الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـــم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie Département de mathématiques et informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

en : - Filière : Mathématiques Fondamentales

Thème

Stabilité des systèmes différentiels linéaires

Préparé par : Chebouki Naouel
Zentout Samiha
Khaled Bouchra
Ouaret Siham

Encadré par : Bouden Rabah

Année universitaire : 2013/2014

RMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet de fin d'études, au sein de l'institut des sciences et de

Technologie de Mila.

Avant tout, nous remercions ALLAH tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener ce travail.

D'une façon toute particulière, On tient à remercier notre encadreur

Mr BOUDEN RABAH, pour nous avoir fait travailler sur un projet aussi intéressant et riche. Nous lui sommes reconnaissants tout particulièrement pour la confiance qu'il nous a témoignée et la liberté qui nous a laissé.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude aux nombreuses personnes qui nous ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse.

Nous remercions aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadrés, observé, aidé, conseillé et même supporté.

On tient également à remercier ici toutes les personnes, les amis, dont on a croisé le chemin a l'institut des sciences et de technologie de Mila et ailleurs.

Enfin, on souhaite exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes, qui ont contribué largement à son aboutissement.

Table des matières

Introduction Générale **2**

1 Systèmes différentiels **3**

1.1 Equations différentielles : 3

1.2 Systèmes différentiels linéaires : 3

1.3 Systèmes différentieles linéaires à coefficients constants : 4

1.3.1 Solutions exponentielles élémentaires $\frac{dY}{dt} = AY$: 4

1.3.2 Exponentielle d'une matrice : 4

1.3.3 Solution générale du systéme sans second membre $\frac{dY}{dt} = AY$: 7

1.3.4 Solution générale de $\frac{dY}{dt} = AY + B(t)$ 7

1.4 Systèmes différentiels linéaires à coefficients variables 8

1.4.1 Résolvante d'un système linéaire : 8

1.4.2 Wornskien d'un système de solution : 10

1.4.3 Méthode de variation des constantes : 12

2 Stabilité des systèmes différentiels linéaires **14**

2.1 stabilité des solutions : 14

2.1.1 système linéaire à coefficients constantes : 15

2.1.2 classification des points d'équilibres : 17

Bibliographie **20**

Introduction Générale

Un des concepts les plus importants en théorie des systèmes dynamiques est celui de la stabilité. un système instable est sans usage et potentiellement dangereux. Qualitativement un système est stable si chaque fois qu'il est perturbé de son point d'équilibre, il reste autour de ce point d'équilibre par la suite.

Depuis les travaux d'Isaac Newton $(1642 - 1727)$ la science était dominée par le déterminisme, les scientifiques pensaient pouvoir prédire complètement et précisément l'évolution d'un système donné. Un siècle après Newton, Pierre-Simon Laplace$(1749 - 1827)$ .fut le fervent apôtre du déterminisme affirmant que l'état présent de l'Univers permettait, en principe, de prédire complètement son futur.

L'histoire des systèmes dynamiques modernes est relativement récente. Elle commencebavec Henri Poincaré$(1854-1912)$qui fut le premier a entreprendre l'étude formelle d'un système dynamique chaotique. Il avait la conviction que le comportement global de toute solution d'un système dynamique était plus important que le comportement local. Cette conviction l'a conduit à développer une théorie qualitative des équations différentielles étudiant le mouvement des corps célestes qui consistait à savoir si les orbites décrites par ces corps étaient stables ou instables.

Il fut le premier à affirmer que le déterminisme d'une loi n'implique pas nécessairement sa prédictibilité. Vint ensuite le mathématicien Birkhoff qui développa au début du $XX^{ième}$ siècle l'étude des systèmes dynamiques discrets qui, selon lui, permettaient de mieux comprendre la dynamique plus complexe résultant des équations différentielles.

Ce mémoire constitué de deux chapitres, le premier chapitre présente les équations et les systèmes différentiels linéaires,le deuxième chapitre présente la stabilité des systèmes différentiels linéaires sans retour à ces solutions.

Chapitre 1

Systèmes différentiels

Dans ce chapitre,nous définissons les systémes différentiels qui seront étudies dans cet ouvrage

1.1 Equations différentielles :

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiquesde phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité oula mécanique céleste, par conséquent les équations différentielles représentent un vastechamp d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

1.2 Systèmes différentiels linéaires :

On appelle système différentiel (linéaire ou non) de 1^{er} order tout systéme de la forme :

$$y' = f(t, y) \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

où les $f_{i:} : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq n$,U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,$y(t) \in \mathbb{R}^n$ est la fonction inconnue.

