الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie **Département de Mathématique et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

Filière : Mathématique Fondamentale

Thème
Étude générale d'un Problème de transport classique

Préparé par :
- Fateh TIKOUDANE
- Mohammed DEHIMI
- Tahar BELHOUANE
- Athmane MERHOUM

Encadré par : Wahida FADEL
Grade : MA(B)

Année universitaire : 2013/2014

REMERCIMENTS

On voudrait profiter de cette apport unité pour adresser notre profonde Gratitude envers :

Dieu qui nous a donné la force et le courage pour continuer et a éclaircis Notre chemin et pour la réalisation de ce mémoire.

Ms Fadel Wahida son encadrement et son aide, ses directives Ainsi que ses conseils qui nous ont permis d'avancer dans la conception de Notre projet.

Enfin nous remercions toutes les profs, et toutes les personnes qui dépares ou De loin on contribués à l'élaboration de cette étude.

إهداء

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على أشرف المرسلين نبيه محمد صّلى الله عليه وسلم، وآله وصحبه أجمعين.

أمّا بعد :

أهدي هذا العمل إلى والدي الكريمين اللّذان سهرا على راحتي وإلى إخوتي وأرجوا لهم التوفيق والنجاح .

وأهدي هذا العمل إلى كل أصدقائي وزملائي، وإلى الأستاذ المحترم ميلاس، إلى كل الأساتذة الذين درست عندهم من الطور الإبتدائي إلى الطور الجامعي.

عثمان

بسم الله الرحمن الرحيم

إهداء

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على نبيه الصادق الأمين، وعلى آله وصحبه الغرّ الميامين، ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدّين،

أمّا بعد :

أهدي هذا العمل إلى والدي الكريمين وإخوتي وكل أقاربي، إلى الأصدقاء والزملاء، وأساتذتي في جميع أطوار مشواري الدراسي.

فاتح

بسم الله الرحمن الرحيم

إهداء

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين نبينا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين.

إلى من لا يمكن للكلمات أن توفي حقه، إلى من لا يمكن للأرقام أن تحصي فضائله:
إلى أغلى اسم في الوجود، إلى يد طالما أعطت ولم تطلب، إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم، إلى الذي كان سندي ودعمي في كل خطواتي، إلى الذي رباني فأحسن تربيتي، إلى الإنسان الذي لم ولن يكون له مثيل في الوجود أبي أطال الله في عمره.
إلى أعذب كلمة ينطقها اللسان، إلى منبع الحب والحنان، إلى التي تعبت وسهرت وأفاقت مبكرا، إلى من كان دعاؤها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي، إلى القلب الذي لا يمل العطاء، إلى أغلى إنسانة في الوجود أمي أطال الله في عمرها.
إلى من تقاسمنا نفس الشعور، نفس الحزن ونفس الفرح، إلى من أحبهم أكثر من روحي إخوتي وأخواتي.

إلى من أرى التفاؤل بأعينهن والسعادة في ضحكتهن إلى شعلة الذكاء والنور...إلى الوجه المفعم بالبراءة
إلى مرام*رحمة*رتاج.

إلى من أظهروا لي ما هو أجمل من الحياة وأنقى من الهواء ... إلى أخوالي وخالاتي ...إلى أعمامي وعماتي.

إلى الإخوة والأصدقاء والزملاء ...إلى من تحلوا بالإخاء وتميزوا بالوفاء والعطاء ...إلى ينابيع الصدق الصافي إلى من معهم سعدت برفقتهم في دروبي الحياة الحلوة والمرة ... عرفت كيف أجدهم وعلموني أن لا أضيعهم، إلى أصدقائي "فاتح، مسعود، خالد، فيصل، الطاهر، عبد الرحيم، عثمان، محمد، نجيب، عبد العزيز، عبد الله، سامي ..."إلى كل من نسيهم قلمي.
إلى جميع الأحباب والأقارب والجيران.

إلى جميع أساتذتي كل باسمه من الطور الابتدائي إلى الجامعي.

إلى من كانوا ملاذي وملجئي إلى من تذوقت معهم أجمل اللحظات، إلى من
جعلهم الله إخوتي في الله ومن أحببتهم بالله طلاب قسم الرياضيات والإعلام الآلي.
إلى كل من ساعدني في إنجاز هذا العمل...شكري الجزيل و امتناني.

محمد

بسم الله الرحمن الرحيم

إهداء

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين نبينا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين.

إلى من لا يمكن للكلمات أن توفي حقها، إلى من لا يمكن للأرقام أن تحصي فضائلها:
إلى أغلى اسم في الوجود، إلى يد طالما أعطت ولم تطلب، إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم، إلى الذي كان سندي ودعمي في كل خطواتي، إلى الذي رباني فأحسن تربيتي، إلى الإنسان الذي لم ولن يكون له مثيل في الوجود أبي أطال الله في عمره.
إلى أعذب كلمة ينطقها اللسان، إلى منبع الحب والحنان، إلى التي تعبت وسهرت وأفاقت مبكرا، إلى من كان دعاؤها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي، إلى القلب الذي لا يمل العطاء، إلى أغلى إنسانة في الوجود أمي أطال الله في عمرها.
إلى من تقاسمنا نفس الشعور، نفس الحزن ونفس الفرح، إلى من أحبهم أكثر من روحي إخوتي.

إلى من أرى التفاؤل بأعينهن والسعادة في ضحكتهن إلى شعلة الذكاء والنور...إلى الوجه المفعم بالبراءة ولمحبتهن أزهرت أيامي وتفتحت براعم الغد إلى بلهوان أمينة.

إلى من أظهروا لي ما هو أجمل من الحياة وأنقى من الهواء.

الى بلهوان رمضان رحمه الله.

