الجمهوريـة الجزائريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

En : - Filière : Mathématiques Fondamentales

Résolution des équations de récurrence

Préparé par :
Hammana Hadjer
Kecita Rima
Kheloufi Radia
Laouar Houda

Encadré par : Kecies Mohamed

Année universitaire : 2013/2014

Remerciements

Premièrement, on remercie le bon Dieu qui nous a donné la confiance en nous, la santé, la force et la volonté pour pouvoir terminer ce travail.

Nous adressons de chaleureux remerciements à notre encadrant de mémoire: M. Kecies Mohamed. C. U. de Mila pour son attention de tout instant sur notre travail.

Son énergie et sa confiance ont été des éléments moteurs pour nous.

Nous avons pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Un grand remerciement à notre enseignants de centre universitaire de Mila.

Enfin ; Mille merci nos trop chères familles que dieu vous garde pour nous.

Hadjer ; Rima ; Radia ; Hoda

Dédicace

Voilà la page que je rêvais d'écrire un jour ...

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents, pour leur soutien :

Mon exemplaire, mon chère père :« Mohammed ».

Ma mère « Masaouda » qui n'a pas cessé de prier pour moi et de m'encourager dans les moments difficiles.

A mes très chers frères : « Ismail » & « Chouaib ».

A ma petite sœur : « SARA (Amina)».

A toute ma famille.

A tous mes amis qui m'ont soutenu et encouragé :

Wahiba ,Rima,Radia,Hoda,Fatima,Abla,Khawla,Iman.

A tous ceux que j'aime, Je vous dédie ce travail en vous souhaitant un avenir radieux, plein de bonheur et de succès.

A tous les collègues de promotion mathématique surtout la promotion 2014.

Hadjer.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

A mes parents . Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour Dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A mon cher frère Haroun et mes sœurs Hynd et Bouchra ; sans oublié mes grands parents que j'aime.

A toute ma famille, et mes amis

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

Houda

Dédicace

Je remercie dieu qui a toujours était à mais côtes.

Je dédie cet humble travail :

A mon père « Eltahar (Allah yarahmo) », et à ma mère « Khadidja» qui ma donné la tendresse et l'amour.

Je leur dis : Vous gratifiez de vie et d'espérance et de nourrir une passionpour l'accès et la connaissance merci et mille mercis.

A mes soeurs «Sabrina », «Fatima ».

A tous mes frères « Adel», «Daoud», « Soufiane» et ma petit ameur : « ANES » ,et tout ma famille.

Pour celles qui sont enseignées les sciences de la vie, Pour eux goûté les plus beaux moments etDieu les aimait étudiants du Département mathématique. Pour allier plaisir et douleur. Pourceux qui souhaitent garder leurs photos à mes yeux: « Nassima,Hadjer,Rima,Rahma,Hakima,Kalida, Layla,Imane,Hoda,Rokia,et d'autres.»

Radia

Dédicace

Je dédie ce modeste travail en signe de reconnaissance et derespect :

A ma source de tendresse, ma chére mére « *Fatiha* ».

A mon exemplaire, mon chère père « Mohamed ».

A mes fréres : « Farouk »et « Yacine »

A ma *sœur : « Faiza »*

A mon espoire et ma *sœur : «* ***SALSABIL*** ».

A ma chère tante : «Samira »

A mes grands parents : « Masaoud »et « Fatima »

A mes amies qui vivaient avec moi des périodes tant

activement que passivement surtout : « Hadjer,Radia,Hakima,Rahma,Nassima,Rokia,Khalida, Layla,Imane,Amel,Karima,Hoda et d'autres.»

Rima

Table des matières

Introduction Générale

L'importance des équations de récurrence a besoin à peine d'être expliquée. Leur étude est d'intérêt fondamental et a été une partie centrale de théorie du nombre pour beaucoup d'années. De plus, ces équations paraissent presque partout en mathématiques appliquées et informatique appliquée. Par exemple, la théorie des séries de puissances représentent les fonctions rationnelles. Systèmes de polynômes orthogonaux (polynômes de Tchebychev). Les séquences de récurrence linéaires sont aussi d'importance dans la théorie d'approximation et cryptographie.

Dans le premier chapitre, on va faire une simple étude des équations de récurrence d'ordre 1, 2 et p et comment les résoudre. Nous allons rappeler quelques principes et résultats fondamentaux de la théorie des équations de récurrence linéaires, de plus on va voir des exemples pour comprendre les méthodes de résolution.

Nous étudierons dans le deuxième chapitre une méthode qui permet de résoudre l'équation de récurrence de la forme $\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma$ dans un espace vectoriel complexe où les lettres a et b désignent des nombres réels ou complexes, n est un entier naturel, élément de l'anneau $\mathbb{N}$ des entiers naturels, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un espace vectoriel complexe E et γ est un élément de E. Nous allons appliquer cette méthode pour déterminer les puissances n^e d'une matrice de $M_2(\mathbb{C})$.

Chapitre 1

Equations de récurrence

Nous rappelons quelques principes et résultats fondamentaux de la théorie des équations récurrentes linéaires, de plus on va voir des exemples pour comprendre les méthodes de résolution. On se limitera à l'étude des équations de récurrence linéaire à coefficients réels.

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1.1 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une équation de récurrence linéaire d'ordre p (que l'on note ERL) s'il existe des réels $a_1, ..., a_p$ et une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+p} - a_1 u_{n+p-1} - ... - a_p u_n = v_n \tag{1.1}$$

et si les p premiers termes $u_0, ..., u_{p-1}$ sont donnés.
L'équation de récurrence linéaire

$$u_{n+p} - a_1 u_{n+p-1} - ... - a_p u_n = 0 \tag{1.2}$$

obtenue en supprimant le second membre v_n est appelée équation de récurrence linéaire homogène $(ERLH)$ associée à l'ERL

Par extension, on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une équation de récurrence linéaire homogène si elle vérifie une relation de type (1.1) avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0$.

Exemple 1.1.2 *Soit l'ERL*

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 3 \text{ avec } u_0 = 0, u_1 = 1$$

Elle n'est pas homogène, car ici le terme v_n n'est pas égal à 0*. L'ERLH associée est*

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$$

Proposition 1.1.3 *L'ensemble S_0 des solutions d'une ERLH d'ordre p est un sous-espace vectoriel de dimension p de $S(\mathbb{R})$ (ensemble des suites réelles).*

Preuve. On utilise la forme générale (1.2) de l'*ERLH* donnée précédemment. L'ensemble S_0 des solutions de (1.2) est un sous-ensemble de $S(\mathbb{R})$, non vide car la suite nulle lui appartient.
On montre facilement que toute combinaison linéaire d'éléments de S_0 est encore un élément de S_0. C'est donc bien un sev de $S(\mathbb{R})$.
Considérons maintenant l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & S_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & (u_n)_n & \longmapsto & (u_0, ..., u_{p-1}) \end{array}$$

On montre facilement que φ est une application linéaire de $S(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^p$.
Elle est injective (car si $u_0 = u_1 = ... = u_{p-1} = 0$ la relation de récurrence implique que $u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$).
Surjective (on peut toujours trouver une suite respectant la relation de récurrence et avec $p-1$ premiers termes fixés a priori) , donc bijective. C'est donc un isomorphisme de S_0 dans $\mathbb{R}^p$, et $\dim(S_0) = p$. ■

On retiendra de cette propriété que, S_0 étant un espace vectoriel de dimension p, il nous faut trouver p suites linéairement indépendantes et vérifiant l'équation homogène pour entièrement caractériser S_0.

Proposition 1.1.4 *Soit S l'ensemble des solutions de l'ERLH* (1.1) *et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément quelconque de S, Alors*

$$S = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + S_0$$

Où S_0 désigne l'ensemble des solutions de l'ERLH associée (1.2)*.*
Autrement dit, la solution générale de S s'obtient en ajoutant à la solution générale de S_0 une solution particulière de S.

On va donc diviser la résolution d'une équation de récurrence linéaire en 3 étapes :
1) On trouve une base de l'ensemble S_0 des solutions de l'*ERLH* associée, ce qui nous donne la solution générale $(u_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'*ERLH*.
2) On trouve une solution de l'*ERL* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) On en déduit la solution générale (i.e. sans tenir compte des conditions initiales) de

l'équation de l'ERL, $(u_n^0+a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La solution particulière s'obtient à l'aide des conditions initiales.

Dans la suite du chapitre, on continuera à désigner par S l'ensemble des solutions d'une ERL, et par S_0 l'ensemble des solutions de l'$ERLH$ associée.

1.2 Résolution d'une Equation de Récurrence Linéaire Homogène

1.2.1 ERLH d'ordre 1

Définition 1.2.1 *La forme générale d'une $ERLH$ d'ordre 1 est $u_{n+1} - au_n = 0$ où a est un réel.*

Cette équation définit une suite géométrique de raison a. On a donc le résultat suivant

Proposition 1.2.2 *La solution générale de cette $ERLH$ est $u_n = a^n u_0$, où $u_0 \in \mathbb{R}$.*

Exemple 1.2.3 *Soit à résoudre l'équation*

$$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} - 4u_n = 0$$

La solution de cette $ERLH$ est la suite de terme général

$$u_n = u_0 4^n$$

1.2.2 ERLH d'ordre 2

Définition 1.2.4 *La forme générale d'une $ERLH$ d'ordre 2 est*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} - a_2 u_{n+1} - a_1 u_n = 0$$

Où a_1 et a_2 sont des réels.