1.3 Systèmes différentieles linéaires à coefficients constants :

Ce sont les systèmes de la forme

$$\frac{dY}{dt} = AY + B(t)............(E)$$

où la matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$ est indépendante de t

1.3.1 Solutions exponentielles élémentaires $\frac{dY}{dt} = AY$:

On cherche une solution de la forme $Y(t) = e^{\lambda t}V$

où $\lambda \in \Bbbk, V \in \Bbbk^m$ sont des constantes.Cette fonction est solution si selmenet si $\lambda e^{\lambda t}V = e^{\lambda t}AV$,soit

$$AV = \lambda V.$$

On est donc amené à chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Cas simple :A **est diagonalisable :** Il existe une base $(V_1; ...; V_m)$ de $\Bbbk^m$ constituée de vecteurs propres de A,de

valeures propres respectives $\lambda_1, ..., \lambda_m$.On obtiont donc m solutions linéairement indépentes

$$t \longrightarrow e^{\lambda_j t}V_j, 1 \leq j \leq m.$$

La solution générale est donnée par :

$$Y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}V_1 + ... + \alpha_m e^{\lambda_m t}V_m, \ \alpha_j \in \Bbbk.$$

Lorsque A **est n'est pas diagonalisable :** on a besoin en général de la notion d'exponentielle d'une matrice. Toutefois le cas des systémes 2×2 à coefficients

constants est suffisamment simple pour qu'on puisse faire les calculs ‹‹à la main››.

1.3.2 Exponentielle d'une matrice :

La d ´efinition est calquée sur celle de la fonction exponentielle complexe usuelle,calculée au moyen du

développement en série entière.

Définition 1.3.1 *:Si* $A \in M(\Bbbk)$*,on pose* $e^A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n$.

Munissons $M_n(\mathbb{k})$ de la norme $|||\,|||$ des opérateurs linéaires sur $\mathbb{k}^m$ associée à la norme euclidienne (resp. hermitienne) de $\mathbb{R}^m$ (resp.$\mathbb{C}^m$). On a alors

$$\left|\left|\left|\frac{1}{n!}A^n\right|\right|\right| \leq \frac{1}{n!}\,|||A|||^n\,,$$

de sorte que la série $\sum \frac{1}{n!}A^n$ est absolument convergente. On voit de plus que $\left|\left|\left|e^A\right|\right|\right| \leq e^{|||A|||}$.

Proposition 1.3.2 *:Si $A, B \in M_m(\mathbb{k})$ commutent ($AB = BA$),alors $e^{A+B} = e^A.e^B$. (1.1)*

Vérification :On considère la série produit $\sum \frac{1}{p!}A^p.\sum \frac{1}{q!}B^q$,dont le terme général est :

$$C_n = \sum_{p+q=n} \frac{1}{p!q!}A^pB^q = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!}A^pB^q = \frac{1}{n!}(A+B)^n.$$

Preuve. d'après la formule du binome (noter que cette formule n'est vraie que si A et B commutent). Comme les séries de e^A et e^B sont absolument convergentes, on en d´eduit

$$e^A.e^B = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n = e^{A+B}$$

On voit en particulier que e^A est une matrice inversible, d'inverse e^{-A}.

Remarque 1.3.3 *:La propriété(1.1) tombe en défaut lorsque A et B ne commutent pas. Le lecteur pourra par exemple calculer $e^A.e^B$ et e^{A+B} avec :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad avec\ \theta \in \mathbb{R}.$$

■

Méthode générale de calcul dans $M_n(\mathbb{C})$: Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ peut être mise sous forme de blocs triangulaires correspondant aux différents sous espaces

caractéristiques de A. Il existe donc une matrice de passage P, dont les colonnes sont constituées par des vecteurs formant des bases des sous-espaces caractéristiques, telle que :

$$T = P^{-1}AP$$

soit une matrice triangulaire de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \boxed{T_1} & & & 0 \\ & \boxed{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{T_S} \end{pmatrix}, \quad T_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & * & \cdots & * \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \lambda_j & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1 \ldots \lambda_s$ sont les valeurs propres distinctes de$A$. On a alors de façon évidente

$$T^n = \begin{pmatrix} T_1^n & & & 0 \\ & T_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_S^n \end{pmatrix}; \quad e^T = \begin{pmatrix} e^{T_1} & & & 0 \\ & e^{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{T_n} \end{pmatrix}$$

comme $A = PTP^{-1}$,il vient $A^n = PT^nP^{-1}$,d'où

$$e^A = Pe^TP^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{T_1} & & & 0 \\ & e^{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{T_n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