إلى الإخوة والأصدقاء والزملاء ...إلى من تحلوا بالإخاء و تميزوا بالوفاء و العطاء ...إلى ينابيع الصدق الصافي إلى من معهم سعدت برفقتهم في دروبي الحياة الحلوة و المرة ... عرفت كيف أجدهم و علموني أن لا أضيعهم، إلى أصدقائي
"فاتح،محمد،خالد،فيصل،إسلام،عبدالرحيم،عثمان،نجيب، إبراهيم،عبد العزيز،عبد الله،شاكر،زكرياء،اسحاق،رضوان،..." إلى كل من نسيهم قلمي.
إلى جميع الأحباب والأقارب والجيران.

إلى جميع أساتذتي كل باسمه من الطور الابتدائي إلى الجامعي.

إلى من كانوا ملاذي و ملجئي إلى من تذوقت معهم أجمل اللحظات، إلى من
جعلهم الله إخوتي في الله و من أحببتهم بالله طلاب قسم الرياضيات و الإعلام الآلي.
إلى كل من ساعدني في إنجاز هذا العمل...شكري الجزيل و امتناني.

الطاهر

ملخص

في هذه المذكرة تناولنا عرض عام لمشكل النقل بدليلين، حيث قمنا بدراسة عموميات عن البرمجة الخطية تمكنا من خلالها من وضع الصيغة العامة للمشكل المدروس.

و تطرقنا بعدها إلى أهم طرق الحل المعروفة حاليا على غرار طريقة (Coin Nord-Ouest, Vogel, Russell) مرفقة بأمثلة توضيحية لكل طريقة.

Abstract

In this dissertation we addressed an overview of transportation problem with two indices, where we study the outs on the linear programming of which a general formulation of the problem considered.

And we talked to the most important methods of solution, similar method (Coin Nord-Ouest, Vogel, Russell) together with illustrative examples of each method.

Table des matières

Introduction Générale **2**

1 Programmation mathématique : généralités et outils de base **3**

1.1 Généralités 3

1.1.1 Notions fondamentales d'analyse convexe 3

1.1.2 Programmation mathématique 5

1.1.3 Programmation linéaire 7

1.1.4 Applications 8

2 Problème de transport à deux indices **10**

2.1 Position du problème 10

2.2 Tableau de transport 12

2.3 Résultats fondamentaux 12

2.4 Résolution de problème 14

2.5 Méthodes d'initialisation 14

2.5.1 **Méthode du Coin du Nord-Ouest** 16

2.5.2 **Méthode de Vogel** 19

2.5.3 **Méthode de Russell** 23

Conclusion Générale **27**

Bibliographie **27**

Introduction

Le problème de transport, souvent observé dans différents domaines de l'industrie, est introduit pour la première fois par Hitchcock en 1941, traité et étudié en détail par Koopmans en 1947, Kantorovitch et Savourine en 1949 et puis Dantzig en 1951. Le problème de transport à deux indices largement étudié dans la littérature, est un modèle générique pour les problèmes d'affectation et peut être formulé comme un programme linéaire avec une structure spéciale des contraintes. Dans sa forme classique, le problème de transport consiste à minimiser le coût de transport des marchandises disponibles en m sources (nœuds des disponibilités) et demandés pour n destinations (nœuds des demandes). Ensuite, l'étude est prolongée au problème à un nombre d'indices supérieur à deux. Depuis les années soixante, plusieurs études ont été publiées sur le problème de transport à trois indices et plus général, sur celui à indices multiples sans capacités.

Déterminer une solution initiale est un pas important dans la résolution du problème de transport, c'est pour cette raison que les chercheurs se sont intéressés à trouver une méthode d'initialisation permettant de trouver une solution la plus près possible de la solution optimale. Dans ce travail, on va présenter trois méthodes les plus connues a ce jour pour trouver une solution initiale d'un problème de transport à deux indices (classique).

Ce mémoire est composé de deux chapitres.

Dans le premier, nous rappelons des résultats fondamentaux d'analyse convexe et de la programmation mathématique et particulièrement celle linéaire.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation du problème de transport à deux indices et contient aussi la description de quelques méthodes d'initialisation les plus connues (Coin Nord-Ouest, Vogel, Russel) avec des exemples correspond.

Chapitre 1

Programmation mathématique : généralités et outils de base

Ce chapitre comprend des résultats fondamentaux d'analyse convexe et de la programmation mathématique qui seront utilisé ultérieurement.

1.1 Généralités

1.1.1 Notions fondamentales d'analyse convexe

La notion de convexité est un outil mathématique important pour l'étude théorique des problèmes d'optimisation. On présente dans ce paragraphe quelques notions d'analyse convexe d'usage courant.

• Un sous ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si :

$$(1-\lambda)\,x+\lambda y \in C,\ \forall\ x,\ \ y \in C,\ \forall \lambda \in [0,1]\,.$$

Dans le présent paragraphe, on considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$, avec
$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\ \ +\infty\}$.

• L' intersection de tous les ensembles convexes contenant un sous ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est appelée : enveloppe convexe de S, on la note $conv\,(S)$ ou $co\,(S)$: c'est le plus petit convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant S.

• L'enveloppe convexe d'un sous ensemble fini de $\mathbb{R}^n$, $conv\left(\left\{x_i,\ \ i=\overline{1,k+1}\right\}\right)$ est appelé : polytôpe. Si de plus, les vecteurs $\left\{x_i - x_1,\ \ i=\overline{2,k+1}\right\}$ sont linéairement indépendants, alors $conv(\left\{x_i, i=\overline{1,k+1}\right\})$ est appelé :

un k simplexe de sommets $x_1, ..., x_{k+1}$.

• Un polytôpe convexe est dit polyèdre.

• L'ensemble :

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) < +\infty\}.$$

Est dit domaine effectif de f.

• La fonction f est dite propre si :

$$dom(f) \neq \varnothing \ \text{ et } \ f(x) > +\infty, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Dans le cas contraire on dit que f est impropre.

• Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$S_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \leq \alpha\}.$$

Est appelé ensemble de niveau α ou section (inferieur large) de f.

• L'ensemble :

$$S_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) < \alpha\}.$$

Est dit de niveau α inférieur strict de f.

