appelé groupe spécial orthogonal de E .

Preuve.

i) Il est clair que $\mathcal{SO}(E) \subset \mathcal{O}(E)$. D'autre part, on a $\det(Id_E) = 1$, donc $Id_E \in \mathcal{SO}(E)$. Par conséquent $\mathcal{SO}(E) \neq \emptyset$.

ii) Soient $f, g \in \mathcal{SO}(E)$, alors

$$\det(g \circ f) = \det(g) \cdot \det(f) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\implies g \circ f \in \mathcal{SO}(E)$$

iii) Soit $f \in \mathcal{SO}(E)$, alors

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)} = 1$$

$$\implies f^{-1} \in \mathcal{SO}(E)$$

■

Remarque 3.1.5 $\mathcal{O}^-(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux négatifs n'est pas un sous groupe, puisque si $\det(f) = -1$ et $\det(g) = -1$, alors $\det(g \circ f) = +1$.

Exemple 3.1.6 Soit f une symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel quelconque F de E . On pose $\dim F = p$. Alors $f \in \mathcal{O}(E)$ (puisque f conserve la norme). On a

$$\begin{aligned} f : E = F \oplus F^\perp &\longrightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\longmapsto s_F(x) = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

On considère la matrice A de f dans une base (le début dans F et le reste dans $F^\perp$, alors

$$f(e_1) = e_1, \dots, f(e_p) = e_p, f(e_{p+1}) = -e_{p+1}, \dots, f(e_n) = -e_n$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & -1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\det(f) = (-1)^{n-p}$$

On conclut que les symétries orthogonales par rapports à une droite sont indirectes en dimension 2, directes en dimension 3.

Définition 3.1.7 (Matrices orthogonales positives ou négatives)

Soit M une matrice orthogonale d'ordre n .

Si $\det(M) = 1$, on dit que M est une matrice orthogonale positive (ou droite).

Si $\det(M) = -1$, on dit que M est une matrice orthogonale négative (ou gauche).

Notation 3.1.8 1) L'ensemble des matrices orthogonales droites d'ordre n est noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou $O_n^+(\mathbb{R})$.

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$$

2) L'ensemble des matrices orthogonales gauches d'ordre n est noté $O_n^-(\mathbb{R})$.

$$O_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) : \det(A) = -1\}$$

Exemple 3.1.9 I_n est une matrice orthogonale positive.

Proposition 3.1.10 (Le groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$)

L'ensemble des matrices orthogonales droites d'ordre n est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, appelé groupe spécial orthogonal.

Preuve.

i) Il est clair que $SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$. D'autre part, on a $\det(I_n) = 1$, donc $I_n \in SO_n(\mathbb{R})$. Par conséquent $SO_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

ii) Soient $A, B \in SO_n(\mathbb{R})$, alors

$$\det(A.B) = \det(A). \det(B) = 1.1 = 1$$

$$\implies A.B \in SO_n(\mathbb{R})$$

iii) Soit $A \in SO_n(\mathbb{R})$, alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1$$

$$\implies A^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$$

■

Remarque 3.1.11 L'ensemble des matrices orthogonales négatives $O_n^-(\mathbb{R})$ n'est pas un groupe. Car, il ne contient pas le neutre I_n , et aussi il n'est pas stable. En effet si M et N sont orthogonales négatives, alors MN est orthogonale positive.

Proposition 3.1.12 (*Comatrice d'une matrice orthogonale*)

Si $A \in O_n^+(\mathbb{R})$ (resp : $A \in O_n^-(\mathbb{R})$), alors on a $A = C$ (resp : $A = -C$), où C est la matrice des cofacteurs (comatrice) de A . Autrement dit, si $A \in O_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale, $a_{ij} \neq 0$ un coefficient de la matrice A et Δ_{ij} le cofacteur associé. Alors

- 1) Si $A \in O_n^+(\mathbb{R})$, alors $a_{ij} = \Delta_{ij}$.
- 2) Si $A \in O_n^-(\mathbb{R})$, alors $a_{ij} = -\Delta_{ij}$.