On est donc ramené à calculer l'exponentielle e^B lorsque B est un bloc triangulaire de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \lambda & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N \in M_p(\mathbb{k}),$$

où I est la matrice unité et N une matrice nilpotente $N = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

triangulaire supérieure. La puissance N^n comporte n diagonales nulles à partir de la diagonale principale (celle-ci incluse),

en particulier $N^n = 0$ pour $n \geq p$. On obtient donc

$$e^N = I + \frac{1}{1!}N + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}N^{p-1} = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme I et N commutent, il vient finalement

$$e^B = e^{\lambda I} e^N = e^{\lambda} e^N \quad car(e^{\lambda I} = I e^{\lambda})$$

fourmule : $\quad \det(e^A) = \exp(tr(A))$
Vérification :Dans le cas d'un bloc triangulaire$B \in M_P(\mathbb{k})$, on trouve

$$\det(e^B) = \det(e^{\lambda})^p \det(e^N) = e^{p\lambda} = \exp(tr(B))$$

On en d´eduit donc

$$\det(e^T) = \det(e^{T_1}) ... \det(e^{T_S}) = \exp(tr(T_1) + ... + tr(T_s))$$

Comme $A = PTP^{-1}$ et $e^A = Pe^T P^{-1}$, on a findetalement

$$(e^A) = \det(e^T), tr(A) = tr(T) = \sum valeurs\ propres$$

1.3.3 Solution générale du systéme sans second membre $\frac{dY}{dt} = AY$:

L'une des propriétés fondamentales de l'exponentiation des matrices réside dans lefait qu'elle est intimement liée à la résolution des équations linéaires à coefficients constants $\frac{dY}{dt} = AY$.

Théorème 1.3.4 *La solution Y telle que $Y(t_0) = V_0$ est donnée par*

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A} V_0 \quad , \forall t \in \mathbb{R}.$$

1.3.4 Solution générale de $\frac{dY}{dt} = AY + B(t)$

Si aucune solution évidente n'apparait, on peut utiliser la mèthode de variation des constantes, c'est-à-dire qu'on cherche une solution particulière sous la forme

$$Y(t) = e^{tA} V(t) \qquad (*)$$

où V est supposée différentiable. Il vient

$$\begin{aligned} Y'(t) &= Ae^{tA} V(t) + e^{tA} V'(t) \\ &= AY(t) + e^{tA} V'(t) \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir V telle que $e^{tA}V'(t) = B(t)$, soit par exemple

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-u.A}B(u)du, t_0 \in I$$

On obtient ainsi la solution particulière

$$Y(t) = e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-u.V}B(u)du = \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A}B(u)du$$

qui est la solution telle que $Y(t_0) = 0$.La solution génerae du problème de cauchy telle que $Y(t_0) = V_0$ donc

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}.V_0(t) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A}B(u)du.$$

1.4 Systèmes différentiels linéaires à coefficients variables

1.4.1 Résolvante d'un système linéaire :

Considérons une équation linéaire sans second membre

$$Y' = A(t)Y............(E_0)$$

où $A : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M_m(\Bbbk)$est une matrice $m \times m$ sur $\Bbbk$ àcoefficients continus.
Soit S l'ensemble des solutions maximales de (E_0). Pour tout $t_0 \in I$, on sait que

$$\Phi_t : S \longrightarrow \Bbbk^m, \quad Y \mapsto Y(t_0)$$

est un isomorphisme $\Bbbk$-linéaire. Pour tout couple $(t, t_0) \in I^2$, on définit

$$\begin{array}{rcl} R(t,t_0) & = & \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1} : \Bbbk^m \longrightarrow^{\Phi_{t_0}^{-1}} S \longrightarrow^{\Phi_t} \Bbbk^m \\ V & \mapsto & Y \mapsto Y(t). \end{array}$$

On a donc$R(t,t_0).V = Y(t)$, où Y est la solution telle que $Y(t_0) = V$. Comme $R(t,t_0)$ est un isomorphisme $\Bbbk^m \longrightarrow \Bbbk^m$,

il sera identifié à la matrice inversible qui lui correspond canoniquement dans $M_m(\Bbbk)$.

