الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire de MILA

Nº Réf :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

En :-Filière Mathématique Fondamental

Thème

Variétés Invariantes

Préparé par : **Bouchelita Aziza**
Largueche Ayoub
Kacha Fares

Dirigé par : **Arroud Chems eddine** ***Grade :*** **M.A.A**

Année universitaire : 2013/2014

Remerciement

Grace à dieu qui a donné la patience, la Volonté, et la force pour réaliser ce modeste travail, nous remercions notre encadreur: Monsieur: ArroudChems Eddine et tous les enseignants qui nous éduqué tout le long de notre carrière universitaire et les enseignants de département de Mathématique qui ont contribuées a notre formation.

Dédicaces

Nous remercions dieu le tout puissant pour nous avoir offert la puissance et le courage de poursuivre nos études et nous a éclairé le chemin pour la réalisation de ce travail.

Je dédie ce modeste travail:

En premier lieu à mes très cher parents qui m'en soutenu tout au long de ma vie et ce travail le fruit de leur sacrifices.

A mes frères, mes sœurs chacun en son nom.

A toutes ma famille sans exceptions.

A tous mes amis surtout: Khadidja, Khawla, Safa, Sana,Dalila.

A mes enseignants et surtout notre encadreur Monsieur ARROUD CHEMS EDDINE.

Tous les personnelles du département de mathématique.

BOUCHELITA AZIZA

Dédicaces

Nous remercions dieu le tout puissant pour nous avoir offert la puissance et le courage de poursuivre nos études et nous a éclairé le chemin pour la réalisation de ce travail.

Je dédie ce modeste travail:

En premier lieu à mes très cher parents qui m'en soutenu tout au long de ma vie et ce travail le fruit de leur sacrifices.

A mes frères, mes sœurs chacun en son nom.

A toutes ma famille sans exceptions.

A tous mes amis surtout: Borhane, Hichem, Bilel,Tarek,Khiro,Ridha .

A mes enseignants et surtout notre encadreur Monsieur ARROUD CHEMS EDDINE.

Tous les personnelles du département de mathématique.

LARGUECHE AYOUB

Dédicaces

Nous remercions dieu le tout puissant pour nous avoir offert la puissance et le courage de poursuivre nos études et nous a éclairé le chemin pour la réalisation de ce travail.

Je dédie ce modeste travail:

En premier lieu à mes très cher parents qui m'en soutenu tout au long de ma vie et ce travail le fruit de leur sacrifices.

A mes frères, mes sœurs chacun en son nom.

A toutes ma famille sans exceptions.

A tous mes amis surtout: Abdelhak,Adam,Samir,Baker,Ridha.

A mes enseignants et surtout notre encadreur Monsieur ARROUD CHEMS EDDINE.

Tous les personnelles du département de mathématique.

KACHA FARES

Table des matières

Introduction Générale

Quand on étudie la stabilité d'un système dynamique nous examinons d'abord certains points dans le système si aucune des valeurs propres de la linéarité n'est à partie réelle nulle on peut facilement déduire les propriétés des stabilités du système non linéaire.

Les systèmes dynamiques sont développés et spécialises au cour du XIX^e siècle il concernait en premier lieu l'itération des applications continues et la stabilité des équations différentielles mais progressivement, au fur et mesure de la diversification des mathématique.

L'histoire des systèmes dynamiques modernes est relativement ressent. Elle commence avec Heneri Poincaré en (1854 - 1912) qui fut le premier à entreprendre l étude formule d'un système dynamique.

Les premiers résultats sont apparus avec Lyapunov à la fin du 19 siècle et au début de 20 siècle.

Il donne alors une condition nécessaire est suffisante de stabilité.

Dans ce mémoire, nous étudions variétés invariantes dans les systèmes dynamiques.

Le premier chapitre est un rappel des notions préliminaires sur les systèmes dynamiques.

Le deuxième chapitre nous énonçons les principales théories des variétés invariantes.

Le troisième nous donnons des exemples.

Chapitre 1

Notions préliminairs

1.1 Systéme dynamique

Définition 1.1.1 *Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état(ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance :*

- De son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant t_0.
- De sa loi d'évolution.