Définition 1.2.5 *Soit l'équation de degré 2 suivante*

$$x^2 - a_2 x - a_1 = 0 \tag{1.3}$$

(1.3) *est appelée équation caractéristique associée à l'$ERLH$. On note $\Delta = a_2^2 + 4a_1$ le discriminant de l'équation associée.*

Proposition 1.2.6 *Soit $x^2 - a_2x - a_1 = 0$ l'équation caractéristique associée à l'ERLH. Alors*
1) Si $\Delta > 0$, soient α et β les deux racines réelles de (1.3). Alors $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de S_0. Autrement dit les solutions de l'ERLH sont les suites données par

$$u_n = \lambda_1\alpha^n + \lambda_2\beta^n, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

2) Si $\Delta = 0$, soit α la racine double de (1.3). Alors $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de S_0. Autrement dit les solutions de l'ERLH sont les suites données par

$$u_n = \alpha^n(\lambda_1 + \lambda_2 n), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

3) Si $\Delta < 0$, soient $\alpha = \rho \exp(i\theta)$ et $\alpha = \exp(-i\theta)$ les deux racines complexes conjuguées de (1.3). Alors $(\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de S_0. Autrement dit les solutions de l'ERLH sont les suites données par

$$u_n = \rho^n(\lambda_1 \cos n\theta + \lambda_2 \sin n\theta), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Preuve. On montre que, dans chacun des trois cas, les deux suites forment une famille libre. Comme S_0 est de dimension 2. On montre que ce sont des éléments de S_0.
1) **Premier cas Δ> 0** :
Soit l'$ERLH$ d'ordre 2 suivante

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} - a_2u_{n+1} - a_1u_n = 0$$

Montrons que les suites $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de S_0.
On a

$$\begin{cases} \alpha^{n+2} - a_2\alpha^{n+1} - a_1\alpha^n = \alpha^n(\alpha^2 - a_2\alpha - a_1) = 0 \\ \beta^{n+2} - a_2\beta^{n+1} - a_1\beta^n = \beta^n(\beta^2 - a_2\beta - a_1) = 0 \end{cases}$$

Car est racine de (1.3). Donc $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de S_0. Or S_0 est un sous espace vectoriel, alors

$$c_1(\alpha^n) + c_2(\beta^n) \in S_0$$

On en déduit que $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de S_0.
2) **Deuxième cas Δ= 0** :
α étant une racine double de (1.3), alors on a

$$\alpha^2 - a_2\alpha - a_1 = 0$$

et

$$\alpha = \frac{a_2}{2} \Longleftrightarrow 2\alpha - a_2 = 0$$

Le même raisonnement que précédemment montre que $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de S_0. D'autre part

$$(n+2)\alpha^{n+2} - a_2(n+1)\alpha^{n+1} - a_1 n\alpha^n = n\alpha^n(\alpha^2 - \alpha a_2 - a_1) + \alpha^{n+1}(2\alpha - a_2) = 0$$

Donc $(n\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également élément de S_0.
3) **Troisième cas $\Delta <$ 0** :
On a $\alpha = \rho e^{i\theta}$ vérifie $\alpha^2 - a_2\alpha - a_1 = 0$, donc

$$\rho^{n+2}\exp\left(i(n+2)\theta\right) - a_2\rho^{n+1}\exp\left(i(n+1)\theta\right) - a_1\rho^n\exp\left(in\theta\right) = \rho^n\exp\left(in\theta\right)\left(\alpha^2 - a_2\alpha - a_1\right) = 0$$

En passant à la partie réelle, puis à la partie imaginaire, on en déduit que $(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ sont éléments de S_0. ■

Exemple 1.2.7
1) *Soit à résoudre l'ERLH suivante*

$$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0$$

L'équation caractéristique associée est

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut 16, *on en déduit que les racines de l'équation sont* 1 *et* -3. *Les suites* $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *forment donc une base de* S_0, *et la solution générale de l'ERLH est la suite de terme général*

$$u_n = \lambda_1 + \lambda_2(-3)^n$$

Où λ_1 *et* λ_2 *sont des réels.*
2) *Soit à résoudre l'ERLH suivante*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$$

L'équation associée est

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut -4, *on en déduit que l'équation admet deux ra-*

cines complexes conjuguées $1+i=\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$ *et* $1-i=\sqrt{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)$. *Les suites* $\left(\sqrt{2}^n\cos(\frac{n\pi}{4})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\left(\sqrt{2}^n\sin(\frac{n\pi}{4})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *forment donc une base de* S_0, *et la solution générale de l'*$ERLH$ *est la suite de terme général*

$$u_n=\lambda_1\sqrt{2}^n\cos(\frac{n\pi}{4})+\lambda_2\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Où λ_1 *et* λ_2 *sont des réels.*

1.2.3 ERLH d'ordre p

On va maintenant revenir à la forme générale d'une $ERLH$, et généraliser les résultats précédents.

Définition 1.2.8 *Soit l'équation de degré p suivante*

$$x^p-a_1x^{p-1}-...-a_p=0 \tag{1.4}$$

(1.4) *est appelée équation caractéristique associée à l'*ERL (1.2).

Proposition 1.2.9
Soient $1,...,q$ *les racines réelles de* (1.4), *d'ordre respectif* $i_1,...,i_q$. *Soient*

$$\alpha_1=\rho_1\exp\left(i\theta_1\right),\bar{\alpha}_1=\rho_1\exp\left(-i\theta_1\right),...,\alpha_r=\rho_r\exp\left(i\theta_r\right),\bar{\alpha}_r=\rho_r\exp\left(-i\theta_r\right)$$

les racines complexes conjuguées de (1.4), *d'ordre respectif* $j_1,...,j_r$. *On a en particulier*

$$(i_1+...+i_q)+2(j_1+...+j_r)=p$$

Alors les suites

$$\begin{cases}(\beta_1^n)_{n\in\mathbb{N}},...,(n^{i_1-1}\beta_1^n)_{n\in\mathbb{N}}\\ .\\ .\\ .\\ (\beta_q^n)_{n\in\mathbb{N}},...,(n^{i_q-1}\beta_q^n)_{n\in\mathbb{N}}\\ (\rho_1^n\cos(n\theta_1))_{n\in\mathbb{N}},(\rho_1^n\sin(n\theta_1))_{n\in\mathbb{N}},...,(n^{j_1-1}\rho_1^n\cos(n\theta_1))_{n\in\mathbb{N}},(n^{j_1-1}\rho_1^n\sin(n\theta_1))_{n\in\mathbb{N}}\\ .\\ .\\ .\\ (\rho_r^n\cos(n\theta_r))_{n\in\mathbb{N}},(\rho_r^n\sin(n\theta_r))_{n\in\mathbb{N}},...,(n^{j_r-1}\rho_r^n\cos(n\theta_r))_{n\in\mathbb{N}},(n^{j_r-1}\rho_r^n\sin(n\theta_r))_{n\in\mathbb{N}}\end{cases}$$

forment une base de S_0.

Preuve. Bien qu'un peu plus calculatoire, le principe de la démonstration est le même que pour une ERL d'ordre 2. ■

Exemple 1.2.10
1) *Soit à résoudre l'ERLH*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+5} - 3u_{n+4} + 4u_{n+3} - 4u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n = 0$$

On notera la factorisation suivante

$$x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)^3$$

Compte-tenu de l'indication, l'équation associée à l'$ERLH$ admet une racine réelle triple 1, deux racines complexes conjuguées simples $i = \exp\left(\frac{i}{2}\right)$ et $-i = \exp\left(\frac{-i}{2}\right)$. Alors
Les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\cos(\frac{n}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(\frac{n}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ forment donc une base de S_0, et la solution générale de l'$ERLH$ est la suite de terme général

$$u_n = \lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2 + \lambda_4 \cos(\frac{n}{2}) + \lambda_5 \sin(\frac{n}{2})$$

Où $\lambda_1, ..., \lambda_5$ sont des réels.
2) *Soit à résoudre l'ERLH*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+5} - 6u_{n+4} + 20u_{n+3} - 40u_{n+2} + 48u_{n+1} - 32u_n = 0$$

On notera la factorisation suivante

$$x^5 - 6x^4 + 20x^3 - 40x^2 + 48x - 32 = (x^2 - 2x + 4)^2(x - 2)$$

L'équation

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

a pour discriminant -12, et admet deux racines complexes conjuguées $1+i\sqrt{3} = 2\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)$ et $1-i\sqrt{3} = 2\ \exp\left(\frac{-i\pi}{3}\right)$. On en déduit que l'équation associée à l'$ERLH$ admet une racine réelle simple 2, deux racines complexes conjuguées doubles $2\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)$ et $2\ \exp\left(\frac{-i\pi}{3}\right)$.
Les suites $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n cos(\frac{n\pi}{3}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n \sin(\frac{n\pi}{3}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n n \cos(\frac{n\pi}{3}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n n \sin(\frac{n\pi}{3}))_{n\in\mathbb{N}}$ forment donc une base de S_0, et la solution générale de l'$ERLH$ est la suite de terme général

$$u_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 2^n \cos(\frac{n\pi}{3}) + \lambda_3 2^n \sin(\frac{n\pi}{3}) + \lambda_4 2^n n \cos(\frac{n\pi}{3}) + \lambda_5 2^n n \sin(\frac{n\pi}{3})$$

Où $\lambda_1, ..., \lambda_5$ sont des réels.

1.3 Recherche d'une solution particulière d'une ERL

Il n'est pas toujours simple de produire une solution particulière d'une ERL. Nous allons voir deux cas où l'on peut toujours en obtenir une :

– Celui où le second membre de l'équation est un polynôme en n.

– Celui où le second membre de l'équation est une puissance en n.

Notons tout de suite un point important : Les conditions initiales ne vont pas intervenir dans la recherche de cette solution particulière.