• La fonction f est dite convexe si :

$$f((1-\lambda)\,x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\,f(x) + \lambda f(y), \forall\, x, \ y \in \mathbb{R}^n, \forall\, \lambda \in [0,1]$$

Par convention, on prend $\infty - \infty = +\infty$.

On montre que f est convexe si et seulement si pour tout entier $m > 0$ et pour tout $\lambda_i \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ f\ (x_i), \forall\, x_i \in \mathbb{R}^n$$

• La fonction f est dite strictement convexe si :

$$f((1-\lambda)\,x + \lambda y) < (1-\lambda)\ f\ (x) + \lambda\ f\ (y), \forall\, x, \ y \in \mathbb{R}^n, x \neq y, \forall\, \lambda \in \,]0,1[\,.$$

• Etant donnée une fonction $g : C \to \mathbb{R}^n$ avec $C \subset \mathbb{R}^n$, prenons

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & si\ x \in C \\ +\infty, & ailleurs \end{cases}$$

On a alors $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la fonction h, s'appelle prolongement ou étendue de g sur $\mathbb{R}^n$.

Si C est convexe alors, la fonction g est convexe sur C si et seulement si son prolongement h est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

1.1.2 Programmation mathématique

Définition 1.1.1 *:*

Etant donné un domaine $C \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$;

• Un problème de programmation mathématique consiste à minimiser (ou maximiser) f sur C.

Autrement dit, il s'agit de trouver un point $x^* \in C$ (si un tel point existe) pour lequel : $f(x) \geq f(x^*)$ pour tout $x \in C$ (le cas de maximisation, $f(x) \leq f(x^*)$ pour tout $x \in C$).

• Un problème de programmation mathématique (de minimisation) est formulé comme suit :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases} \qquad (P)$$

• Tout point de C est appelé solution réalisable de (P).

• On appelle solution optimale globale de (P) toute solution réalisable x^* réalisant le minimum de f sur C. L'ensemble des solutions optimales globales est noté :

$$\arg\min_{C} f(x)$$

• On dit que x^* est une solution optimale local de (P) s'il existe un voisinage V de x^* tel que $f(x) \leq f(x^*)$, $\forall\ x \in V$.

L'ensemble des solutions optimales locales est noté par loc $\min_{C} f(x)$.

Nous avons toujours :

$$\arg\min_{C} f(x) \subseteq loc \min_{C} f(x)$$

• Soit $x \in C$, on dit que $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction admissible s'il existe $\alpha > 0$ tel que : $x + td \in C$, $\forall\ t \in [0, \alpha]$.

Principaux résultats d'existence et d'unicité :

Théorème 1.1.2 *: **(Existence)*** [10]

Si f est propre, continue, coercive (i. e $f(x) \to +\infty$ lorsque $\| x \| \to \infty$ avec $x \in C$) alors (P) admet où moins une solution optimale.

Théorème 1.1.3 *: **(Unicité)*** [10]

Si de plus f est strictement convexe alors (P) admet une solution optimale unique.

1.1.3 Programmation linéaire

Un programme linéaire est un programme mathématique dans lequel :

1- La fonction objective f est linéaire.

2- Le domaine C est défini par un ensemble des équations affines.

Un programme linéaire (PL) s'exprime de façon générique sous la forme

$$\min \left[c^\top x \ : \ x \geq 0, \ \ Ax = b\right] \qquad (P_0)$$

avec c, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Remarque 1.1.4 *:*

Tout problème de minimisation peut être transformé en un problème équivalent de maximisation.

Définition 1.1.5 *:*

Etant donné un programme linéaire de la forme (P_0)*.*

- On appelle solution tout vecteur x *tel que* $Ax = b$ *et solution réalisable (admissible) tout vecteur* x *tel que* $Ax = b$, $x \geq 0$.

- Supposons que $rang(A) = m$*, on appelle une base* B*, toute sous matrice carrée régulière d'ordre* m *extraite de* A*.*

Corollaire 1.1.6 *:*

- On associe à toute base B*, les décompositions* $A = [B/N]$ *et* $x = \binom{x_B}{x_N}$ *et* $c = \binom{c_B}{c_N}$*. Si l'on fixe le vecteur* x_N *à zéro, alors le vecteur* $x = \binom{B^{-1}b}{0}$ *vérifiant* $Ax = b$ *est dit solution de base.*

Définition 1.1.7 *:*

- Une solution de base est dite réalisable si $x_B \geq 0$.

Définition 1.1.8 *:*

- Les composantes du vecteur x_B *sont appelées variables de base et les composantes du vecteur* x_N *sont appelées variables hors-base.*

- Une solution de base est dite dégénérée si certaines de ses variables de base sont nulles.

- Une solution de base est dite optimale si elle rend la fonction objectif $c^\top x$ *optimale.*

1.1.4 Applications

La programmation linéaire intervient dans de nombreux problèmes concrets liés aux activités humaines (optimisation d'un bénéfice de vente de production soumise à des contraintes linéaires de toutes sorte **:**

Contraintes de stocks, de temps de fabrication, de budget, de personnel ..., minimisation des coûts de transport dans la distribution de produit).

1) **Problème de transport à deux indices**

C'est en 1941 que Frank L. Hitchcock a formulé pour la première fois le problème de transport, qui consiste à minimiser le coût total de transport d'un plan d'expédition.

On peut d'écrire un problème de transport de la façon suivante :

Une quantité donnée d'un produit uniforme est disponible à chacune des origines.

Il s'agit d'envoyer des quantités spécifiées à chacune des destinations. On connait le coût unitaire de transport des origines vers les destinations. En supposant qu'il est possible d'expédier des produits depuis n'importe qu'elle origine vers n'importe quelle destination, il s'agit de minimiser le coût total de transport des origines vers les destinations ; nous supposons qu'il y a m origines et n destinations, la variable x_{ij} représentera le nombre d'unités expédiées de l'origine i vers la destination j, $x_{ij} \geq 0$ pour tout i et j.

Pour chaque origine i donnée, il y a n valeurs de j possibles ; cela implique qu'il y a $(m \times n)$ x_{ij} différents.