Définition 1.4.1 *:$R(t,t_0)$ s'appelle la résolvante du système linéaire (E_0).*

Pour tout vecteur $V \in \mathbb{k}^m$, on a avec les notations ci-dessus

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{d}{dt}R(t,t_0)\right).V &= \frac{d}{dt}(R(t,t_0).V) \\
&= \frac{dY}{dt} = A(t)Y(t) = A(t)R(t,t_0).V.
\end{aligned}$$

On en déduit donc $\frac{d}{dt}R(t,t_0) = A(t)R(t,t_0)$.

Proposition 1.4.2

(i)$\forall t \in I, \quad R(t,t) = I_m \qquad$ *(matrice unité $m \times m$).*

(ii)$\forall (t_0,t_1,t_2) \in I^3, \quad R(t_2,t_1)R(t_1,t_0) = R(t_2,t_0)$.

(iii)$R(t,t_0)$ *est la solution dans* $M_m(\mathbb{k})$ *du système différentiel*

$$\frac{dM}{dt} = A(t)M(t)$$

où $M(t) \in M_m(\mathbb{k})$ vérifie la condition initiale $M(t_0) = I_m$.

(i) et (ii) sont immédiats à partir de la définition de$R(t,t_0)$ et (iii) résulte de ce qui précède.

Retenons enfin que la solution du problème de Cauchy

$$Y' = A(t)Y \quad \text{avec } Y(t_0) = V_0$$

est donnée par

$$Y(t) = R(t,t_0).V_0$$

Remarque 1.4.3 *Le système $\frac{dM}{dt} = A(t)M(t)$ peut paraitre plus compliqué que le système initial puisqu'on a m^2 ´équations scalaires au lieu de m (on passe de $\mathbb{k}$ à $M_m(\mathbb{k})$).*

Il est néanmoins parfois utile de considérer ce système plutot que l'équation initiale, parce que tous les objets sont dans$M_m(\mathbb{k})$ et qu'on peut exploiter la structure d'algèbre de $M_m(\mathbb{k})$.

Exemple 1.4.4 *:Supposons que*

$$A(t)A(u) = A(u)A(t) \quad \text{pour tous } t,u \in I \qquad (**)$$

Alors

$$R(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(u)du\right).$$

Pour le voir, il suffit de montrer que $M(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(u)du\right)$satisfait la condition (iii) ci-dessus.

Il est clair que $M(t_0) = I_m$.Par ailleurs l'hypothèse de commutation (**) entraine que $\int_b^a A(u)du$ et $\int_d^c A(u)du$

commutent pour tous $a, b, c, d \in I$, le produit étant égal dans les deux cas à

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} A(u)A(v)dudv$$

par le théorème de Fubini.On a donc

$$\begin{aligned} M(t+h) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(u)du + \int_{t}^{t+h} A(u)du\right) \\ &= \exp\left(\int_{t}^{t+h} A(u)du\right).M(t) \end{aligned}$$

Or $\int_t^{t+h} A(u)du = hA(t) + O(h)$,donc utilisant le d´eveloppement en série de l'exponentielle on trouve

$$\begin{aligned} M(t+h) &= (I_m + hA(t) + O(h)M(t) \\ &= M(t) + hA(t)M(t) + O(h), \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\frac{dM}{dt} = A(t)M(t)$.

En particulier, si U et V sont des matrices constantes qui commutent et si

$A(t) = f(t)U + g(t)V$ pour des fonctions scalaires f, g, alors l'hypothèse (**) est satisfaite. On a donc

$$\begin{aligned} R(t,t_0) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} f(u)du.U + \int_{t_0}^{t} g(u)du.V\right) \\ &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} f(u)du.U\right)\exp\left(\int_{t_0}^{t} g(u)du.V\right) \end{aligned}$$

1.4.2 Wornskien d'un système de solution :

On va voir ici qu'on sait toujours calculer le déterminant d'un système de solutions,

ou ce qui revient au même, le déterminant de la résolvante,même lorsque la résolvante n'est pas connue.