1.3.1 Cas où le second membre est un polynôme en n

On suppose que v_n est un polynôme en n, c'est à dire qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = Q(n)$$

On note q le degré du polynôme Q. Alors

1) **Si 1 n'est pas racine de l'équation associée :**
On peut trouver une solution particulière de terme général

$$u_n = R(n)$$

Où R désigne un polynôme à coefficients réels de degré q. On cherche donc des coefficients $b_0, ..., b_q$ définissant une suite de terme général

$$u_n = b_0 + b_1 n + ... + b_q n^q$$

Exemple 1.3.1 *Soit à résoudre l'équation de récurrence linéaire*

$$u_{n+3} - 2u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = n + 2$$

L'équation associée est

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0$$

Dont 3, $\exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right)$ et $\exp\left(\frac{-i2\pi}{3}\right)$ sont racines simples. Le second membre est un polynôme en n de degré 1, et 1 n'est pas racine de l'équation associée. On cherche donc une solution particulière de terme général

$$u_n = dn + e$$

Où d et e sont des constantes. Après un peu de calcul, on trouve $d = \frac{-1}{6}$ et $e = \frac{-1}{4}$.

2) **Si 1 est racine simple de l'équation associée :**
On peut trouver une solution particulière de terme général

$$u_n = nR(n)$$

Où R désigne un polynôme à coefficients réels de degré q. On cherche donc des coefficients $b_0, ..., b_q$ définissant une suite de terme général

$$u_n = n(b_0 + b_1 n + ... + b_q n^q)$$

Exemple 1.3.2 *Soit à résoudre l'équation de récurrence linéaire*

$$u_{n+3} - u_n = 2n$$

L'équation associée est

$$x^3 - 1 = 0$$

Dont 1, $\exp\left(\frac{i2\pi}{3}\right)$ et $\exp\left(\frac{-i2\pi}{3}\right)$ sont racines simples. Le second membre est un polynôme en n de degré 3, et 1 est racine simple de l'équation associée. On cherche donc une solution particulière de terme général

$$u_n = n(b_0 + b_1 n) = b_0 n + b_1 n^2$$

Où b_0 et b_1 sont des constantes à déterminer. On doit avoir

$$u_{n+3} - u_n = 2n \Longrightarrow (b_0(n+3) + b_1(n^2 + 6n + 9)) - (b_0 n + b_1 n^2) = 2n$$

$$\Longrightarrow (3b_0 + 9b_1) + b_1(6n) = 2n$$

$$\Longrightarrow b_1 = \frac{1}{3}$$

On en déduit que $b_0 = -1$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.

3) **Si 1 est racine multiple de l'équation associée :**
De façon plus générale, supposons que 1 est racine de l'équation associée d'ordre de multiplicité m. On peut trouver une solution particulière de terme général

$$u_n = n^m R(n)$$

Où R désigne un polynôme à coefficients réels de degré q. On cherche donc des coefficients $b_0, ..., b_q$ définissant une suite de terme général

$$u_n = b_0 n^m + b_1 n^{m+1} + ... + b_q n^{m+q}$$

Exemple 1.3.3 *Soit à résoudre l'ERL*

$$u_{n+5} - 3u_{n+4} + 4u_{n+3} - 4u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n = n + 2$$

L'équation associée est

$$x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

Cette équation peut s'écrire sous forme factorisée

$$(x^2 + 1)(x - 1)^3 = 0$$

On en déduit donc que 1 *est racine triple de cette équation, et que* $i = \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right)$ *et* $-i$ $=\exp\left(\frac{-i\pi}{2}\right)$ *en sont racines simples. Le second membre est un polynôme en* n *de degré* 1*, et* 1 *est racine triple de l'équation associée. On cherche donc une solution particulière de terme général*

$$u_n = n^3(b_0 + b_1 n)$$

Où b_0 *et* b_1 *sont des constantes. On doit avoir*

$$u_{n+5} - 3u_{n+4} + 4u_{n+3} - 4u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n = n + 2$$

Ce qui donne après calcul et identification des coefficients $b_0 = \frac{-1}{54}$ *et* $b_1 = \frac{1}{54}$.

Conclusion 1.3.4 *Si le second membre de l'ERL est un polynôme en* n *de degré* q*, on cherche une solution particulière de l'ERL de terme général* $n^m R(n)$*, où* R *est un polynôme réel (à déterminer) de degré* q *et* m *désigne l'ordre de multiplicité de* 1 *comme racine de l'équation associée à l'ERL (*m *peut être nul).*

1.3.2 Cas où le second membre est une puissance en n

On suppose qu'il existe deux constantes α et b telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = b\alpha^n$$

1) **Si α n'est pas racine de l'équation associée :**

On peut trouver une solution particulière de terme général

$$u_n = b_0\alpha^n$$

Où b_0 est une constante.

Exemple 1.3.5 *Soit à résoudre l'équation de récurrence linéaire*

$$u_{n+4} - 6u_{n+3} + 13u_{n+2} - 12u_{n+1} + 4u_n = 3n$$

L'équation associée est

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$$

Que l'on peut encore écrire sous forme factorisée

$$(x-1)^2(x-2)^2 = 0$$

1 et 2 sont toutes les 2 racines doubles de cette équation. Le second membre est une puissance en n, et $\alpha = 3$ n'est pas racine de l'équation associée. On cherche donc une solution particulière de terme général

$$u_n = b_0 3^n$$

On a

$$u_{n+4}-6u_{n+3}+13u_{n+2}-12u_{n+1}+4u_n = 3n \Longrightarrow b_0 3^{n+4}-6b_0 3^{n+3}+13b_0 3^{n+2}-12b_0 3^{n+1}+4b_0 3^n = 3n$$

$$\Longrightarrow b_0(81 - 162 + 117 - 36 + 4) = 1$$

$$\Longrightarrow b_0 = \frac{1}{4}$$

2) **Si α est racine simple de l'équation associée :**

On peut trouver une solution particulière de terme général

$$u_n = b_0 n\alpha^n$$

Où b_0 est une constante.

Exemple 1.3.6 *Soit à résoudre l'équation de récurrence linéaire*

$$u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 4(-2)^n$$

L'équation associée est

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Que l'on peut encore écrire sous forme factorisée

$$(x-1)(x+2) = 0$$

1 *et* -2 *sont toutes les deux racines simples de cette équation. Le second membre est une puissance en* n, *et* $\alpha = -2$ *est racine simple de l'équation associée. On cherche donc une solution particulière de terme général*

$$u_n = b_0 n(-2)^n$$

Comme cette suite doit vérifier

$$u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 4(-2)^n$$

On obtient après identification $b_0 = \frac{2}{3}$.

3) **Si α est racine multiple de l'équation associée :**
Soit m l'ordre de multiplicité de α comme racine de l'équation. On peut trouver une solution particulière de terme général

$$u_n = b_0 n^m \alpha^n$$

Où b_0 est une constante

Exemple 1.3.7 *Soit à résoudre l'équation de récurrence linéaire*

$$u_{n+4} + 2u_{n+3} - 2u_{n+1} - u_n = 3(-1)^n$$

L'équation associée est

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0$$

Que l'on peut encore écrire sous forme factorisée

$$(x-1)(x+1)^3 = 0$$

Donc 1 *est racine simple de l'équation, et* -1 *en est racine triple. Le second membre est une puissance en* n, *et* $\alpha = -1$ *est racine triple de l'équation associée. On cherche donc* *une solution particulière de terme général*

$$u_n = b_0 n^3 (-1)^n$$

Comme cette suite doit vérifier

$$u_{n+4} + 2u_{n+3} - 2u_{n+1} - u_n = 3(-1)^n$$

On obtient après identification $b_0 = \frac{1}{4}$.

Conclusion 1.3.8 *Si le second membre de l'ERL est une puissance en* n*, i.e. une suite de terme général* $b\alpha^n$*, on cherche une solution particulière de l'ERL de terme général* $b_0 n^m \alpha^n$*, où* b_0 *est une constante et* m *désigne l'ordre de multiplicité de* α *comme racine de l'équation associée à l'ERL (*m *peut être nul).*

1.4 Résolution de l'ERL

Les deux paragraphes précédents nous permettent de donner la solution générale de l'ERL, il reste à tenir compte des conditions initiales pour déterminer l'unique suite solution du problème.

Exemple 1.4.1 *Soit à résoudre l'ERL*

$$u_{n+5} - 6u_{n+4} + 20u_{n+3} - 40u_{n+2} + 48u_{n+1} - 32u_n = -\frac{221}{2}3^n$$

Avec les conditions initiales

$$u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 1$$

L'ERLH associée est

$$u_{n+5} - 6u_{n+4} + 20u_{n+3} - 40u_{n+2} + 48u_{n+1} - 32u_n = 0$$

Et l'équation associée vaut

$$x^5 - 6x^4 + 20x^3 - 40x^2 + 48x^1 - 32 = 0 \tag{1.5}$$

On a vu précédemment que cette équation s'écrivait sous forme factorisée

$$(x^2 - 2x + 4)^2 (x - 2) = 0$$

d'où l'on a déduit que

$$S_0 = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\beta_1 2^n + \beta_2 2^n \cos\frac{n\pi}{3} + \beta_3 2^n \sin\frac{n\pi}{3} + \beta_4 n 2^n \cos\frac{n\pi}{3} + \beta_5 n 2^n \sin\frac{n\pi}{3} \right)_{n\in\mathbb{N}} \right\}$$

Où $(\beta_1, ..., \beta_5) \in \mathbb{R}^5$.
On cherche maintenant une solution particulière de l'ERL. D'après ce qui précède, on la cherche sous la forme d'une suite de terme général $(a3^n)$ *où* a *est une constante à déterminer. On doit avoir*

$$a(3^{n+5} - 6\times 3^{n+4} + 20\times 3^{n+3} - 40\times 3^{n+2} + 48\times 3^{n+1} - 32\times 3^n) = -\frac{221}{2}3^n$$

$$\iff a(243 - 486 + 270 - 360 + 144 - 32) = -\frac{221}{2}$$

$$\iff a = 2$$

Une solution particulière de l'ERL est donc la suite de termes général (2×3^n)*, où* a *est donné par l'équation précédente. On en déduit l'ensemble des solutions*

$$S = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(2\times 3^n + \beta_1 2^n + \beta_2 2^n \cos\frac{n\pi}{3} + \beta_3 2^n \sin\frac{n\pi}{3} + \beta_4 n 2^n \cos\frac{n\pi}{3} + \beta_5 n 2^n \sin\frac{n\pi}{3} \right)_{n\in\mathbb{N}} \right\}$$