On note par a_i la quantité disponible du produit à l'origine i, et par b_j la quantité requise à la destination j.

Alors mathématiquement le problème de transport est formulé comme suit :

$$Minimiser\ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

sous les contraintes

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, ..., m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, ..., n.$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad \forall\ i,\ j.$$

2) **Le problème d'affectation :**

Le problème connu dans la littérature sous le nom de problème d'affectation est souvent présenté dans le cadre du scénario suivant ; n personnes doivent être affectées à n travaux, chaque personne doivent affecter un travail (ou une tâche) et un seul, le coût de formation de la i *ème* personne lorsqu'elle est affectée au j *ème* travail est c_{ij}.

Il s'agit d'affecter les personnes aux travaux de sorte que le coût total de formation soit minimum, ce problème peut se formuler comme un programme linéaire en variables bivalentes en posant :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la } i \text{ } \grave{e}me \text{ personne est affectée à la } j \text{ } \grave{e}me \text{ tâche.} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On à alors :

$$Minimiser\ Z_n = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ i = 1, 2, ..., m.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ \ j = 1, 2, ..., n.$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Les n premières contraintes du problème expriment que chaque tâche est prise en charge par un personne exactement ; les n contraintes suivantes expriment que chaque personne s'est vue affecter à un travail.

Chapitre 2

Problème de transport à deux indices

Dans ce chapitre, on donne une présentation générale du problème de transport à deux indices à savoir : définitions, propriétés du problème, conditions de la réalisabilité, conditions d'optimalité et quelques méthodes d'initialisation pour le problème.

2.1 Position du problème

Le problème de transport à deux indices ($PT2$) est formulé comme suit :

$$
\begin{aligned}
&Minimiser\ Z_n = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
&\text{sous contraintes} \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ i = 1, ..., m. \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \ j = 1, ..., n. \\
&x_{ij} \geq 0,\ \textit{pour tout}\ i,\ j.
\end{aligned}
$$

Dans ce problème a_i, b_j et c_{ij} sont donnés et tels que pour tout $(i,\ j)$ on a $a_i > 0$, $b_j > 0$ et $c_{ij} \geq 0$.

Cette formulation est équivalente au programme linéaire suivant :

$$
\begin{aligned}
&\min\ Z = c^{\top}x \\
&s.\ c \\
&Ax = b \\
&x \geq 0
\end{aligned}
$$

avec

- $x = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{mn})^\top \in \mathbb{R}^N$.
- $c = (\ c_{11}, c_{12}, ..., c_{mn})^\top \in \mathbb{R}^N$.
- $b = (a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^M$.
- A est $M \times N$ matrice.
- $M = m + n$, $N = mn$.
- $Rang\ A = M + N - 1$.

Définition 2.1.1 *:*

• *Une solution réalisable x de $(PT2)$ est dite de base si les colonnes de la matrices A_x obtenue de A en gardant seulement les colonnes correspondant aux variables $x_{ij} > 0$ sont linéairement indépendantes.*

• *Une solution réalisable de base est dite non dégénérée si :*

$$rang(A_x) = rang(A)$$

• *Soit x une solution réalisable de base, le couple (i, j) tel que $x_{ij} > 0$ est appelé case intéressante, dans le contraire, (i, j) est dite non intéressante.*

2.2 Tableau de transport

Le tableau "T" de transport est par définition un tableau rectangulaire ayant m lignes ($i = 1, ..., m$) correspondant aux origines A_i et n colonnes ($j = 1, ..., n$) correspondant aux destinations B_j.

Chaque case (i, j) (l'intersection d'une ligne i et d'une colonne j) de T contient des quantités comme :

- Le coût unitaire c_{ij} de transport de A_i vers B_j.
- La valeur de la variable x_{ij}.

Le tableau T est en outre bordé par une colonne marginale contenant les disponibilités a_i ($i = 1, ..., m$) et une ligne marginale contenant les demandes b_j ($j = 1, ..., n$).

Exemple 2.2.1 *:*

$\mathbf{c}_{11}$	$\mathbf{c}_{12}$	$\mathbf{c}_{13}$	$\cdots$	$\mathbf{c}_{1n}$	a_1
$\mathbf{c}_{21}$	$\mathbf{c}_{22}$	$\mathbf{c}_{23}$	$\cdots$	$\mathbf{c}_{2n}$	a_2
$\mathbf{c}_{31}$	$\mathbf{c}_{11}$	$\mathbf{c}_{11}$	$\cdots$	$\mathbf{c}_{11}$	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{c}_{m1}$	$\mathbf{c}_{m2}$	$\mathbf{c}_{m1}$	$\cdots$	$\mathbf{c}_{mn}$	a_m
b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_n	

2.3 Résultats fondamentaux

Théorème 2.3.1 *: (Condition de réalisabilité)*
Le problème $(PT2)$ *admet une solution réalisable si et seulement si :*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Théorème 2.3.2 *: (Conditions d'optimalité)*
Soit x *une solution réalisable pour le problème* $(PT2)$*, alors* x *est optimale si et seulement s'il existe un vecteur.*

$$(u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n)^\top \in \mathbb{R}^M$$

Tel que :

$$\begin{aligned} u_i + v_j &\leq c_{ij} \quad pour \quad x_{ij} = 0 \\ &\quad et \\ u_i + v_j &= c_{ij} \quad pour \quad x_{ij} > 0 \end{aligned}$$

Exemple 2.3.3 *:*

Une fabrique de conserves expédie des caisses vers des dépôts. Nous voulons que le programme d'expédition des caisses minimise le coût de transport total des usines vers les dépôt. pour simplifier, nous supposerons qu' il y a deux usines 1 et 2 et trois dépôts A, B et C. les disponibilités en caisses dans les usines a_i et les besoins des dépôt b_j sont représentées dans le tableau 1.

a_i	b_j
350 caisses à l' usine 1 *550 caisses à l' usine 2*	*300 caisses au dépôt A* *300 caisses au dépôt B* *300 caisses au dépôt C*

Tableau 1 : disponibilités des uines

On voit tout de suite que la condition de réalisabilité est vérifiée, puisque :

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 900$$

Le coût d'expédition, par caisse, entre chaque usine est chaque dépôt est consigné dans le tableau 2 ci- dessous.