Preuve. On sait que pour toute matrice inversible, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t C = \mp {}^t C = {}^t A$$

Pour $A \in O_n^\mp(\mathbb{R})$. ■

Remarque 3.1.13 Soient B une b.o.n.de E , $f \in L(E)$, $A = \underset{A}{Mat}(f)$, Alors

$$f \in \mathcal{SO}(E) \iff A \in SO_n(\mathbb{R})$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} g : \mathcal{SO}(E) & \longrightarrow & SO_n(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & g(f) = \underset{A}{Mat}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Définition 3.1.14

- 1) On dit que deux bases B et B' sont de même sens lorsque la matrice de passage de B à B' a un déterminant positif.
- 2) Soit E un espace vectoriel euclidien. Orienter E consiste à se donner une base B de E . On dira ensuite qu'une base B' est directe si elle est de même sens que B , et indirecte sinon.

On abrège base orthonormale directe en b.o.n.d.

On considère dans tout ce paragraphe un espace euclidien orienté E de dimension 2 noté E_2 . Nous allons expliciter de $O_2(\mathbb{R})$ et donc ceux de $\mathcal{O}(E_2)$.

Théorème 3.1.15 (*éléments de $O_2(\mathbb{R})$, matrices orthogonales*)

Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de taille 2×2 . Alors

- 1) Si $\det(A) = +1$, alors il existe un réel θ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = A_\theta$$

2) Si $\det(A) = -1$, alors il existe un réel θ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = S_\theta$$

Preuve. Notons $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$. Alors dans tous les cas

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ a.c + b.d = 0 \end{cases}$$

Puisque les vecteurs colonnes de A constituent une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique. Donc il existe θ et θ' réels tels que :

$$a = \cos \theta, b = \sin \theta, c = \sin \theta', d = \cos \theta'$$

De plus, on a aussi si $\det(A) = +1$, alors

$$ad - bc = 1$$

$$\implies \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' = 1$$

$$\implies \cos(\theta + \theta') = \cos(2\pi k), k \in \mathbb{Z}$$

$$\implies \theta' = 2\pi k - \theta$$

$$\implies a = \cos \theta, b = \sin \theta, c = \sin \theta' = -\sin \theta, d = \cos \theta' = \cos \theta$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Si $\det(A) = -1$, alors

$$ad - bc = -1 \implies \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' = -1$$

$$\implies \cos(\theta + \theta') = \cos(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta' = (2k + 1)\pi - \theta$$

$$\implies a = \cos \theta, b = \sin \theta, c = \sin \theta, d = -\cos \theta$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

■

Corollaire 3.1.16 1) *Propriétés des matrices orthogonales positives d'ordre 2 :*

i) *Pour tous réels θ et θ' , on a $A_\theta \cdot A_{\theta'} = A_{\theta'} \cdot A_\theta = A_{\theta+\theta'}$. Il en découle que le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.*

ii) *On a $A_0 = I_2$ et, pour tout réel θ , $A_{-\theta} = (A_\theta)^{-1}$.*

iii) *Pour tous réels θ et θ' , on a $A_\theta = A_{\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$.*

2) *Propriétés des matrices orthogonales négatives d'ordre 2 :*

i) *Pour tous réels θ et θ' , on a $S_\theta \cdot S_{\theta'} = A_{\theta-\theta'}$.*

ii) *Pour tout réel θ , on a, $(S_\theta)^{-1} = {}^t S_\theta = S_\theta$. Donc toutes les matrices orthogonales négatives d'ordre 2 sont des matrices symétriques.*

Définition 3.1.17 Soient B une b.o.n.d. de E_2 et $\theta \in \mathbb{R}$. L'endomorphisme de E_2 dont la matrice dans B est

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et appelé la rotation d'angle θ , noté Rot_θ .

Théorème 3.1.18 (Endomorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2)

Soit E_2 un espace vectoriel euclidien de dimension 2, orienté. Soit f un endomorphisme orthogonal de E et A la matrice de f dans une base $B = (e_1, e_2)$, orthonormale directe de E . Alors

1) Si $\det(f) = 1$, alors il existe un réel θ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Si f n'est pas l'identité de E , alors f est la rotation de E d'angle θ , θ étant donné par $2 \cdot \cos \theta = \text{tr}(f)$.

2) Si $\det(f) = -1$, alors il existe un réel θ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

f est alors la symétrie orthogonale (la réflexion) par rapport à la droite D d'équation

$$x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} = 0$$

et l'angle de D avec la droite dirigée par e_1 est égal à $\frac{\theta}{2}$ (C'est à dire angle polaire).