Où $(\beta_1, ..., \beta_5) \in \mathbb{R}^5$.
Les coefficients β_i *sont donnés par la résolution du système (obtenu à l'aide des conditions initiales)*

$$\begin{cases} 2 + \beta_1 + \beta_2 = 0 \\ 6 + 2\beta_1 + \beta_2 + \sqrt{3}\beta_3 + \beta_4 + \sqrt{3}\beta_5 = 0 \\ 18 + 4\beta_1 - 2\beta_2 + 2\sqrt{3}\beta_3 - 4\beta_4 + 4\sqrt{3}\beta_5 = 0 \\ 54 + 8\beta_1 - 8\beta_2 - 24\beta_4 + \sqrt{3}\beta_5 = 0 \\ 162 + 16\beta_1 - 8\beta_2 - 8\sqrt{3}\beta_3 - 32\beta_4 - 32\sqrt{3}\beta_5 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) \simeq (-6.12, 4.12, 0.89, -1.17, 1.01)$$

La solution de l'ERL est donc la suite de terme général

$$u_n = 2\times 3^n - 6.12\times 2^n + 4.12\times 2^n \times cos\frac{n\pi}{3} + 0.89\times 2^n \times sin\frac{n\pi}{3} - 1.17n\times 2^n \times cos\frac{n\pi}{3} + 1.01n\times 2^n \times sin\frac{n\pi}{3}$$

Chapitre 2

Résolution de l'équation de récurrence $\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma$ dans un espace vectoriel complexe

Notation 2.0.2 *On note*
1) $P_n[X,Y]$ *est le polynôme à coefficients entiers, défini par récurrence par*

$$\begin{cases} P_0[X,Y] = 0, \;\; P_1[X,Y] = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : P_{n+2}[X,Y] = XP_{n+1}[X,Y] + YP_n[X,Y] \end{cases}$$

$P_n[X,Y]$ *est un polynôme de degré* $n-1$*, pour* n *supérieur ou égal à* 1*.*
2) $S_n[X,Y]$ *est le polynôme à coefficients entiers (de degré* $n-1$ *pour* n *entier supérieur ou égal à* 1*), à coefficients entiers, défini, pour tout entier naturel* n *, par la relation*

$$S_n[X,Y] = \sum_{k=0}^{n} P_k[X,Y]$$

Où $P_k[X,Y]$ *est le polynôme défini dans* 1*).*

Notation 2.0.3
1) a *et* b *désignent des nombres complexes éléments du corps* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes.*
2) n *est un entier naturel, élément de l'anneau* $\mathbb{N}$ *des entiers naturels.*
3) $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments d'un espace vectoriel complexe* E*.*
4) γ *est un élément de* E*.*

La résolution dans E, de l'équation de récurrence

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma$$

est la recherche de l'expression de α_n en fonction de $a, b, \gamma, \alpha_0, \alpha_1$, pour tout entier naturel n.

Principe

Dans la proposition (2.1.4), nous allons ramener la résolution dans E, de l'équation

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma$$

à la résolution dans E, de l'équation

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n$$

correspondant à $\gamma = 0$.

Nous verrons ensuite qu'il suffit de résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$, au lieu de E, pour les valeurs $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$.
La proposition (2.2.1) exprime la solution dans E, de l'équation

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n$$

en fonction de la solution $P_n(a,b)$ dans $\mathbb{C}$, de l'équation

$$P_{n+2} = aP_{n+1}(a,b) + bP_n(a,b)$$

correspondant à $P_0(a,b) = 0$ et $P_1(a,b) = 1$.
La proposition (2.3.1), résoudra dans $\mathbb{C}$ l'équation de récurrence

$$P_{n+2} = aP_{n+1}(a,b) + bP_n(a,b)$$

correspondant à $P_0(a,b) = 0$ et $P_1(a,b) = 1$.

La solution par construction est un polynôme $P_n(a,b)$ des variables a et b.

Dans la proposition (2.4.1) nous calculerons la somme $S_n(a,b)$ des polynômes $P_0(a,b)$, $P_1(a,b)$, ..., $P_n(a,b)$. Ceci nous permettra, dans les propositions (2.5.1) et (2.6.1), d'exprimer pour chaque valeur de n la solution de l'équation

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma$$

en fonction de $\alpha_0, \alpha_1, \gamma,\ P_n(a,b), S_n(a,b)$.

Conclusion :
la solution de l'équation de récurrence

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma$$

s'exprime en fonction de $\alpha_0, \alpha_1, \gamma$ à l'aide des polynômes $P_n(a,b)$. L'expression de cette solution se simplifier lorsque $a+b$ est différent de1 ou lorsque $\gamma = 0$.

En guise d'exemple (2.8), nous exprimerons la puissance n^e d'une matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$, en fonction de A et des polynômes $P_n(a,b)$, où a est la trace de A et b l'opposé du déterminant de A.

2.1 Réduction au cas $\gamma = 0$

2.1.1 Suites stationnaires

Définition 2.1.1 *Considérons une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un éspace vectoriel complexe E. Nous dirons que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si et seulement s'il existe un entier naturel $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel m on ait*

$$\alpha_{m+N} = \alpha_N$$

2.1.2 Point double d'une équation de récurrence

Définition 2.1.2 *Considérons dans un espace vectoriel complexe E l'équation de récurrence*

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma \tag{2.1}$$

Nous dirons que $\lambda \in E$ est point double de cette équation de récurrence si et seulement si l'élément λ de E vérifie

$$\lambda = a\lambda + b\lambda + \gamma \Longleftrightarrow \lambda(1-a-b) = \gamma$$

Corollaire 2.1.3
1) Si $a+b=0$, alors γ est le seul point double de l'équation de récurrence (2.1).
2) Si $a+b$ est différent de 1, alors l'équation de récurrence (2.1) possède un unique point double $\lambda = \frac{\lambda}{1-a-b}$.
3) Si $a+b=1$ et $\gamma = 0$, alors tout élément de E est point double de l'équation de récurrence (2.1).
4) Si $a+b=1$ et $\gamma \neq 0$, alors l'équation de récurrence (2.1) ne possède aucun point double.

Caractérisation :

Le corollaire précédent montre pour que l'équation de récurrence (2.1) possède un point double, il faut et il suffit que l'on l'ait

$$a + b \neq 1 \in \mathbb{C} \; ou \; \gamma = 0 \in E$$

En particulier :
Lorsque $a + b$ est différent de 1, le point de double, unique est $\lambda = \frac{\gamma}{1-a-b}$.
Lorsque $a + b$ est égal à 1 et $\gamma = 0$, tout élément de E est un point double.

Point double et suite stationnaire.

Supposons que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel complexe E soit stationnaire et vérifie une équation de récurrence (2.1). Notons n le plus petit des entiers naturels $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel m, on ait

$$\alpha_{m+N} = \alpha_N$$

On a alors

$$\alpha_n = a\alpha_n + b\alpha_n + \gamma$$

Ce qui montre que α_n est point double de l'équation de récurrence (2.1). Mais alors de trois choses l'une :
Ou bien $n = 0$ et dans ce cas la suite est constante à partir de α_0 et vérifie $\alpha_m = \alpha_0$ pout tout entier naturel m, avec $\alpha_0(1 - a - b) = \gamma$ et $\alpha_1 = \alpha_0$.
Ou bien $n = 1$ et dans ce cas la suite est constante à partir de α_1 et vérifie $\alpha_m = \alpha_1$ pour tout entier naturel $m > 0$ avec $\alpha_1 = (1 - a - b) = \gamma$,et α_0 quelconque.

On a alors

$$\alpha_2 = \alpha_1 = a\alpha_1 + b\alpha_0 + \gamma$$

et

$$\alpha_3 = \alpha_1 = a\alpha_2 + b\alpha_1 + \gamma = a\alpha_1 + a\alpha_0 + \gamma$$

D'où par soustraction, on obtient

$$b(\alpha_1 - \alpha_0) = 0$$

et comme $\alpha_1 - \alpha_0 \neq 0$, alors $b = 0$.
La relation

$$\alpha_1(1 - a - b) = \gamma$$

se réduit à

$$\alpha_1(1-a)=\gamma$$

Ou bien n est supérieur ou égale à 2 et dans ce cas on peut écrire

$$\alpha_{n+1}=a\alpha_n+b\alpha_n+\gamma$$

$$\alpha_n=a\alpha_n+b\alpha_n+\gamma$$

Soit par soustraction

$$\alpha_{n+1}-\alpha_n=b\left(\alpha_{n-1}-\alpha_n\right)$$

Or la suite est stationnaire à partir d'un $n>0$, donc $\alpha_{n+1}-\alpha_n=0$, et n est le plus petit entier à partir duquel la suite est stationnaire, de sorte que $\alpha_{n+1}-\alpha_n$ est différent de 0, c'est donc que $b=0$.

Alors

$$\alpha_n=a\alpha_n+\gamma$$

Parce que la suite est stationnaire à partir de n, et que $b=0$.
D'après l'équation de récurrence (2.1) avec $b=0$, et $n>1$, on a

$$\alpha_n=a\alpha_{n-1}+\gamma$$

Soit par soustraction

$$a(\alpha_{n-1}-\alpha_n)=0$$

et comme $\alpha_{n+1}-\alpha_n\neq 0$, c'est que $a=0$.

L'équation de récurrence (2.1) se réduit donc à

$$\alpha_m=\gamma,\forall m\geq 2$$

c'est un cas trivial.