Origines	*Destinations*			*Offre*
	A	*B*	*C*	
1	*25*	*17*	*16*	*350*
2	*24*	*18*	*14*	*550*
Demandes	*300*	*300*	*300*	*900*

Tableau 2 : coûts d'éxpedition

Le problème consiste à déterminer le nombre de caisse que chacune des usines doit expédier vers chacun des dépôts de façon à ce que le coût de transport total soit le plus faible possible.

► *La fonction objectif à minimiser est :*

$$Min\ Z = 25x_{11} + 17x_{12} + 16x_{13} + 24x_{21} + 18x_{22} + 14x_{23}$$

▶ *Sous les contraintes :*

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 350 \qquad (\textit{Dues aux l'origines}) \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 550 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 300 \\ x_{12} + x_{22} &= 300 \qquad (\textit{Dues aux distinations}) \\ x_{13} + x_{23} &= 300 \end{aligned}$$

x_{ij} *est le nombre d' unités expédiées de l'origine* i *vers la destination* j. $x_{ij} \geq 0$, $\forall\ i,\ j$.

2.4 Résolution de problème

Pour trouver une solution optimale au problème de transport on commence par déterminer une solution réalisable et en suite on améliore cette solution jusqu'à l'obtention de la solution optimale, il est intéressant d'utiliser des méthodes d'initialisation qui donnent une solution très proche de la solution optimale, nous exposons brièvement quelques méthodes classique d'initialisation du problème de transport avant d'on proposer une nouvelle.

2.5 Méthodes d'initialisation

Les méthodes d'initialisation les plus connues sont toute basées sur le même principe décrit ci-dessous.

Étape 1 : Déterminer une case (i, j) de la grille désignée par la méthode utilisée.

Étape 2 : Comparer a_i et b_j et aller à (2.1), (2.2) ou (2.3) selon le cas.

2.1 : Si $a_i < b_j$:
$x_{ij} = a_i$, remplacer b_j par $b_j - x_{ij}$ et a_i par 0 et supprimer la ligne i.

2.2 : Si $a_i > b_j$:
$x_{ij} = b_j$, remplacer a_i par $a_i - x_{ij}$ et b_j par 0 et supprimer la colonne j.

2.3 : Si $a_i = b_j$:
Affecter $x_{ij} = a_i = b_j$ et poser $a_i = b_j = 0$, nous nous trouvons dans un cas dégénéré.

On supprime alors la ligne i, à moins qu'elle ne soit la seule ligne restante du tableau, auquel cas il faut supprimer la colonne j.

Étape 3 : Répéter l'algorithme sur le tableau réduit jusqu'à ce que tous les a_i soient 0.

Saturant une rangée à chaque étape, nous obtiendrons une solution d'au plus $m+n-1$ variables non nulles. Il y a m lignes et n colonnes qu'on sature l'une après l'autre, sauf lors de la dernière affectation où une ligne et une colonne sont saturées simultanément.

2.5.1 Méthode du Coin du Nord-Ouest

Certainement c'est la méthode la plus facile à mettre en œuvre et de complexité minimale, elle consiste à déterminer la variable de plus petit indice où il est possible d'affecter une quantité. Sa simplicité l'a rendue très populaire. Par contre, la solution trouvée n'a aucune raison d'être près de la solution optimale.

Notation 2.5.1 *:*

► ♣ *à gouche d'une ligne ou en haut d'une colonne pour montrer que cette ligne ou cette colonne a été éliminée.*

► ⊡ *pour montrer qu'une cellule* $(p;q)$ *fait partie de la base.*

Exemple 2.5.2 *:*

Nous repartons du tableau initial :

Origines	*Destinations*			*Offre*
	1	*2*	*3*	
1	*25*	*17*	*16*	*350*
2	*24*	*18*	*14*	*550*
Demande	*300*	*300*	*300*	*900*

Étape 1 : *le tableau restant se compose de deux lignes et de trois colonnes ; son coin nord-ouest est la cellule* $(1;1)$*,* x_{11} *entre donc dans la base.*

Étape 2 :

$$\begin{aligned} x_{11} &= \min\{a_1;b_1\} = \min\{350;300\} = 300 \\ a'_1 &= a_1 - x_{11} = 350 - 300 = 50 \\ b'_1 &= b_1 - x_{11} = 300 - 300 = 0 \end{aligned}$$

Étape 3 : $a'_1 = 50$ *et* $b'_1 = 0$*, on élimine donc la colonne 1.*

Étape 4 : Il *nous reste 2 lignes et 2 colonnes, nous n'avons donc pas terminé.*

Origines	*Destinations*			*Offre*
	1 ♣	*2*	*3*	
1	*25* ⊡ 300	*17*	*16*	*350* ⊡ 50
2	*24*	*18*	*14*	*550*
Demande	*300* 0	*300*	*300*	*900*

Tableau après la première itération

Étape 1 : *Le tableau restant se compose des lignes 1 et 2 ainsi que des colonnes 2 et 3 ; son coin nord-ouest est donc le* $(1;2)$.

Étape 2 :

$$\begin{aligned} x_{12} &= \min\{a_1; b_2\} = \min\{50; 300\} = 50 \\ a'_1 &= a_1 - x_{12} = 50 - 50 = 0 \\ b'_2 &= b_2 - x_{12} = 300 - 50 = 250 \end{aligned}$$

Étape 3 : $a'_1 = 0$ *et* $b'_2 = 250$, *on élimine donc la ligne 1.*

Étape 4 : *Il reste une ligne et deux colonnes, il faut donc reprendre la démarche à l'étape*(1) *afin d'opérer une troisième itération.*

Origines	*Destinations*			*Offre*
	1 ♣	*2*	*3*	
1 ♣	*25* ⊡ 300	*17* ⊡ 50	*16*	*350* 0
2	*24*	*18*	*14*	*550*
Demande	*300* 0	*300* *250*	*300*	*900*

Tableau après la deuxième itération

Étape 1 : *Le tableau est maintenant constitué des colonnes 2 et 3 et de la ligne 2, son coin nord-ouest est la cellule* $(2;2)$.