Un système peut être :

- ***à temps continu:*** Correspond au temps
- ***à temps discret:*** Les systèmes à temps discret seront aussi évoqués, quoique plus brièvement. Il faut noter que toute simulation numérique d'un système à temps continu implique une discrétisation du temps.

Il peut également être :

- ***autonome,*** si sa loi d'évolution ne dépend pas du temps (la loi est alors dite stationnaire) ;
- ***non autonome;*** sa loi d'évolution dépend alors du temps.

Par définit:

$$x' = f(x, \lambda)$$

.

Tq: $x \in \mathbb{R}^n$ une vecteur d'état.

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est appellé champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$.

1.2 Flot

Définition 1.2.1 *Soit $x(x_{0,t}), x_0 \in D$,une solution du systéme avec la condition intiale $x(0) = x_0$.*

On appelle flot du systéme, ou du vecteur f , l'application:

$$\begin{aligned} \phi_t &: D \to \mathbb{R}^n \\ \phi_t(x_0) &= x(x_0, t) \end{aligned}$$

Verifie:

- $\phi_t(x_0)$ est de classe C^r si f est de classe C^r.
- $\phi_0(x_0) = x_0$.
- $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$.
- ϕ_t est un semi-groupe.
- Une variété v est invariante sous l'action du flot si $\phi_t(v) = v$.

1.3 Point d'équilibre (point fixe)

Définition 1.3.1 *Consédére le systéme*

$\frac{dy}{dt} = Ay...(1)$.

telle que $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

Le systéme ce existe:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & & . \\ . & & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$y \in \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n$ lespace de phase.

Les points staifisant $Ay = 0$ sont appellés points d'équilibres. $Ay = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = 0$ alors les points d'équilibres corresponde aux solutions constantes.

On supose $\det A \neq 0$ de sortie l'origine $(0, 0)$ soit le seul point d'équilibre.

1.4 Stabilité

Définition 1.4.1 *Soit le systéme lineaire* (1) *et la mtrice A est une diagonalisable on ditigne plusiurs cas des valeurs propres de A :*

•Les valeurs propres de sont réel:

$\lambda_i > 0$ les points d'équilibres est instable.

$\lambda_i \leq 0$ les points d'équilibres est stable.

telleque $i = 1, ..., n$.

•Les valeurs propres sont (complexe) non réel:

$\lambda_i = \alpha \mp i\beta$ telleque:

$\alpha > 0$ les points d'équilibres est instable.

$\alpha < 0$ les points d'équilibres est asymptostable.

$\alpha = 0$ les points d'équilibres est centre.

1.5 Systéme non linéaires

Définition 1.5.1 *Dans le cas continue, un systéme dynamique peut être représenté par l'équation:*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad ...(2)$$

Où $x : I = [t_0, t_0 + h] \to \mathbb{R}^n$ et $f : D = I \times B \to \mathbb{R}^n$

Ou $B = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ telque } \|x - x_0\| \leq b\}$

Un systéme de la forme (2) est appelé systéme non autonome,il est dit autonome s'il s'écrit sous la forme:

$$x'(t) = f(x(t)); x(t_0) = x_0$$

Dans le cas discret un systéme dynamique non autonome s'écrit:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k)) \\ x(k_0) = x_0 \end{cases} \quad ...(3)$$

Un systéme discret autonome s'écrit sous la forme:

$$x(k+1) = f(x(k)), x(k_0) = x_0.$$

1.6 Linéarisation d'un systéme non linéaire

Définition 1.6.1 *Soit le systéme non linéaire suivant:*

$$x' = F(x) ...(4)$$

Donc soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, c'est-à-dire

$F = (f_1, ..., f_n)$ ou $f_1, ..., f_n$ sont des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que les dérivées partielles

$\frac{df_i}{dx_j}$ telque $i, j = (1, ..., n)$ existent sur en tout point $(x_1, ..., x_n)$ et d'ependent continument de $(x_1, ..., x_n)$

On appelle matrice Jacobienne de F en un point $X_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$