En conclusion la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par l'équation de récurrence $\alpha_{n+2}=a\alpha_{n+1}+b\alpha_n+\gamma$ et les valeurs de α_0 et α_1, ne peut être stationnaire que dans trois cas :

cas 1 **:** $a=b=0$, la suite est stationnaire à partir de $n=2$.

cas 2 **:** $b=0$ et $\alpha_1\left(1-a\right)=\gamma$, la suite est stationnaire à partir de $n=1$.

cas 3 **:** $\alpha_0(1-a-b)=\gamma$ et $\alpha_1=\alpha_0$, la suite est stationnaire à partir de $n=0$

2.1.3 Propriété

Supposons que l'équation de récurrence (2.1) possède un point double λ, unique ou pas. Dans ce cas, les relations

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} &= a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma \\ \lambda &= a\lambda + b\lambda + \gamma \end{aligned}$$

Donnent par soustraction

$$(\alpha_{n+2} - \lambda) = a\,(\alpha_{n+1} - \lambda) + b(\alpha_n - \lambda)$$

En posant $\alpha' = \alpha_n - \lambda$, cette relation devient

$$\alpha'_{n+2} = a\alpha'_{n+1} + b\alpha'_n \tag{2.2}$$

Comme α_n est donné, en fonction de α'_n, par la relation $\alpha_n = \alpha'_n + \lambda$, la résolution de l'équation de récurrence (2.1) est ramenée, lorsqu'il existe un point double λ, à la résolution de l'équation de récurrence (2.2).

Proposition 2.1.4 *La résolution dans un espace vectoriel complexe E, de l'équation de récurrence*

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma$$

sa ramène toujours à la résolution, dans E, d'une équation de récurrence

$$\alpha'_{n+2} = a\alpha'_{n+1} + b\alpha'_n \tag{2.3}$$

Preuve.
On sait déjà d'après (2.1.3) que la propriété est vraie déjà lorsque l'équation de récurrence (2.1) possède un point double λ, c'est à dire lorsque $a + b$ est différent de $1 \in \mathbb{C}$, ou que γ est égal à $0 \in E$ (2.1.2). Il suffit de poser

$$\alpha' = \alpha_n - \lambda$$

De façon plus générale pour $a + b$ quelconque (y compris, en particulier pour $a + b = 1$), on peut poser

$$\forall n \in \mathbb{N} : \alpha'_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\alpha'_{n+2} &= \alpha_{n+3}-\alpha_{n+2}= \\ &= (a\alpha_{n+2}+b\alpha_{n+1}+\gamma)-(a\alpha_{n+1}+b\alpha_n+\gamma)=a(\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1})+b(\alpha_{n+1}-\alpha_n)=a\alpha'_{n+1}+b\alpha'_n\end{aligned}$$

et α'_n vérifie la formule (2.3) pour $a+b$ quelconque (y compris, pour $a+b=1$).

Réciproquement, si l'on sait résoudre l'équation de récurrence (2.3), c'est à dire si l'on connaît α'_n pour tout $n\in\mathbb{N}$, la formule

$$\forall n\in\mathbb{N}:\alpha'_n=\alpha_{n+1}-\alpha_n$$

Donne par addition

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\alpha_n=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha'_k$$

de sorte que l'on connaît α_n, pour tout $n\in\mathbb{N}$. ■

2.2 Réduction à la résolution dans $\mathbb{C}$

Proposition 2.2.1

Si $P_n(a,b)$ est solution, dans $\mathbb{C}$ de l'équation de récurrence

$$P_{n+2}=aP_{n+1}(a,b)+bP_n(a,b) \tag{2.4}$$

avec $P_0(a,b)=0$ et $P_1(a,b)=1$. Alors la solution dans E de l'équation de récurrence

$$\alpha'_n=a\alpha'_{n+1}+b\alpha'_n$$

est donnée par

$$\alpha'_n=P_n(a,b)\,\alpha'_1+bP_{n-1}(a,b)\,\alpha'_0 \tag{2.5}$$

Pour tout entier naturel $n\geq 1$.

Preuve.

1) Pour $n=1$, la formule (2.5) est triviale. Elle se réduit,en effet, à

$$\alpha'_1=P_1(a,b)\,\alpha'_1+bP_0(a,b)\,\alpha'_0$$

Soit,avec $P_0(a,b)=0$ et $P_1(a,b)$, alors

$$\alpha'_1=\alpha'_1$$

Ce qui est une tautologie.
2) La formule (2.5) est vérifiée pour $n = 2$. En effet :
Pour $n = 2$, la formule (2.5) s'écrit

$$\alpha\prime_2 = P_2(a,b)\,\alpha'_1 + bP_1(a,b)\,\alpha'_0 \tag{2.6}$$

Or $P_2(a,b)$ est donné par la formule (2.4) avec $n = 0$, alors

$$P_2(a,b) = aP_1(a,b) + bP_0(a,b)$$

Qui se réduit ici, avec $P_0(a,b) = 0$ et $P_1(a,b) = 1$, à

$$P_2(a;b) = a$$

La formule (2.6) est donc équivalente à la formule

$$\alpha'_2 = a\alpha'_1 + b\alpha'_0$$

Cette formule est vraie, par hypothèse, puisque c'est l'équation (2.3) pour $n = 0$.
3) Si la formule (2.5) est vraie pour tout entier m vérifiant $1 \leq m \leq n$, pour un entier n supérieur ou égal à 2, alors la formule (2.5) est vraie pour tout entier m vérifiant $1 \leq m \leq n+1$. En effet :

Supposons que la formule

$$\alpha'_m = P_m(a,b)\,\alpha'_1 + bP_{m-1}(a,b)\,\alpha'_0$$

Soit vraie depuis $m = 1$, jusqu'à $m = n \geq 2$.
Par définition, α'_{n+1} est donné par la relation

$$\alpha'_{n+1} = a\alpha'_n + b\alpha'_{n-1}$$

La formule

$$\alpha'_m = P_m(a,b)\,\alpha'_1 + bP_{m-1}(a,b)\,\alpha'_0$$

Valable pour $m = n$ et pour $m = n-1$,entraine alors

$$\begin{aligned}
\alpha'_{n+1} &= a\left(P_n(a,b)\,\alpha'_1 + bP_{n-1}(a,b)\,\alpha'_0\right) + b\left(P_{n-1}(a,b)\,\alpha'_1 + bP_{n-2}(a,b)\,\alpha'_0\right) \\
&= \left(aP_n(a,b) + bP_{n-1}(a,b)\right)\alpha'_1 + b\left(aP_{n-1}(a,b) + bP_{n-2}(a,b)\right)\alpha'_0 \\
&= P_{n+1}(a,b)\,\alpha'_1 + bP_n(a,b)\,\alpha'_0
\end{aligned}$$

La formule

$$\alpha'_m = aP_m(a,b)\,\alpha'_1 + bP_{m-1}(a,b)\,\alpha'_0$$

est donc établie pour $m = n+1$. Elle est donc vraie pour tout entier de 1 à $n+1$, dés qu'elle vraie pour tout entier de 1 à n.

D'après le principe de récurrence, comme elle est vraie pour $n = 1$, la proposition est donc vraie pour toute valeur entière n supérieure ou égale à 1. ■

Remarque 2.2.2 *Les propositions* (2.1.4) *et* (2.2.1) *ramènent la résolution, dans E, de l'équation*

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma \tag{1}$$

à la résolution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation

$$P_{n+2}(a,b) = aP_{n+1}(a,b) + bP_n(a,b) \tag{3}$$

La résolution de cette équation (3) *est un petit problème classique dont nous allons rappeler la solution.*

2.3 Expression irrationnelle de la solution P_n dans $\mathbb{C}$

Proposition 2.3.1 *Soient x_1 et x_2 les racines dans $\mathbb{C}$, du polynôme $X^2 - aX - b \in \mathbb{C}[X]$ où $a = x_1 + x_2$ et $b = -x_1x_2$. Alors la solution dans $\mathbb{C}$, de l'équation de récurrence*

$$P_{n+2}(a,b) = aP_{n+1}(a,b) + bP_n(a,b) \tag{3}$$

définie par $P_0(a,b) = 0$ et $P_1(a,b) = 1$ est donnée, pour $n \geq 2$, par

$$P_n(a,b) = \begin{cases} 0, \text{ si } x_1 = x_2 = 0, \ (a = b = 0) \\ nx_1^{n-1} = n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}, \text{ si } x_1 = x_2 \neq 0, \ (a^2+4b = 0, \ a \neq 0) \\ \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n}{\sqrt{a^2+4b}}, \text{ si } x_1 \neq x_2, \ (a^2+4b \neq 0) \end{cases}$$

En désignant, lorsque a^2+4b est négatif, par $\sqrt{a^2+4b}$, le nombre complexe $i\sqrt{-(a^2+4b)}$, dont la partie réelle est nulle et dont la partie imaginaire est un nombre réel strictement plus grand que 0*.*

Preuve.

1) **Pour** $a = b = 0$.

On a l'équation de récurrence se réduit à $P_{n+2}(a,b) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sa solution est $P_n(a;,b) = 0$, pour $n \geq 2$.

2) **Pour** $a^2 + 4b \neq 0$.

On a le polynôme $X^2 - aX - b$ possède deux racines distinctes que nous désignerons par

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+4b}\right) \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2+4b}\right) \end{aligned}$$

En désignant, lorsque a^2+4b est négatif, par $\sqrt{a^2+4b}$, le nombre complexe $i\sqrt{-(a^2+4b)}$, dont la partie réelle est nulle et dont la partie imaginaire est un nombre réel strictement plus grand que 0.