Étape 2 :

$$\begin{aligned} x_{22} &= \min\{a_2; b_2\} = \min\{550; 250\} = 250 \\ a'_1 &= a_2 - x_{22} = 550 - 250 = 300 \\ b'_2 &= b_2 - x_{22} = 250 - 250 = 0 \end{aligned}$$

Étape 3 : $a'_2 = 300$ *et* $b'_2 = 0$, *on élimine donc la colonne 2.*

Étape 4 : *Comme il reste une ligne et une colonne, une quatrième itération est nécessaire.*

Origines	*Destinations*						*Offre*	
	1	♣	*2*	♣	*3*			
1 ♣	*25*	⊡ 300	*17*	⊡ 50	*16*		*350*	0
2	*24*		*18*	⊡ 250	*14*		*550*	300
Demande	*300*	0	*300*	0	*300*		*900*	

Tableau après la troisième itération

Étape 1 : *Il ne reste que la ligne 2 et la colonne 3, donc le coin nord-ouest est la cellule* $(2;3)$.

Étape 2 :

$$\begin{aligned} x_{23} &= \min\{a_2; b_3\} = \min\{300; 300\} = 300 \\ a'_2 &= a_2 - x_{23} = 300 - 300 = 0 \\ b'_3 &= b_3 - x_{23} = 300 - 300 = 0 \end{aligned}$$

Étape 3 : $a'_2 = 0$ *et* $b'_3 = 0$, *la ligne 2 est la dernière ligne, on èlimine donc la colonne 3.*

Étape 4 : *Il ne reste que la ligne 2, la solution réalisable de base initiale est trouvée.*

Origines	*Destinations*						*Offre*	
	1	♣	*2*	♣	*3*	♣		
1 ♣	*25*	⊡ 300	*17*	⊡ 50	*16*		*350*	0
2	*24*		*18*	⊡ 250	*14*	⊡ 300	*550*	0
Demande	*300*	0	*300*	0	*300*	0	*900*	

Tableau après la quatrième itération

Nous pouvons calculer le coût de transport total de ce plan d'expédition :

$$Min\ Z = 25\,(300)\ + 17\,(50)\ + 18\,(250)\ + 14\,(300) = 17050$$

2.5.2 Méthode de Vogel

Cette méthode mise sur la minimisation d'un système de pénalités. On appelle la pénalité d'une rangée, la différence de coût entre la case de plus petit coût et celle du deuxième plus petit coût de la rangée.

Étape 1 : Détermination d'une case (i, j) de la grille.

1.1 : Évaluer la différence entre les deux plus petits coûts de chaque ligne et de chaque colonne (pénalité).

1.2 : Identifier la rangée correspondant à la plus grande pénalité.

1.2.1 : Si cette rangée est unique alors choisir la case (i, j) la moins coûteuse de cette rangée.

1.2.2 : Si la pénalité maximale est associée à plusieurs lignes ou colonnes alors, l'un ou l'autre des cas suivants se présente :

(a) Si le coût minimal d'une des lignes [ou colonne] concernées est aussi le coût minimal de sa colonne [ligne] alors choisir la case (i, j) ainsi désignée.

(b) Si aucun des coûts ne répond aux exigences décrites en (a), alors calculer les " pénalités secondes" des rangées touchées par la même pénalité maximale. La pénalité seconde d'une ligne (colonne) est donnée par la différence entre le deuxième plus petit coût de cette ligne (colonne) et le plus petit coût de la colonne (ligne) où apparaît ce coût, si, dans une des rangées, il existe plusieurs cases de coût égal au deuxième plus petit coût, alors calculer toute les pénalités secondes associées à ces cases. Choisir alors la case (i, j) de moindre coût dans la rangée pour laquelle la pénalité seconde prend la plus grand valeur.

Étape 2 et 3 : Ces étapes de la procédure d'initialisation sont effectuées en recalculant les pénalités à chaque itération.

Exemple 2.5.3 *:*

Origines	*Destinations*			*Offre*
	1	*2*	*3*	
1	*25*	*17*	*16*	*350*
2	*24*	*18*	*14*	*550*
Demande	*300*	*300*	*300*	*900*

Tableau initail

Étape 1 : *Pour la ligne 1, les deux coûts les plus pas sont 16 et 17, leur différence est 1.*

Pour la ligne 2, on prend 14 et 18, la différence est 4.

Pour la colonne 1, la différence est 1.

Pour la colonne 2, la différence est 1.

Pour la colonne 3, la différence est 2.

La différence maximale est celle de la ligne 2 (elle est égale à 4), on cherche donc sur la ligne 2 quel est coût minimal. Il s'agit de 14, c_{23}.

Alors $x_{pq} = x_{23}$.

Étape 2 :

$$\begin{aligned} x_{23} &= \min\{a_2; b_3\} = \min\{550; 300\} = 300 \\ a'_2 &= a_2 - x_{23} = 550 - 300 = 250 \\ b'_3 &= b_3 - x_{23} = 300 - 300 = 0 \end{aligned}$$

Étape 3 : $a'_2 = 250$ *et* $b'_3 = 0$, *il faut donc éliminer la colonne 3.*

Étape 4 : *Il reste deux lignes (1 et 2) et deux colonnes (1 et 2), il faut donc choisir un nouveau* x_{pq} *qui entrera à son tour dans la solution réalisable de base initiale.*

Origines	*Destinations*			*Offre*	
	1	*2*	*3* ♣		
1	*25*	*17*	*16*	*350*	
2	*24*	*18*	*14* ⊡ 300	*550*	250
Demande	*300*	*300*	*300* 0	*900*	