Preuve. Si f est un endomorphisme orthogonal de E alors sa matrice représentative A dans une base orthonormale de E est alors orthogonale et on se trouve dans l'un des

deux cas précédents. De plus,

Si $\det(f) = 1$, alors $\det(A) = 1$, et $\exists \theta \in \mathbb{R} : A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Distinguons alors deux cas :

Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors u est l'identité de E sinon u est une rotation de E d'angle θ , et on obtient par

$$\operatorname{tr}(A) = \cos \theta + \cos \theta = 2 \cos \theta = \operatorname{tr}(f)$$

Si par ailleurs :

Si $\det(f) = -1$, alors $\det(A) = -1$, et $\exists \theta \in \mathbb{R} : A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

Puisqu'alors A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses valeurs propres (réelles) λ_1 et λ_2 vérifient, en utilisant trace et déterminant

$$\operatorname{tr}(A) = \cos \theta - \cos \theta = \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \det(A) = -1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$$\implies \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

$$\implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

La matrice de f dans une base de vecteurs propres est alors $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $M^2 = I_2$.

On obtient $f \circ f = f^2 = Id_E$. Donc f est bien une symétrie vectorielle.

Détermination les invariants de f :

Comme les espaces propres de f sont orthogonaux, c'est une symétrie orthogonale. La droite par rapport à laquelle s'opère cette symétrie est l'ensemble des vecteurs **invariants** de f donnés par $AX = X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} AX &= X \implies \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} (\cos \theta - 1)x + y \sin \theta = 0 \\ x \sin \theta - (\cos \theta + 1)y = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} -2 \sin \frac{\theta}{2} (x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2}) = 0 \\ 2 \cos \frac{\theta}{2} (x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2}) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme enfin, soit le sinus, soit le cosinus mis en facteur est non nul, alors $x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} = 0$. On en déduit bien que la droite invariante est la droite D dont l'équation dans la base B est bien celle annoncée. Il est alors immédiat que le vecteur $v = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}) =$

$(\cos \frac{\theta}{2})e_1 + (\sin \frac{\theta}{2})e_2$ est directeur de D et l'angle de ce vecteur avec e_1 est $\frac{\theta}{2}$. ■

Remarque 3.1.19 *Détermination les anti-invariants de f :*

Un calcul analogue montre que l'ensemble des anti-invariants de f (c'est-à-dire l'ensemble des u de E_2 tels que $f(u) = -u$) est la droite vectorielle $D_{\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}}$ d'angle polaire $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$.

Le résultat suivant découle des études précédentes.

Proposition 3.1.20

- 1) $\mathcal{SO}(E_2) = \{Rot_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$.
- 2) $\mathcal{O}(E_2) - \mathcal{SO}(E_2) = \{Réf_D, D \in \mathcal{D}\}$ où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des droites vectorielles de E_2 et $Réf_D$ les réflexions (symétries orthogonales) par rapport à la droite D .

Bibliographie

- [1] Alain Soyeur, François Capaces, Emmanuel Vieillard-Baron. *Cours de Mathématiques Sup MPSI PCSI PTSI TSI*. 16 septembre 2010
les.mathematiques.free.fr/pdf/livre.pdf
- [2] Anne Moreau. *Espaces euclidiens et hermitiens*. Université de Poitiers Année 2012-2013. www-math.sp2mi.univ-poitiers.fr/~amoreau/L2PR13-eucl.pdf
- [3] Gérard Letac. *Cours d'algèbre linéaire, 2^{ème} année d'université*. Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier, 31062, Toulouse, France.
www.math.univ-toulouse.fr/~letac/deug105.pdf
- [4] Jean- Marie Monier. *Algèbre 1 cours et 600 exercices corrigés 1^{re} année MPSI, PCSI, PTSI*. Dunod, Paris, 2000.
- [5] Laurent Rouvière. *Algèbre Linéaire, Licence MAS S. Deuxième année*. Université Rennes 2. 2008-2009. univmaths.e-monsite.com/.../algebre-lineaire-cours-1.pdf
- [6] N.G.J. Pagnon. *Groupe Orthogonal Euclidien*.
amatheux.com/IMG/pdf/groupe_orthogonal_euclidien.pdf