La différence des deux solutions est

$$x_1 - x_2 = \sqrt{a^2+4b} \neq 0$$

Les deux solutions x_1 et x_2 vérifiant, par définition, les relations

$$\begin{aligned} x_1^2 &= ax_1 + b \\ x_2^2 &= ax_2 + b \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de la première relation par x_1^n, les deux membres de la deuxième relation par x_2^n, il vient

$$\begin{aligned} x_1^{n+2} &= ax_1^{n+1} + bx_1^n \\ x_2^{n+2} &= ax_2^{n+1} + bx_2^n \end{aligned}$$

Par soustraction membre à membre de ces relations,on obtient

$$x_1^{n+2} - x_2^{n+2} = a\left(x_1^{n+1} - x_2^{n+1}\right) + b\left(x_1^n - x_2^n\right)$$

Et par division par $x_1 - x_2$, qui est différent de 0, on trouve

$$\frac{x_1^{n+2} - x_2^{n+2}}{x_1 - x_2} = a\frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2} + b\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$$

Avec

$$\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \begin{cases} 0, \text{ si } n = 0 \\ 1, \text{ si } n = 1 \end{cases}$$

La relation

$$\frac{x_1^{n+2}-x_2^{n+2}}{x_1-x_2}=a\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}+b\frac{x_1^{n}-x_2^{n}}{x_1-x_2}$$

Avec

$$\frac{x_1^{n}-x_2^{n}}{x_1-x_2}=\begin{cases}0,\text{ si } n=0\\1,\text{ si } n=1\end{cases}$$

Montre que les nombres complexes $\frac{x_1^{n}-x_2^{n}}{x_1-x_2}$ sont les solutions de l'équation de récurrence

$$P_{n+2}(a,b)=aP_{n+1}(a,b)+bP_n(a,b) \tag{3}$$

Correspondant à $P_0(a,b)=0$ et $P_1(a,b)=1$.

Donc dans le cas $x_1-x_2=\sqrt{a^2+4b}\neq 0$, on a

$$P_n(a,b)=\frac{x_1^{n}-x_2^{n}}{x_1-x_2}=\frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n-\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n}{\sqrt{a^2+4b}}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3) **Pour $a^2+4b=0$, $a\neq 0$.**

Considérons la fonction numérique $z\mapsto y=z^n$, n entier supérieur ou égal à 1. C'est une fonction holomorphe de z. Sa dérivée en $z_2=\frac{a}{2}$, est la limite du rapport $\frac{z_1^n-z_2^n}{z_1-z_2}$, lorsque z_1 tend vers z_2.

On voit donc que, lorsque la différence $x_1-x_2=\sqrt{a^2+4b}$ tend vers 0 dans $\mathbb{C}$, x_1 et x_2 tendent tous les deux vers $\frac{a}{2}$ et le rapport $\frac{x_1^{n}-x_2^{n}}{x_1-x_2}$ tend vers la dérivée $n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}$ de la fonction numérique $y=z^n$ en $z=\frac{a}{2}$. Or la formule de récurrence

$$P_{n+2}(a,b)=aP_{n+1}(a,b)+bP_n(a,b)$$

Avec $P_0(a,b)=0$ et $P_1(a,b)=1$, montre clairement, par récurrence, que les fonction $P_n(a,b)$ sont des polynômes des variables a et b, ce sont donc des application de classe C^∞ sur $\mathbb{C}^2$ (c'est -à-dire indéfiniment dérivables).

Les application partielles $a\longmapsto P_n(a,b)$ et $b\longmapsto P_n(a,b)$ sont donc, elles aussi, de classe C^∞ sur $\mathbb{C}$. Par continuité, on a donc

$$P_n(a,b)=\lim_{x_1-x_2\longrightarrow 0}\frac{x_1^{n}-x_2^{n}}{x_1-x_2}=n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}$$

Lorsque a^2+4b est égal à 0.

Le seul cas à problème serait le cas où $a=0$ et $n=1$ car il y a indétermination de la forme 0°, mais ce cas, qui correspond à $a=b=0$, a été étudié précédemment dans 1). ■

Remarque 2.3.2 *On peut montrer le résultat par récurrence sur n suivant*

$$P_n(a,b) = n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}$$

Lorsque a^2+4b *est égal à* 0 *avec* $a \neq 0$*.*

Preuve.
1) Pour $n=0$, on a $P_0(a,b)=0$ et $0\left(\frac{a}{2}\right)^{0-1}=0$. Donc l'égalité est vraie.
2) Pour $n=0$, on a $P_1(a,b)=1$ et $1.\left(\frac{a}{2}\right)^{1-1}=1$. Donc l'égalité est vraie.
3) Supposons que l'égalité est vraie pour n et montrons quelle est vraie pour $n+1$.
On a

$$P_{n+1}(a,b) = aP_n(a,b) + bP_{n-1}(a,b)$$

et

$$\begin{cases} a = x_1 + x_2 \\ b = -x_1x_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Longrightarrow b = \frac{-a^2}{4}$$

Alors

$$\begin{aligned} P_{n+1}(a,b) &= an\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} + b(n-1)\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2} = an\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} + \frac{-a^2}{4}(n-1)\left(\frac{a}{2}\right)^{n-2} \\ &= an\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} - (n-1)\left(\frac{a}{2}\right)^{n} = \left(\frac{a}{2}\right)^{n}\left(1-n+an.\frac{2}{a}\right) = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^{n} \end{aligned}$$

Donc l'égalité est vraie. ∎

2.4 Somme S_n des solutions P_k, k variant de 0 à n

Proposition 2.4.1
Soit $P_n(a,b)$ *la solution dans* $\mathbb{C}$*, de l'équation récurrence*

$$P_{n+2}(a,b) = aP_{n+1}(a,b) + bP_n(a,b) \tag{3}$$

définie par $P_0(a,b)=0$ *et* $P_1(a,b)=1$*. La somme*

$$S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} P_k(a,b)$$

est donnée, pour tout entier $n \geq 0$ *par*

$$S_n(a;b) = \begin{cases} \frac{1}{1-a-b}\left(1 - P_{n+1}(a,b) - bP_n(a,b)\right), \ si\ a+b \neq 1 \\ \frac{1}{1+b}\left(n+1 - P_{n+1}(a,b)\right), \ si\ a+b=1\ et\ b \neq -1 \\ \frac{n(n+1)}{2}, si\ a=2\ et\ b=-1 \end{cases}$$

Preuve.

1) **Pour** $a+b \neq 1$:

Quels que soient les nombres complexes a et b, en faisant la somme, membre à membre, des relation, on obtient

$$P_k(a,b) = aP_{k-1}(a,b) + bP_{k-2}(a,b)$$

Pour k variant de 2 à $n+1$, n étant un entier supérieur ou égal à 1, on obtient la relation

$$\sum_{k=2}^{n+1} P_k(a,b) = a\sum_{k=2}^{n+1} P_{k-1}(a,b) + b\sum_{k=2}^{n+1} P_{k-2}(a,b)$$

Le premier membre peut être écrit

$$\sum_{k=2}^{n+1} P_k(a,b) = P_{n+1}(a,b) + \sum_{k=0}^{n} P_k(a,b) - P_0(a,b) - P_1(a,b) = P_{n+1}(a,b) + S_n(a,b) - P_0(a,b) - P_1(a,b)$$

et les sommes du deuxième membre s'écrivent

$$\sum_{k=2}^{n+1} P_{k-1}(a,b) = \sum_{k=0}^{n} P_k(a,b) = \sum_{k=0}^{n} P_k(a,b) - P_0(a,b) = S_n(a,b) - P_0(a,b)$$

et

$$\sum_{k=2}^{n+1} P_{k-2}(a,b) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(a,b) = \sum_{k=0}^{n} P_k(a,b) - P_n(a,b) = S_n(a,b) - P_n(a,b)$$

Si bien que la relation devient

$$P_{n+1}(a,b) + S_n(a,b) - P_0(a,b) - P_1(a,b) = a\left(S_n(a,b) - P_0(a,b)\right) + b\left(S_n(a,b) - P_n(a, 1-a-b\right) S_n(a,b$$

$$= (1-a)P_0(a,b) + P_1(a,b) - P_{n+1}(a,b) - bP_n(a,b)$$

Soit, avec $P_0(a,b) = 0$ et $P_1(a,b) = 1$. On trouve

$$(1-a-b)S_n(a,b) = 1 - P_{n+1}(a,b) - bP_n(a,b), n \geq 1$$

Cette formule, établie pour $n \geq 1$, est encore vraie pour $n = 0$, car elle se réduit alors à

$$(1 - a - b) S_0 (a, b) = 1 - P_1 (a, b) - bP_0 (a, b) = 1 - 1 - b \times 0 = 0$$

Cette formule est vraie puisque, par définition

$$\begin{aligned} S_0 (a, b) &= \sum_{k=0}^{0} P_k (a, b) = P_0 (a, b) \\ &= 0. (1 - a - b) S_n (a, b) = 1 - P_{n+1} (a, b) - bP_n (a, b), \forall a \in \mathbb{C}, \forall b \in \mathbb{C}, \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

Pour $a + b \neq 1$, on peut diviser par $(1 - a - b)$ et écrire

$$S_n (a, b) = \frac{1}{1 - a - b} (1 - P_{n+1} (a, b) - bP_n (a, b))$$

2) **Pour** $a + b = 1$ **et** $b \neq -1$:
La formule

$$(1 - a - b) S_n (a, b) = 1 - P_{n+1} (a, b) - bP_n (a, b)$$

Valable pour $n \geq 0$, se réduit pour $a + b = 1$ à

$$P_{n+1} (a, b) + bP_n (a, b) = 1$$

On en déduit immédiatement, par addition

$$\sum_{k=1}^{n+1} P_k (a, b) + b \sum_{k=1}^{n+1} P_{k-1} (a, b) = \sum_{k=1}^{n+1} 1 = n + 1$$

Qui s'écrit aussi

$$P_{n+1} (a, b) + \sum_{k=1}^{n} P_k (a, b) + b \sum_{k=1}^{n} P_k (a, b) = n + 1$$

Comme $P_0(a, b) = 0$, cette formule est équivalente à

$$P_{n+1} (a, b) + \sum_{k=0}^{n} P_k (a, b) + b \sum_{k=0}^{n} P_k (a, b) = n + 1$$