Tableau après la première itération

Raprenons donc nos calculs à l'étape (1) *avec un tableau réduit aux lignes 1 et 2 et aux colonnes 1 et 2.*

Étape 1 : *La différence maximale est obtenue pour la ligne 1 ; elle est égale à 8. Le coût minimum de cette ligne est 17, celui de la cellule* $(1;2)$ *; on va donc initialiser* x_{12}*.*

Étape 2 :

$$\begin{aligned} x_{12} &= \min\{a_1; b_2\} = \min\{350; 300\} = 300 \\ a'_1 &= a_1 - x_{12} = 350 - 300 = 50 \\ b'_2 &= b_2 - x_{12} = 300 - 300 = 0 \end{aligned}$$

Origines	*Destinations*				*Offre*	
	1	*2* ♣		*3* ♣		
1	*25*	*17*	⊡ 300	*16*	*350*	50
2	*24*	*18*		*14*	⊡ 300	*550*	250
Demande	*300*	*300*	0	*300*	0	*900*	

Tableau après la deuxième itération

Étape 3 : $a'_1 = 50$ *et* $b'_2 = 0$*, il faut donc éliminer la colonne 2.*

Étape 4 : *comme il reste deux lignes et une colonne, nous n'avons pas terminé, on cherche alors le troisième* x_{pq} *à entrer dans la base.*

On revient à l'étape 1 pour la troisième itération.

Étape 1 : $x_{pq} = x_{11}$ *entre dans la base, car la différence de la première ligne est 25, celle de la deuxième ligne 24 et celle de la première colonne 1.*

Étape 2 :

$$\begin{aligned} x_{11} &= \min\{a_1; b_1\} = \min\{50; 300\} = 50 \\ a'_1 &= a_1 - x_{11} = 50 - 50 = 0 \\ b'_1 &= b_2 - x_{11} = 300 - 50 = 250 \end{aligned}$$

Étape 3 : $a'_1 = 0$ *et* $b'_1 = 250$*, on élimine donc la ligne 1.*

Étape 4 : *Il reste la ligne 2 et la colonne 1.*

Origines	*Destinations*						*Offre*	
	1		*2*	♣	*3*	♣		
1 ♣	*25*	⊡ 50	*17*	⊡ 300	*16*		*350*	0
2	*24*		*18*		*14*	⊡ 300	*550*	250
Demande	*300*	250	*300*	0	*300*	0	*900*	

Tableau après la troisième itération

On revient à l'étape 1 pour la quatrième itération .

Étape 1 : *Il ne reste que la cellule* $(2;1)$ *qui se trouve à la fois sur une ligne et une colonne non-éliminées.*

Étape 2 :

$$\begin{aligned} x_{21} &= \min\{a_2; b_1\} = \min\{250; 250\} = 250 \\ a'_2 &= a_2 - x_{21} = 250 - 250 = 0 \\ b'_1 &= b_1 - x_{21} = 250 - 250 = 0 \end{aligned}$$

Étape 3 *:* $a'_2 = 0$ *et* $b'_1 = 0$*, on élimine donc la colonne 1, puisque la ligne 2 est la dernière des lignes.*

Étape 4 : *Il reste une ligne* (2)*, nous avons donc terminé.*

Origines	*Destinations*						*Offre*	
	1	♣	*2*	♣	*3*	♣		
1 ♣	*25*	⊡ 50	*17*	⊡ 300	*16*		*350*	0
2	*24*	⊡ 250	*18*		*14*	⊡ 300	*550*	0
Demande	*300*	0	*300*	0	*300*	0	*900*	

Tableau après la dernière itération

Nous pouvons maintenant calculer le coût de transport total de ce plan d'expédition :

$$\begin{aligned} \textit{Min } Z &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ &= 25\,(50) + 17\,(300) + 24\,(250) + 14\,(300) = 16550 \end{aligned}$$

2.5.3 Méthode de Russell

Cette méthode repose sur une comparaison des programmes primal et dual. Elle commence par estimer les u_i et v_j en prenant respectivement le maximum des coûts pour chaque origine i et le maximum des coûts pour chaque destination j et ce pour tout i et tout j. Ensuite, la méthode calcule un coût réduit pour chacune des cases en soustrayant de son coût initial, la valeur des u_i et v_j correspondant.

Étape 1 : Détermination d'une case (i, j) de la grille.

1.1 : Pour chaque ligne i non saturée, calculer $u_i = \max_j c_{ij}$, $i = \overline{1, m}$.

1.2 : Pour chaque colonne j non saturée, calculer $v_j = \max_i c_{ij}$, $j = \overline{1, n}$.

1.3 : Calculer $c^*_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$.

1.4 : Choisir la case de moindre coût réduit c^*_{ij}. S'il y a "égalité, choisir la case de moindre coût c_{ij} et, s'il y a nouveau égalité, choisir celle dont le $\min\{a_i; b_j\}$ est le plus grand.

Étape 2 et 3 : Ces étapes de la procédure d'initialisation sont effectuées en recalculant les u_i, v_j et c^*_{ij} à chaque itération.

Exemple 2.5.4 *:*

Origines		*Destinations*		*Offre*
	1	*2*	*3*	
1	*25*	*17*	*16*	*350*
2	*24*	*18*	*14*	*550*
Demande	*300*	*300*	*300*	*900*

Tableau initiale

Étape 1 : *Détermination d'une case (i, j) de la grille.*

1.1 : *Pour chaque ligne i non saturée, calculer :*

$u_1 = \max_j c_{1j} = 25$

$u_2 = \max_j c_{2j} = 24$

1.2 : *Pour chaque ligne i non saturée, calculer :*

$v_1 = \max_i c_{i1} = 25$

$v_2 = \max_i c_{i2} = 18$

$v_3 = \max_i c_{i3} = 16$

Origines	*Distinations*				*Offre*
	1	*2*	*3*	u_i	
1	*25*	*17*	*16*	*25*	*350*
2	*24*	*18*	*14*	*24*	*550*
v_j	*25*	*18*	*16*		
Demande	*300*	*300*	*300*		*900*

Tableau après la première itération

1.3 : *Calculer* $c^*_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

$c^*_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 25 - 25 - 25 = -25$

$c^*_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 17 - 25 - 18 = -26$

$c^*_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 16 - 25 - 16 = -25$

$c^*_{21} = c_{_{21}} - u_2 - v_1 = 24 - 24 - 25 = -25$

$c^*_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 18 - 24 - 18 = -24$

$c^*_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 14 - 24 - 16 = -26$

Origines	*Destinations*			*Offre*
	1	*2*	*3*	
1	*-25*	*-26*	*-25*	*350*
2	*-25*	*-24*	*-26*	*550*
Demande	*300*	*300*	*300*	*900*

Tableau après la deuxième itération

1.4 : *Choisir la case de moindre coût* c^*_{ij}.