La matrice formés des dérivées partielles de $f_1, ..., f_n$ calculés en X_0 :

$$DF(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}\left(x_0^1, .., x_0^n\right) \cdots \frac{df_1}{dx_n}\left(x_0^1, .., x_0^n\right) \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{df_2}{dx_n}\left(x_0^1, .., x_0^n\right) \cdots \frac{df_n}{dx_n}\left(x_0^1, .., x_0^n\right) \end{pmatrix}$$

Donc le systéme lineairisé de le systéme (4) et de la forme suivant:

$$X' = AX \ / \ A = DF\left(X_0\right); \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

1.7 Méthode de transformation d'un point fixe à l'origine

Définition 1.7.1 *La transformation du point fixe* $x = x^*$ *à l'origine par* $y = x - x^*$ *telque* x^* *est un point fixe change le systéme non-linéaire:*

$$x^{\cdot} = f\left(x\right), x \in \mathbb{R}^n ... (4)$$

Le systéme linèaire associé à ce systéme est :

$$x^{\cdot} = Ax .... (5)$$

On a un nouveau systéme non-linèaire:

$$y^{\cdot} = f\left(x^* + y\right), y \in \mathbb{R}^n ... (6)$$

Le développement de Taylor de f au voisinage de $x = x^*$ est:

$$y^{\cdot} = Df\left(x^*\right) y + R\left(y\right) \ \textit{où} \ R\left(y\right) = O\left(\left|y\right|^2\right) ... (7)$$

Le systéme linèaire peut étre transformé en bloc suivant la forme diagonale

$$\begin{bmatrix} u_1^{\cdot} \\ u_2^{\cdot} \\ u_3^{\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & & \\ & A_u & \\ & & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} ... (8)$$

Par une transformation linéaire appropriée T ,où

$$T^{-1}y \equiv (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^c$$

Avec $s + u + c = n$

A_s est matrice $s \times s$ dont les valeurs propres ont des parties réelles négatives.

A_u est matrice $u \times u$ dont les valeurs propres ont des parties réelles positives.

A_c est matrice $c \times c$ dont les valeurs propres ont des parties réelles nulles.

Si on prend $u = (u_1, u_2, u_3)$ et avec la méme transformation linéaire (6) devient:

$$u^{\cdot} = Au + G(u)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} A_s & & \\ & A_u & \\ & & A_c \end{bmatrix}$$

et $G(u) = T^{-1}R(Tu)$. Le systéme linéaire (8) .

Un sous -espace stable de dimention s ,un sous-espace instable de dimention u et un sou-espace centre de dimention c.

Chapitre 2

Variété Invariante

2.1 Variétés

2.1.1 Cartes et Atlas

Définition 2.1.1 *Soit M un espace topologique*

Définition 2.1.2 *1-Une carte sur M est une paire(U.X) ou U est un ouvert de U et $X = (x_1, ..., x_n\ )$ est un homéorphisme de U sur un ouvert de R^P. Les fonctions x_i sont les coordonnées . L'ouvert U est le domaine de la carte . l"entier P est la dimension de la carte.*

2-Deux cartes$(U.X)$ et $(V.Y)$ sont C^∞ - compatibles si de changement cartes $Y \circ X^{-1}$ de $X(U \cap V)$ vers $X\ (U \cap V)$ est un C^π- difféomorisme.

3-Un atlas est un ensemble de cartes$\{(U_i, X^i)\}$de meme dimension qui sont C^∞- compatibles er tellque $\{U_i\}$ est un recouvrement de U .

4-Deux atlas sont equivalent si toutes leures cartes sont compatibles,ou de maniére equivalente si la dimension est encore un atlas.

5-Une structure differentielle U est une classe d"atlas compatibles.

2.1.2 Variétes differentielles

Définition 2.1.3 *Un espace topologie séparé , renion dénombrabre de compacts est muni d'un structure differenttielle est une variété differentielle . Une carte est compatibles avec la structure de variété si elle est compatibles avec un atlas definissant la structure de variété.*

Exemple 2.1.1 *1- Un ouvert dun espace affine est muni strutceture de variété plus généralement tout ouvert d'une variété a une structure variété.*

2-Une sous-variété de R^n est muni d"une structure de variété.