On obtient

$$(1 + b) S_n (a, b) = n + 1 - P_{n+1} (a, b)$$

Alors

$$(1+b)\,S_n\,(a=1-b,b) = n+1-P_{n+1}\,(1-b,b)\,, \forall b \in \mathbb{C}, \forall n \geq 0$$

Dans le cas où b est différent de -1, on peut diviser par $1+b$ et écrire

$$S_n\,(a,b) = \frac{1}{1+b}\,(n+1-P_{n+1}\,(a,b))\,.$$

Cette formule a été établie pour $n \geq 0$.
2) **Pour** $a=2$ **et** $b=-1$:
On a, dans ce cas $a+b=1$ et $b=-1$, et la formule

$$(1+b)\,S_n\,(a,b) = n+1-P_{n+1}\,(a,b)$$

Valable pour $n \geq 0$ se réduit à

$$P_{n+1}\,(a,b) = n+1$$

Comme $P_0\,(a,b)=0$, il vient

$$P_n\,(a,b) = n, \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$P_n\,(2,-1) = n, \forall n \geq 0$$

On en déduit, par addition pour $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} P_k\,(a,b) = \sum_{k=0}^{n} k$$

Or, par définition

$$\sum_{k=0}^{n} P_k\,(a,b) = S_n\,(a,b)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

On obtient donc la relation

$$S_n\,(a,b) = S_n\,(2,-1) = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Valable pour $n \geq 0$. Et ceci achève la démonstration de la proposition (2.4.1). ■

Corollaire 2.4.2 *Les $S_n\,(a,b)$ vérifient une relation de récurrence analogue à la relation* *de définition des $P_n(a,b)$.*

$$\begin{cases} S_0(a,b) = 0, S_1(a,b) = 1 \\ \forall n \geq 0 : S_{n+2}(a,b) = aS_{n+1}(a,b) + bS_n(a,b) + 1 \end{cases}$$

Preuve. On a

$$P_n(a,b) = S_n(a,b) + S_{n-1}(a,b)$$

La relation

$$P_{n+2}(a,b) = aP_{n+1}(a,b) + bP_n(a,b)$$

S'écrit alors

$$S_{n+2}(a,b) - S_{n+1}(a,b) = a(S_{n+1}(a,b) - S_n(a,b)) + b(S_n(a,b) - S_{n-1}(a,b))$$

$$\Longrightarrow S_{n+2}(a,b) - aS_{n+1}(a,b) - bS_n(a,b) = S_{n+1}(a,b) - aS_n(a,b) - bS_{n-1}(a,b)$$

Cette relation montre, par une récurrence immédiate, que l'on a, pour tout $n \geq 1$

$$S_{n+2}(a,b) - aS_{n+1}(a,b) - bS_n(a,b) = S_2(a,b) - aS_1(a,b) - bS_0(a,b)$$

Cette relation reste trivialement vraie pour $n = 0$.
Or

$$\begin{cases} S_0(a,b) = P_0(a,b) = 0 \\ S_1(a,b) = S_0(a,b) + P_1(a,b) = 1 \\ P_1(a,b) = S_1(a,b) + P_2(a,b) = 1 + aP_1(a,b) + bP_0(a,b) = 1 + a \end{cases}$$

Donc

$$S_2(a,b) - aS_1(a,b) - bS_0(a,b) = (1+a) - a = 1$$

et les $S_n(a,b)$ vérifient la relation de récurrence

$$S_{n+2}(a,b) - aS_{n+1}(a,b) - bS_n(a,b) = 1$$

On obtient

$$\begin{cases} S_0(a,b) = 0, S_1(a,b) = 1 \\ \forall n \geq 0 : S_{n+2}(a,b) = aS_{n+1}(a,b) + bS_n(a,b) + 1 \end{cases}$$

■

2.5 Solution en fonction de P_n et S_n

Proposition 2.5.1
La solution dans E, de l'équation de récurrence

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma \tag{1}$$

est donnée par

$$\forall n \geq 1 : \alpha_n = P_n(a,b)\,\alpha_1 + bP_{n-1}(a,b)\,\alpha_0 + S_n(a,b)\,\gamma$$

Avec

$$\begin{cases} P_0(a,b) = 0, P_1(a,b) = 1 \\ \forall n \geq 0 : P_{n+2}(a;b) = aP_{n+1}(a;b) + bP_n(a;b) \end{cases}$$

et

$$\forall n \geq 0 : S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{k=n} P_k(a,b)$$

Preuve. La proposition (2.1.4) montre que la variable

$$\alpha'_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$$

vérifie la relation

$$\alpha_{n+2} = a\alpha'_{n+1} + b\alpha'_n \tag{2}$$

La proposition (2.2.1) donne pour $n \geq 0$ la solution

$$\alpha'_n = P_n(a,b)\,\alpha'_1 + bP_{n+1}(a,b)\,\alpha'_0 \tag{4}$$

On en déduit, par addition

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha'_k = \sum_{k=1}^{n-1} P_k(a,b)\,\alpha'_1 + b\sum_{k=1}^{n-1} P_{k-1}(a,b)\,\alpha'_0$$

Alors

$$\begin{aligned} \alpha'_n - \alpha'_1 &= S_{n-1}(a,b)(\alpha_2 - \alpha_1) + b\left(S_{n-1}(a,b) - P_{n-1}(a,b)\right)(\alpha_1 - \alpha_0) \\ &= S_{n-1}(a\alpha_1 - b\alpha_0 + \gamma - \alpha_1) + b\left(S_{n-1}(a,b) - P_{n-1}(a,b)\right)(\alpha_1 - \alpha_0) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_n = [1 + aS_{n-1}(a,b) - S_{n-1}(a,b) + bS_{n-1}(a,b) - bP_{n-1}(a,b)]\,\alpha_1 + \\ + [bS_{n-1}(a,b) - bS_{n-1}(a,b) + bP_{n-1}(a,b)]\,\alpha_0 + S_{n-1}(a,b)\,\gamma$$

$$\Longrightarrow \alpha_n = [1 - bP_{n-1}(a,b) - (1-a-b)\,S_{n-1}(a,b)]\,\alpha_1 + bP_{n-1}(a,b)\,\alpha_0 + S_{n-1}(a,b)\,\gamma$$

Or nous avons vu, dans la démonstration de la proposition (2.4.1), la relation

$$(1-a-b)\,S_n(a,b) = 1 - P_{n+1}(a,b) - bP_n(a,b)\,, \forall a \in \mathbb{C}, \forall b \in \mathbb{C}, \forall n \geq 0$$

Nous pouvons écrire cette formule pour $n \geq 1$ sous la forme

$$(1-a-b)\,S_{n-1}(a,b) = 1 - P_n(a,b) - bP_{n-1}(a,b)\,, \forall a \in \mathbb{C}, \forall b \in \mathbb{C}, \forall n \geq 1$$

Nous obtenons donc

$$\alpha_n = [1 - bP_{n-1}(a,b) - 1 + P_n(a,b) + bP_{n-1}(a,b)]\,\alpha_1 + bP_{n-1}(a,b)\,\alpha_0 + S_{n-1}(a,b)\,\gamma$$

Alors

$$\alpha_n = P_n(a,b)\,\alpha_1 + bP_{n-1}(a,b)\,\alpha_0 + S_{n-1}(a,b)\,\gamma$$

C'est la formule qu'il fallait établir. ■

Il ne reste plus qu'à exprimer les $P_n(a,b)$ et $S_n(a,b)$ en fonction de a et b pour avoir les solutions α_n en fonction de a et b. C'est ce qui va être fait dans la proposition (2.6.1).

2.6 Solution en fonction de P_n

Proposition 2.6.1 *La solution dans E, de l'équation de récurrence*

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma \tag{1}$$

est donnée pour $n \geq 1$ par

$$\alpha_n = \begin{cases} P_n(a,b)\left(\alpha_1 - \frac{\gamma}{1-a-b}\right) + bP_{n-1}(a,b)\left(\alpha_0 - \frac{\gamma}{1-a-b}\right) + \frac{\gamma}{1-a-b},\ si\ a+b \neq 1 \\ P_n(a,b)\left(\alpha_1 - \frac{\gamma}{1+b}\right) + bP_{n-1}(a,b)\alpha_0 + \frac{n\gamma}{1+b},\ si\ a+b = 1\ \ et\ b \neq -1 \\ n\alpha_1 - (n-1)\,\alpha_0 + \frac{(n-1)n}{2}\gamma, si\ a = 2\ \ et\ b = -1 \end{cases}$$

Avec $P_0(a,b)=0,\ P_1(a,b)=1.$
Où pour $n\geq 2$

$$P_n(a,b)=\begin{cases}0,\ si\ a=b=0\\ n\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1},\ si\ \ a^2+4b=0\ \ et\ a\neq 0\\ \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n-\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n}{\sqrt{a^2+4b}},\ si\ \ a^2+4b\neq 0\end{cases}$$

Preuve.
La proposition (2.5.1) donne, pour $n\geq 1$

$$\alpha_n=P_n(a;b)\,\alpha_1+bP_{n-1}(a;b)\,\alpha_0+S_{n-1}(a;b)\,\gamma$$

La proposition (2.4.1) donne, pour $n\geq 0$

$$S_n(a,b)=\begin{cases}\frac{1}{1-a-b}\left(1-P_{n+1}(a,b)-bP_n(a,b)\right),\ \text{si}\ \ a+b\neq 1\\ \frac{1}{1+b}\left(n+1-P_{n+1}(a,b)\right),\ \text{si}\ \ a+b=1\ \text{et}\ b\neq -1\\ \frac{n(n+1)}{2},\ \text{si}\ \ a=2\ \ \text{et}\ \ b=-1\end{cases}$$