$c^*_{23} = -26$

$x_{23} = \min\{a_2; b_3\} = \min\{350; 300\} = 300$

$a'_2 = a_2 - x_{23} = 550 - 300 = 250$

$b'_3 = b_3 - x_{23} = 300 - 300 = 0$

Origines	*Destinations*				*Offre*	
	1	*2*	*3*	♣		
1	*-25*	*-26*	*-25*		*350*	
2	*-25*	*-24*	*-26*	⊡ 300	*550*	250
Demande	*300*	*300*	*300*	0	*900*	

Tableau après la troisième itération

Étape 2 : *Il ne reste deux lignes et deux colonnes.*

$c_{12}^{*} = -26$

$x_{12} = \min\{a_1; b_2\} = \min\{350; 300\} = 300$

$a_1^{'} = a_1 - x_{22} = 350 - 300 = 50$

$b_2^{'} = b_2 - x_{22} = 300 - 300 = 0$

Origines	*Destinations*				*Offre*	
	1	*2* ♣		*3* ♣		
1	*-25*	*-26*	⊡ 300	*-25*	*350*	50
2	*-25*	*-24*		*-26*	⊡ 300	*550*	250
Demande	*300*	*300*	0	*300*	0	*900*	

Tableau après la quatrième itération

Étape 3 : *Il ne reste deux lignes et une colonne.*

$c_{21}^{*} = -25$

$x_{21} = \min\{a_2; b_1\} = \min\{250; 300\} = 250$

$a_2^{'} = a_2 - x_{21} = 250 - 250 = 0$

$b_1^{'} = b_1 - x_{21} = 300 - 250 = 50$

Origines	*Destinations*				*Offre*	
	1	*2* ♣		*3* ♣		
1	*-25*	*-26*	⊡ 300	*-25*	*350*	50
2 ♣	*-25*	⊡ 250	*-24*	*-26*	⊡ 300	*550*	0
Demande	*300*	50	*300*	0	*300*	0	*900*	

Tableau après la cinqième itération

Étape 4 : *Il ne reste une ligne et une colonne.*

$c_{11}^{*} = -25$

$x_{11} = \min\{a_1; b_1\} = \min\{50; 50\} = 50$

$a_1^{'} = a_1 - x_{11} = 50 - 50 = 0$

$b_1^{'} = b_1 - x_{11} = 50 - 50 = 0$

Origines	*Destinations*						*Offre*	
	1	♣	*2*	♣	*3*	♣		
1	*-25*	⊡ 50	*-26*	⊡ 300	*-25*		*350*	0
2 ♣	*-25*	⊡ 250	*-24*		*-26*	⊡ 300	*550*	0
Demande	*300*	0	*300*	0	*300*	0	*900*	

Tableau après la sixième itération

Origines	*Destinations*						*Offre*	
	1	♣	*2*	♣	*3*	♣		
1	*25*	⊡ 50	*17*	⊡ 300	*16*		*350*	0
2 ♣	*24*	⊡ 250	*18*		*14*	⊡ 300	*550*	0
Demande	*300*	0	*300*	0	*300*	0	*900*	

Tableau aprés la dernière itération

Nous pouvons maintenant calculer le coût de transport total de ce plan d'expédition :

$$\begin{aligned} Min\ \ Z &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\ &= 25\,(50) + 17\,(300) + 24\,(250) + 14\,(300) = 16550 \end{aligned}$$

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une étude générale d'un problème de transport classique.

En présentant des résultats d'analyse convexe et du programmation mathématique, on a vu aussi la formule d'un problème de transport, et essentilement quelques méthodes de résolution de ce dernier problème avec des exemples correspond.

Bibliographie

[1] M. Bergounioux, *Optimisation et contrôle des système linéaires*, Dunod, Paris, (2001).

[2] J.F. Bonnans, J.C.Gilbert, C. Lemaréchal, C. sagastizabal, *Méthode numériques d'optimisation*, France (1995).

[3] F. Dubeau and O. M. Guèye, Une nouvelle méthode d'initialisation pour le problème de transport. *RAIRO-Oper. Res.* 42, pp. 389–400, (2008).

[4] J.B Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I : fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, (1993).

[5] A. Keraghel, *Programmation mathématique différentiable*, Paris 2010.

[6] A. Keraghel, *Analyse convexe : Théorie fondamentale et exercices*, Editions Dar El'houda Ain M'lila, Algérie, (2001).

[7] M. Minoux, *Programmation mathématique : Théorie et Algorithmes*, *T1 et T2,* Dunod, (1983).

[8] R.T. Rockafellar, *Convex analysis*, published by Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey 08540.

[9] M. Sakharovitch, *Graphe et programmation linéaire*, Hermann, Paris, (1984).

[10] M. Simonard, *programmation linéaire*, Dunod Paris T1 et T2, (1972).

[11] R. Zitouni, *Etude qualitative de modèle de transport et localisation*, Thèse de doctorat de Mathématique Appliquées, Université Farhat Abbas, Sétif, (2007).

[12] R. zitouni and A. keraghel, Resolution of the capacitated transportation problem with four subscripts, Kybernetes, 32, 9/10, pp. 1450-1463, (2003) .