2.1.3 Structure differentielle sur la droite projective

Une droite vectorielle D non verticale de R^2 est r$_{n_n}$epresentée par une pente $m = \phi_1(D)$. C'est le réel telque $(1, m)$'$\in D$. Si D n"est pas horijontaible .elle possède une antipente $a = \phi_2(D)$.C"est le réel "a" telque$(a, 1) \in D$ les deux application pente et antipente contitient des cartes et le changement de carte $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : m \to a = \frac{1}{m}$ est un C^∞-diffeomorphisme de $R\setminus\{0\}$ sur $R\setminus\{0\}$. Ces atlas definie une structure defferentielle sur la droite projective.

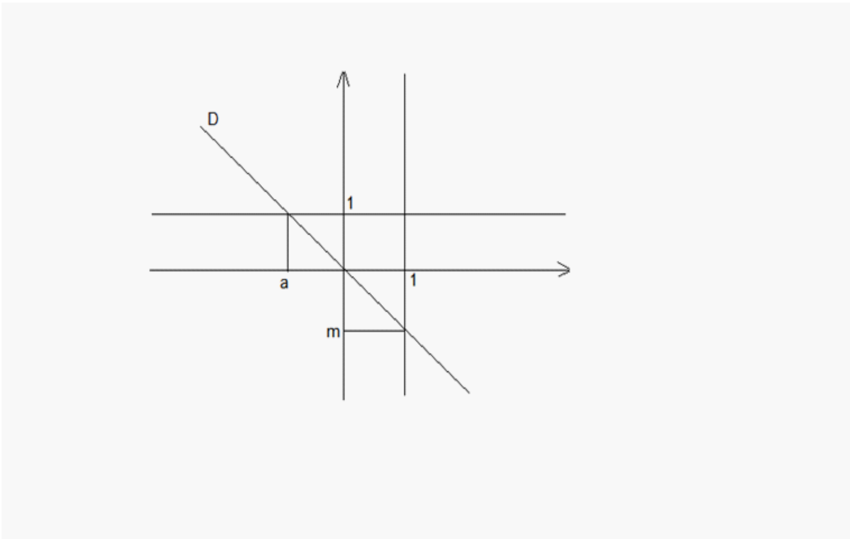

Figure 01

2.1.4 Structure differentiel sur l'espace projectif

Définition 2.1.4 *On appelle ouvert affine* U_i *de* $P^n(R)$ *l"ensemble les points dont la i-ème coordonnée homogène est non nulle . On appelle carte affine l"aplication récipoque* ϕ *l"homeorphisme* $\phi_1^{-1} = R^n \to U_i$ *,* $(x_1, ..., x_n) \to [x_1, ..., x_{i-1} : x_{i+1} : ...x_n]$ *.*

Alors $\phi_i(U_i \cap U_J) = \{x \in R^n\} = \{x \in R^n \mid x_j \neq 0\}$ *ou* $j' = J$ *si* $j\langle i, j' = J - 1$*.Comme* $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x_1, ..., x_n) = (\frac{x_n}{x_{j\prime}} ... \frac{1}{x_{j\prime}} ... 1 ... \frac{x_1}{x_{j\prime}})$*est un* C^∞ *- diffeomorphisme, on obtient une structure differentielle sur* $P^n(R)$*.*

Définition 2.1.5 *De la meme façon ou définie une structure differentielle de dimension* $2n$ *sur* $P^n(R)$*.*

2.2 Variété Differentiable[2]

Définition 2.2.1 *Soit* $m \geq 0$ *un entier , on dit que une partie* $M \in R^d$ *est une variété differentiable de dimension* m *si tout point* x *de* M *posséde un voisinage ouvert de la forme* $q(V)$ *ou:*

-V *est ouvert de* $\mathbb{R}^n$*.*

-$\alpha : V \to R^d$ *est une immersion.*

-q est un homoemophisme sur son image $\alpha(V)CM$ en x . de plus une famille $\{(V_j, \alpha_j)\}\, j \in J$ de parametrisation locales M tellesque le réunion des $\alpha(V_j)$ recouvre μ est applé un atlas de pasametrisation locales (ou simplement atlas) sur μ.