On obtient

$$S_{n-1}(a,b)=\begin{cases}\frac{1}{1-a-b}\left(1-P_n(a,b)-bP_{n-1}(a,b)\right),\ \text{si}\ \ a+b\neq 1\\ \frac{1}{1+b}\left(n-P_n(a,b)\right),\ \text{si}\ \ a+b=1\ \text{et}\ b\neq -1\\ \frac{(n-1)n}{2},\ \text{si}\ \ a=2\ \text{et}\ b=-1\end{cases}$$

En combinant ces deux résultats, on peut donc écrire

$$\alpha_n=\begin{cases}P_n(a,b)\left(\alpha_1-\frac{\gamma}{1-a-b}\right)+bP_{n-1}(a,b)\left(\alpha_0-\frac{\gamma}{1-a-b}\right)+\frac{\gamma}{1-a-b},\ \text{si}\ a+b\neq 1\\ P_n(a,b)\left(\alpha_1-\frac{\gamma}{1+b}\right)+bP_{n-1}(a,b)\,\alpha_0+\frac{n\gamma}{1+b},\ \text{si}\ a+b=1\ \text{et}\ b\neq -1\\ n\alpha_1-(n-1)\,\alpha_0+\frac{(n-1)n}{2}\gamma,\ \text{si}\ a=2\ \text{et}\ b=-1\end{cases}$$

Rappelons que la proposition (2.3.1), pour $n\geq 2$, lorsque

$$\begin{cases}P_0(a,b)=0,P_1(a,b)=1\\ P_{n+2}(a,b)=aP_{n+1}(a,b)+bP_n(a,b)\end{cases}$$

Donne

$$P_n(a,b)=\begin{cases}0,\ \text{si}\ a=b=0\\ n\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1},\ \text{si}\ \ a^2+4b=0\ \text{et}\ a\neq 0\\ \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n-\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n}{\sqrt{a^2+4b}},\ \text{si}\ \ a^2+4b\neq 0\end{cases}$$

En particulier $P_n(2,-1) = n$.
Dans les autres cas, on vérifiera facilement qu'il en est de même.

Exemple 2.6.2
La solution de l'équation de récurrence

$$S_{n+2}(a,b) = aS_{n+1}(a,b) + bS_n(a,b) + 1$$

Donnée par la proposition (2.6.1)*, avec* $S_0(a,b) = 0$ *et* $S_1(a,b) = 1$ *est :*
Pour $a + b \neq 1$ *:*

$$\begin{aligned} S_n(a,b) &= P_n(a,b)\left(1 - \frac{1}{1-a-b}\right) + bP_{n-1}(a,b)\left(0 - \frac{1}{1-a-b}\right) + \frac{1}{1-a-b} \\ &= P_n(a,b) + \frac{1}{1-a-b}\left(1 - P_n(a,b) - bP_{n-1}(a,b)\right) \\ &= \frac{1}{1-a-b}\left(1 - P_n(a,b) - bP_{n-1}(a,b) + P_n(a,b) - aP_n(a,b) - bP_n(a,b)\right) \\ &= \frac{1}{1-a-b}\left(1 - bP_{n-1}(a,b) - aP_n(a,b) - bP_n(a,b)\right) \end{aligned}$$

Or

$$P_{n+1}(a,b) = aP_n(a,b) + bP_{n-1}(a,b)$$

Donc

$$S_n(a,b) = \frac{1}{1-a-b}\left(1 - P_{n+1}(a,b) - bP_n(a,b)\right)$$

On retrouve le résultat de la proposition (2.4.1)*.*
Dans les autres cas, on vérifiera facilement qu'il en est de même.

■

Pour terminer ce chapitre, il nous reste à préciser le cas particulier où l'équation de récurrence (1) admet un point double, ce qui simplifie les calculs, et à donner un exemple d'application.

2.7 Simplification en cas de point double

Proposition 2.7.1
Si λ *est un point double de l'équation de récurrence*

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma$$

La solution de l'équation est donnée, pour $n \geq 1$, par

$$(\alpha_n - \lambda) = P_n(a,b)(\alpha_1 - \lambda) + bP_{n-1}(a,b)(\alpha_0 - \lambda)$$

Preuve.
Un point double λ de l'équation de récurrence

$$\alpha_{n+2} = a\alpha_{n+1} + b\alpha_n + \gamma \tag{2.7}$$

est par définition une solution de l'équation

$$\lambda = a\lambda + b\lambda + \gamma$$

Par soustraction membre à membre avec la relation (2.7), il vient

$$(\alpha_{n+2} - \lambda) = a(\alpha_{n+1} - \lambda) + b(\alpha_n - \lambda)$$

et la proposition (2.5.1) donne, pour $\gamma = 0$ la solution de cette équation

$$(\alpha_n - \lambda) = P_n(a,b)(\alpha_1 - \lambda) + bP_{n-1}(a,b)(\alpha_0 - \lambda)$$

■

Remarque 2.7.2 *(Existence d'un point double)*
Le problème est alors de savoir quand existe un point double, nous avons vu (2.1.2) que pour que l'équation de récurrence (2.7) possède un point double il faut et il suffit que l'on ait

$$a + b \neq 1 \in \mathbb{C} \ ou\ \gamma = 0 \in E$$

Lorsque $a + b \neq 1$, alors le point double unique est $\lambda = \frac{\gamma}{1-a-b}$ et

$$\alpha_n = P_n(a,b)\alpha_1 + bP_{n-1}(a,b)\alpha_0 + \frac{1}{1-a-b}(1 - P_n(a,b) - bP_{n-1}(a,b))\gamma$$

Lorsque $a + b = 1$*et* $\gamma = 0$, *alors tout élément de E est point double.*

2.8 Puissance n^e d'une matrice 2×2 de $M_2(\mathbb{C})$

Proposition 2.8.1
Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à éléments complexes. Soit I_2 la matrice unité. On pose $a = Tr(A)$ la trace de la matrice A, $b = -\det(A)$ l'opposé du déterminant de la

matrice A. Nous avons alors, pour tout entier naturel $n \geq 1$ la relation

$$A^n = P_n(a,b)\,A + bP_{n-1}(a,b)\,I_2$$

En particulier
1) *Si $b \neq 0$, alors*

$$A^n = a^{n-1}A$$

2) *Si $a^2 + 4b = 0$ et $b \neq 0$, alors*

$$A^n = n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} A - (n-1)\left(\frac{a}{2}\right)^{n} I_2$$

3) *Si $a = 2$ et $b = -1$, alors*

$$A^n = nA - (n-1)\,I_2$$

Preuve.

La démonstration repose sur le théorème de Hamilton-Cailey. La matrice A est solution de son équation caractéristique. Si $P(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice A (déterminant de la matrice $A - \lambda I$), alors

$$P(A) = 0$$

On sait que la somme des valeurs propres de A est la trace a de A et leur produit est le déterminant $-b$ de A. Comme A est une matrice d'ordre deux à élément complexes, son polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\,\lambda + \det(A)$$

Le théorème de Hamilton-Cailey s'exprime donc par

$$A^2 = Tr(A)\,A - Dét(A)\,I \Longleftrightarrow A^2 = aA + bI$$

En multipliant par A^n, il vient la relation de récurrence

$$A^{n+2} = aA^{n+1} + bA^n$$

La solution est alors donnée par la proposition (2.2.1)

$$A^n = P_n(a,b)\,A^1 + bP_{n-1}(a,b)\,A^0 \Longleftrightarrow A^n = P_n(a,b)\,A + bP_{n-1}(a,b)\,I_2$$

En particulier :
1) Pour $b = 0$ et $a \neq 0$, cas où A possède une valeur propre nulle et une valeur propre non nulle, la proposition (2.3.1) donne

$$P_n(a,b) = a^{n-1}$$

Donc

$$A^n = a^{n-1}A$$

Où a est la valeur propre non nulle.
2) Pour $a^2 + 4b = 0$ et $a \neq 0$, cas où A possède une valeur propre double et non nulle $\lambda = \frac{a}{2}$, la proposition (2.3.1) donne

$$P_n(a,b) = n\lambda^{n-1}$$

et

$$b = -\lambda^2$$

Alors le résultat

$$A^n = n\lambda^{n-1}A - \lambda^2(n-1)\,\lambda^{n-2}I_2 = n\lambda^{n-1}A - (n-1)\,\lambda^n I_2$$

Où λ est la valeur propre double non nulle.
3) Pour $a = 2$ et $b = -1$, la valeur propre double non nulle de A est $\lambda = 1$, le résultat précédent donne

$$A^n = nA - (n-1)\,I_2$$

Remarquons aussi que, dans ce cas nous avons (théorème de Hamilton-Cailey) :
$(A - I_2)^2 = 0$, 1 est valeur propre double de A et $A^n - I_2 = n(A - I_2)$. ■

Remarque 2.8.2
Plus généralement, si la matrice A possède deux valeurs propres distinctes, x_1 et x_2 la proposition (2.3.1) *donne*

$$P_n(a,b) = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}$$

Alors

$$A^n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}A - x_1x_2\frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{x_1 - x_2}I_2$$

Bibliographie

[1] Gérard Letac. *Cours d'algèbre linéaire, 2 ème année d'université*. Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier, 31062, Toulouse, France.
www.math.univ-toulouse.fr/~letac/deug105.pdf

[2] Guillaume Chauvet. *Algèbre linéaire Ensai*. 1er juillet 2010.
www.ensai.fr/userfiles/file/CHAUVET/cours0910.pdf

[3] Henri Immediato. *Quelques remarques sur les équations de récurrence.*
nte-serveur.univ-lion1.fr/nte/immediato/recurrence/table.html

[4] Hervé Hocquard. *Notions sur les équations de récurrence linéaire à coefficients constants*. Université de Bordeaux, France 27 Septembre 2013.
www.labri.fr/perso/hocquard/FilesMaster/recurrence.pdf

[5] S. Rossignol. *Equations récurrentes linéaires*. Université de Versailles-Saint-Quentin. Licence de sciences économiques Cours d'analyse des modèles dynamiques 2006/2007.
www.e-campus.uvsq.fr/claroline/backends/download.php ?