Définition 1.4.5 *Le Wronskien d'un système de m solutions $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ de (E_0) est*

$$W(t) = \det(Y_1(t), \dots, Y_m(t))$$

posons $V_j = Y_j(t_0)$. Alors $Y_j(t) = R(t, t_0).V_j$, d'où

$$W(t) = \det(R(t, t_0)). \det(V_1, \dots, V_m)$$

On est donc ramené à calculer la quantit

$$\Delta(t) = \det(R(t, t_0)),$$

et pour cela on va montrer que $\Delta(t)$ vérifie une équation différentielle simple. On a

$$\begin{aligned} \Delta(t+h) &= \det(R(t+h, t_0)) = \det(R(t+h, t)R(t, t_0)) \\ &= \det(R(t+h, t))\Delta(t). \end{aligned}$$

Comme $R(t,t) = I_m$ et $\frac{d}{dt}R(u,t)\big|_{u=t} = A(t)(R(t,t) = A(t)$,la formule de Taylor donne

$$\begin{aligned} R(t+h, t) &= I_m + hA(t) + O(h) \\ \det(R(t+h, t)) &= \det(I_m + hA(t)) + O(h). \end{aligned}$$

Lemme 1.4.6 *:Si $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{k})$, alors*

$$\det(I_m + hA) = 1 + \alpha_1 h + \dots + \alpha_m h^m$$

avec $\alpha_1 = trA = \sum_{1 \le i \le m} a_{ii}$.

En effet dans $\det(I_m + hA)$ le terme diagonal est

$$(1 + ha_{11}) \cdots (1 + ha_{mm}) = 1 + h \sum a_{ii} + h^2 \cdots$$

et les termes non diagonaux sont multiples de h^2.

Le lemme entraîne alors :

$$\begin{aligned} \det(R(t+h, t)) &= 1 + htr(A(t)) + O(h), \\ \Delta(t+h) &= \Delta(t) + htr(A(t))\Delta(t) + O(h). \end{aligned}$$

On en deduit

$$\Delta'(t) = tr(A(t))\Delta(t),$$

et comme $\Delta(t_0) = \det(R(t_0, t_0)) = \det I_m = 1$,il vient :

$$\begin{aligned}
\det R(t, t_0) &= \Delta(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} trA(u)du\right) \\
W(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} trA(u)du\right) \det(V_1, \cdots, V_m)
\end{aligned}$$

1.4.3 Méthode de variation des constantes :

Soit à résoudre le système différentiel linéaire

$$Y' = A(t)Y + B(t).......(E)$$

et soit $R(t, t_0)$ la résolvante du système linéaire sans second membre

$$Y' = A(t)Y..............(E_0)$$

On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme

$$Y(t) = R(t, t_0).V$$

où V est supposée différentiable. Il vient

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dt} &= \left(\frac{d}{dt}R(t, t_0)\right).V(t) + R(t, t_0).V'(t) \\
&= A(t)R(t, t_0).V(t) + R(t, t_0).V'(t) \\
&= A(t)Y(t) + R(t, t_0)V'(t)
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $R(t, t_0).V'(t) = B(t)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
V'(t) &= R(t, t_0).B(t), \\
V(t) &= \int_{t_0}^{t} R(t_0, u).B(u)du, \\
Y(t) &= R(t, t_0).V(t) = \int_{t_0}^{t} R(t, t_0)R(t_0, u).B(u)du, \\
Y(t) &= \int_{t_0}^{t} R(t, u)B(u)du.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la solution particulière telle que $Y(t_0) = 0$. La solution telle que $Y(t_0) = V_0$ est donnée par

$$Y(t) = R(t, t_0)V_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, u)B(u)du.$$

Chapitre 2

Stabilité des systèmes différentiels linéaires

2.1 stabilité des solutions :

La question d'une stabilité d'une des questions fondamentale de la théorie qualitative elle a été etudier à des mathématiciennes LYAPANOV,

il est important de connaitre le comportement de la solution lorsque t$\rightarrow$ $+\infty$,une solution est dite stable si les solutions associé à des valeures voisigne de la donné initiale restent proche de la solution considéré jusqu'a ∞.