2.2.1 Premieres exemples et premieres proprietes

Toute variété dedimention zéro et un sous-ensembles discret de $\mathbb{R}^d$ et tout sous-ensemble discret est une variété de dimention zéro

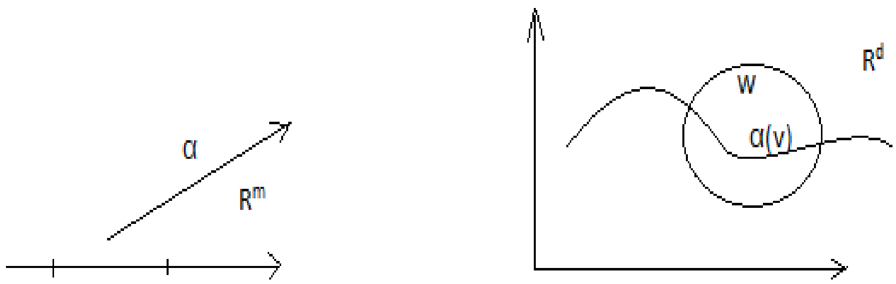

Figure 02: Noter que $\alpha(v) = M \cap W, W$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$

Noter que $\alpha(v) = \mu \cap w.w$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

-Les variéteés de dimention 1 sont parfois appllées courbe.

-Les variétés de dimention 2 sont couramment appellées courbe.

-L'exemple le plus simples d'une variété de dimention $m > 0$ est celui d'un ouvert v de $\mathbb{R}^n$.dans ce cas le couple (v, i) et bien une paramétrisation locale en tout point x de $v\,(i : v \to \mathbb{R}^m$ designant l'inclusion$)$.

-Soit (v, α) une de la variété $\mu \subset \mathbb{R}^d$.Alors il existe un ouvert w de $\mathbb{R}^d$ telque $\alpha\,(v) = \mu \cap w$ car $\alpha(v)$ doit etre un ouvert de $\mu \subset \mathbb{R}^d$.

-Le produit de deux variétés de dimention respective m et n ets une variété de dimention $m + n$.

-L'ensemble vide est une variété de dimention m quelque soit l'entier m.

-Toute variété est un espace topologique localement compact et localement connexe par arcs (car localement homeomorphe a $\mathbb{R}^n$)

Il s'ensuit que pour une variété. les proprietes d'étre connexe ou connexe par arcs soit equivalentes.

Remarque 2.2.1 *La proprieté d'être une variété est une proprieté locale si μ est une partie μ de $\mathbb{R}^d$ tellque tout point de μ possed un voisinage w dans $\mathbb{R}^d$ verifiant que $w \cap \mu$ est une variété de dimention m alors μ est une variété de dimention m.*

Proposition 2.2.1 *(changement de parametrisation).Soit μ une variété de dimention m et soient (v_i, α_i) $(i = 1, 2)$ deux parametrisation locales des μ telles que $\alpha_1(v_1) \cap \alpha_1(v_2)$ siot non vide.Alors : $\alpha_2'^1 \circ \alpha_1 : \alpha_1'^1(\alpha_1(v_1) \cap \alpha_1(v_2)) \to \alpha_1'^1(\alpha_1(v_1) \cap \alpha_2(v_2))$.*

Preuve. *L'aplication:*

$\alpha_2'^1 \circ \alpha_1 : \alpha_1'^1(\alpha_1(v_1) \cap \alpha_1(v_2)) \to \alpha_1'^1(\alpha_1(v_1) \cap \alpha_2(v_2))$ est claremont bijective il reste seulement a prouver qu'elle est differentiable car si elle est differentiable ,son inverse pour méme raison l'est aussi.

Soit a_1 un point quelconque de $\alpha_1'^1(\alpha_1(v_1) \cap \alpha_2(v_2))$ posons $b = \alpha_1(\alpha_1)$ et $a_2 = \alpha_2'^1(b)$.alors le lemme de l'immession appliqué a: a_i our $i = 1, 2$ il existe un voisinage u_i de a_i.

un voisinage de $w_i$de b dans $\mathbb{R}^d$.un voisinage u_i' de 0 dans $\mathbb{R}^{d-n}$ et un diffeonmorphisme $h_i : w_i \to u_i \times u_i'$ tellque pour tout $x \in u_i, h_i(\alpha_i)(x) = (x, 0)$. par conséquent,sur un voisinage le petit de a_i ona $(\alpha_1'^1 \circ \alpha_1)(x, 0) = (h_2 \circ h_1'^1)(x, 0)$.ce qui termine la demonstration.

■

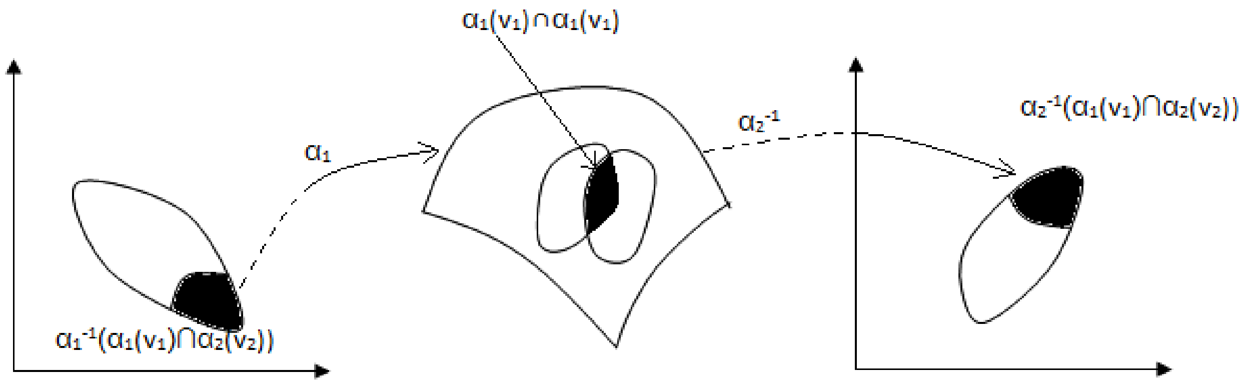

Figure 03: Chagment de parmetrisation

2.3 Variétés invariantes

La variété stable w^s d'un point d'équilibre a du système $x' = f(x)$ est une variété différentiable qui est tangente au sous espace stable E^sdu linéarisé:

$$x^{'} = Ax,\ avec\ A = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))$$

en a et telle que toutes les solutions issues de w^s tendent vers a quand $t \longrightarrow +\infty$.

De même la variété instable w^u du point d'équilibre a est une variété différentiable qui est tangente au sous espace stable E^u et telle que toutes les solutions issues de w^s

tendent vers a quand $t \longrightarrow -\infty$

Enfin la variété centrale w^c est une variété tangente au sous espace centrale E^c.

Le comportement asymptotique des orbites contenues dans la variété centrale n'est pas déterminé par le linéarisé du système en a.

Il y a unicité des variété stable w^s et instable w^u,par contre il y a une infinité de variétés centres.

2.4 Théorème de variété[3]

Il existe des variétés de classe C^r, stable w^s, instable w^u et centrale w^c,tangents respectivement à E^s, E^u et E^c en x.ces variétés sont invariantes par rapport au flot ϕ_t de $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

$x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^r(D), D \subset \mathbb{R}^n$.$w^s$ et w^usont uniques mais w^c ne l'est pas nécessairement.

La situation, au voisinage de x est illustrée sur la figure (1).

on a $\phi_t(w^s) \subset w^s, \phi_t(w^u) \subset w^u, \phi_t(w^c) \subset w^c$ et

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) &= x \text{ pour tout } x \in w^s. \\ \lim_{t \to -\infty} \phi_t(x) &= x \text{ pour tout } x \in w^u. \end{aligned}$$

Noter que x est limite w (resp la limiteα de toute trajectoire $\phi_t(x)$ appartenant à w^s

(resp appartenant à w^u).