Considère le problème de Cauchy associé à l'équation différentielle

$$y = f(t, y)/f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.....(1)$$

avec condition initiale $y(t_0) = z_0$. On suppose que la solution de ce problème existe sur$[t_0, +\infty[$

Définition 2.1.1 *Soit $y(t, z)$la solution de (1)tel que $y(t_0, z) = z$ on dira que la solution $y(t, z_0)$ est stable s'il ésciste une boule $\bar{B}(z_0, r)$ et une constante $c \geq 0$ telles que :*

i/ Pour tout $z \in \bar{B}(z_0, r), t \rightarrow y(t, z)$ est définie sur$[t_0, +\infty[$.

ii/ Pour tout $z \in \bar{B}(z_0, r)$et $t \geq t_0$ on a

$$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq c \|z - z_0\| .$$

La solution $y(t, z_0)$ est dite asymptotiquement stable, si elle est stable et si la condition (iii) plus forte que (ii) est satisfaite.

iii/ Il existe une boule $\bar{B}(z_0, r)$ *et une fonction* $y : [t_0, +\infty[\longmapsto R_+$ *continue avec* $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ *telle que pour tous* $z \in \bar{B}(z_0, r)$ *et* $t \geq t_0$ *on ait*

$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq y(t) \|z - z_0\|$.

2.1.1 système linéaire à coefficients constantes :

Soit le système homogène

$$Y_0 = AY.$$

La solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = Z \end{cases}$$

est $Y(t, z) = e^{(t-t_0)}z$.

D'où

$$\|y(t, z) - y(t, z_0)\| \leq \left\|e^{(t-t_0)A}z\right\| \|z - z_0\|,$$

donc la stabilité est liée au comportement de la norme $\left\|e^{(t-t_0)A}\right\|$ lorsque $t \to +\infty$ qui doit rester bornée. On distingue deux cas :

— Le cas scalaire n = 1 :

$$A = (a) \ et \ |e^{(t-t_0)a}| = e^{(t-t_0)Re(a)}.$$

-Si $Re(a) > 0$; alors $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} |e^{(t-t_0)a}| = +\infty$, dans ce cas les solutions sont **instables**.

-Si $Re(a) = 0$; alors$|e^{(t-t_0)a}| = 1$, les solutions sont **stables**.

-Si $Re(a) < 0$; alors $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} |e^{(t-t_0)a}| = 0$, les solutions sont **asymptotiquement stables**.

— Le cas générale $n > 1$:

-Si A est diagonalisable : on se ramène après changement de variables linéaire au système$Y_1' = \overset{*}{A}Y$ avec$Y_1 = P^{-1}Y$ et

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, le système se ramène au équations

$$y_i' = \lambda_i y_i, 1 \leq i \leq n,$$

qui admetent pour solutions

$$y_i(t,z) = z_i e^{(t-t_0)}, 1 \leq i \leq n.$$

Les solutions sont **stables** ssi $Re(\lambda_i) \leq 0$, **asymptotiquement stables** ssi $Re(\lambda_i) < 0$,et **instables** si $Re(\lambda_i) > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

-**Si A n'est pas diagonalisable** :il suffit de regarder ce qui passe pour chaque bloque d'une triangulation,supposons donc :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

donc

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

où N est une matrice nilpotente non nule tel que $N^\alpha = 0$ (cette décomposition s'appelle la décomposition de Dunford).

Donc $e^{(t-t_0)A} = e^{\lambda(t-t_0)} e^{(t-t_0)N} = e^{\lambda(t-t_0)} \sum\limits_{K=0}^{\alpha-1} \frac{(t-t_0)^K}{K!} N^K$.

Les coefficients de $e^{(t-t_0)A}$ sont des produits de $e^{\lambda(t-t_0)}$ par des polynômes de degré $\leq \alpha - 1$

(comme $N \neq 0$ il y a au moins un polynôme de degré ≥ 1).

Si $Re(\lambda) < 0$ les coefficinets tendent vers 0, et les solutions sont asymptotiquement stables.

Si $Re(\lambda) > 0$ les modules tend vers $+\infty$, et les solutions sont instables.

Si $Re(\lambda) = 0$ donc $\left| e^{\lambda(t-t_0)} \right| = 1$, les solutions sont instables.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres complexes de la matrice A, alors les solutions du système linéaire $Y' = AY$ sont :

-Asymptotiquement stable ssi $Re(\lambda_i) < 0$, pour tout $1 \leq i \leq n$.

-Stable ssi $Re(\lambda_i) < 0$, (ou $Re(\lambda_i) = 0$, est le bloc correspondant est diagonalisable) pour tout $1 \leq i \leq n$.

Exemple 2.1.2 *Considérons le système*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$$

les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.Donc les solutions sont instables

2.1.2 classification des points d'équilibres :

Considérons le système :$Y' = AY$...............(1) le système s'écrit :

$$\begin{cases} x' = ax + by...........(2) \\ y' = cx + dy \end{cases} , Y \in \mathbb{R}^2$$

ona

$$AY = 0 \Longrightarrow Y' = 0$$

alors les points singuliers correspondent aux solutions constantes.On suppose que $det(A) \neq 0$. dans ce cas, l'origine est le seul point singulier on

distingue plusieurs cas en fonctions des valeurs propres de la matrice A.

1.Les valeurs propres λ_1 ,λ_2 sont réels :

-si λ_1 ,λ_2 de même signes : La solution générale de l'équation (2) est :

$$x = c_1\xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\xi_2 e^{\lambda_2 t}......(3)$$

où λ_1 et λ_2 sont soit tous les deux à la fois positive ou négative. Supposons que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, et que les vecteurs propres de ξ_1 et ξ_2 sont représentent

sur la Figure (2.1.2.1).

Il découle de l'équation . (3) que $x \longrightarrow 0$ lorsque $t \to \infty$ quelles que soient les valeurs de c_1 et c_2.

Autrement dit, toutes les solutions approchent du point critique à l'origine comme $t \to \infty$.Ce type de point critique est appelée **un nœud stable**.

Si λ_1 et λ_2 sont positifs , et $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, les trajectoires ont le même motif comme dans , la figure (2.1.2.1)

mais la direction du mouvement est une distance à partir de , plutôt que vers , le point critique à l'origine .

Dans ce cas x_1 et x_2 croître de façon exponentielle comme fonctions de t . (la figure (2.1.2.2)).

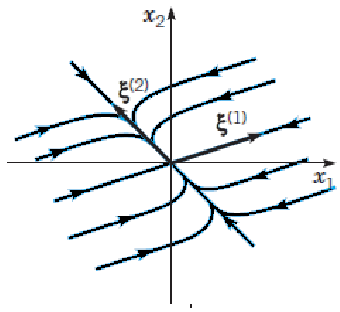


FIG (2.1.2.1)

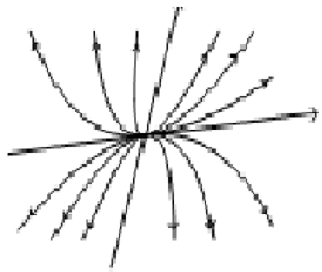


FIG (2.1.2.2)

-si λ_1 ,λ_2 de signe opposé : La solution générale de l'équation (2) est :

$$x = c_1\xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\xi_2 e^{\lambda_2 t}......(4)$$

où $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$,et que les vecteurs propres de ξ_1 et ξ_2 sont représententsur la Figure (2.1.2.3).

Si la solution commence à un point initial sur la ligne par ξ_1 ,et que $c_2 = 0$,En conséquence, la solution reste sur la ligne par l'intermédiaire ξ_1 pour tout t, et depuis $\lambda_1 > 0, \|x\| \longrightarrow \infty$ lorsque $t \longrightarrow \infty$. Si la solution commence à une première point sur la ligne par ξ_2 , la situation est similaire, sauf que $\|x\| \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$ car $\lambda_2 < 0$ finalement tous ces approches de solutions infini asymptotique à la ligne déterminée par le vecteur propre ξ_1 correspondant à la valeur propre positif λ_1 Les seules solutions qui approchent du point critique à l'origine sont ceux qui commencent précisément sur la ligne déterminée par ξ_2.ce point est appelé **point selle,**ses trajectoires sont représentés sur la figure (2.1.2.3)

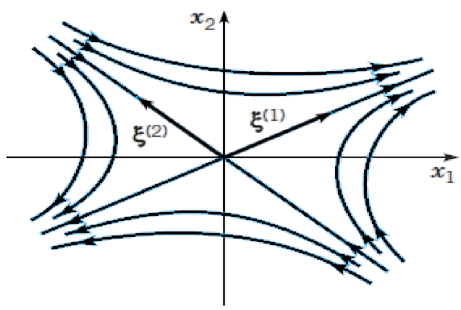


Fig (2.1.2.3)

-si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:nous considérons le cas où les valeurs propres sont négatifs s'ils sont positifs , les trajectoires sont semblables, mais la direction du mouvement est inversé . Il existe deux sous-cas , selon que le valeur propre répétée a deux vecteurs propres indépendants ou seulement un .