De plus, on ne peut attribuer de direction au flot de w^c sans connai premiers termes du développement limite de f air voisinage de x.

Si $E^c = \varnothing$, le pour x est un point fixe hyperbolique (ou non dégénéré).

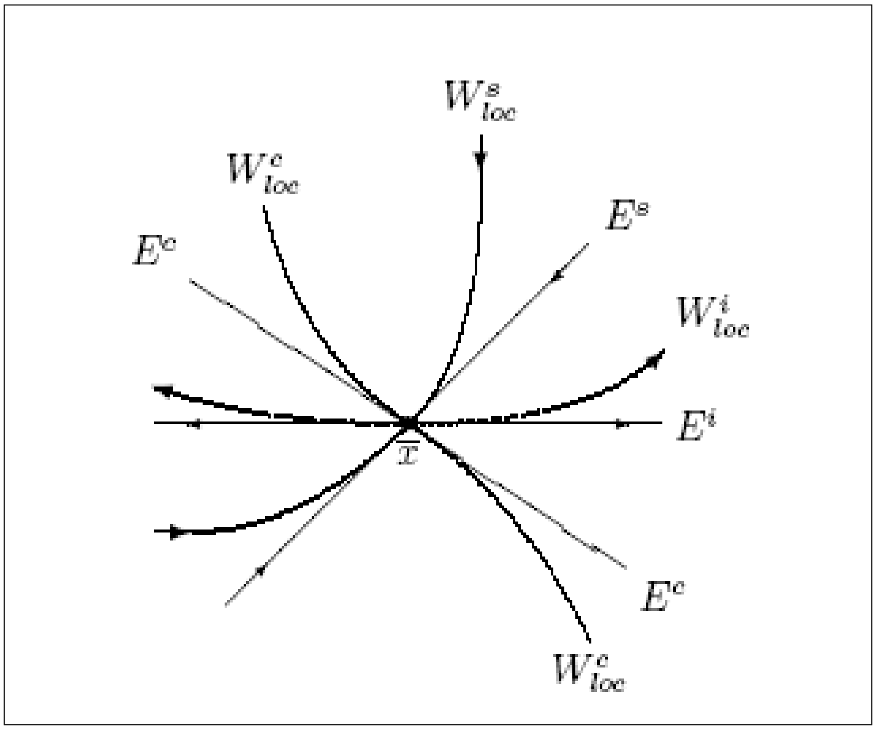

Figure 04: Varités Invariantes

Chapitre 3

Exemples

3.1 Exemple 01

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x ... (1) \\ \frac{dy}{dy} = -y + x^2 ... (2) \\ \frac{dz}{dt} = z + x^2 ... (3) \end{cases}$$

Les point fixe: $(1) \Rightarrow x = 0$

$$(2) \Rightarrow -y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$(3) \Rightarrow z + x^2 = 0 \Rightarrow z = 0$$

Donc $(0, 0, 0)$ est point fixe.

Déterminer $J \Rightarrow J \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2x & -1 & 0 \\ 2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Le systéme lineaire est :

$$X' = AX \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

Calcule les valeurs propres :

$$\det A = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = -1\,(double)\,, \lambda_2 = 1$

Les vecteurs propres est : $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La solution de systéme est :

$$\phi_t(x_0, y_0, z_0) = \begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t} \\ y(t) = y_0 e^{-t} + x_0^2(e^{-t} - e^{-2t}) \\ z(t) = z_0 e^t + \frac{x_0^2}{3}(e^t - e^{-t}) \end{cases}$$

$\lim_{t\to+\infty} \phi_{t_0} = (0,0,0)$

$z_0 + \frac{x_0^2}{3} = 0$

$W^s = \left((x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 / z_0 = \frac{x_0^2}{3}\right)$

La variété stable w^s est tangente a E^s

$\lim_{t\to+\infty} \phi_t = (0,0,0)$

$x_0 - y_0 = 0$

$W^u = \{x_0 - y_0 = 0\}$

Variété instable.