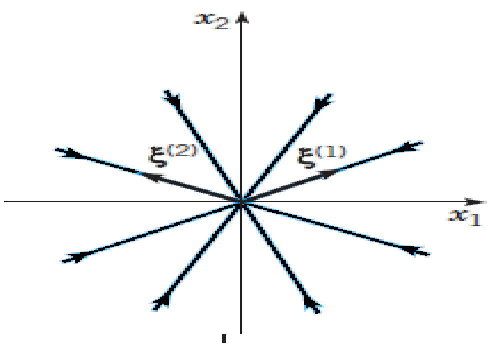
a) Deux vecteurs propres indépendants : La solution générale de l'équation . (2)est :

$$x = c_1\xi_1 e^{\lambda t} + c_2\xi_2 e^{\lambda t}......(5)$$

où ξ_1 et ξ_2 sont les vecteurs propres indépendants. Le rapport x_2/x_1 est indépendant de t, mais dépend des composantes de ξ_1 et ξ_2 et sur les constantes

c_1 et c_2 . Ainsi, chaque trajectoire se trouve sur une ligne droite passant par l'origine,voir la figure(2.1.2.4).

Le point critique est appelée **un nœud propre**



FIG(2 1.2.4) :λ <0

b) Un vecteur propre indépendant :La solution générale de l'équation (2)est :

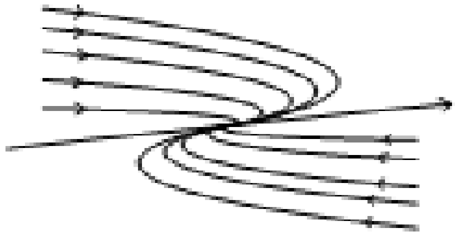
$$x = c_1\xi e^{\lambda t} + c_2(\xi t e^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t})......(6)$$

où ξest le vecteur propre et η est le vecteur propre généralisé associé à valeur propre répétée .

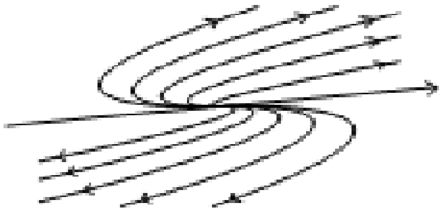
L'orientation des trajectoires dépend des positions relatives des ξ et η .

quand $t \longrightarrow \infty$: $\|x\| \longrightarrow 0$ si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$, $\|x\| \longrightarrow \infty$ si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$.

Le point critique est appelée **un nœud impropre,** voir la figure((2.1.2.5), (2.1.2.6)).



FIG(2.1.2.5) $\lambda < 0$



FIG(2.1.2.6) $\lambda > 0$

1.Les valeurs propres λ_1 ,λ_2 sont complexes : Soit $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ et $\beta > 0$

le système s'écrit

$$\begin{cases} x_0 = \alpha x - \beta y \\ y_0 = \beta x + \alpha y \end{cases}.$$

On pose $z(t) = x(t) + iy(t)$donc $z_0(t) = x_0 + iy_0 = (\alpha + i\beta)z(t)$.

La solution est donnée par

$$z(t) = z_0 e^{(\alpha+i\beta)t},$$

en cordonnées polaires ona $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}; z = re^{i\theta}$donc

$$\begin{cases} r = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta = \theta_0 + \beta t \end{cases}.$$

Alors il y a **une spirale logarithmique** si $\alpha \neq 0$ et **un cercle** si $\alpha = 0$ le point singulier est **un foyer** dans le premier cas et **un centre** dans le deuxième cas

(a) $\alpha < 0$ (b) $\alpha = 0$ (c) $\alpha > 0$

Bibliographie

[1] William E, Boyce, Richarde, Diprima,Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,WILEY,2009.

[2] J-P.Demailly, Annalyse Numérique est équations différentielles, EDP sciences,France, 2006.

[3] Robert Roussarie et Jean Roux, Des équations différentielles aux systèmes dynamiques I, décembre 2011.

[4] Léonard Todjihoude, calcule différentiel cours et exercice corrigés, France, 2006.

[5] R. Damchine, Equations différentielles L3 de Mathématiques, 2009-2010.