$W^u = E^u = \{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\}$

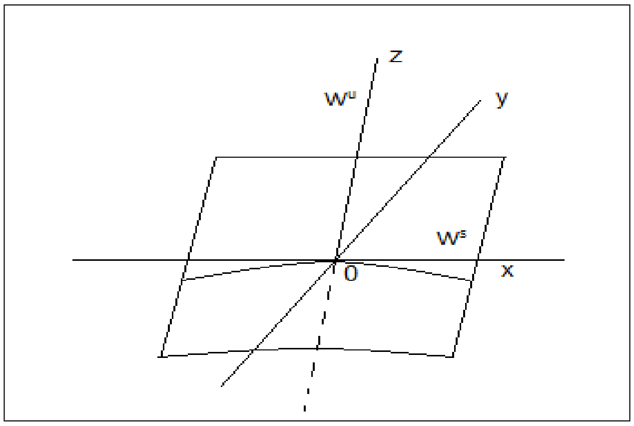

Figure 05: Varieté stable est instable

3.2 Exemple 02

$$\begin{cases} x' = x^2 \ldots (1) \\ y' = -y \ldots (2) \end{cases}$$

Les points fixe :

$(1) \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$(2) \Rightarrow -y = 0 \Rightarrow y = 0$

Donc $(0, 0, 0)$ est un point fixe

Déterminer Jacobien $J = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B$

Le systéme lineaire est :

$X' = BX \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -y \end{cases}$

Les valeurs propres : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$

Les vecteurs propres : $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$

La solution de systéme :

$\phi_t(x, y) = \begin{cases} x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0} ...(1) \\ y(t) = y_0 e^{-t} ...(2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow x_0 = x(1 - tx_0)$

$t = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}$

en remplace (2)

$y = y_0 e^{-(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0})}$

$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(x_0, y_0) = (0, 0)$

La variété centrale w^c est tangente a E^c.

$w^c = E^c$.

La variété stable:

$y = y_0 e^{-(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0})}$.

Donc: $W^S = E^S$.

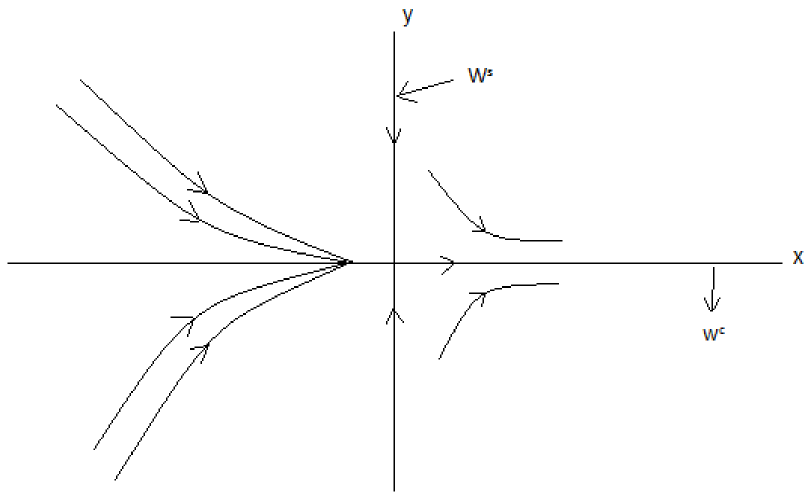

Figure 06:Variété stable et centrale

Conclusion Générale

Aprés étude des varieté invariante,nous trouvons que c'est des outils important pour l'étude locale de certains aspects des solutions d'équations différentieles notoment la varieté centrale,qui est une importante outil.

Bibliographie

[1] A.El jai,E.Zessik,K.Ztot,Systéme dinamique-1ère édition-,Paris,france,Collection études 2008 variété différentiel .

[2]JEAN YVES DIMET,Geomitrie et topologie differentielle,DB Paris,Vuibert octobre 2008.

[3]H.Dong.VU,Bifurcations et chaos une introduction à la dynamique contomporaine avec des programmes en pascal,Fortrant et mathimatica.

[4]L.Preko,Diffirential equation and dynamical systems,third édition,New York 2001.